4/1/2021

Zeros of polynomials – Horner's method

עדן דדון – 207279183

אביחי ממן – 205506413

נופר אלבז – 316580562

דודי ביטון – 314963141

תוכן עניינים

רקע היסטורי

מראשית ההיסטוריה היה את הצורך לפתירת פולינומים, ניתן לראות זאת כבר במאה ה- 11-13 בעיקר בסין כאשר ניסו לספק פתרון לבעיה הפולינומית מתמתמטיקאים כגון: Chia Hsien, Liu I, Ch'in Kiu-Shao, Chu Shf-kie.

בשנים 1280-1303 פיתח Chu Shf-kie את האלגוריתם הראשון למציאת אפסי הפולינום אך אלגוריתם זה היה מוגבל עד מעלה 14.

אלגוריתם זה הומצא מחדש על ידי Paulo Ruffini בשנת 1804 ומאוחר יותר על ידי וויליאם ג'ורג הורנר (שיטה זו נקראת על שמו) אשר הציג לראשונה את האלגוריתם שלו למציאת שורשים בשנת 1819.

הורנר לא היה מתמטיקאי מחקר גדול, אך היה סטודנט ידוע לאלגברה, והברק שלו היה יכולת להמציא דרכים מסודרות ויעילות של חישוב אלגברי.

שיטת החישוב שלו הייתה ועדיין אלגנטית, מה שגרם לה להישאר עד היום ובנוסף לשאת את שמו.

המניע המקורי לפיתוח האלגוריתם היה לייצר שיטה סיסטמתית לפתרון פולינומים מסדר גבוה. כפי שציינו מקודם השיטות הקודמות הצליחו רק למקרים ספציפיים כאשר הפולינום היה מסדר נמוך (עד 14) כאשר פתרון של משוואה מסדר גבוה יותר היה מתיש עד בלתי פתיר. שיטה זו מאפשרת אופן מאורגן ומסודר לקינון הפולינום כך שגם פולינומים מסדר גבוה יהיו ניתנים לפתרון.

דיון מתמטי

תצורת הפולינום ממעלה n היא: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, כאשר a_i הם קבועים וגם $a_n \neq 0$.

לפי משפט 2.16 (בספר הקורס) משפט יסוד האלגברה:

אם $P(x)$ הוא פולינום ממעלה $n \geq 1$ עם מקדמים השייכים ל R או לC (אמיתיים או מורכבים) אז עבור $P(x) = 0$ קיים לפחות שורש אחד (יכול להיות מורכב).

כתוצאה ממשפט 2.16 ניתן להסיק את המסקנה הבאה: המעלה של הפולינום שווה לכמות השורשים שלו בתנאי שהשורשים אינם שונים אחד מהשני.

כמו כן אם $P(x)$ פולינום ממעלה $n \geq 1$ אזי קיימים קבועים ייחודיים (יכולים להיות מורכבים) $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ובנוסף קיימים שלמים חיוביים וייחודיים $m_1, m_2, \cdots, m_k$ כך ש- $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$.

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k}$$

השיטה של הורנר:

השיטה של הורנר היא טכניקה להערכת פולינומים במהירות.

נצטרך *n* מכפלות ו-*n* חיבורים על מנת לחשב את $P(x_0)$.

קיים פולינום כללי מסדר *n*:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

נגדיר:

$b_n = a_n$ וגם $b_k = a_k + b_{k+1}x_0$ עבור כל *k=n-1, n-2,...,1,0*

$$b_0 = P(x_0)$$

בנוסף אם:

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1$$

Q(x) מהווה את החלק המקונן מ- *P(x)* לפי הנתונים שהגדרנו לפני כן.

ואז מתקבל הפולינום המקונן:

$$P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$$

הוכחה לשיטה של הורנר (באמצעות הגדרת *Q(x)*):

$$(x-x_0)Q(x)+b_0 \;=$$

נציב את הערך הפולינומי של *Q(x)*:

$$(x-x_0)(b_nx^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\cdots+b_2x+b_1)\;+b_0\;=$$

נבצע פתיחת סוגריים ע"י הכפלה:

$$(b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_2x^2+b_1x)-(b_nx_0x^{n-1}+\cdots+b_2x_0x+b_1x_0)+b_0\;=$$

נבצע פתיחת סוגריים ע"י חיסור ונוציא גורם משותף:

$$b_nx^n\;+\;(b_{n-1}\;-\;b_nx_0)x^{n-1}+\cdots+(b_1\;-\;b_2x_0)x\;+\;(b_0\;-\;b_1x_0)$$

ולכן לפי ההשערה:

$b_k-b_{k+1}x_0=a_k$ וגם $b_n=a_n$

ולכן:

$P(x_0)=\;b_0$ וגם $(x-x_0)Q(x)+b_0=P(x)$

כנדרש.

הערות חשובות:

1. $P'(x_0)=Q(x_0)$, כאשר ניתן לחשב זאת באמצעות שיטת הורנר לפי *n-1* מכפלות ו- *n-1* חיבורים.

2. השיטה של הורנר משלבת טכניקת קינון של ניוטון מפני שפולינומים צריכים תמיד לבוא לידי ביטוי בצורה מקוננת לפני ביצוע הערכה, <u>מכיוון שצורה זו ממזערת את מספר החישובים האריתמטיים</u>.

$$\begin{aligned}P(x) &= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\\ &= (a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1)x+a_0\\ &= ((a_nx^{n-2}+a_{n-1}x^{n-3}+\cdots)x+a_1)x+a_0\\ &= \underbrace{(\ldots((}_{n-1}\underbrace{a_nx+a_{n-1}}_{b_{n-1}})x+\cdots)x+a_1)x+a_0\end{aligned}$$

נראה דוגמאות:

נשתמש בשיטת הורנר על לפתור את הפולינום הבא:

$$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4 \text{ כאשר } x_0 = -2$$

ראשית נבנה טבלה, עבור בעיה זו הטבלה תיראה כך:

נציב את

	Coefficient of x^4	Coefficient of x^3	Coefficient of x^2	Coefficient of x	Constant term
$x_0 = -2$	$a_4 = 2$	$a_3 = 0$	$a_2 = -3$	$a_1 = 3$	$a_0 = -4$
		$b_4x_0 = -4$	$b_3x_0 = 8$	$b_2x_0 = -10$	$b_1x_0 = 14$
	$b_4 = 2$	$b_3 = -4$	$b_2 = 5$	$b_1 = -7$	$b_0 = 10$

הנתונים המתקבלים מהטבלה בנוסחה אשר הוכחנו מעלה ונקבל:

$$P(x) = (x+2)(2x^3 - 4x^2 + 5x - 7) + 10$$

כפי שהוכחנו למעלה, ניתן לראות כי:

$$P(-2) = b_0 = 10$$

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 =$$
$$\Big(\big((a_4x + a_3)x + a_2\big)x + a_1\Big)x + a_0$$

בנוסף, דוגמה ויזואלית להמחשת הנכונות:

- $p(x) = x^5 - 8x^4 - 72x^3 + 382x^2 + 727x - 2310$
- $p(x) = -2310 + x\Bigg(727 + x\bigg(382 + x\Big(-72 + x\big(-8 + x(1)\big)\Big)\bigg)\Bigg)$
- Find $p(3)$
- $p(3) = -2310 + 3\Bigg(727 + 3\bigg(382 + 3\Big(-72 + 3\big(-8 + 3(1)\big)\Big)\bigg)\Bigg)$
- $p(3) = -2310 + 3\bigg(727 + 3\Big(382 + 3\big(-72 + 3(-5)\big)\Big)\bigg)$
- $p(3) = -2310 + 3\Big(727 + 3\big(382 + 3(-87)\big)\Big)$
- $p(3) = -2310 + 3\big(727 + 3(121)\big)$
- $p(3) = -2310 + 3(1090) = 960$

האלגוריתם:

To evaluate the polynomial

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_0)Q(x) + b_0$$

and its derivative at x_0:

INPUT degree n; coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$; x_0.

OUTPUT $y = P(x_0)$; $z = P'(x_0)$.

Step 1 Set $y = a_n$; (*Compute b_n for P.*)
$z = a_n$. (*Compute b_{n-1} for Q.*)

Step 2 For $j = n-1, n-2, \ldots, 1$
set $y = x_0 y + a_j$; (*Compute b_j for P.*)
$z = x_0 z + y$. (*Compute b_{j-1} for Q.*)

Step 3 Set $y = x_0 y + a_0$. (*Compute b_0 for P.*)

Step 4 OUTPUT (y, z);
STOP.

הסבר האלגוריתם:

קלט: המעלה של הפולינום n, מקדמי הפולינום וה-x_0 עבורו נרצה למצוא את ערכי הפולינום.

פלט: ערך הפולינום עבור ה-x_0 המבוקש.

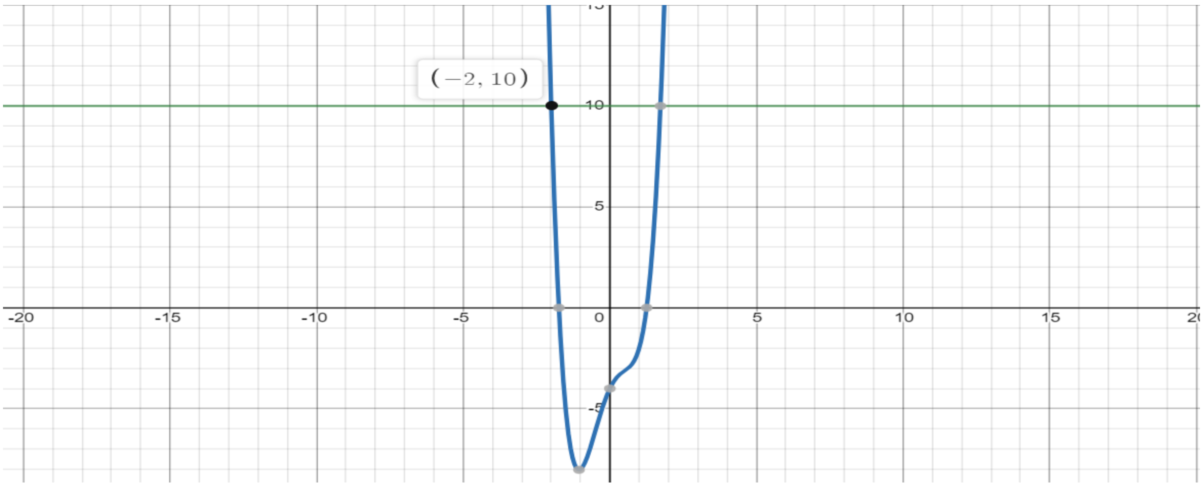
תחילה, נשמור במשתנים y ו- z את המקדם הרלוונטי מ- P (עפ"י המקדם של החזקה הגבוהה ביותר).

לאחר מכן נרוץ בלולאה לפי גודל החזקה ונגדיר את b_j בסדר יורד (כך שבכל איטרציה y מחזיק את b_j) עד אשר נגיע ל- b_0 אשר מהווה את ערך הפולינום עבור x_0 המתקבל.

תוצאות

פולינום / קישורים	$P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ $x_0 = -2$
יישום שלנו	10
יישום חיצוני	10
Desmos	10
ספר הקורס - ע"מ 93 (Example 2)	10

המחשה ויזואלית:



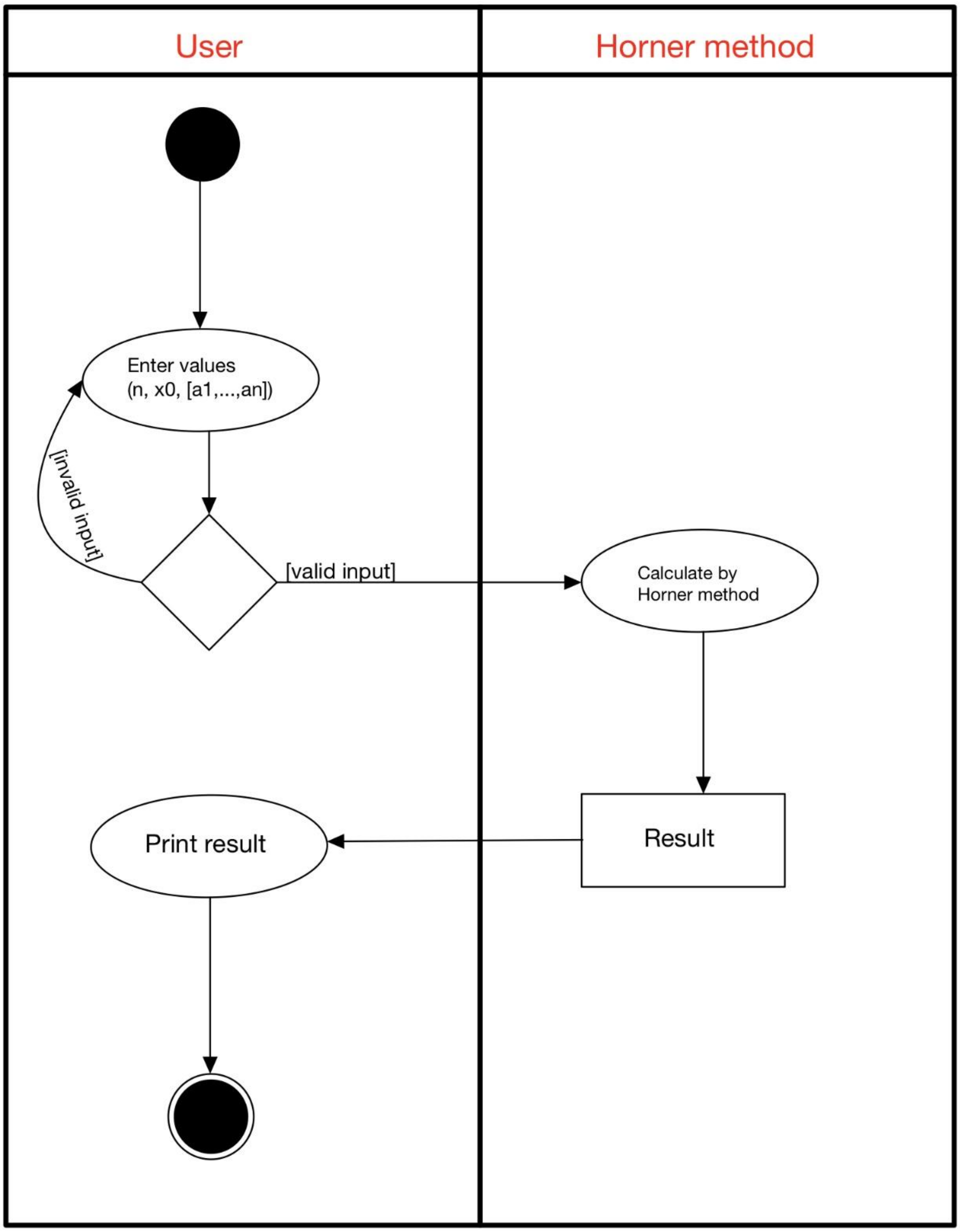
ניתן לראות כי קיבלנו תוצאות זהות בכל המקורות.

על מנת לבודד את סיכויי יד המקרה, ערכנו בדיקות נוספות והתוצאות מבטיחות:

פולינומים / קישורים	$P(x) = 3x^2 - 3x + 2$ $x_0 = 5$	$P(x) = x + 30$ $x_0 = 20$	$P(x) = 7x^3 - 8x^2 - 1.5x + 6$ $x_0 = 0$
יישום שלנו	62	50	6
יישום חיצוני	62	50	6
Desmos	62	50	6

דיאגרמות

Activity diagram:



Sequence diagram: