CAPÍTULO II: METODO DE LA RIGIDEZ EN ELEMENTOS ELASTICOS Y ARMADURAS

1.- INTRODUCCIÓN. –

En el presente capítulo se procederá a describir y detallar el Método de la Rigidez primeramente en elementos elásticos lineales considerando primeramente los principios de equilibrio y concepto de deformación en función de los desplazamientos para luego en la segunda parte desarrollar el método de la rigidez en Armaduras planas y en el espacio; como parte del procedimiento se analizará los conceptos de matriz de rigidez local y global así como las matrices de transformación de desplazamientos y de fuerzas para el caso de armaduras.

En la última parte del capítulo se procederá con las consideraciones que gobiernan el método de la rigidez en armaduras en el espacio.

2.- METODO DE LA RIGIDEZ EN ELEMENTOS ELASTICOS. -

En el elemento elástico mostrado en la figura procederemos a definir la ecuación de la Rigidez en función de la deformación del elemento y luego procederemos a reemplazar esta deformación en términos de los desplazamientos de los nudos de ambos extremos del elemento.

$$\boxed{P = k.\delta \text{ ó } P = k.\Delta}$$

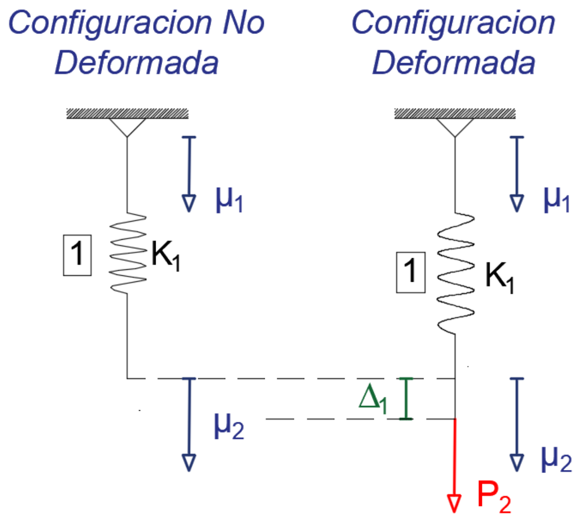


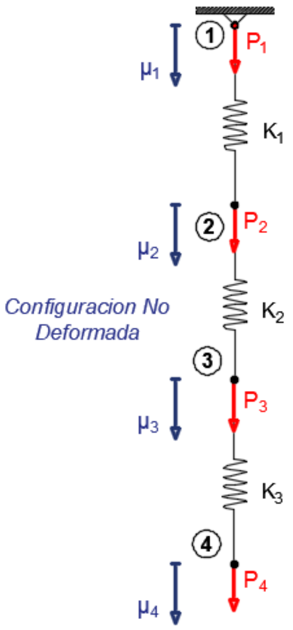
Figura 01: Elemento elástico y desplazamientos asociados.

$$P_2 = k_1.\Delta_1 \qquad P_2 = k_1.\Delta_1 \qquad P = k_i.\Delta_i$$

$$\Delta_1 = u_2 - u_1 \qquad P_2 = k_1.(u_2 - u_1) \qquad P = k_i.(u_{i+1} - u_i)$$

- u_1: Desplazamiento del nudo 1 asociado al GDL 1.
- u_2: Desplazamiento del nudo 2 asociado al GDL 2.

Bajo este principio se procederá a definir las ecuaciones de equilibrio ahora para un sistema de 03 elementos elásticos de acuerdo a la siguiente figura.



En la figura se pueden definir los siguientes conceptos:

K_i: Rigidez del elemento i.
F_i: Fuerza elástica del elemento i.
P_i: Fuerza externa o reacción del elemento i.
Δ_i: Deformación del elemento i.

Primeramente, se planteará las ecuaciones de rigidez de cada elemento.

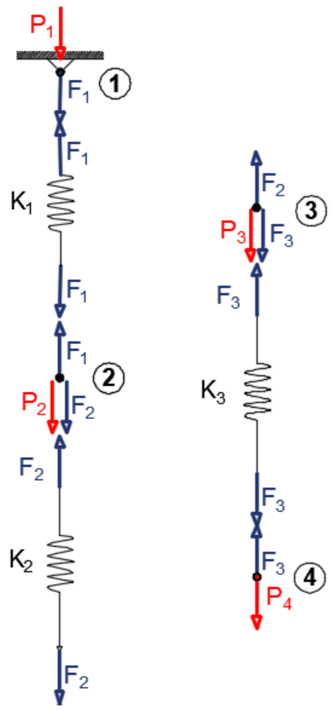
Para Elemento 01: $F_1 = k_1.\Delta_1$

Para Elemento 02: $F_2 = k_2.\Delta_2$

Para Elemento 03: $F_3 = k_3.\Delta_3$

Figura 02: Sistema de elementos elásticos en serie.

Seguidamente, se planteará las deformaciones en función del desplazamiento de cada extremo para cada elemento del sistema en función de la siguiente figura. Los elementos se muestran separados con la finalidad de visualizar todas las fuerzas que podrían actuar en los elementos elásticos; es importante mencionar que se está considerando un estado de tracción para cada elemento como un estado de fuerzas positivo y a su vez todos los desplazamientos hacia abajo serán considerados también positivos para fines de la convención del sistema.



Primeramente, se definirán las deformaciones en función de los desplazamientos.

Para el Elemento 01:
$\Delta_1 = u_2 - u_1 \rightarrow F_1 = k_1.\Delta_1 \rightarrow F_1 = k_1.(u_2 - u_1)$

Para el Elemento 02:
$\Delta_2 = u_3 - u_2 \rightarrow F_2 = k_2.\Delta_2 \rightarrow F_2 = k_2.(u_3 - u_2)$

Para el Elemento 03:
$\Delta_3 = u_4 - u_3 \rightarrow F_3 = k_3.\Delta_3 \rightarrow F_3 = k_3.(u_4 - u_3)$

Procederemos luego a definir la ecuación de equilibrio para cada nudo del sistema.

Para el nudo 01: $P_1 + F_1 = 0 \rightarrow P_1 = -F_1$

Para el nudo 02: $P_2 + F_2 = F_1 \rightarrow P_2 = F_1 - F_2$

Para el nudo 03: $P_3 + F_3 = F_2 \rightarrow P_3 = F_2 - F_3$

Para el nudo 04: $P_4 = F_3 \rightarrow P_4 = F_3$

Figura 03: Rigidez por cortante.

Seguidamente en las ecuaciones de equilibrio se va a reemplazar las fuerzas de cada elemento elástico en función de las deformaciones y luego en términos de los desplazamientos de los extremos de cada elemento del sistema.

Para el nudo 01: $P_1 = -k_1.(u_2 - u_1) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P_1 = k_1.u_1 - k_1.u_2}$

Para el nudo 02: $P_2 = k_1.(u_2 - u_1) - k_2.(u_3 - u_2) \rightarrow P_2 = -k_1.u_1 + k_1.u_2 + k_2.u_2 - k_2.u_3$

Ordenando se tendría: $\boldsymbol{P_2 = -k_1.u_1 + (k_1 + k_2).u_2 - k_2.u_3}$

Para el nudo 03: $P_3 = k_2.(u_3 - u_2) - k_3.(u_4 - u_3) \rightarrow P_3 = -k_2.u_2 + k_2.u_3 + k_3.u_3 - k_3.u_4$

Ordenando se tendría: $\boldsymbol{P_3 = -k_2.u_2 + (k_2 + k_3).u_3 - k_3.u_4}$

Para el nudo 04: $P_4 = k_3.(u_4 - u_3) \rightarrow \quad \boldsymbol{P_4 = -k_3.u_3 + k_3.u_4}$

Se procederá luego a colocar las 04 ecuaciones de equilibrio (por ser 04 nudos en el sistema) ya en función de los desplazamientos y luego se les dará un ordenamiento matricial; es importante notar que el ***desplazamiento u_1*** define un ***grado de libertad restringido (GDLr)*** del sistema ***(u_r)*** y los ***desplazamientos u_2, u_3 y u_4*** definen ***grados de libertad no restringidos (GDLu)*** del sistema ***(u_u)***.

$$P_1 = k_1.u_1 - k_1.u_2$$

$$P_2 = -k_1.u_1 + (k_1 + k_2).u_2 - k_2.u_3$$

$$P_3 = -k_2.u_2 + (k_2 + k_3).u_3 - k_3.u_4$$

$$P_4 = -k_3.u_3 + k_3.u_4$$

La siguiente ecuación matricial define la ecuación de Rigidez del sistema en función de los desplazamientos.

$$\boxed{[\boldsymbol{P}] = [\boldsymbol{K}].[\boldsymbol{u}] \quad \text{ó} \quad [\boldsymbol{F}] = [\boldsymbol{K}].[\boldsymbol{u}]}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

El vector de la izquierda define el vector de fuerzas donde P1 estaría relacionado al GDL restringido y en términos prácticos representaría la reacción del sistema en el apoyo fijo o nudo 1; las demás fuerzas (P2, P3 y P4) estarían asociadas a los grados de libertad no restringidos y en términos prácticos usualmente se conocen de un previo metrado o cálculo de fuerzas externas.

$$[P]: \text{Vector de Fuerzas} \quad \rightarrow \quad [P] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

La matriz de orden de 4x4 define la matriz de rigidez del Sistema en donde una de sus principales características es ser una matriz cuadrada en donde el orden se define por el número de grados de libertad del sistema (4 GDL para este caso) y otra característica fundamental es que la matriz es simétrica; esta característica aplica a todos los sistemas que se estudiarán posteriormente.

La fila 1 y columna 1 de la matriz está asociada al grado de libertad restringido del sistema (1 o u_u) y las filas y columnas 2, 3 y 4 están asociadas a los grados de libertad no restringidos del sistema (2, 3 y 4 o u_r).

$$[K]: \text{Matriz de Rigidez del sistema} \rightarrow [K] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & (k_1+k_2) & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

El vector ubicado a la derecha de la ecuación previa define los desplazamientos los cuales también están asociados a los GDL restringidos (u_1) y GDL no restringidos (u_2, u_3, u_4).

$$[u]: \text{Vector de Desplazamientos} \rightarrow [u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

En función al concepto de grado de libertad restringido y no restringido se puede definir la ecuación matricial de la rigidez de una forma más reducida.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F_r} \\ \boldsymbol{F_u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K_{rr}} & \boldsymbol{K_{ru}} \\ \boldsymbol{K_{ur}} & \boldsymbol{K_{uu}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_r} \\ \boldsymbol{u_u} \end{bmatrix}$$

$[\boldsymbol{F_r}]$: Vector de Fuerzas asociadas a los GDL restringidos (reacciones).

$[\boldsymbol{F_u}]$: Vector de Fuerzas asociadas a los GDL no restringidos (generalmente calculables o conocidas).

$[\boldsymbol{u_r}]$: Vector de Desplazamientos asociadas a los GDL restringidos (generalmente cero).

$[\boldsymbol{u_u}]$: Vector de Desplazamientos asociadas a los GDL no restringidos (incógnitas a cacular).

Basado en esta forma reducida de la ecuación de rigidez se puede dividir la ecuación en 02 ecuaciones matriciales considerando el criterio o naturaleza de los Grados de Libertad.

La ecuación 1 estará definida por las submatrices de la parte superior de la ecuación matricial:

$$[\boldsymbol{F_r}] = [\boldsymbol{K_{rr}}][\boldsymbol{u_r}] + [\boldsymbol{K_{ru}}][\boldsymbol{u_u}]$$

La ecuación 2 estará definida por las submatrices de la parte inferior de la ecuación matricial:

$$[\boldsymbol{F_u}] = [\boldsymbol{K_{ur}}][\boldsymbol{u_r}] + [\boldsymbol{K_{uu}}][\boldsymbol{u_u}]$$

De estas 02 ecuaciones se puede calcular primeramente los desplazamientos en los grados de libertad no restringidos despejando el valor de u_u y luego se puede calcular las reacciones del sistema Fu.

$$\boxed{[\boldsymbol{u_u}] = [\boldsymbol{K_{uu}}]^{-1}\{[\boldsymbol{F_u}] - [\boldsymbol{K_{ur}}][\boldsymbol{u_r}]\}}$$

Luego:

$$\boxed{[\boldsymbol{F_r}] = [\boldsymbol{K_{rr}}][\boldsymbol{u_r}] + [\boldsymbol{K_{ru}}][\boldsymbol{u_u}]}$$

3.- PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN APLICADO AL MÉTODO DE LA RIGIDEZ. -

Otra forma de obtener la matriz de rigidez del sistema consiste en aplicar el principio de superposición para un elemento elástico o resorte tomando en cuenta que este tipo de elementos solo puede estar en compresión o tracción y luego considerando los grados de libertar GDL que afectan al elemento elástico.

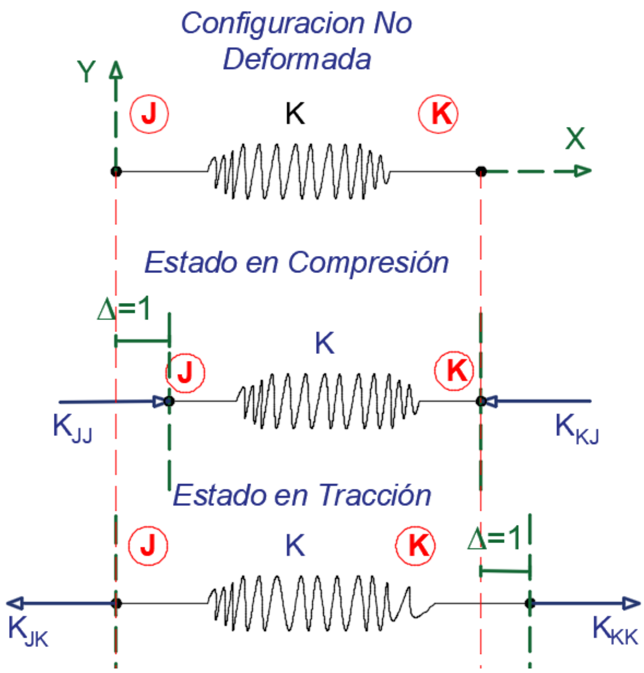
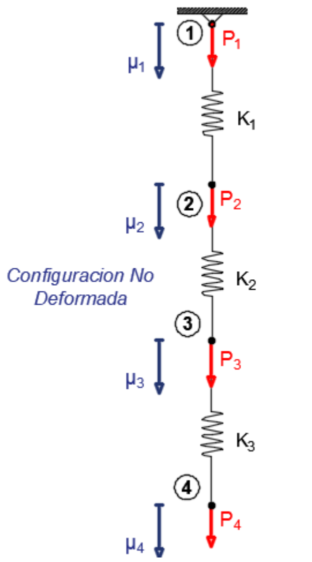


Figura 04: Principio de Superposición aplicado al concepto de rigidez en elementos elásticos.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} j & k \end{array} \\ [K]_I = & \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{array}{c} j \\ k \end{array} \end{array}$$

Se podrá notar que el elemento 1 está afectado por los grados de libertad 1 y 2; el elemento 2 afectado por los elementos 2 y 3; y el elemento 3 afectado por los grados de libertar 3 y 4 como se puede ver a continuación.



Para elemento 01:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ [K]_1 = & \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Para elemento 02:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ [K]_2 = & \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Para elemento 03:

$$[\boldsymbol{K}]_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boldsymbol{K_3} & -\boldsymbol{K_3} \\ -\boldsymbol{K_3} & \boldsymbol{K_3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Ensamblando la matriz considerando el ordenamiento de los grados de libertad del sistema se tendrá:

$$[\boldsymbol{P}] = [\boldsymbol{K}].[\boldsymbol{u}] \quad \text{ó} \quad [\boldsymbol{F}] = [\boldsymbol{K}].[\boldsymbol{u}]$$

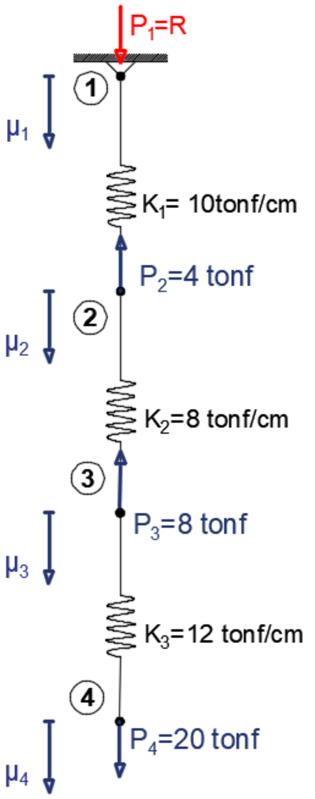
$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & (k_1+k_2) & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} . \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & (k_1+k_2) & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Luego se procederá de la forma descrita en el acápite anterior.

Ejemplo 01.-

Para el sistema de elementos elásticos en serie mostrado en la figura se requiere calcular los desplazamientos y la reacción en el apoyo. En la figura se muestra la rigidez de cada elemento, así como las fuerzas externas aplicadas. Adicionalmente se requiere calcular las fuerzas en cada elemento del sistema.



Como se comentó en los acápites previos se planteará para este caso una convención de desplazamientos positiva hacia abajo por lo cual se podrían definir los siguientes valores de fuerza, rigidez y desplazamientos:

$$P_1 = R \ tonf \qquad K_1 = 10\,\frac{ton}{cm} \qquad u_1 = 0 \ cm$$

$$P_2 = -4 \ tonf \qquad K_2 = 8\,\frac{ton}{cm} \qquad u_2 = ? \ cm$$

$$P_3 = -8 \ tonf \qquad K_3 = 12\,\frac{ton}{cm} \qquad u_3 = ? \ cm$$

$$P_4 = 20 \ tonf \qquad u_4 = ? \ cm$$

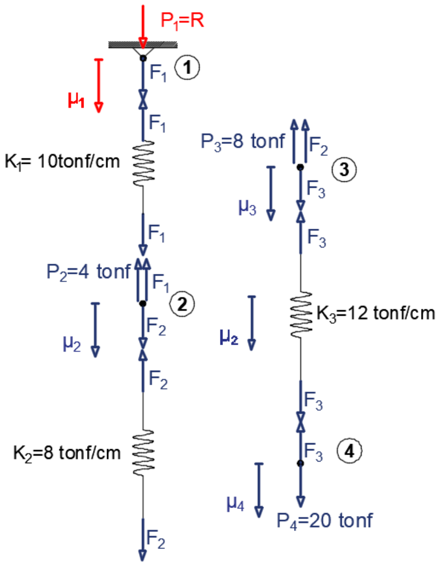
Los valores de las deformaciones de cada elemento elástico también definirían incógnitas a ser resueltas en el análisis del sistema.

$$\Delta_1 = ? \ cm \qquad \Delta_2 = ? \ cm \qquad \Delta_3 = ? \ cm$$

Otro grupo de incógnitas será los valores de fuerza que experimentarán cada uno de los elementos.

$$F_1 = ? \ tonf. \qquad F_2 = ? \ tonf. \qquad F_3 = ? \ tonf.$$

Seguidamente plantearemos las ecuaciones de equilibrio para cada nudo ya reemplazando los valores de las fuerzas del sistema.



Para cada elemento las ecuaciones de rigidez en función de los desplazamientos serán las siguientes:

Para el Elemento 01:

$\Delta_1 = u_2 - u_1 \;\rightarrow\; F_1 = k_1.\Delta_1 \;\rightarrow\; F_1 = k_1.(u_2 - u_1)$

Para el Elemento 02:

$\Delta_2 = u_3 - u_2 \;\rightarrow\; F_2 = k_2.\Delta_2 \;\rightarrow\; F_2 = k_2.(u_3 - u_2)$

Para el Elemento 03:

$\Delta_3 = u_4 - u_3 \;\rightarrow\; F_3 = k_3.\Delta_3 \;\rightarrow\; F_3 = k_3.(u_4 - u_3)$

Procederemos luego a definir la ecuación de equilibrio para cada nudo del sistema.

Nudo 01: $P_1 + F_1 = 0 \;\rightarrow\; P_1 = -F_1 \;\rightarrow R = -F_1$

Nudo 02: $P_2 + F_2 = F_1 \rightarrow P_2 = F_1 - F_2 \rightarrow -4 = F_1 - F_2$

Nudo 03: $P_3 + F_3 = F_2 \rightarrow P_3 = F_2 - F_3 \rightarrow -8 = F_2 - F_3$

Nudo 04: $P_4 = F_3 \;\rightarrow\; P_4 = F_3 \rightarrow\; 20 = F_3$

$P_1 = k_1.u_1 - k_1.u_2 \;\rightarrow\; R = 10.u_1 - 10.u_2 \;\rightarrow\; R = 10.u_1 - 10.u_2$

$P_2 = -k_1.u_1 + (k_1 + k_2).u_2 - k_2.u_3 \rightarrow -4 = -10.u_1 + (10+8).u_2 - 8.u_3 \rightarrow -4 = -10.u_1 + 18.u_2 - 8.u_3$

$P_3 = -k_2.u_2 + (k_2 + k_3).u_3 - k_3.u_4 \rightarrow -8 = -8.u_2 + (8+12).u_3 - 12.u_4 \rightarrow -8 = -8.u_2 + 20.u_3 - 12.u_4$

$P_4 = -k_3.u_3 + k_3.u_4 \;\rightarrow\; 20 = -12.u_3 + 12.u_4 \;\rightarrow\; 20 = -12.u_3 + 12.u_4$

Se procederá luego a colocar las 04 ecuaciones previamente descritas ya en un arreglo matricial.

$$\begin{bmatrix} R \\ -4 \\ -8 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 18 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & 20 & -12 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Expresándola en forma matricial reducida se tiene:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F_r} \\ \boldsymbol{F_u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K_{rr}} & \boldsymbol{K_{ru}} \\ \boldsymbol{K_{ur}} & \boldsymbol{K_{uu}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_r} \\ \boldsymbol{u_u} \end{bmatrix}$$

Seguidamente procederemos primero a calcular los desplazamientos en los grados de libertad no restringidos uu.

$$[\boldsymbol{u_u}] = [\boldsymbol{K_{uu}}]^{-1}\{[\boldsymbol{F_u}] - [\boldsymbol{K_{ur}}][\boldsymbol{u_r}]\}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -8 & 0 \\ -8 & 20 & -12 \\ 0 & -12 & 12 \end{bmatrix}^{-1} . \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . [0] \right\}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.225 & 0.225 \\ 0.1 & 0.225 & 0.308 \end{bmatrix} . \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 20 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.80 \\ 2.3 \\ 3.967 \end{bmatrix} cm.$$

Luego calcularemos la reacción del sistema; es importante mencionar que por un criterio o principio de la estática la reacción debería ser igual a 8 tonf hacia arriba. Esto lo tendremos que validar con el método de la rigidez.

$$\boxed{[\boldsymbol{F_r}] = [\boldsymbol{K_{rr}}][\boldsymbol{u_r}] + [\boldsymbol{K_{ru}}][\boldsymbol{u_u}]}$$

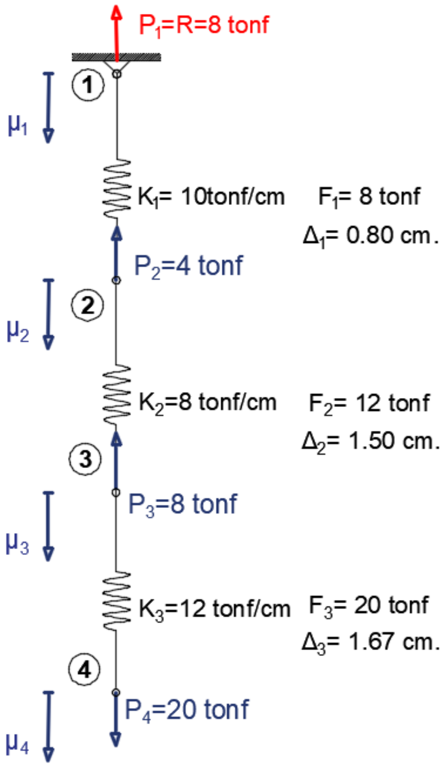
$$[R] = [10].[0] + [-10 \quad 0 \quad 0].\begin{bmatrix} 0.80 \\ 2.3 \\ 3.967 \end{bmatrix}$$

$$[R] = [-8]\ tonf$$

Seguidamente se procede a calcular las deformaciones de cada elemento y luego las fuerzas.

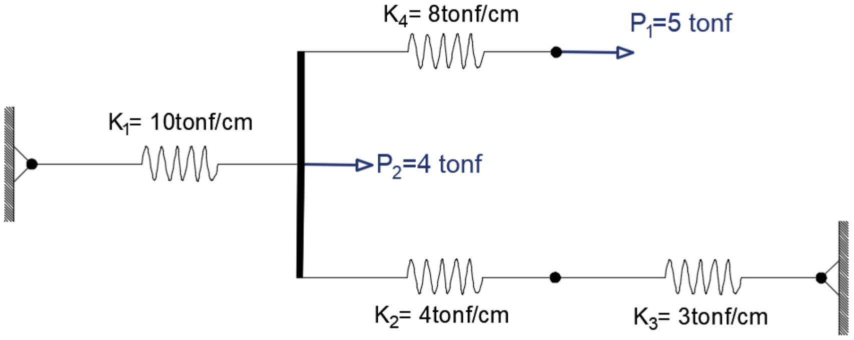
Para el Elemento 01: $\Delta_1 = 0.8 - 0 \rightarrow F_1 = (10).(0.8) \rightarrow F_1 = 8\ tonf$
Para el Elemento 02: $\Delta_2 = 2.3 - 0.8 \rightarrow F_2 = (8).(1.5) \rightarrow F_2 = 12\ tonf$
Para el Elemento 03: $\Delta_3 = 3.967 - 2.3 \rightarrow F_3 = (12).(1.67) \rightarrow F_3 = 20\ tonf$

La siguiente figura muestra los resultados obtenidos aplicando el método de la rigidez para el sistema planteado previamente.

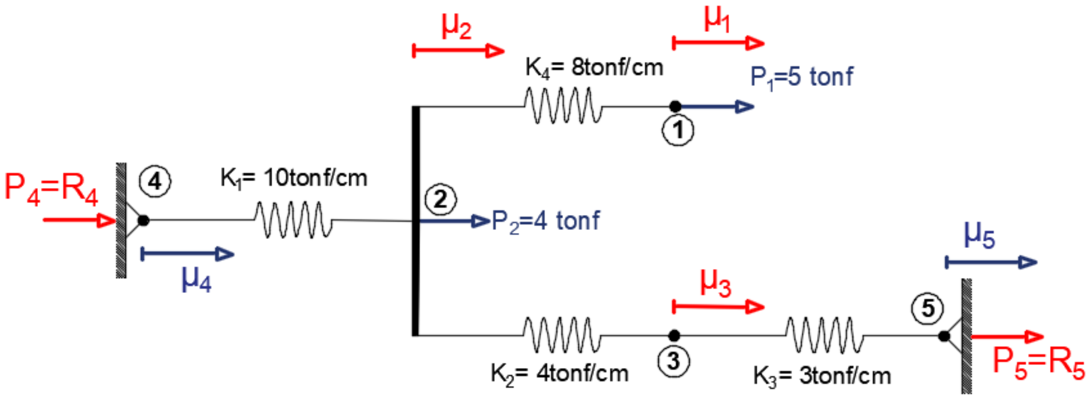


Ejemplo 02.-

Para el sistema de elementos elásticos en serie y paralelo mostrado en la figura se requiere calcular los desplazamientos y la reacción en los apoyos. En la figura se muestra la rigidez de cada elemento, así como las fuerzas externas aplicadas. Adicionalmente se requiere calcular las fuerzas en cada elemento del sistema.



Primeramente, se va a proceder a definir la nomenclatura de los nudos del sistema, así como los desplazamientos y grados de libertad del mismo.



Para este caso se va a plantear una convención positiva de izquierda a derecha y se procederá a plantear la conectividad para la rigidez de cada elemento del sistema.

Para elemento 01:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 4 & 2 \end{array} \\ [K]_1 = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{K_1} & -\boldsymbol{K_1} \\ -\boldsymbol{K_1} & \boldsymbol{K_1} \end{bmatrix} \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Para elemento 02:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ [K]_2 = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{K_2} & -\boldsymbol{K_2} \\ -\boldsymbol{K_2} & \boldsymbol{K_2} \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \end{array}$$

Para elemento 03:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 3 & 5 \end{array} \\ [K]_3 = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{K_3} & -\boldsymbol{K_3} \\ -\boldsymbol{K_3} & \boldsymbol{K_3} \end{bmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

Para elemento 04:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} \\ [K]_4 = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{K_4} & -\boldsymbol{K_4} \\ -\boldsymbol{K_4} & \boldsymbol{K_4} \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

Basado en la conectividad de cada elemento se puede proceder a ensamblar la matriz de rigidez del sistema, así como ensamblar la ecuación matricial de rigidez.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & = & \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & (k_1+k_2+k_4) & -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & (k_2+k_3) & 0 & -k_3 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3. \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

Reemplazando ya los valores numéricos se tendría.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & = & \begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 22 & -4 & -10 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3. \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

Luego se va a proceder a subdividir la ecuación matricial en términos o en función de los GDL.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F_u} \\ \boldsymbol{F_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K_{uu}} & \boldsymbol{K_{ur}} \\ \boldsymbol{K_{ru}} & \boldsymbol{K_{rr}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_u} \\ \boldsymbol{u_r} \end{bmatrix}$$

Como se comentó en acápites previos se despejará el vector que define los desplazamientos en los grados de libertad no restringidos uu.

$$[\boldsymbol{F_u}] = [\boldsymbol{K_{uu}}][\boldsymbol{u_u}] + [\boldsymbol{K_{ur}}][\boldsymbol{u_r}]$$

$$[\boldsymbol{u_u}] = [\boldsymbol{K_{uu}}]^{-1}\{[\boldsymbol{F_u}] - [\boldsymbol{K_{ur}}][\boldsymbol{u_r}]\}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 \\ -8 & 22 & -4 \\ 0 & -4 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -10 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.085 & 0.049 \\ 0.085 & 0.085 & 0.049 \\ 0.049 & 0.049 & 0.171 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.393 \\ 0.768 \\ 0.439 \end{bmatrix} cm.$$

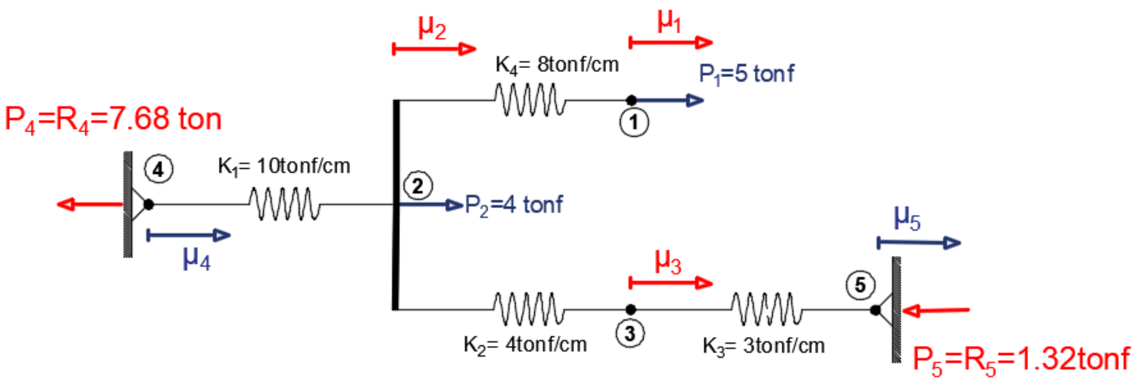
Para el cálculo de las reacciones se tendría lo siguiente.

$$[\boldsymbol{F_r}] = [\boldsymbol{K_{ru}}][\boldsymbol{u_u}] + [\boldsymbol{K_{rr}}][\boldsymbol{u_r}]$$

$$\begin{bmatrix} P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.393 \\ 0.768 \\ 0.439 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.68 \\ -1.32 \end{bmatrix} tonf.$$

En la siguiente figura se muestra el Sistema ya considerando las reacciones calculadas.



Luego se procederá a calcular las deformaciones para cada elemento y las fuerzas respectivas también de cada elemento.

Elemento 01: $\Delta_1 = u_2 - u_4 = 0.768 - 0 = \boldsymbol{0.768} \rightarrow F_1 = (10).(0.768) \rightarrow F_1 = 7.68\, tonf$

Elemento 02: $\Delta_2 = u_3 - u_2 = 0.439 - 0.768 = \boldsymbol{-0329} \rightarrow F_2 = (4).(-0.329) \rightarrow F_2 = -1.32\, tonf$

Elemento 03: $\Delta_3 = u_5 - u_3 = 0 - 0.439 = \boldsymbol{-0.439} \rightarrow F_3 = (3).(-0.439) \rightarrow F_3 = -1.32\, tonf$

Elemento 04: $\Delta_4 = u_1 - u_2 = 1.393 - 0.768 = \boldsymbol{0.625} \rightarrow F_4 = (8).(0.625) \rightarrow F_4 = 5\, tonf$

Del cálculo de deformaciones y luego de fuerzas en cada elemento se puede apreciar que el elemento 01 y el elemento 04 se encuentran en tracción con deformaciones de 0.768 cm. y 0.625 cm. respectivamente. Las fuerzas de estos elementos son de 7.68 tonf y 5 tonf respectivamente.

Los elementos 2 y 3 experimentan compresión con deformaciones de 0.329cm. y 0.439cm. y fuerzas axiales de 1.32tonf para ambos elementos.

4.- METODO DE LA RIGIDEZ EN ARMADURAS PLANAS. -

El método de la rigidez es también aplicable en armaduras planas considerando para su desarrollo una variación en los grados de libertad o GDL en comparación a los elementos elásticos lineales previamente estudiados; otra diferencia en función a los elementos elásticos es la definición de 02 matrices de transformación, la matriz de transformación de desplazamientos y la matriz de transformación de fuerzas.

Es también fundamental revisar el concepto de coordenadas locales y coordenadas globales ya que en función a estos 02 conceptos se podrá definir tanto las matrices de rigidez local (para cada elemento) como la matriz de rigidez global (válida para toda la estructura o todo el sistema).

4.1.- COORDENADAS LOCALES Y COORDENADAS GLOBALES. – Las coordenadas locales como su nombre lo dicen son válidas única y exclusivamente para cada elemento y dependerá de la codificación y de la dirección que el estudiante defina para cada elemento.

En la siguiente figura se muestra una armadura en la cual se puede apreciar las coordenadas globales del sistema en color verde, se puede visualizar los 06 elementos de la armadura considerando una dirección y sentido propuesta por el proyectista y también se puede apreciar los grados de libertad tanto no restringidos (en azul) como restringidos (color rojo); a su vez se puede visualizar 02 cargas (P1 y P2) que afectan a los nudos superiores.

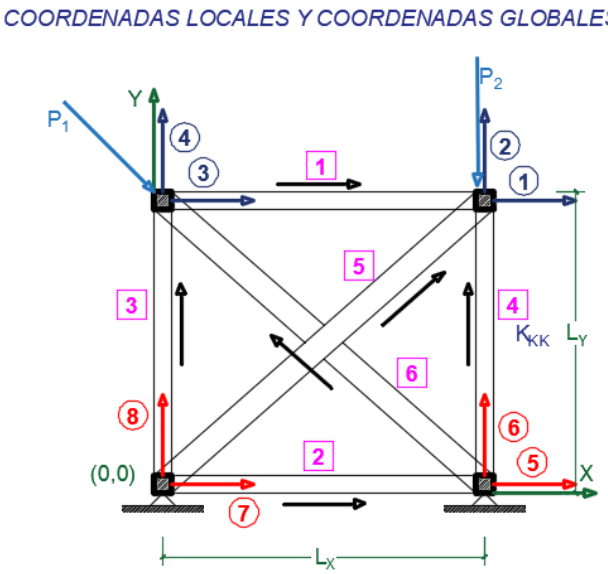


Figura 05: Armadura plana con sus grados de libertad.

Por temas únicamente de nomenclatura se va a definir las coordenadas globales como “x” y “y” y las coordenadas locales como “$\bar{x}$” y “$\bar{y}$”.

4.1.1.- COORDENADAS LOCALES. - Como se mencionó en acápites previos estas coordenadas son sólo válidas para cada elemento; en las siguientes figuras se muestra las coordenadas locales para los elementos 01, 03 y 05.

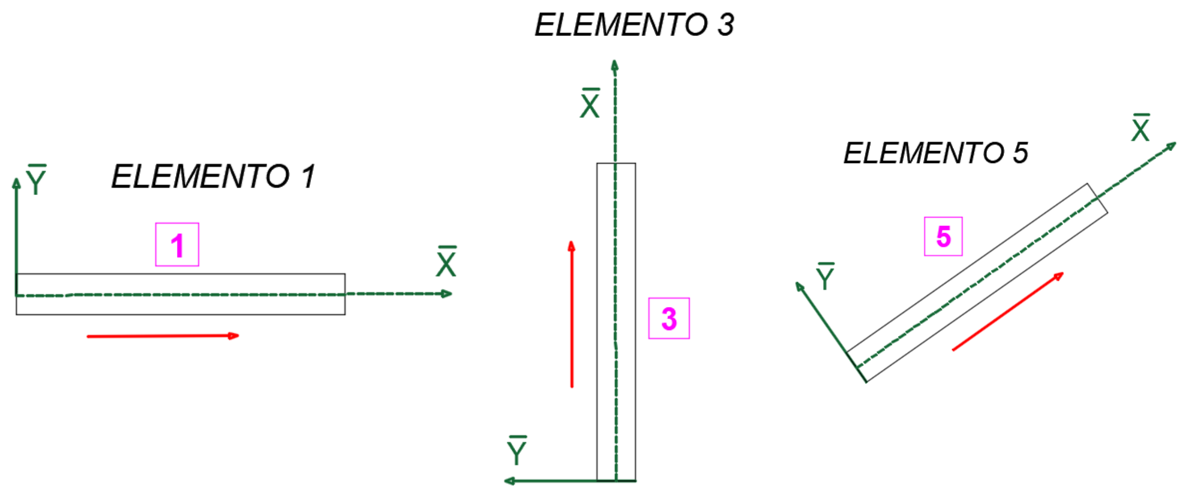


Figura 06: Coordenadas locales para 03 elementos de la armadura.

4.1.2.- COORDENADAS GLOBALES. – Estas coordenadas son válidas para toda la armadura o sistema estructural; se sugiere que el origen de las coordenadas globales este ubicada en el punto situado más hacia abajo e izquierda del sistema con la finalidad de que todas las coordenadas de la estructura estén asociadas a valores positivos; para el caso propuesto se puede visualizar que el origen de las coordenadas globales se localiza en el punto inferior izquierdo del sistema.

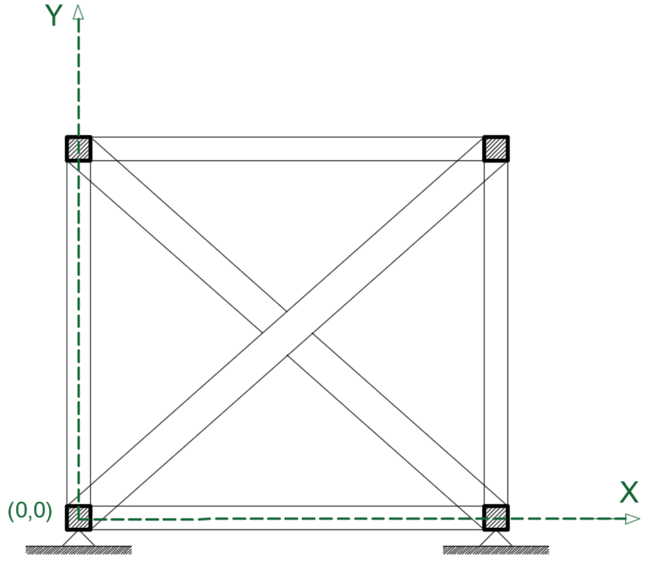
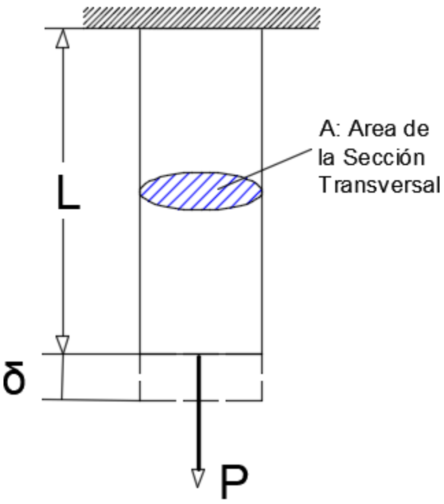


Figura 07: Coordenadas globales para la armadura plana.

4.2.- RIGIDEZ AXIAL. – Las coordenadas locales como su nombre lo dicen son válidas única y exclusivamente para cada elemento y dependerá de la codificación y de la dirección que el estudiante defina para cada elemento.



Concepto de esfuerzo:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Concepto de deformación unitaria:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\delta = \frac{P.L}{E.A} \rightarrow P = \frac{E.A}{L}.\delta$$

$$P = \frac{E.A}{L}.\delta = P = k.\delta$$

$$k_{Axial} = \frac{E.A}{L}$$

Ley de Hooke:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

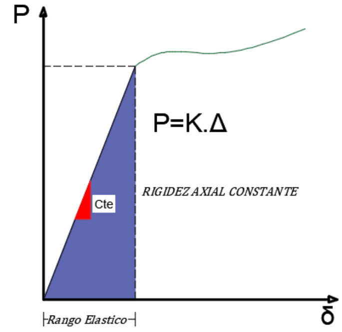


Figura 08: Cálculo de la Rigidez Axial.

4.3.- MATRIZ Y ECUACIÓN DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO DE ARMADURA PLANA EN COORDENADAS LOCALES. – Para poder plantear la matriz de rigidez de cada elemento en coordenadas locales se empleará el principio de superposición tomando en cuenta que un elemento de armadura solo puede soportar o fuerza de tracción o fuerza de compresión; con este propósito presentamos un elemento cualquiera “I” en el cual primero detallaremos los nudos inicial y final como J y K y graficaremos los desplazamientos y fuerzas positivas para cada extremo del elemento.

La siguiente figura muestra los mencionados desplazamientos y fuerzas positivas del elemento I.

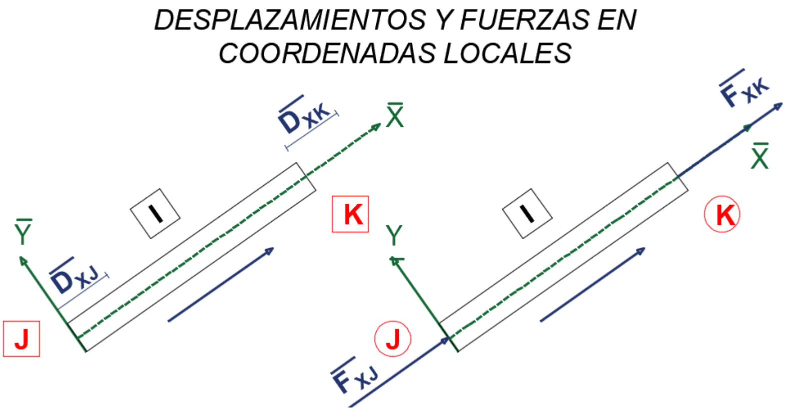


Figura 09: Desplazamientos y fuerzas positivas para un elemento en coordenadas positivas.

$\bar{D}_{xj}$: Desplazamiento local positivo del nudo J.

$\bar{D}_{xk}$: Desplazamiento local positivo del nudo K.

$\bar{F}_{xj}$: Fuerza local positiva del nudo J.

$\bar{F}_{xk}$: Fuerza local positiva del nudo K.

Seguidamente se aplica el principio de superposición considerando primero el estado de compresión; como se puede apreciar en la figura se está induciendo una deformación positiva unitaria en el nudo J para generar el mencionado estado de compresión y seguidamente se induce una deformación unitaria positiva en el nudo K para generar la tracción y para cada caso obviamente se presentarán las fuerzas de compresión y fuerzas de tracción.

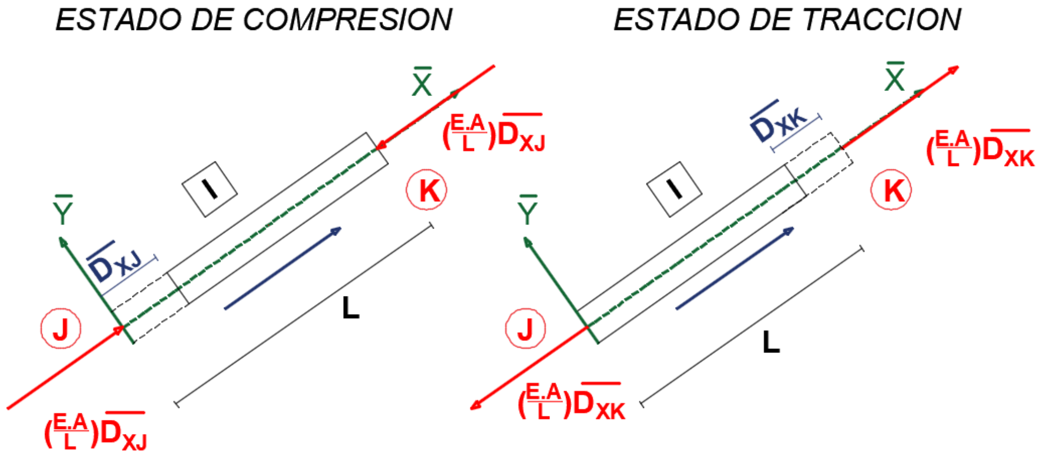


Figura 10: Principio de superposición en un elemento de armadura en coordenadas locales.

Debe recordarse que tanto el módulo de elasticidad como el área de la sección transversal definen la rigidez axial relativa del elemento y por lo tanto dividido por L define la rigidez total del elemento.

E: Módulo de Elasticidad del Material.
A: Área de la sección transversal del elemento.
L: Longitud del elemento.

$$\bar{F}_{xj} = \left(\frac{E.A}{L}\right).\bar{D}_{xj} - \left(\frac{E.A}{L}\right).\bar{D}_{xk}$$

$$\bar{F}_{xk} = -\left(\frac{E.A}{L}\right).\bar{D}_{xj} + \left(\frac{E.A}{L}\right).\bar{D}_{xk}$$

$$\begin{bmatrix}\bar{F}_{xj}\\ \bar{F}_{xk}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{E.A}{L} & -\frac{E.A}{L}\\ -\frac{E.A}{L} & \frac{E.A}{L}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\bar{D}_{xj}\\ \bar{D}_{xk}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\bar{F}_{xj}\\ \bar{F}_{xk}\end{bmatrix} = \frac{E.A}{L}.\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\bar{D}_{xj}\\ \bar{D}_{xk}\end{bmatrix}$$

$$[\bar{F}] = [\bar{k}].[\bar{D}]$$

$[\bar{k}] = \frac{E.A}{L}.\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ → Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales.

$[\bar{F}] = \begin{bmatrix}\bar{F}_{xj}\\ \bar{F}_{xk}\end{bmatrix}$ → Vector de fuerzas de un elemento en coordenadas locales.

$[\bar{D}] = \begin{bmatrix}\bar{D}_{xj}\\ \bar{D}_{xk}\end{bmatrix}$ → Vector de desplazamientos de un elemento en coordenadas locales.

$\bar{F}_{xk} \rightarrow +$: Elemento sujeto a tracción.

$\bar{F}_{xk} \rightarrow -$: Elemento sujeto a compresión.

4.4.- PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL ELEMENTO. – En el proceso de análisis de armaduras por el método de la rigidez es fundamental definir las coordenadas de cada uno de los nudos de la estructura de forma tal que de manera directa se pueda obtener las propiedades geométricas de cada elemento como su longitud.

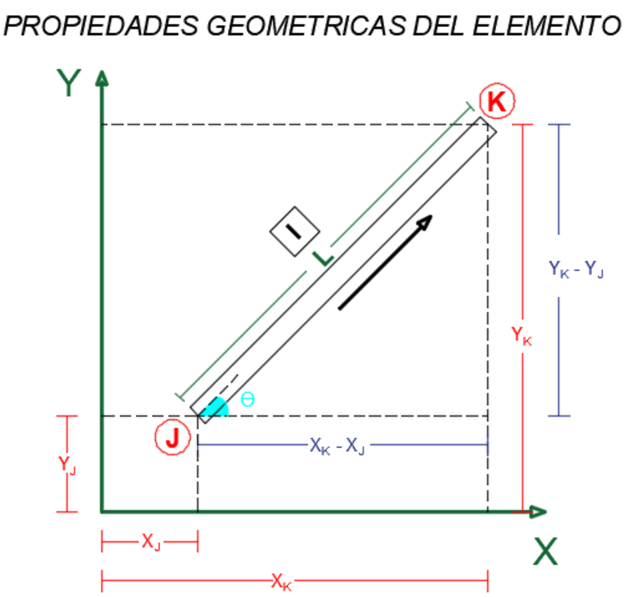


Figura 11: Propiedades geométricas del elemento.

Seguidamente se muestra las coordenadas de cada uno de un elemento de armadura y el cálculo de la longitud, así como las propiedades trigonométricas del mismo (coseno y seno).

$$\boldsymbol{L} = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x_k - x_j}{L} = \boldsymbol{c_x}$$

$$\sin\theta = \frac{y_k - y_j}{L} = \boldsymbol{c_y}$$

4.5.- MATRIZ DE TRANSFORMACION DE DESPLAZAMIENTOS. – Dentro del proceso de análisis de armaduras con el método de la rigidez se verá que es necesario definir las relaciones entre los desplazamientos locales y desplazamientos globales para lo cual definiremos en este acápite la Matriz de Transformación de Desplazamientos para cualquier elemento de armadura.

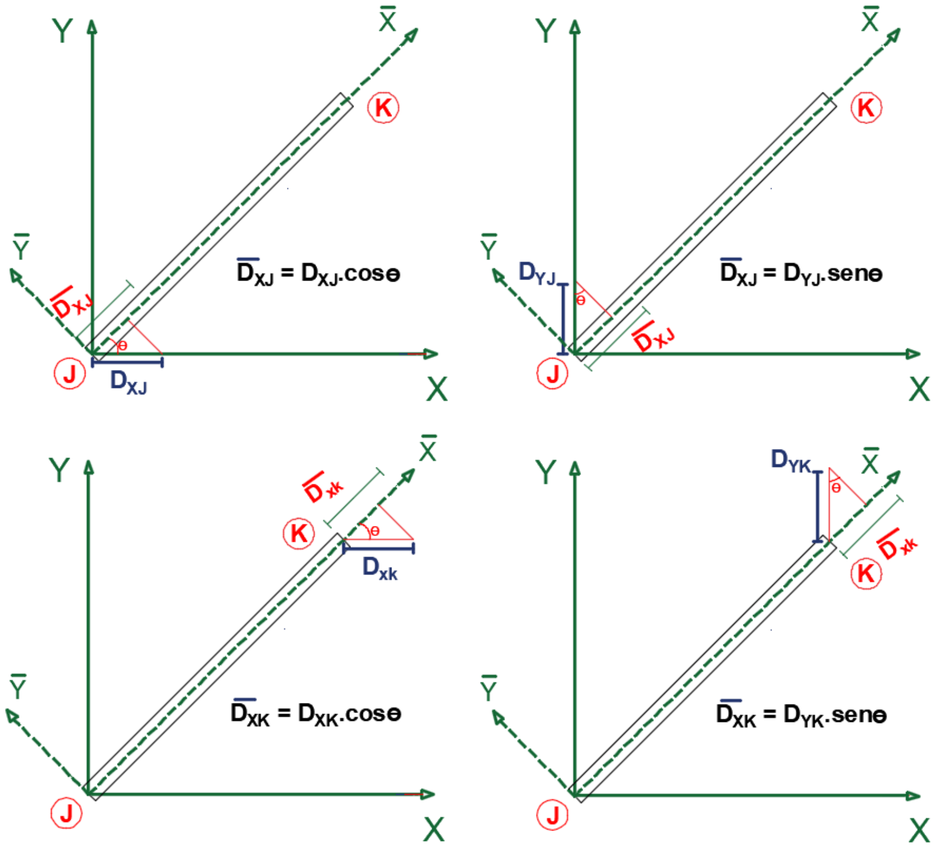


Figura 12: Desplazamientos locales en función de los globales.

En la figura 12 se puede apreciar los desplazamientos locales tanto en el nudo J como en el nudo K en función de los desplazamientos globales también en estos 02 nudos.

$$\bar{D}_{xj} = D_{xj}.\cos\theta + D_{yj}.\sin\theta$$

$$\bar{D}_{xk} = D_{xk}.\cos\theta + D_{yk}.\sin\theta$$

Estas 02 ecuaciones se pueden expresar de forma matricial de acuerdo a la siguiente expresión.

$$\begin{bmatrix} \bar{D}_{xj} \\ \bar{D}_{xk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} D_{xj} \\ D_{yj} \\ D_{xk} \\ D_{yk} \end{bmatrix}$$

En la ecuación previa se puede definir a la primera matriz del lado derecho como la matriz de transformación de desplazamientos y al segundo vector del lado derecho como el vector de desplazamientos en coordenadas globales del elemento. De forma resumida se puede representar la ecuación previa de la siguiente forma.

$$[\bar{D}] = [A]^T.[D]$$

$$[A]^T = \begin{bmatrix} cx & cy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cx & cy \end{bmatrix} \rightarrow Matriz\ de\ Transformación\ de\ Desplazamientos.$$

$$[\bar{D}] = \begin{bmatrix} \bar{D}_{xj} \\ \bar{D}_{xk} \end{bmatrix} \rightarrow Vector\ de\ Desplazamientos\ en\ coordenadas\ locales.$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{xj} \\ D_{yj} \\ D_{xk} \\ D_{yk} \end{bmatrix} \rightarrow Vector\ de\ Desplazamientos\ en\ coordenadas\ globales.$$

4.6.- MATRIZ DE TRANSFORMACION DE FUERZAS. – En este acápite se representará las fuerzas en coordenadas globales del elemento en función de las fuerzas en coordenadas locales del elemento bajo la siguiente consideración de la gráfica.

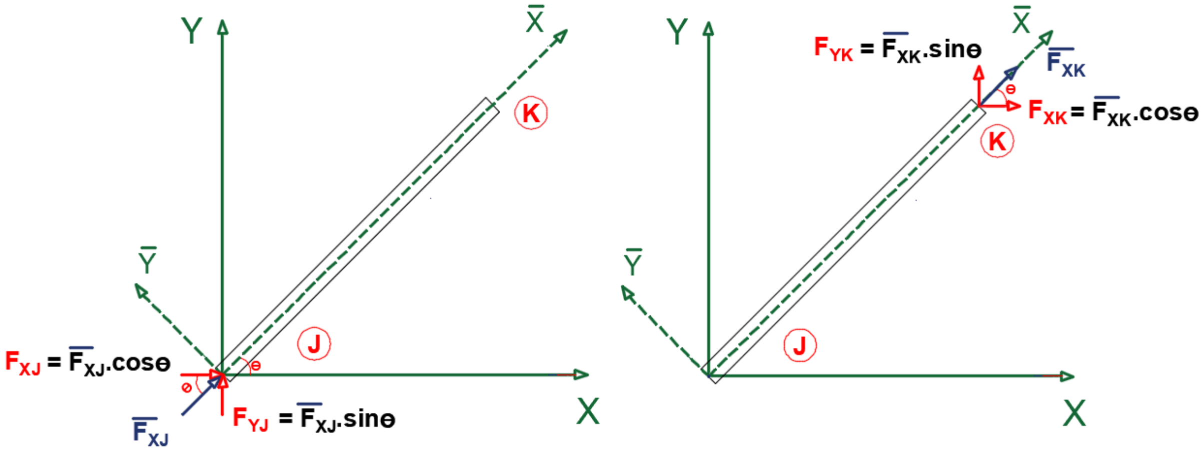


Figura 13: Fuerzas del elemento en coordenadas globales en función de las fuerzas en coordenadas locales.

Como se puede apreciar en la figura 13 para ambos extremos del elemento se está expresando las fuerzas en coordenadas globales en función de las fuerzas en coordenadas locales empleando las funciones de coseno y seno respectivamente.

$$F_{xj} = \overline{F}_{xj}.\cos\theta$$

$$F_{yj} = \overline{F}_{xj}.\sin\theta$$

$$F_{xk} = \overline{F}_{xk}.\cos\theta$$

$$F_{yk} = \overline{F}_{xk}.\sin\theta$$

De manera matricial las 04 ecuaciones previas se pueden expresar de la siguiente manera y se puede visualizar la matriz de transformación de fuerzas.

$$\begin{bmatrix} F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overline{F}_{xj} \\ \overline{F}_{xk} \end{bmatrix}$$

De manera reducida se podría plantear lo siguiente.

$$[F] = [A].[\overline{F}]$$

Cada uno de los términos se define a continuación.

$$[A] = \begin{bmatrix} cx & 0 \\ cy & 0 \\ 0 & cx \\ 0 & cy \end{bmatrix} \rightarrow \textit{Matriz de Transformación de Fuerzas.}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \end{bmatrix} \rightarrow \textit{Vector de Fuerzas en coordenadas globales.}$$

$$[\overline{F}] = \begin{bmatrix} \overline{F}_{xj} \\ \overline{F}_{xk} \end{bmatrix} \rightarrow \textit{Vector de Fuerzas en coordenadas locales.}$$

Seguidamente procederemos a reemplazar en la ecuación previa tanto el vector de fuerzas en coordenadas locales como el vector de desplazamientos en coordenadas globales.

$$[F] = [A].[\overline{F}]$$

Reemplazamos primero el vector de fuerzas en coordenadas locales.

$$[\overline{F}] = [\overline{k}].[\overline{D}]$$

$$[F] = [A].[\overline{k}].[\overline{D}]$$

Luego reemplazaremos el vector de desplazamientos en coordenadas locales en la ecuación previa.

$$[\overline{D}] = [A]^T.[D]$$

$$[F] = [A].[\overline{k}].[A]^T.[D]$$

La última ecuación matricial representa la ecuación de rigidez de un elemento de armadura, pero en coordenadas globales. Como se puede notar los primeros 03 términos de la parte derecha de la ecuación definen la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales y son única y exclusivamente dependientes de las propiedades mecánicas y geométricas del elemento.

$$\boxed{[F] = [A].[\overline{k}].[A]^T.[D]}$$

$$[K] = [A].[\overline{k}].[A]^T$$

$[K] = Matriz\,de\,Rigidez\,del\,Elemento\,en\,Coordenadas\,Globales$

Se podrá notar también que el orden de esta matriz es de 4x4 para un elemento de armadura definida en el plano.

$$[K]_{4x4} = [A]_{4x2}.[k]_{2x2}.[A]^T{}_{2x4}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 \\ sin\theta & 0 \\ 0 & cos\theta \\ 0 & sin\theta \end{bmatrix} . \frac{E.A}{L} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{E.A}{L} . \begin{bmatrix} cos\theta & 0 \\ sin\theta & 0 \\ 0 & cos\theta \\ 0 & sin\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\theta & sin\theta \end{bmatrix}$$

De forma reducida se tendría.

$$[K] = \frac{E.A}{L} . \begin{bmatrix} cx & 0 \\ cy & 0 \\ 0 & cx \\ 0 & cy \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} cx & cy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cx & cy \end{bmatrix}$$

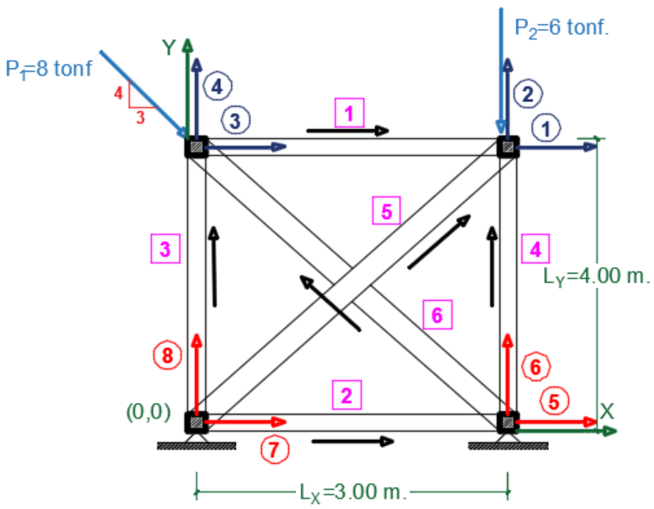
Desarrollando las respectivas multiplicaciones finalmente se obtiene.

$$[K] = \frac{E.A}{L} . \begin{bmatrix} cx^2 & cx.cy & -cx^2 & -cx.cy \\ cx.cy & cy^2 & -cx.cy & -cy^2 \\ -cx^2 & -cx.cy & cx^2 & cx.cy \\ -cx.cy & -cy^2 & cx.cy & cy^2 \end{bmatrix}$$

Es fundamental considerar que esta matriz es de 4x4 y que relaciona los grados de libertad globales que afectan al elemento de la armadura; luego en base a esta conectividad se podrá ensamblar la matriz de rigidez del sistema ya sea considerando elemento por elemento o submatriz por submatriz.

Ejemplo 01.-

Para la armadura de la figura se requiere considerar los lados de la armadura en 3.00 m. para la dirección horizontal o Lx, 4.00 m. para la dirección vertical o Ly, las áreas de la sección transversal de todos los elementos como A=10 cm2, el módulo de elasticidad como E=2 000 0000 kgf/cm^2 y el valor de las fuerzas P1=8 tonf con componentes proporcionales a 4 y 3 para las direcciones vertical y horizontal respectivamente y P2=6 tonf hacia abajo como se aprecia en el esquema.



Se va proceder a desarrollar primeramente la matriz de rigidez en coordenadas globales para cada elemento de la armadura.

***Elemento 01**: L1=3.00 m., θ1=0°, cosθ1 = cx = 1, senθ1 = cy = 0.*

$$k1 := \frac{E \cdot A}{L1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad k1 := E \cdot A \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad A := \begin{bmatrix} Cx & 0 \\ Cy & 0 \\ 0 & Cx \\ 0 & Cy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = E \cdot A \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & -0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.33 & 0 & 033 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

***Elemento 02**: L2=3.00 m., θ2=0°, cosθ2 = cx = 1, senθ2 = cy = 0.*

$$k2 := \frac{E \cdot A}{L2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad k2 := E \cdot A \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad A := \begin{bmatrix} Cx & 0 \\ Cy & 0 \\ 0 & Cx \\ 0 & Cy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = E \cdot A \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 7 & 8 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.33 & 0 & -0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.33 & 0 & 0.33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

***Elemento 03**: L3=4.00 m., θ3=90°, cosθ3 = cx = 0, senθ3 = cy = 1.*

$$k3 := \frac{E \cdot A}{L3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad k3 := E \cdot A \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad A := \begin{bmatrix} Cx & 0 \\ Cy & 0 \\ 0 & Cx \\ 0 & Cy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = E \cdot A \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 7 & 8 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

***Elemento 04**: L4=4.00 m., θ4=0°, cosθ4 = cx = 0, senθ4 = cy = 1.*

$$k4 := \frac{E \cdot A}{L4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad k4 := E \cdot A \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad A := \begin{bmatrix} Cx & 0 \\ Cy & 0 \\ 0 & Cx \\ 0 & Cy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k = E \cdot A \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & -.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

***Elemento 05**: L5=5.00 m., θ5=53°, cosθ5 = cx = 0.6, senθ5 = cy = 0.8.*

$$k5 := \frac{E \cdot A}{L5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad k5 := E \cdot A \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} Cx & 0 \\ Cy & 0 \\ 0 & Cx \\ 0 & Cy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.8 & 0 \\ 0 & 0.6 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad A^{T} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$k = E \cdot A \cdot \begin{array}{c c} \begin{matrix} \quad 7 & \qquad 8 & \qquad 1 & \qquad 2 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0.072 & 0.096 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & -0.096 & -0.128 \\ -0.072 & -0.096 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}$$

***Elemento 06**: L6=5.00 m., θ6=53°, cosθ6 = cx = -0.6, senθ6 = cy = 0.8.*

$$k6 := \frac{E \cdot A}{L6} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad k6 := E \cdot A \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} Cx & 0 \\ Cy & 0 \\ 0 & Cx \\ 0 & Cy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0.8 & 0 \\ 0 & 0.6 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad A^{T} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$k = E \cdot A \cdot \begin{array}{c c} \begin{matrix} \quad 7 & \qquad 8 & \qquad 1 & \qquad 2 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0.072 & 0.096 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & -0.096 & -0.128 \\ -0.072 & -0.096 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array}$$

La matriz de Rigidez de la armadura estaría dada por la siguiente expresión.

$$K = \begin{array}{c c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 8106.67 & 1920 & -6666.67 & 0 & 0 & 0 & -1440 & -1920 \\ 1920 & 7560 & 0 & 0 & 0 & -5000 & -1920 & -2560 \\ -6666.67 & 0 & 8106.67 & -1920 & -1440 & 1920 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1920 & 7560 & 1920 & -2560 & 0 & -5000 \\ 0 & 0 & -1440 & 1920 & 8106.67 & -1920 & -6666.67 & 0 \\ 0 & -5000 & 1920 & -2560 & -1920 & 7560 & 0 & 0 \\ -1440 & -1920 & 0 & 0 & -666.67 & 0 & 8106.67 & 1920 \\ -1920 & -2560 & 0 & -5000 & 0 & 0 & 1920 & 7560 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{array}$$

Se va calcular seguidamente los desplazamientos en los grados de libertad no restringidos.

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ur} \\ K_{ru} & K_{rr} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_u \\ u_r \end{bmatrix}$$

$$[F_u] = [K_{uu}][u_u] + [K_{ur}][u_r]$$

$$[u_u] = [K_{uu}]^{-1}\{[F_u] - [K_{ur}][u_r]\}$$

$$\text{kuu}=\begin{pmatrix} 8106.67 & 1920 & -6666.67 & 0 \\ 1920 & 7560 & 0 & 0 \\ -6666.67 & 0 & 8106.67 & -1920 \\ 0 & 0 & -1920 & 7560 \end{pmatrix} \qquad \text{Fu}=\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4.8 \\ -6.4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kuu}^{-1} = \begin{pmatrix} 5.6\times10^{-4} & -1.422\times10^{-4} & 4.9\times10^{-4} & 1.244\times10^{-4} \\ -1.422\times10^{-4} & 1.684\times10^{-4} & -1.244\times10^{-4} & -3.16\times10^{-5} \\ 4.9\times10^{-4} & -1.244\times10^{-4} & 5.6\times10^{-4} & 1.422\times10^{-4} \\ 1.244\times10^{-4} & -3.16\times10^{-5} & 1.422\times10^{-4} & 1.684\times10^{-4} \end{pmatrix}$$

Se calculan los desplazamientos para los grados de libertad 1, 2, 3 y 4.

$$[\boldsymbol{u_u}] = [\boldsymbol{K_{uu}}]^{-1}\{[\boldsymbol{F_u}] - [\boldsymbol{K_{ur}}][\boldsymbol{u_r}]\}$$

$$\text{Du} = \begin{pmatrix} 2.409\times10^{-3} \\ -1.405\times10^{-3} \\ 2.524\times10^{-3} \\ -2.054\times10^{-4} \end{pmatrix}$$

Finalmente se proceden a calcular las reacciones del sistema.

$$[\boldsymbol{F_r}] = [\boldsymbol{K_{ru}}][\boldsymbol{u_u}] + [\boldsymbol{K_{rr}}][\boldsymbol{u_r}]$$

$$\text{Fr}=\begin{pmatrix} -4.03 \\ 12.4 \\ -0.77 \\ 2.22\times10^{-15} \end{pmatrix}$$

$$\text{Fr}=\begin{pmatrix} -4.03 \\ 12.4 \\ -0.77 \\ 2.22\times10^{-15} \end{pmatrix}$$

5.- METODO DE LA RIGIDEZ PARA ARMADURAS EN EL ESPACIO. -

El método de la rigidez es también aplicable a armaduras en el espacio con algunas modificaciones de forma a nivel de las matrices globales de rigidez como de transformación de desplazamientos y de fuerzas; se podrá visualizar que a nivel de la matriz de rigidez local no se generan modificaciones y que se empleará el concepto de cosenos y/o ángulos directores.

5.1.- MATRIZ Y ECUACIÓN DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO DE ARMADURA ESPACIAL EN COORDENADAS LOCALES. – Para poder plantear la matriz de rigidez de cada elemento en coordenadas locales se empleará el principio de superposición tomando en cuenta que un elemento de armadura solo puede soportar o fuerza de tracción o fuerza de compresión; con este propósito presentamos un elemento cualquiera "I" en el cual primero detallaremos los nudos inicial y final como J y K y graficaremos los desplazamientos y fuerzas positivas para cada extremo del elemento; de forma independiente al hecho que el sistema esté en el plano o en el espacio la matriz de rigidez local seguirá siendo de 2x2 así como los vectores de fuerzas locales y desplazamientos locales también seguirá siendo de 2x1.

La siguiente figura muestra los mencionados desplazamientos y fuerzas positivas del elemento I.

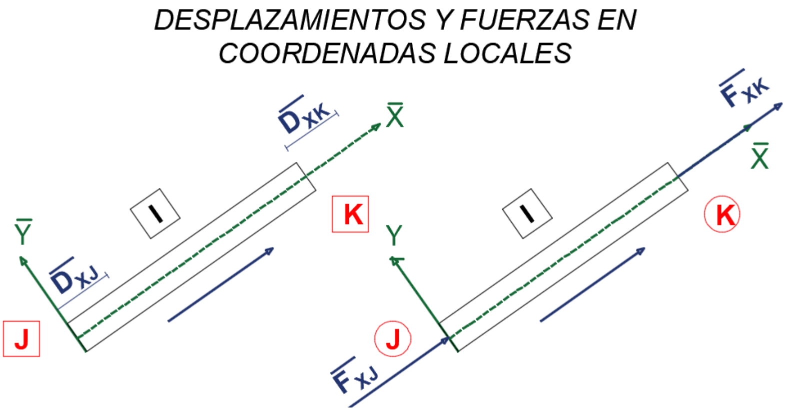


Figura 15: Desplazamientos y fuerzas positivas para un elemento en coordenadas positivas.

$\overline{D}_{xj}$: Desplazamiento local positivo del nudo J.

$\overline{D}_{xk}$: Desplazamiento local positivo del nudo K.

$\overline{F}_{xj}$: Fuerza local positiva del nudo J.

$\overline{F}_{xk}$: Fuerza local positiva del nudo K.

Seguidamente se aplica el principio de superposición considerando primero el estado de compresión; como se puede apreciar en la figura se está induciendo una deformación positiva unitaria en el nudo J para generar el mencionado estado de compresión y seguidamente se induce una deformación unitaria positiva en el nudo K para generar el estado de tracción; para cada caso se presentarán las fuerzas de compresión y fuerzas de tracción.

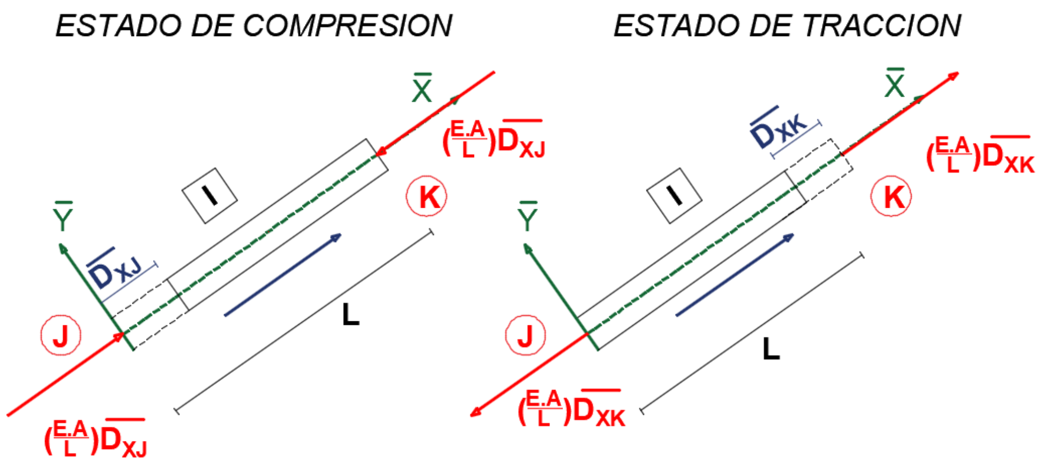


Figura 16: Principio de superposición en un elemento de armadura en coordenadas locales.

Debe recordarse que tanto el módulo de elasticidad como el área de la sección transversal definen la rigidez axial relativa del elemento y por lo tanto dividido por L define la rigidez total del elemento.

$$\bar{F}_{xj} = \left(\frac{E.A}{L}\right).\bar{D}_{xj} - \left(\frac{E.A}{L}\right).\bar{D}_{xk}$$

$$\bar{F}_{xk} = -\left(\frac{E.A}{L}\right).\bar{D}_{xj} + \left(\frac{E.A}{L}\right).\bar{D}_{xk}$$

$$\begin{bmatrix}\bar{F}_{xj}\\ \bar{F}_{xk}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{E.A}{L} & -\frac{E.A}{L}\\ -\frac{E.A}{L} & \frac{E.A}{L}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\bar{D}_{xj}\\ \bar{D}_{xk}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\bar{F}_{xj}\\ \bar{F}_{xk}\end{bmatrix} = \frac{E.A}{L}.\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\bar{D}_{xj}\\ \bar{D}_{xk}\end{bmatrix}$$

$$[\bar{F}] = [\bar{k}].[\bar{D}]$$

$[\bar{k}] = \frac{E.A}{L}.\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ → Matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales.

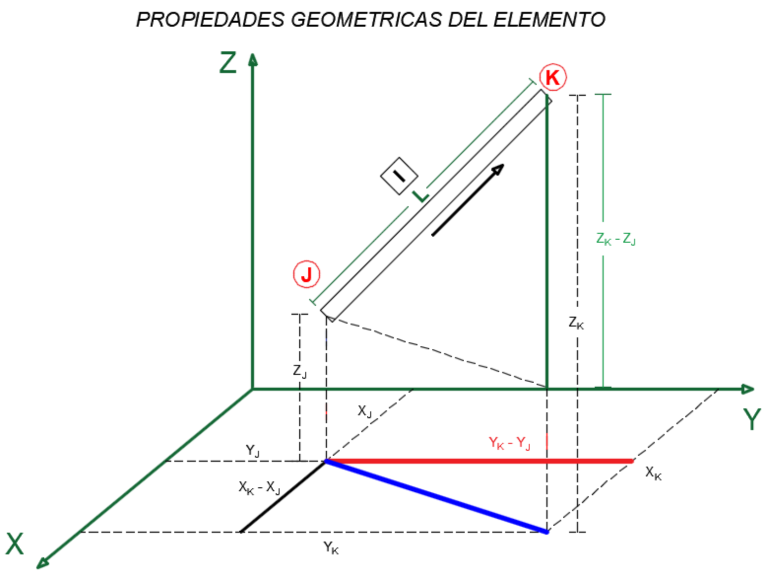
$[\bar{F}] = \begin{bmatrix}\bar{F}_{xj}\\ \bar{F}_{xk}\end{bmatrix}$ → Vector de fuerzas de un elemento en coordenadas locales.

$[\bar{D}] = \begin{bmatrix}\bar{D}_{xj}\\ \bar{D}_{xk}\end{bmatrix}$ → Vector de desplazamientos de un elemento en coordenadas locales.

$\bar{F}_{xk} \rightarrow +$: Elemento sujeto a tracción.

$\bar{F}_{xk} \rightarrow -$: Elemento sujeto a compresión.

5.2.- PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DEL ELEMENTO. – En el proceso de análisis de armaduras por el método de la rigidez es fundamental definir las coordenadas de cada uno de los nudos de la estructura en el espacio de forma tal que de manera directa se pueda obtener las propiedades geométricas de cada elemento como su longitud y sus ángulos directores.



Longitud de un Elemento de armadura en el espacio.

$$L = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2}$$

Ángulos y Cosenos Directores.

$$\cos\theta = \frac{x_k - x_j}{L} = c_x$$

$$\cos\beta = \frac{y_k - y_j}{L} = c_y$$

$$\cos\gamma = \frac{z_k - z_j}{L} = c_z$$

Figura 17: Cálculo de la Longitud de un elemento de armadura y definición de cosenos directores.

En la siguiente figura se puede visualizar la definición formal de los 03 ángulos directores de un elemento de armadura en el espacio con referencia a las paralelas de los ejes globales del sistema.

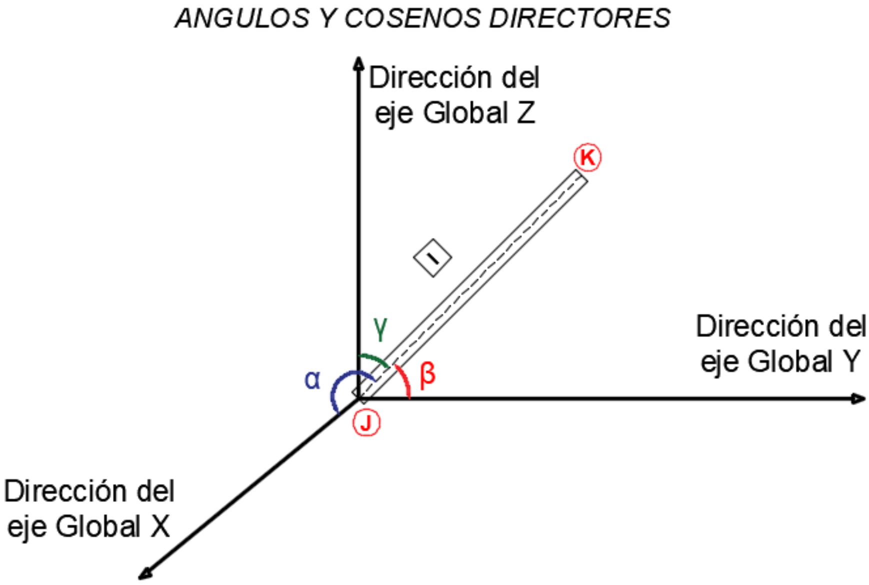


Figura 18: Definición de los ángulos directores de un elemento en el espacio.

5.3.- MATRIZ DE TRANSFORMACION DE DESPLAZAMIENTOS. – Dentro del proceso de análisis de armaduras con el método de la rigidez se verá que es necesario definir las relaciones entre los desplazamientos locales y desplazamientos globales en el espacio para lo cual definiremos en este acápite la Matriz de Transformación de Desplazamientos para cualquier elemento de armadura en el espacio o 3D.

Para este caso cada uno de los 03 desplazamientos globales de cada nudo afectado por los cosenos directores con respecto a los ejes x, y, z aportan o definen los desplazamientos locales del elemento en cada nudo.

$$\bar{D}_{xj} = D_{xj}.\cos\alpha + D_{yj}.\cos\beta + D_{zj}.\cos\gamma$$

$$\bar{D}_{xk} = D_{xk}.\cos\alpha + D_{yk}.\cos\beta + D_{zk}.\cos\gamma$$

Agrupando estas ecuaciones de forma matricial se tiene.

$$\begin{bmatrix} \bar{D}_{xj} \\ \bar{D}_{xk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\alpha & cos\beta & cos\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos\alpha & cos\beta & cos\gamma \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} D_{xj} \\ D_{yj} \\ D_{zj} \\ D_{xk} \\ D_{yk} \\ D_{zk} \end{bmatrix}$$

De manera reducida se puede representar la ecuación matricial previa de la siguiente manera.

$$[\bar{D}] = [A]^T.[D]$$

Formalmente cada matriz de la ecuación previa se define a continuación.

$$[A]^T = \begin{bmatrix} cx & cy & cz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cx & cy & cz \end{bmatrix} \rightarrow \textit{Matriz de Transformación de Desplazamientos.}$$

$$[\bar{D}] = \begin{bmatrix} \bar{D}_{xj} \\ \bar{D}_{xk} \end{bmatrix} \rightarrow \textit{Vector de Desplazamientos en coordenadas locales.}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{xj} \\ D_{yj} \\ D_{zj} \\ D_{xk} \\ D_{yk} \\ D_{zk} \end{bmatrix} \rightarrow \textit{Vector de Desplazamientos en coordenadas globales.}$$

5.4.- MATRIZ DE TRANSFORMACION DE FUERZAS. – En este acápite se representará las 03 fuerzas en coordenadas globales del elemento en función de las fuerzas en coordenadas locales del elemento afectadas por los cosenos directores con respecto a cada eje de manera apropiada bajo la siguiente consideración.

$$F_{xj} = \overline{F}_{xj}.\cos\alpha$$

$$F_{yj} = \overline{F}_{xj}.\cos\beta$$

$$F_{zj} = \overline{F}_{xj}.\cos\gamma$$

$$F_{xk} = \overline{F}_{xk}.\cos\alpha$$

$$F_{yk} = \overline{F}_{xk}.\cos\beta$$

$$F_{zk} = \overline{F}_{xk}.\cos\gamma$$

De manera reducida las ecuaciones previas se pueden presentar bajo la siguiente forma.

$$\begin{bmatrix} F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{zj} \\ F_{xk} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \cos\beta & 0 \\ \cos\gamma & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \cos\beta \\ 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \overline{F}_{xj} \\ \overline{F}_{xk} \end{bmatrix}$$

De forma reducida se tendría.

$$[F] = [A].[\overline{F}]$$

De manera formal cada elemento de la ecuación matricial previa se define a continuación.

$$[A] = \begin{bmatrix} cx & 0 \\ cy & 0 \\ cz & 0 \\ 0 & cx \\ 0 & cy \\ 0 & cz \end{bmatrix} \rightarrow \textit{Matriz de Transformación de Fuerzas.}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{zj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \\ F_{zk} \end{bmatrix} \rightarrow \textit{Vector de Fuerzas en coordenadas globales.}$$

$$[\overline{F}] = \begin{bmatrix} \overline{F}_{xj} \\ \overline{F}_{xk} \end{bmatrix} \rightarrow \textit{Vector de Fuerzas en coordenadas locales.}$$

Finalmente se procederá, de forma similar al caso de armaduras planas, a reemplazar tanto las fuerzas en coordenadas locales como los desplazamientos en coordenadas locales.

$$[F] = [A].[\bar{k}].[\bar{D}]$$

$$[\bar{D}] = [A]^T.[D]$$

$$[F] = [A].[\bar{k}].[A]^T.[D]$$

La última ecuación matricial describe la ecuación de rigidez de un elemento en coordenadas globales de un elemento de armaduras en el espacio.

$$\boxed{[K] = [A].[\bar{k}].[A]^T}$$

$$[K] = \boldsymbol{Matriz\ de\ Rigidez\ del\ Elemento\ en\ Coordenadas\ Globales}$$

Como se puede visualizar seguidamente para el caso de elementos de armaduras en el espacio el orden de esta matriz es de 6x6.

$$\boxed{[K]_{6x6} = [A]_{6x2}.[\bar{k}]_{2x2}.[A]^T{}_{2x6}}$$

Seguidamente se procede a fundamentar la forma de la matriz de rigidez en coordenadas globales de un elemento de armaduras en el espacio.

$$[K] = \begin{bmatrix} cos\alpha & 0 \\ cos\beta & 0 \\ cos\gamma & 0 \\ 0 & cos\alpha \\ 0 & cos\beta \\ 0 & cos\gamma \end{bmatrix}.\frac{E.A}{L}.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} cos\alpha & cos\beta & cos\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos\alpha & cos\beta & cos\gamma \end{bmatrix}$$

Se factoriza la rigidez del elemento y se reubica en la parte derecha de la ecuación.

$$[K] = \frac{E.A}{L}.\begin{bmatrix} cos\alpha & 0 \\ cos\beta & 0 \\ cos\gamma & 0 \\ 0 & cos\alpha \\ 0 & cos\beta \\ 0 & cos\gamma \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} cos\alpha & cos\beta & cos\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos\alpha & cos\beta & cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{E.A}{L}.\begin{bmatrix} cx & 0 \\ cy & 0 \\ cz & 0 \\ 0 & cx \\ 0 & cy \\ 0 & cz \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} cx & cy & cz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cx & cy & cz \end{bmatrix}$$

Desarrollando la multiplicación se presenta el resultado final.

$$[K] = \frac{E.A}{L}.\begin{bmatrix} cx^2 & cx.cy & cx.cz & -cx^2 & -cx.cy & -cx.cz \\ cx.cy & cy^2 & cy.cz & -cx.cy & -cy^2 & -cy.cz \\ cx.cz & cy.cz & cz^2 & -cx.cz & -cy.cz & -cz^2 \\ -cx^2 & -cx.cy & -cx.cz & cx^2 & cx.cy & cx.cz \\ -cx.cy & -cy^2 & -cy.cz & cx.cy & cy^2 & cy.cz \\ -cx.cz & -cy.cz & -cz^2 & cx.cz & cy.cz & cz^2 \end{bmatrix}$$

Bajo el mismo criterio que en armaduras planas, la matriz de rigidez en coordenadas globales para un elemento de armadura en el espacio depende de propiedades mecánicas y geométricas. Finalmente, como proceso de análisis se deberá ensamblar la matriz de rigidez del sistema en función a la conectividad de los GDL de todos los elementos que forman parte de la estructura y luego se calcularán primero los desplazamientos en los GDLu y luego las reacciones de la armadura.

Como procedimiento final se calcularán para cada elemento del sistema los desplazamientos locales del elemento y finalmente las fuerzas en coordenadas locales del elemento para definir tanto el valor numérico como el estado de compresión o tracción del elemento.