Fachbereich Mathematik
Sommersemester 2014

Christian Eder
Lucas Ruhstorfer

Einführung in die Topologie
Übungsblatt 02

Abgabetermin: Mittwoch, 21.05.2014, 13:30 Uhr

Aufgabe 1. Sei $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$ und $f : I \longrightarrow I$ stetig, dann existiert $x \in I$, so dass $f(x) = x$. Mit anderen Worten: f hat mindestens einen Fixpunkt.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum. Zeige:

(a) X ist unzusammenhängend genau dann, wenn ein stetige, surjektive Abbildung $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ existiert, wobei wir den topologischen Raum $\{0,1\}$ mit diskreter Topologie annehmen.

(b) Für $x \in X$ sei die *Zusammenhangskomponente von* x definiert durch

$$Z(x) := \bigcup_{x \in U, U \text{ zshgd}} U.$$

Ist $V \subset X$ zusammenhängend und $Z(x) \cap U \neq \emptyset$, dann gilt $V \subset Z(x)$.

Aufgabe 3. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig genau dann, wenn der Graph

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

wegzusammenhängend ist. Mit anderen Worten: Wir können den Graphen von f zeichnen ohne den Stift abzusetzen.

Aufgabe 4.

(a) Seien X, Y topologische Räume. Zeige:

(i) X irreduzibel $\Longrightarrow$ X zusammenhängend.

(ii) X irreduzibel $\Longleftrightarrow$ Jede nichtleere Menge $U \in \mathcal{T}_X$ ist dicht in X.

(iii) X irreduzibel, $f : X \longrightarrow Y$ stetig und surjektiv $\Longrightarrow$ Y irreduzibel.

(b) Weise die Topologieeigenschaften der Zariski Topologie aus Beispiel 3.13 nach.