Fachbereich Mathematik
Sommersemester 2014

Christian Eder
Lucas Ruhstorfer

Einführung in die Topologie
Übungsblatt 01

Abgabetermin: Mittwoch, 07.05.2014, 13:30 Uhr

Aufgabe 1. Es seien A und B zwei Teilmengen eines topologischen Raums X. Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

(a) $(A \cup B)^\circ \subset A^\circ \cup B^\circ$,

(b) $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$,

(c) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$,

(d) $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \Longrightarrow \partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

Aufgabe 2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Definiere die 3 Abbildungen $\mu, \nu, \eta : X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} \mu(x,y) &:= \tfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \\ \nu(x,y) &:= \ln(1 + d(x,y)), \\ \eta(x,y) &:= \min(1, d(x,y)). \end{aligned}$$

Zeige, dass μ, ν und η ebenfalls Metriken auf X sind und $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}_\nu = \mathcal{T}_\eta$ gilt. Mit anderen Worten: *Die Topologie kennt keinen Abstandsbegriff*.

Aufgabe 3. Die SNCF Metrik

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ \|x\| + \|y\| & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

definiert auf $\mathbb{R}^2$ eine Topologie $\mathcal{T}$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichnet.

(a) Zeige, dass die einpunktige Menge $\{x\}$ mit $x \in \mathbb{R}^2$ genau dann offen bzgl. $\mathcal{T}$ ist, wenn $x \neq 0$.

(b) Bestimme eine (möglichst einfache) Basis von $\mathcal{T}$.

(c) In welchen Punkten ist die Abbildung $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ mit $f(x,y) = (x+1, y)$ stetig?

Aufgabe 4. Es seien X ein metrischer Raum, $a \in X$, $r \geq 0$ und $K_a := \{x \in X \mid d(x,a) \leq r\}$. Zeige:

(a) Ist X ein normierter Raum (d. h. $d(x,y) = \|x - y\|$ für eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem reellen Vektorraum X) ungleich dem Nullvektorraum, so gilt $\partial K_a = \{x \in X \mid d(x,a) = r\}$.

(b) In einem beliebigen metrischen Raum ist die Aussage in (a) falsch.