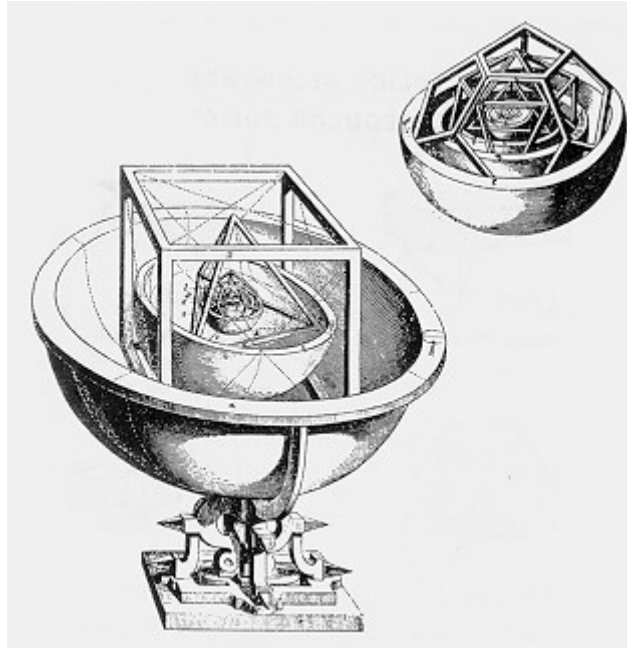


Mecânica Celeste - Gravitação

Ederson de Moura

ederbsd@gmail.com



“A Astronomia compele a alma a olhar para o alto nos transporta deste mundo para outro”.
Platão.

“Sie sprachen aber: Herr, sieh, hier sind zwei Schwerter. Er aber sprach zu ihnen: Es ist
genug”. Lukas, 22:38.

Quando abordamos o estudo da Gravitação, estamos considerando uma das quatro únicas interações fundamentais conhecidas, denominadas “As forças básicas da Natureza” são elas as interações gravitacionais; interações eletromagnéticas; interações fortes; interações fracas. A evolução da teoria da Gravitação sempre esteve diretamente ligada à história da Astronomia, a evolução das idéias sobre o sistema solar desempenhando um papel especialmente importante. Nesse capítulo irei descrever sucintamente toda essa evolução a partir da mais remota antiguidade. Em conjunto com o livro está sendo desenvolvida uma biblioteca com algoritmos astronômicos e físicos, que aborda a Física Computacional para resolução dos mais variados problemas, inclusive os aqui propostos.

10.1 Esferas Celestes

Há dois aspectos das observações astronômicas que complicam consideravelmente sua interpretação um deles é o fato de que os corpos celestes observados estão muito distante da Terra (mesmo os mais próximos), de modo que usualmente só os vemos como pontinhos luminosos, e quando falamos de sua “posição” referimo-nos em geral à direção em que são observados, sempre que possamos estimar a sua distância. É natural projetar essas direções sobre a “abobada celeste”, uma esfera de raio muito grande como se tratasse de pontos sobre a superfície dessa esfera.

A outra complicação é devido ao movimento de rotação da Terra em torno do seu eixo. Somos observadores sobre uma espécie de plataforma gigante como um corrossel, e os movimentos aparentes dos corpos celeste vistos da Terra, refletem este movimento de rotação. A (Figura 10.1.1 abaixo) mostra a “*esfera celeste*” que é a esfera de raio muito grande sobre o qual

projetamos as posições observadas dos corpos celestes, com seus pólos norte (*PN*) e sul (*PS*), projeções dos pólos correspondentes da Terra, e o *Equador Celeste*, projeção do da Terra sobre a esfera celeste.

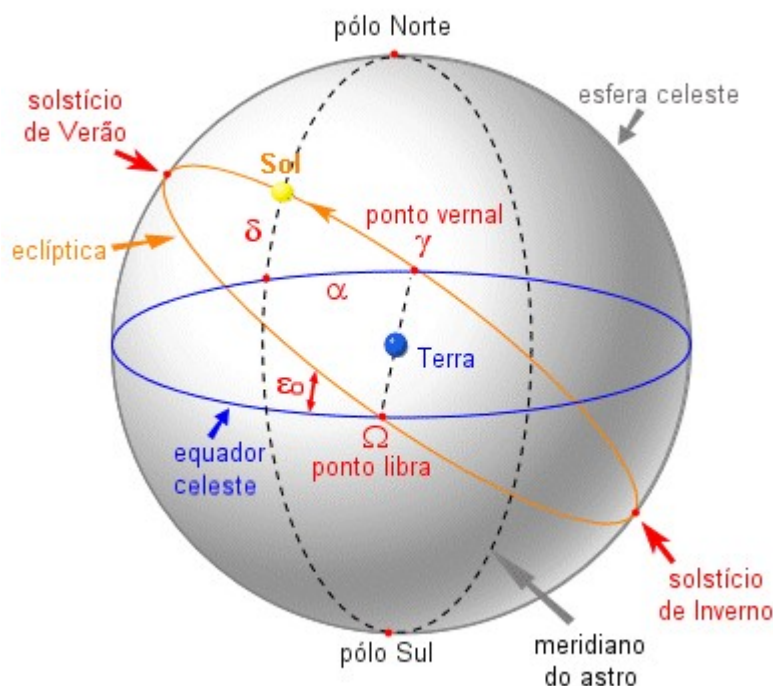


Figura 10.1.1

Consideremos um observador a $0'$ na Europa, a cerca de 45° de latitude norte, e o plano horizontal correspondente (tangente à Terra em $0'$), bem como sua projeção sobre a esfera celeste, o plano do horizonte. A figura mostra os pontos cardeais do observador nesse plano, *N*, *S*, *E* e *W*. A direção *N*, por exemplo: é aquela em que $0'$ se deslocaria para ir em direção ao pólo norte da Terra.

A Terra gira em torno do seu eixo (direção *PS-PN*) no sentido *anti-horário*, isso produz o movimento aparente do corpo celeste C (Figura 10.1.1 acima) sobre um círculo,

C_1, C_2, C_3 na esfera celeste em sentido oposto, ou seja no sentido *horário*. São os círculos desse tipo que aparecem em uma fotografia de longa exposição do céu noturno. O observador $0'$ só vê C quando está acima do seu plano do horizonte. Assim, se C é Sol, por exemplo, $0'$ o veria nascer em C_1 . Descrever C_1, C_2, C_3 , e C por-se em C_3 ; a porção C_3 ,

C_1 , abaixo do horizonte, não é vista. Note que somente corpos celestes situados sobre o equador celeste se erguem ao leste verdadeiro do observador se põe exatamente ao oeste.

Em seu movimento circular aparente diário sobre a esfera celeste, o Sol não retorna exatamente ao ponto de partida após 24 horas. Isso pode ser observado, a cada por de Sol, quando as estrelas aparecem a cada noite, o Sol terá se deslocado aproximadamente 1° (cerca de duas vezes o seu diâmetro aparente) em relação às estrelas vizinhas no horizonte, descrevendo outro círculo (360°) na esfera celeste em um ano. Este círculo que representa a órbita aparente do Sol na esfera celeste quando descontamos seu movimento diurno aparente, chama-se *eclíptica*, e é descrito no movimento *anti-horário* (oposto ao movimento aparente diurno), ou seja, cada dia o Sol se põe um pouco mais ao leste. O plano da eclíptica (Figura

10.1.1 acima) está inclinado de ($\approx 23\frac{1}{2}^\circ$) em relação ao do equador celeste, e corta o plano

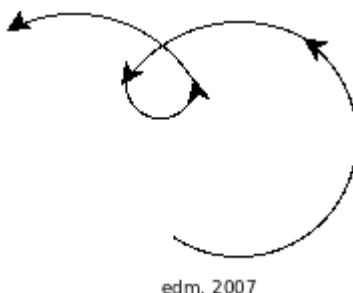
do equador nos pontos D e R . Os dias em que Sol está nesses pontos da eclíptica são os dois únicos dias do ano em que ele se ergue exatamente a leste e se põe exatamente a oeste.

São também os dias em que o Sol passa tempos exatamente iguais acima e abaixo do horizonte, em que a duração do dia é igual à da noite. São os dias de 21 de março R e 22 de setembro (D), que correspondem aos equinócios no hemisfério norte, o primeiro é o da primavera e o segundo o de outono; no hemisfério sul, é o contrário.

O ponto R , que se chama o *primeiro ponto de Aries* (a notação corresponde ao símbolo do Zodíaco), define o análogo do meridiano de Greenwich para a esfera celeste. O análogo da latitude chama-se declinação e varia de 0° a $+90^\circ$ (PN) ou -90° (PS), análogo da longitude chama-se *ascensão reta*, e varia de 0° a 360° a partir de R .

Há 5 planetas visíveis a olho nu, conhecidos desde a mais remota antiguidade: *Mercúrio*, *Vênus*, *Marte*, *Júpiter* e *Saturno*. A palavra “planeta” se origina de uma palavra grega que significa “errante”; a razão é que, como o Sol e a Lua, os planetas descrevem ordem aparentes adicionais sobre a esfera celeste depois de descontado o movimento diurno. Essas órbitas, que geralmente não se afastam muito do plano da eclíptica, são também descritas geralmente em direção leste, ou seja, sentido contrário ao do movimento diurno (como no caso o Sol). São órbitas fechadas, e o tempo que o planeta leva para voltar ao ponto de partida (visto da Terra) chama-se o *período sinódico* correspondente: para Mercúrio, é da ordem de 3 meses; para Júpiter e Saturno, é de pouco mais de um ano.

Ao contrário da eclíptica, as órbitas aparentes dos planetas podem se afastar bastante de órbitas circulares descritas com movimento aproximadamente uniformes. Em certas épocas (para Mercúrio, 3 vezes por ano), o planeta tem um *movimento retrógrado*, ao seja, “volta para trás”, descrevendo uma espécie de laço (Figura 10.1.2 abaixo).



edm. 2007

Figura 10.1.2

A idéia mais simples é provavelmente mais antiga sobre o movimento aparente das estrelas é imaginar que a esfera celeste seja uma esfera material, à qual estão presos os corpos celestes, e que se encontra em rotação uniforme em torno da Terra, entretanto, este modelo não explicaria o movimento irregular dos planetas.

No princípio do século IV A.C, Platão propôs a seus discípulos um problema que teve grande influência no desenvolvimento posterior das teorias sobre o sistema solar: “Quais são os movimentos uniformes e ordenados cuja existência é preciso supor para explicar os movimentos aparentes dos planetas?” A idéia de Platão era de que todo o universo deveria ser explicável em termos e formas e figuras “perfeitas”, como círculos e esferas, e de movimentos uniformes.

Em quando se tratava somente do movimento aparente diurno das estrelas, bastava imaginar uma “*esfera terrestre*” fixa e uma “*esfera celeste*” concêntrica, girando uniformemente em torno da primeira. Entretanto, para explicar ao mesmo tempo os movimentos aparentes diurno e anual, por exemplo para o Sol, segundo o programa platônico, isso não bastava. Eudoxo, discípulo de Platão, imaginou um sistema muito engenhoso, em lugar de duas esferas apenas, haveria diversas “esferas celestes” homocêntricas, presas umas às outras de tal forma que lhes permitisse girar em torno de eixos diferentes (inclinados entre si) como movimentos uniformes de velocidade diferente, como no sistema de suspensão de um giroscópio (Figura 10.1.3 abaixo).

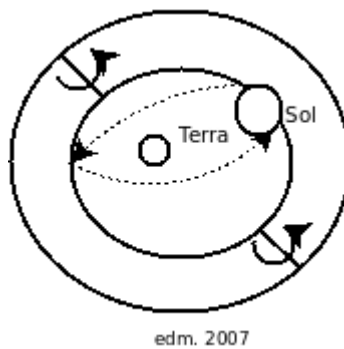


Figura 10.1.3

Assim, para o Sol, a esfera externa poderia representar o movimento de rotação diurno, a interna, à qual o Sol estaria preso, giraria solidariamente com a externa, com seu eixo inclinado em relação ao dela, mas ao mesmo tempo giraria em torno dele, correspondendo à rotação anual (eclíptica). Para um planeta, haveria 3 ou 4 esferas, com eixos de inclinações diferentes e com velocidade diferente, o que permitia reproduzir inclusive os movimentos retrógrados. Eudoxo aparentemente não pensava nas suas esferas como objetos físicos reais, considerando-as apenas como artefatos matemáticos. Entretanto, Aristóteles interpretou-as como objetos materiais “esferas cristalinas”, chegando finalmente a um gigantesco mecanismo formado por 55 esferas, todas movidas pela mais externas “Motor Primário”. Um sistema deste tipo serviu de base ao esquema do universo descrito por Dante na “Divina Comédia.”.

10.2 Ptolomeu

O modelo das esferas celestes continha uma contradição séria com a experiência: o brilho aparente dos planetas varia no decurso de suas órbitas, particularmente quando retrogridem, sugerindo que eles se aproximam e se afastam da Terra, o que seria incompatível com estarem se deslocando sobre uma esfera geocêntrica (a distância da Terra).

Os próprios astrônomos gregos propuseram um outro modelo que não sofria deste defeito. Ele foi proposto originalmente pelo grande astrônomo grego Hiparco de Rodas, no século II A.C, e depois elaborado por Cláudio Ptolomeu de Alexandria (século II A.D). O modelo permanece fiel ao programa platônico, empregando somente figuras “perfeitas” círculos e movimentos uniformes. O modelo geocêntrico de Ptolomeu permitiu reproduzir com muito boa aproximação mesmo os aspectos mais complicados observados no movimento dos planetas.

Como explicar o movimento retrógrado em termos de movimentos circulares uniformes? A idéia básica é que a órbita do planeta em torno da Terra é a resultante de dois movimentos circulares uniformes acoplados (Figura 10.2.1 abaixo).

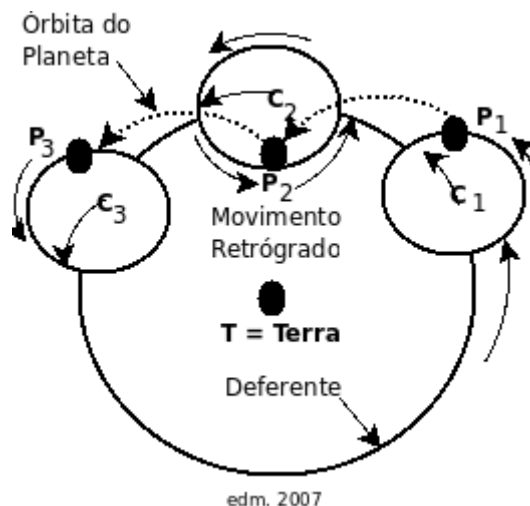


Figura 10.2.1

O planeta (mostrado nas posições sucessivas P_1, P_2, P_3 na figura ao acima) por sua vez, se move com movimento circular uniforme sobre outro círculo “*deferente*” com o centro da Terra. Órbitas deste tipo seriam descritas por um ponto preso na periferia de disco de rotação se transportássemos o toca-discos como um todo ao longo de uma trajetória circular com movimento uniforme. A figura acima mostra como se podem obter assim órbitas de planetas com movimentos retrógrado. Vemos ainda que este ocorre na porção do “*epiciclo*” interno ao deferente, ou seja, quando o planeta está mais próximo da Terra, devendo então seu brilho aparente ser maior durante o movimento retrógrado.

Ptolomeu ainda teve de introduzir outras modificações nesse esquema para explicar anomalias adicionais observadas em alguns casos: a velocidade angular do centro epiciclo em torno da Terra sobre pequenas variações, e o movimento retrógrado não tem sempre o mesmo aspecto e duração.

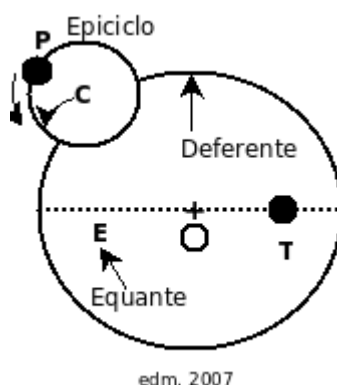


Figura 10.2.2

Ptolomeu mostrou que estas irregularidades podiam ser reproduzidas deslocando a Terra para uma posição T *excêntrica*, isto é, não coincidente com o centro 0 do círculo deferente, e supondo que o centro C uniforme não em relação a 0 ou T , mas com respeito a outro ponto E chamado “equante” (Figura 10.2.2 acima).

Com essas adaptações, o modelo de Ptolomeu permitia descrever e prever as posições dos planetas com precisão notável para a época: dentro de aproximadamente 2° . A sua obra, que representa o apogeu da astronomia antiga, pôde assim prevalecer durante 15 séculos. Entre os árabes, a obra de Ptolomeu tornou-se conhecida como o “*Almagesto*” o que significa “o maior dos livros”.

10.3 Copérnico

Nikolaus Koppernik (1473-1543) viveu na época do Renascimento e da Reforma, um período turbulento de grandes inovações em muitos campos, em que muitas autoridades anteriormente aceitas foram questionadas. As explorações dos grandes navegadores exigiam dados mais precisos e mostravam que havia erros na geografia de Ptolomeu por que não no resto de sua obra? Erros acumulados durante séculos demandavam uma reforma do calendário, tornando necessários melhores conhecimentos de astronomia. A idéia de um sistema heliocêntrico, ou seja como o centro das órbitas circulares colocado no Sol, em lugar da Terra, já havia também sido proposta pelos astrônomos gregos em particular por Aristarco de Samos no século 3 A.C. A rotação diurna aparente da esfera celeste em torno da Terra, em sentido oposto, em torno de seu eixo.

Analogamente, seria a Terra que descreveria uma órbita circular em torno do Sol, e não a recíproca. Entretanto os astrônomos gregos contemporâneos haviam refutado a teórica heliocêntrica com base num argumento muito convincente: a ausência de qualquer observação de paralaxe estelar. Se a Terra se movesse em torno do Sol, o ângulo θ_1 entre as direções aparentes de duas estrelas fixas E e E' vistas da Terra na posição T_1 (Figura 10.3.1

abaixo) seria diferentes em diferentes épocas do ano ($\theta_1 \neq \theta_2$ na Figura 10.3.1), e esse efeito de paralaxe nunca fora observado. Não se concebia, naturalmente, que as estrelas, mesmo as mais próximas da Terra, estão tão distantes que o efeito é inobservável a olho nu; mesmo com telescópio, só foi detectado em 1838.

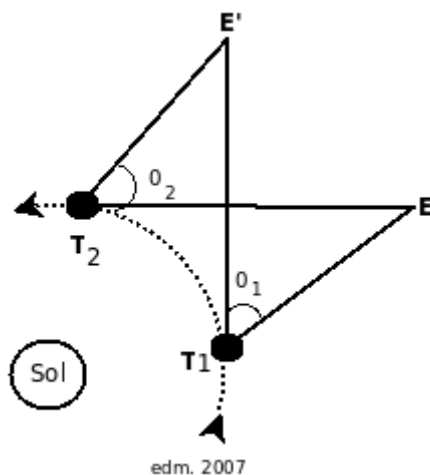
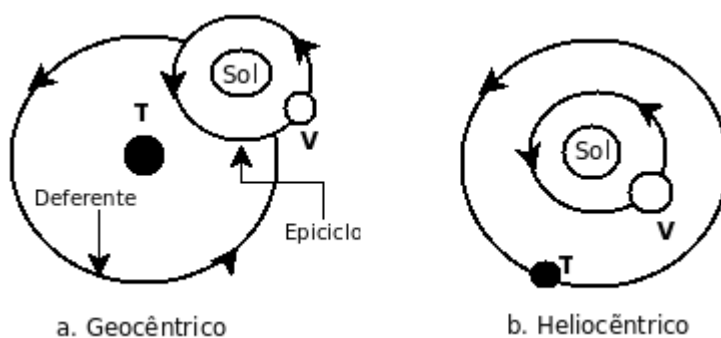
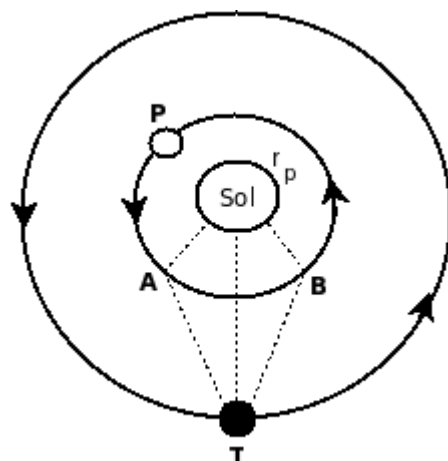


Figura 10.3.1

O grande tratado de Copérnico “*De Revolutionibus Orbium Celestium*” (“*Sobre as revoluções das Esferas Celestes*”, 1543), como o título indica, era conceitualmente ainda bastante próximo da astronomia grega. O que ele procurou demonstrar foi que a principal vantagem do ponto de vista heliocêntrico seria a de simplificar a descrição, explicando as mesmas observações anteriores através de movimentos ainda mais próximos do ideal platônico sem utilizar, por exemplo, o artifício dos equantes de Ptolomeu. A passagem da descrição geocêntrica à heliocêntrica está ilustrada na (figura 10.3.2) para órbita de *Vênus* (V), que é um dos planetas *internos*, ou seja, situado entre a Terra (T) e o Sol (S). Vemos que nesse caso, o deferente é substituído pela órbita da Terra em redor do Sol, e o epiciclo pela órbita da Terra em redor do Sol. É fácil ver verifique que, para um planeta *externo*, como Júpiter, os papéis do epiciclo e do deferente são trocados. Aí aparece uma das vantagens da descrição *heliocêntrica*. No sistema de Ptolomeu, os períodos associados ao deferente para os planetas internos e ao epiciclo para os externos eram todos iguais para 1 ano solar. Essa aparente coincidência é imediatamente explicada pelo sistema heliocêntrico: esses períodos nada mais são do que a descrição geocêntrica do período da Terra em sua órbita em torno do Sol.



Outra grande vantagem do sistema heliocêntrico é que ele permitiu a Copérnico deduzir pela primeira vez a **escala relativa das distâncias** dentro do sistema solar. No sistema geocêntrico, a escala das distâncias era arbitrária: só importava a razão entre os raios do epiciclo e do deferente, e não os valores absolutos desses raios. Já para Copérnico os deferentes dos planetas internos e os epiciclos dos externos se transformavam todos na órbita da Terra em torno do Sol, cujo raio médio r_T é hoje chamado de “unidade astronômica”, e se tornava possível determinar os raios das demais órbitas planetárias com respeito a essa unidade.



Vejamos como isto se faz. Os planetas internos nunca são observados muito afastado do Sol, permanecendo sempre dentro de um ângulo máximo θ da linha que vai da Terra (T) ao Sol (S), onde θ é da ordem de $22,5^\circ$ para Mercúrio e de 46° para Vênus. A (figura a cima), onde TA e TB são tangentes à órbita do planeta (P), dá a explicação heliocêntrica desse fato, e mostra que:

$$\sin\theta = r_p / r_T \quad (10.3.1)$$

onde r_T é o raio da órbita do planeta e r_T o da Terra. Conhecendo θ , isto permite determinar r_p / r_T : para Vênus, P.

Exemplo: como $\sin 46^\circ \approx 0.72$, obtemos $r_p \approx 0.72 \text{ U.A.}$. Para os planetas externos é r_T / r_p que se obtém por método análogo. A tabela abaixo compara os raios médios das órbitas planetárias (em U.A) obtidos por Copérnico com os valores aceito atualmente.

Planeta	Copérnico	Atual
Mercúrio	0,3763	0,3871
Vênus	0,7193	0,7233
Marte	1,5198	1,5237
Júpiter	5,2192	5,2028
Saturno	9,1743	9,5388

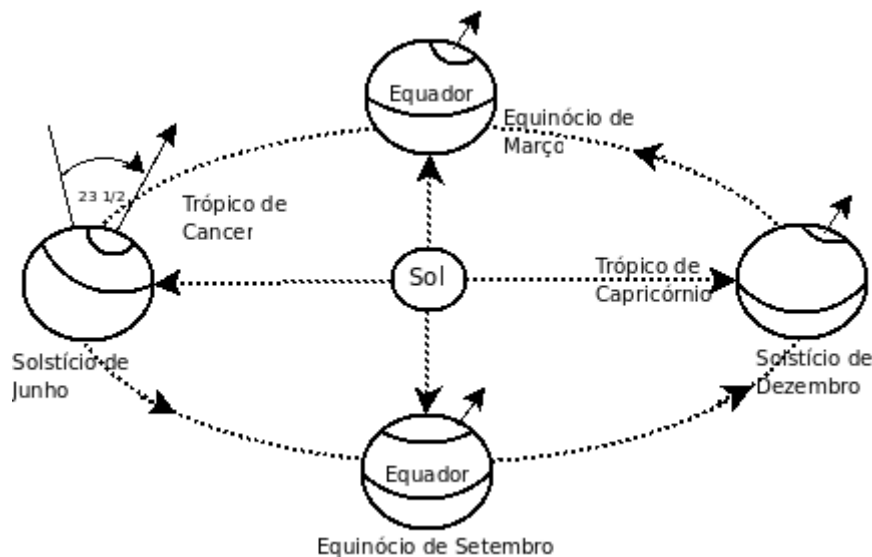
Como vemos, os valores são notavelmente próximos. O passo seguinte de Copérnico foi obter a partir dos períodos sinódicos dos planetas, seus **períodos siderais**, ou seja, os períodos heliocêntricos das órbitas em torno do Sol. Para os planetas internos, que se movem mais rapidamente do que a Terra, deixando-a para trás, o número aparente visto da Terra de revoluções por ano é menor do que o número real (sideral) de uma unidade correspondente á revolução da Terra em torno do Sol no mesmo período. Considerações análogas se aplicam a um planeta externo. A tabela abaixo compara os períodos obtidos por Copérnico com os valores aceitos atualmente.

Planeta	Período Sinódico em dias - Copérnico	Período Sideral Copérnico	Período Sideral Moderno
Mercúrio	115,88	87,97 dias	87,97 dias
Vênus	538,92	224,70 dias	224,70 dias
Terra	--	365,26 dias	365,26 dias

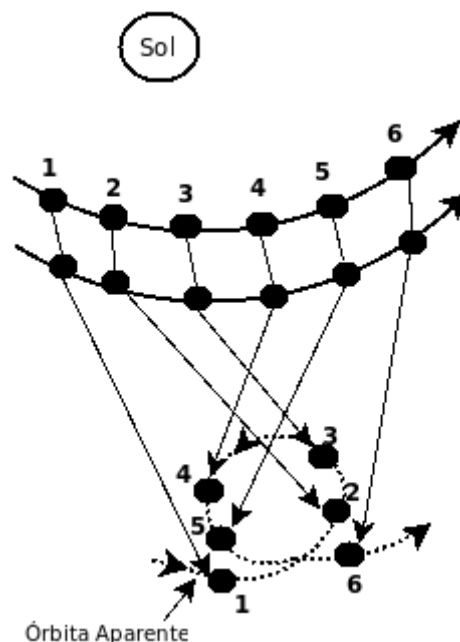
Planeta	Período Sinódico em dias - Copérnico	Período Sidal Copérnico	Período Sidal Moderno
Marte	779,04	1,882 anos	1,881 anos
Júpiter	398,96	11,87 dias	11,862 dias
Saturno	378,09	29,44 dias	29,457 dias

Esses resultados ilustram a precisão dos dados de Copérnico, baseado nas observações dos astrônomos da antiguidade. Comparando-os com os da tabela anterior, mostram também que o período sidal ao contrário do sinódico cresce regularmente com o raios médio da órbita.

A explicação da eclíptica (figura XXXXX) e das estações segundo o sistema heliocêntrico decorre de não ser o eixo de rotação da Terra perpendicular ao plano de sua órbita em redor do Sol.



O eixo da Terra tem uma direção fixa no espaço, a de Polaris (a menos da precessão dos equinócios). Essa direção, que é transformada ao longo do plano da órbita, faz um ângulo de ($23 \frac{1}{2}$ Grau) com a normal a esse plano (figura acima), que é o mesmo da eclíptica. É verão no hemisfério sul quando, devido à obliquidade do eixo os raios diretos do Sol atingem a Terra no Trópico de Capricórnio, a ($23 \frac{1}{2}$ Grau) ao sul do Equador.



A explicação heliocêntrica do movimento retrógrado de um planeta externo está ilustrado da (Figura acima XXX). O planeta se move mais lentamente. Em consequência, quando a Terra passa entre o Sol e o planeta, ela o ultrapassa com maior rapidez, e o órbita aparente do planeta, projetada sobre a esfera celeste, mostra um movimento retrógrado. Com isso sucede quando o planeta está mais próximo da Terra, seu brilho é maior.

A obra de Copérnico atingia não apenas dogmas científicos, mais também religiosos. Em 1600, Giordano Bruno, que havia defendido a doutrina de Copérnico bem como a idéia de que o universo é infinito e eterno, e o Sol uma estrela como as outras, foi queimado em Roma por ordem da Igreja. Seu comentário final no julgamento foi: “Espero vossa sentença com menos medo do que promulgais. Chegará o tempo em que todos verão como eu vejo”. Em 1916, o tratado de Copérnico foi colocado no Index pela Igreja.

10.4 Tycho Brahe e Johannes Kepler

A obra de Copérnico, que se havia baseado em dados obtidos na antiguidade, trouxe um novo impulso à astronomia de observação. As primeiras observações novas de grande valor foram feitas, no final do século 16, pelo dinamarquês Tycho Brahe (1546-1601).

Graças ao apoio do rei Frederico II, Tycho conseguiu montar em Uraniborg um grande observatório, um projeto comparável na época ao que seria um grande acelerador em nossos dias.

Todas as observações eram feitas a olho nu (não existia telescópios), mas com instrumentos de grande proporções, cuidadosamente calibrados e utilizando dotes incriveis de observação. Tycho dedicou toda a sua vida à coleta de dados sobre o movimento dos planetas. Conseguindo atingir uma precisão pelo menos duas vezes superior à das melhores observações da antiguidade.

Tycho propôs um modelo intermediário entre os de Ptolomeu e Copérnico, em que todos os planetas com exceção da Terra se moveriam em torno do Sol, mas o Sol se moveria em redor da Terra. Tycho não percebeu que seu modelo só diferia do de Copérnico por uma mudança trivial do sistema de referência. Johannes Kepler (1571-1630) foi assistente de Tycho Brahe e seu sucessor no observatório. Kepler foi uma personalidade extremamente curiosa, motivado por uma firme convicção de tipo platônico-pitagórico de que o universo é construído de acordo com um plano matemático, cuja estrutura pode ser deduzida por argumentos de perfeição e da “harmonia das esferas”. Entretanto, ele aliava a essa atitude um grande respeito pelos dados experimentais, não se satisfazendo com qualquer modelo enquanto não levasse a uma concordância praticamente perfeita com a experiência. Desde o início de sua carreira, Kepler foi guiado por uma idéia fantástica, de que os raios das órbitas planetárias deviam ter alguma explicação “geométrica-mística” em termos de figuras perfeitas. Entre os 6 planetas então conhecidos havia 5 distâncias a explicar, número igual ao dos sólidos regulares ou “perfeitos”, os sólidos platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. No seu livro “Mysterium Cosmographicum” (1597), Kepler construiu um modelo utilizando os 5 sólidos regulares inscritos e circunscritos em esferas (figura acima), procurando mostrar que as proporções assim obtidas seriam as mesmas que aquelas entre os raios das órbitas planetárias obtidos por Copérnico. Entretanto, a concordância não era das melhores.

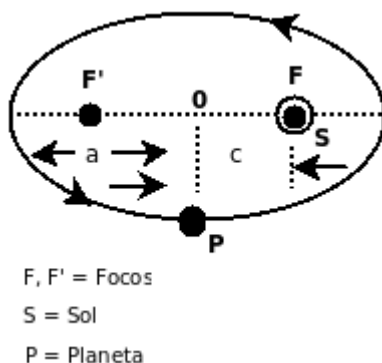
Para tentar salvar seu modelo dos sólidos regulares, Kepler se perguntou então se o centro das órbitas planetárias seria realmente o centro da órbita da Terra em torno do Sol, este ocupando uma posição excêntrica (conforme Copérnico havia suposto), ou se o centro estaria no Sol. Foi para resolver essas questões que ele resolveu tornar-se assistente de Brahe, a fim de obter dados mais precisos sobre a órbita da Terra e dos demais planetas.

Tycho Brahe morreu depois de apenas um ano de colaboração, deixando a Kepler o legado de suas observações. Após quatro anos de árduo trabalho, Kepler conseguiu mostrar que, corrigindo a teoria de Copérnico no sentido de dar ao Sol a posição central, obtinha-se melhor acordo com a experiência.

Para a órbita de Marte, porém, persistia um desvio de 8 minutos de arco. Embora muito pequeno, e compatível com precisão das observações utilizadas por Copérnico, esse desvio estava em desacordo com a extraordinária precisão das observações de Tycho Brahe, que Kepler sabia serem confiáveis dentro de pelos menos 4 minutos de arco. Este ângulo é da ordem daquele subtendido pela ponta de uma agulha à distância de braço estendido da vista! “Construirei uma teoria do universo baseada nesta discrepância de 8 minutos de arco”, afirmou Kepler. Para isto, resolveu abandonar qualquer idéia preconcebida inclusive o programa platônico de explicar tudo em termos de movimentos circulares uniformes e determinar a órbita de Marte. Depois de mais dois anos de trabalho, o resultado obtido foi uma órbita oval em lugar de circular, com o Sol no eixo mas não no centro. Após inúmeras tentativas infrutíferas de identificação da curva, Kepler acabou descobrindo que a órbita de Marte era uma **elipse**, com o Sol situado num dos focos e que o mesmo valia para os demais planetas. Obteve assim a primeira de suas três grandes leis:

1. Lei de Kepler (lei das órbitas): “As órbitas descritas pelos planetas em redor do Sol são elipses com o Sol num dos focos”

Se a é o semi-eixo maior de uma elipse e c a semi-distância focal (figura ao abaixo XXX), a razão $e=c/a$ chama-se a **excentricidade** da elipse. Para $e=0$, a elipse degenera num círculo, quando maior for e mais “achatada” a elipse. A tabela ao lado dá os valores de e para as órbitas dos planetas conhecidos na época de Kepler.



Planeta	e
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056

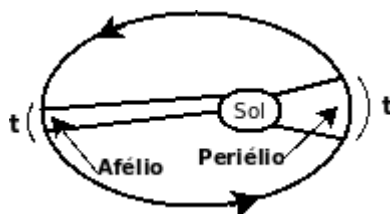
Embora a de Mercúrio seja mais excêntricas, havia poucas observações de Mércurio disponíveis. A órbita de Marte, utilizada por Kepler, era mais, excêntrica depois da de Mercúrio.

Além de verificar que a órbita de Marte não é circular, Kepler também percebeu através de suas observações que o movimento do planeta ao longo da órbita não é uniforme: a velocidade é maior quando ele está mais próximo do Sol, Kepler procurou entender estes resultados em termos de uma ação do Sol como causa dos movimentos dos planetas. Para isto, imaginou um modelo extremamente peculiar, em que o Sol teria uma rotação em torno de seu eixo e emitiria raios confinados somente ao plano da órbita que atuariam lateralmente sobre o planeta, “varrendo-o” em torno da órbita, tangencial à órbita em lugar de central, e supôs ainda que variasse inversamente com distância. Partindo desse modelo inteiramente errado

Kepler fez um cálculo também errado das áreas áreas varrida pelo raio vetor que liga cada planeta ao Sol, e acabou chegando, miraculosamente, à lei certa:

2. Lei de Kepler (lei das áreas): “O raio vetor que liga um planeta ao Sol descreve áreas iguais com tempos iguais”

Assim, num dado intervalo de tempo t , o planeta descreve uma porção maior da órbita quando está no periélio (posição mais próxima do Sol) do que no afélio (posição mais distante do Sol, (Figura abaixo XXX) .



Kepler acabou percebendo que tinha cometido erros que se cancelavam, e procurou explicar por que. A explicação que ele deu também estava errada! Kepler publicou as duas primeiras leis em seu livro “Astronomia Nova” (1609). Foi só muitos anos mais tarde que chegou à formulação de sua 3. lei. Deste sua juventude, ele havia procurado correlacionar umas com as outras as órbitas planetárias, através de alguma regularidade ligando os raios médios das órbitas, bem como seus períodos de revolução. Foi só perto do fim de sua vida, em 1618, após inúmeras tentativas infrutíferas, que ele acabou descobrindo a regularidade que buscava, na forma de sua 3. lei:

3. Lei de Kepler (lei dos períodos): “Os quadrados dos períodos de revolução de dois planetas quaisquer estão entre si como os cubos de suas distâncias medias ao Sol”

Assim, se T_1 e T_2 são os períodos de revolução de dois planetas cujas órbitas têm raios médios R_1 e R_2 , respectivamente, a 3. lei afirma que:

$$(T_1/T_2)^2 = (R_1/R_2)^3 \quad (10.4.1)$$

Kepler exultou com sua descoberta: “A 8 de março deste ano de 1618, ... a solução apareceu-me na cabeça. Mas, eu estava sem sorte, e quando a testei pelo cálculo rejeitei-a como falsa. Afinal, a idéia voltou-me em 15 de maio, e em novo ataque conquistou a obscuridade da minha mente; concordava tão perfeitamente com os dados obtidos em meus dezessete anos de trabalho sobre as observações de Tycho que pensei primeiro estar sonhando...”.

Verificação da 3. lei de Kepler:

A tabela abaixo ilustra o teste feito por Kepler com seus dados e os valores atuais:

Planeta	Valores de Copérnico: T (anos)	Valores de Copérnico : R (U.A)	Valores de Copérnico : T ² /R ³	Valores atuais: T (anos)	Valores atuais: R (U.A)	Valores atuais: T ² /R ³
Mercúrio	0,241	0,38	1,06	0,241	0,387	1,00
Vênus	0,614	0,72	1,01	0,615	0,723	1,00
Marte	1,881	1,52	1,01	1,881	1,524	1,00
Júpiter	11,8	5,2	0,99	11,862	5,203	1,00
Saturno	29,5	9,2	1,12	29,457	9,539	1,00

Note que para Terra, por definição, $T=1$ ano e $R=1$ U.A., de modo que $T^2/R^3=1$.

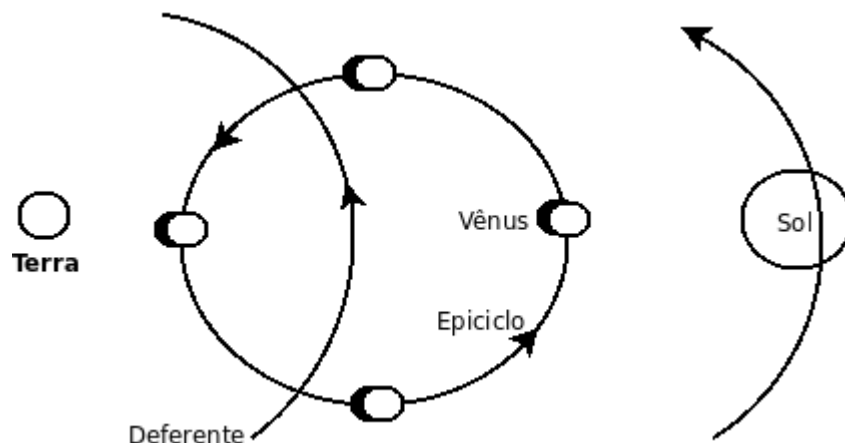
Kepler publicou sua 3. lei em 1619, no prefácio de seu livro “*Harmonices Mundi*”, onde também escreveu: “Os dados estão lançados; estou escrevendo este livro – não importa se para ser lido pelos meus contemporâneos ou pela posteridade. Ele pode esperar 100 anos por um leitor, já que Deus pôde esperar 6.000 anos pelo aparecimento de um contemplador da sua obra”. O título do livro se refere a uma interpretação literal por Kepler da “harmonia das esferas”, procurando demonstrar que os planetas, em seu movimento, executam uma espécie de música celeste. Cada planeta emitiria uma ou mais notas musicais conforme suas variações de velocidade na órbita. Vênus, com a menor excentricidade, emitiria sempre a mesma nota; Marte, cuja excentricidade na órbita leva a maiores variações de velocidade, emitiria várias notas diferentes, correspondendo à melodia ilustrada ao lado... (Figura XXXXXXXXXX). Kepler também foi autor de uma das primeiras obras de ficção científica, “*Somnium*”, onde descreve uma viagem à Lua.

10.5 Galileu

Depois da invenção do telescópio, usualmente atribuída ao holandês Lippershey, alguns desses instrumentos (utilizados como brinquedos) foram levados por viajantes para Itália. Em 1609, Galileu construiu uma versão aperfeiçoada, que ampliava a área dos objetos por fator da ordem de 1.000, reduzindo sua distância aparente por um fator da ordem de 30, e apontou-o pela primeira vez para o céu. Foi um dos grandes momentos da história da ciência: Galileu fez logo toda uma série de descobertas sensacionais. Olhando para a Lua, verificou que não era uma esfera perfeita como pretendiam os aristotélicos, mas tinha vales profundos e cadeias de montanhas elevadas, cuja altura conseguiu estimar, a partir da sombra projetada pelos raios solares, como sendo comparável à das montanhas terrestres. As estrelas visíveis a olho nu eram apenas uma pequena parte das que apareciam no telescópio, “incrivelmente numerosas”.

Observando Júpiter, Galileu teve sua curiosidade despertada pelo que pareciam ser três “estrelinhas, pequeninas mais muito brilhantes”, alinhadas com o planeta. Repetindo as observações em noites sucessivas, durante algumas semanas, percebeu que as “estrelinhas” mudavam de posição com respeito a Júpiter, e que na verdade eram quatro, das quais uma ou duas se ocultavam por vezes atrás do planeta, o que registrou numa série de esboços: *** 0 *, ** 0 *, * 0 **, ...

Galileu concluiu que se tratava de quatro satélites de Júpiter, cujos períodos de revolução mediu. Era um caso claro de corpos celestes girando em torno de um planeta diferente da Terra, em contradição com o sistema geocêntrico. Estudando Vênus com seu telescópio, Galileu fez outra importante descoberta: observou que Vênus mostrava “fases”, como a Lua: ora aparecia como um círculo, ora como um semicírculo, em “quatro minguante”, etc... Por conseguinte, não tinha luz própria: refletia a luz do Sol. Mas essas observações, também contradiziam frontalmente o modelo de Ptolomeu, segundo o qual a órbita de Vênus deveria ser um epiciclo inteiramente contido entre o Sol e a Terra, o que levaria Vênus a aparecer sempre da mesma forma como um crescente iluminado (Figura abaixo XXX), sem mostrar “fases”.



Galileu publicou essas observações em 1610, em seu livro “Sidereus Nuncius” (“O Mensageiro das Estrelas”), causando grande sensação, ao mesmo tempo em que provocava uma controvérsia apaixonada. As observações foram postas em dúvida; quando Galileu quis demonstrá-las, alguns de seus colegas professores recusaram—se até mesmo a olhar para o telescópio. Um deles, Libri, morreu pouco depois, levando Galileu a comentar: “Libri não quis observar minhas novidades celestes enquanto estava na Terra; talvez o faça agora que foi para o céu”.

Com a ascensão do novo Papa Urbano VIII, que tinha demonstrado interesse pela astronomia e pelas descobertas de Galileu, este acabou decidindo-se a publicar, em 1632, seu “Diálogo sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo, o Ptolomaico e o Copernicano”, defendendo o ponto de vista de Copérnico. Isto violava uma proibição do papa anterior. Galileu também colocou o argumento predileto de Urbano VIII em defesa de Ptolomeu na boca do personagem Simplicio, cujo nome era bem representativo do papel que desempenhava na obra. Em 1633, Galileu foi julgado pelo Santo Ofício e obrigado a abjurar seus “erros e heresias”. Condenado ao equivalente da prisão domiciliar perpétua, aproveitou os nove anos que lhe restaram para escrever e fazer publicar clandestinamente sua grande obra “Diálogos sobre Duas Novas Ciências”.

Na margem de uma página do seu próprio exemplar dos “Diálogos sobre os dois Principais Sistemas do Mundo” encontra-se a seguinte anotação de Galileu: “Quando à introdução de novidades. Quem pode duvidar que leve às piores desordens quando mentes que Deus criou livres são compelidas à submissão escrava a uma vontade externa? Quando nos dizem que devemos negar a evidência de nossos sentidos e sujeitá-los ao capricho de outros? Quando pessoas sem qualquer competência são tornadas juízes de peritos e se lhes outorga autoridade para tratá-los como lhes aprouver? São essas as novidades capazes de levar à ruína das comunidades e à subversão do Estado.”

10.6 Newton e a Lei da Gravitação Universal

Isaac Newton nasceu em 1642, no dia de Natal. Filho póstumo de fazendeiro, teve de custear seus estudos trabalhando, e foi graças à ajuda de um tio que conseguiu entrar em Cambridge em 1661. Quando se bacharelou em 1665, Isaac Barrow, seu professor de matemática, encorajou-o a permanecer em Cambridge.

Naquela época, Londres era uma cidade muito poluída e com péssimo saneamento. Num livro onde se propunha um plano para reduzir a poluição atmosférica produzida por chaminés de indústrias, “Fumifugium”, de John Evelyn, publicado em 1661, lê-se: “O viajante fatigado, a muitas milhas de distância, reconhece a cidade pelo olfato antes que pela vista.” No verão de 1665, a peste se alastrou rapidamente por Londres e dizimando cerca de 70.000 pessoas, a sétima parte da população. Um ano mais tarde sobreveio o Grande Incêndio de Londres, que arrasou dois terços da cidade.

A peste provocou o fechamento da Universidade e Newton refugiou-se em sua fazenda de Woolsthorpe. A melhor descrição do que fez nesse período foi dada por ele próprio cinquenta anos mais tarde: “ No princípio de 1665, achei o método para aproximar séries e a regra para reduzir qualquer potência de um binômio a uma tal série (binômio de Newton e série binomial). No mesmo ano, em maio, achei o método das tangentes de Gregory e Slusius (fórmula de interpolação de Newton), e em novembro o método direto das fluxões (cálculo diferencial), no ano seguinte em janeiro, a teoria das cores (experiência com o prisma sobre decomposição da luz branca), e em maio os princípios do método inverso das fluxões (cálculo integral), e no mesmo ano comecei a pensar na gravidade como se estendendo até a órbita da Lua, e da lei de Kepler sobre os períodos dos planetas, deduzi que as forças que mantêm os planetas em suas órbitas devem variar inversamente com os quadrados de suas distâncias aos centros em torno dos quais as descrevem: tendo então comparado a força necessária para manter a Lua em sua órbita com a força da gravidade na superfície da Terra, e encontrado que concordavam bastante bem. Tudo isso foi nos dois anos de peste, 1665 e 1666, pois naqueles dias eu estava na flor da idade para invenções, e me ocupava mais de matemática e filosofia (física) do que em qualquer época posterior.”

Para efetuar o cálculo da força gravitacional a que Newton se refere, ele já devia dispor da

formulação dos princípios fundamentais da dinâmica, embora não se refira explicitamente a isso. Todos esses resultados foram obtidos por Newton em sua fazenda, entre 23 e 24 anos de idade! Compreende-se que ele tenha sido considerado por Hume como o maior gênio já produzido pela espécie humana.

A lei da gravitação para órbitas circulares

Como vemos pela tabela (XXXXX), para diversos planetas a excentricidade da órbita elíptica é muito pequena, de modo que podemos tomar a órbita como circular com muito boa aproximação, o que também se aplica a Lua.

A órbita circular é bem mais fácil de tratar do que a elíptica, de modo que vamos reconstruir o argumento de Newton para esse caso. Para uma órbita circular, a 2. lei de Kepler implica que o movimento é **uniforme**, a aceleração nesse caso é centrípeta, e é dada, para uma órbita circular de raio R e de velocidade angular $\omega = 2\pi/T$ (T = período) por:

$$\vec{\alpha} = -\omega^2 R \hat{n} = -4\pi^2 \frac{R}{T^2} \hat{n} \quad (10.6.1)$$

Onde \hat{n} é o vetor unitário na direção radial. Se m é a massa do planeta, a força que atua sobre ele é dada pela 2. lei de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{\alpha} = -4\pi^2 m \frac{R}{T^2} \hat{n} \quad (10.6.2)$$

que é uma força atrativa central (dirigida para o Sol). Pela 3. lei de Kepler temos:

$$\frac{R^3}{T^2} = C = \text{Constante} \quad (10.6.3)$$

onde C tem o mesmo valor para todos os planetas. Logo, podemos reescrever como:

$$\vec{F} = -4\pi^2 C \frac{m}{R^2} \hat{n} \quad (10.6.4)$$

Vemos assim que a lei dos períodos de Kepler leva à conclusão de que a força gravitacional varia inversamente com o quadrado da distância do planeta ao Sol, como Newton afirmou no trecho acima. Pela 3. lei de Newton, o planeta exerce uma força igual e contrária sobre o Sol, o qual deve também ser proporcional à massa M do Sol. Newton foi assim levado à expressão:

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{R^2} \hat{n} \quad (10.6.5)$$

onde G seria agora uma “constante universal”, característica da força gravitacional. Esta é a **lei de Newton da gravitação**. Uma vez inferida a forma da lei, vejamos o que Newton fez para testá-la.

A Lua e a maçã

Em sua “Philosophie de Newton” (1738), Voltaire conta: “Um dia, no ano de 1666, Newton, então em sua fazenda, vendo uma fruta cair de uma árvore, segundo me disse sua sobrinha, começou a meditar profundamente sobre a causa que atrai todos os corpos na direção do centro da Terra.”

A história provavelmente é apócrifa, mas o próprio Newton confirma, no trecho acima citado,

que comparou naquele ano “a força necessária para manter a Lua em sua órbita com força da gravidade na superfície da Terra”. Vamos fazer essa comparação para o caso da maçã, adotando a notação: T=Terra, XXXX=Lua; YYYY=Maçã.

Os módulos das forças mencionadas obtêm-se aplicando a (10.6.5):

$$|\vec{F}_T \lambda| = G \frac{M_T m \lambda}{R_T^2 \lambda} \quad |\vec{F}_T \Phi| = G \frac{M_T m \Phi}{R_T^2 \Phi}$$

Sejam a_{Lua} e a_{Maçã} os módulos das acelerações da Lua e da maçã; esta última é igual a g, aceleração da gravidade na superfície da Terra. Além disso, R_T = R_T (raio da Terra). Temos então:

$$\alpha \lambda = \frac{|\vec{F}_T \lambda|}{m_\lambda} = \frac{GM_T}{R_T^2 \lambda} \quad \alpha \Phi = \frac{|\vec{F}_T \Phi|}{m_\Phi} = \frac{GM_T}{R_T^2 \Phi} \quad (10.6.6)$$

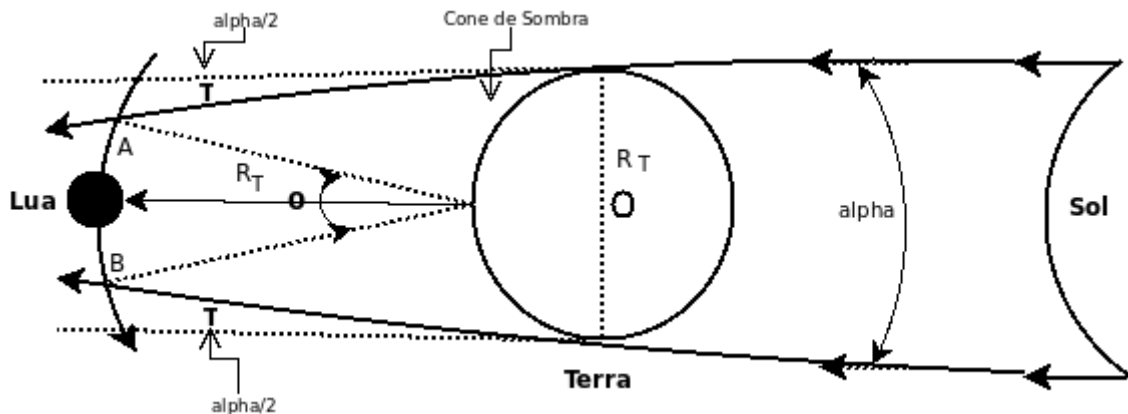
Portanto,

$$\alpha \lambda / \alpha \Phi = \alpha \lambda / g = (R_T / T_T \lambda)^2 \quad (10.6.7)$$

onde G se cancela. Por outro lado, pela (10.6.1), $\alpha \lambda = 4\pi^2 R_T \lambda / T_\lambda^2$ onde T_λ é o período de rotação da Lua em torno da Terra, que é $\approx 27,3 d$. A verificação da (10.6.7) depende portanto apenas do conhecimento de R_T e de $R_T \lambda$.

A distância Terra-Lua

Hiparco baseou-se em observações da duração de eclipse total da Lua. Essa duração:



é o tempo decorrido entre a entrada em (A) e a saída em (B) da Lua no cone de sombra projetado pela Terra (figura XXX acima). A abertura angular do cone de sombra coincide com o diâmetro angular aparente de α do Sol visto da Terra (que, por coincidência, é quase exatamente o mesmo que o da Lua). Hiparco mediu o valor de (x) e obteve.

$$\alpha \approx 0,553^\circ \approx \frac{1}{103,5} \text{ rad} \quad (10.6.8)$$

Hiparco observou que o ângulo 0 descrito pela Lua durante o eclipse total é de aproximadamente 2,5 vezes o diâmetro angular aparente da Lua, ou seja, $0 \approx 2,5\alpha$. Por outro lado, levando em conta que $R_T \lambda \gg R_T$ a (figura acima XXX), mostra que, com muito boa aproximação,

$$2R_T = R_T \lambda \left(0 + 2 \frac{\alpha}{2}\right) \approx R_T \lambda (2,5 \alpha + \alpha) = 3,5 \alpha R_T \lambda$$

o que, levando em conta a (10.6.8), dá:

$$\frac{R_T}{R_T \lambda} \approx \frac{3,5 \alpha}{2} \approx \frac{3,5}{207} \approx \frac{1}{59}$$

(10.6.9)

levando Hiparco a concluir que a distância da Terra à Lua é de 59 vezes o raio da Terra. Na época de Newton, outras determinações já haviam sido feitas levando o valores entre 60 e $60^{1/2}$ (o valor atualmente aceito é ≈ 60.3). Newton usou o valor 60, obtendo assim na (10.6.7)

$$\alpha \lambda / g \approx 1/3.600$$

o que concorda com o valor calculado da aceleração centrípeta da Lua. Daí a afirmação de Newton de que “concordavam bastante bem”.

Newton realizou assim uma das mais notáveis sínteses da história da ciência, relacionando a queda dos corpos na superfície da Terra com a órbita da Lua – primeiro passo no tratamento da “Mecânica Celeste”.

10.7 Os “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”

Em 1669, Newton tornou-se o sucessor de Barrow na cadeira de matemática em Cambridge. Em 1672, apresentou à Royal Society (que havia sido fundada 10 anos antes) seu primeiro trabalho, sobre a natureza da luz branca e sua decomposição espectral. Entretanto, essa publicação provocou uma disputa em Robert Hooke sobre prioridades, e Newton, que era um recluso e profundamente tímido e desconfiado, ficou tão desgostoso que não teria publicado mais nada se não o forçassem a fazê-lo.

No início de 1684, Robert Hooke, Sir Christopher Wren (o arquiteto da St Paul's Cathedral, que também era astrônomo) e Edmund Halley tiveram uma discussão conjunta em Londres sobre qual seria a órbita de um planeta atraído pelo Sol com uma força que variasse com o inverso do quadrado da distância. Seria uma elipse, conforme descrito pela 1. lei de Kepler? Hooke acreditava que sim, e Wren ofereceu-lhe 40 shillings (cerca de US\$ 100 atuais) se o provasse dentro de um tempo prefixado-o que Hooke não conseguiu fazer. Alguns meses mais tarde, Halley foi a Cambridge e perguntou-lhe (sem explicar por que) qual seria a forma da órbita. Newton respondeu imediatamente: “Uma elipse”. - “Como sabe? Tem a prova?” perguntou Halley, ao que Newton respondeu: “Ora, já sei isso há muitos anos. Se me der alguns dias, certamente reconstruirei a prova”.

Com efeito, Newton havia resolvido o problema em 1676 ou 1677, e logo enviou a Halley duas provas diferentes. Com muito esforço, Halley conseguiu persuadi-lo a preparar um tratado em que exporia suas investigações sobre a gravidade e Mecânica Celeste. Newton escreveu-o em 18 meses, e Halley, embora não tivesse muitos recursos, subvencionou a publicação.

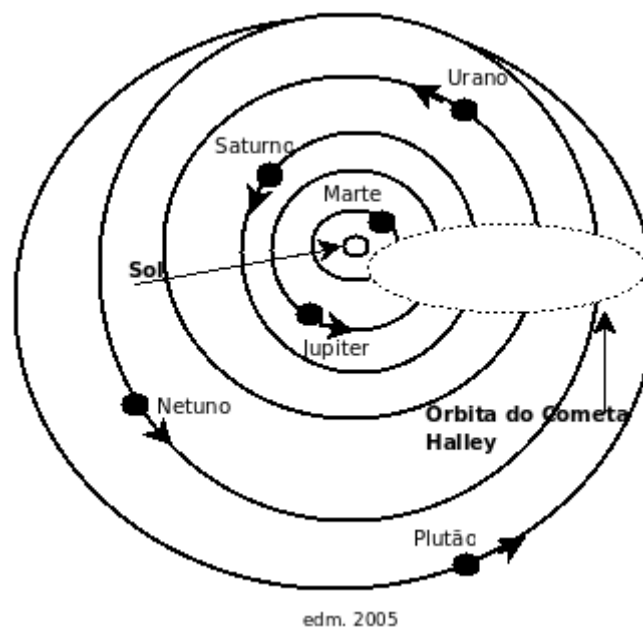
“Philosophie Naturalis Principia Mathematica” (“Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”, usualmente citado como “Principia”), publicado em 1687, é muitas vezes considerado como a obra científica mais importante e de maior influência até hoje escrita.

O que teria levado Newton a aguardar tantos anos antes de publicar os seus resultados? Em parte, isso foi devido a seu caráter e aos revezes anteriores. Entretanto, havia uma dificuldade mais fundamental. Ao calcular a força gravidade na superfície da Terra, admitimos que toda a massa da Terra estivesse concentrada no centro. Como justificar isso? Foi só em 1685 que Newton conseguiu demonstrar (usando o cálculo integral que ele próprio havia inventado) que, para uma força central inversamente proporcional ao quadrado da distância (aliás, isto só vale para uma tal força) a atração exercida por uma esfera sobre uma partícula externa é a mesma que se toda a massa da esfera estivesse concentrada em seu centro, o que está muito longe de ser óbvio. No livro I dos “Principia”, Newton formula os princípios

fundamentais da dinâmica (as 3 leis de Newton) e estuda os diferentes tipos de órbitas possíveis de uma partícula sob a ação de uma força do tipo de gravitacional (variando com o inverso do quadrado da distância): órbitas elípticas, hiperbólicas e parabólicas; mostra também a relação com as leis de Kepler. Inclui ainda o tratamento da ação de uma esfera sobre um corpo externo. No Livro II, discute o movimento de corpos num meio resistente e problemas de mecânica dos fluídos. Finalmente, no Livro III, intitulado “O Sistema do Mundo”, aplica a lei da gravitação para discutir o movimento dos satélites em torno dos planetas e dos planetas em torno do Sol. Mostra como calcular as massas dos planetas em termos da massa da Terra; calcula o achatamento da Terra devido a sua rotação; calcula o efeito, conhecido como precessão dos equinócios, produzido sobre a órbita da Terra por esse achatamento; discute as perturbações do movimento da Lua devida à ação do Sol; explica as marés; calcula as órbitas dos cometas. Vamos ver alguns resultados obtidos por Newton.

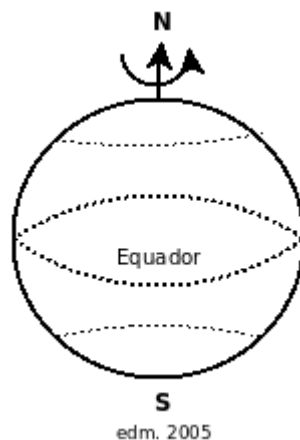
(a) Cometas: Os cometas exemplificam órbitas elípticas extremamente alongadas, com excentricidade próxima da unidade. Assim, embora seus periélios tenham de penetrar usualmente para dentro da órbita de Mercúrio, os afélios estão por vezes além da órbita de Plutão.

O mais célebre dos cometas é o cometa Halley, cuja aparição em 1682 foi identificada por Halley com aparições anteriores anteriores em 1607 e 1531, tendo um período de aproximadamente 75 a 76 anos (a aparição mais recente foi em 1986, seguindo-se à de 1910). Aplicando a 3ª lei de Kepler, Newton pôde concluir então que órbita do cometa de Halley é uma elipse cujo semi-eixo maior que dá a distância média do Sol e de $(75)^{2/3} \approx 17,8 \text{ U.A.}$. No periélio ($\approx 0,6 \text{ U.A.}$) o cometa penetra dentro da órbita de Vênus; no afélio, vai além da órbita de Netuno (figura acima XXXXXX).



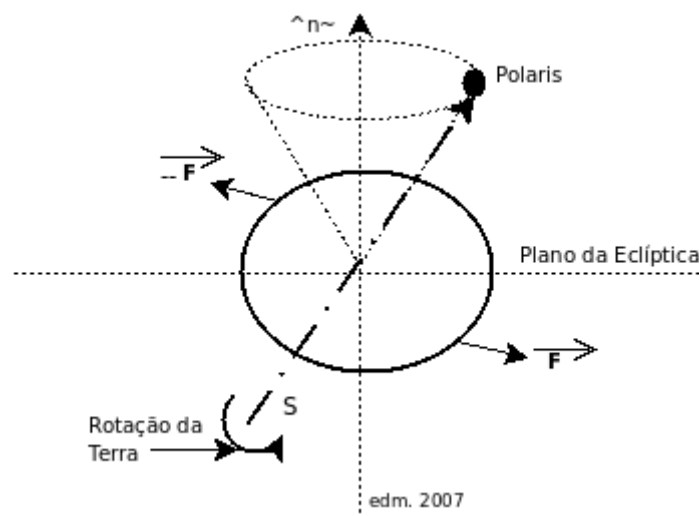
(b) A forma da Terra: Newton calculou o efeito da rotação da Terra sobre a sua forma; na ausência de rotação, ou seja, somente sob o efeito da gravidade, os planetas, deveriam ter a forma esférica; entretanto, as “forças centrífugas” produzidas pela rotação levam a um achatamento nos pólos e alargamento no Equador, conduzindo a uma forma de esferóide oblato, como mostra a (figura XXXXXX acima), onde o efeito foi grandemente exagerado. Segundo o cálculo de Newton, o diâmetro polar da Terra deve estar para o equatorial como 229/230, levando a uma elipticidade de 1/230. Maupertuis confirmou os resultado de Newton após sua morte, uma expedição **geodética** ao norte da Escandinávia, levando Voltaire a escrever-lhe: “Vous avez confirmé dans des lieux pleins d'ennui ce que Newton connut sans sortir de chez lui.”

As determinações experimentais mais recentes dão uma elipticidade de $\approx 1/297$. Newton também calculou as variações locais da aceleração da gravidade devidas à forma da Terra, e discutiu ainda a forma de outros planetas.



“(c)” A precessão dos equinócios: Cerca de 130 A.C, Hiparco, comparando suas observações da posição do Sol nos equinócios em relação às estrelas fixas com as que haviam sido feitas muitos séculos antes por astrônomos babilônicos, chegou à conclusão de que havia um deslocamento extremamente lento dos equinócios, que estimou em $36''$ por ano. Copérnico, em “De Revolutionibus”, corrigiu esse valor para $50,2''$ por ano em bom acordo com o atual, e interpretou corretamente o efeito: embora o eixo da Terra mantenha um ângulo constante de $23\frac{1}{2}^\circ$ com a normal \hat{n} ao plano da eclíptica (figura anterior XXXX), ele descreve um cone em torno dessa normal, num movimento de precessão análogo ao de um pião em rotação rápida. A taxa de precessão corresponde a uma volta completa em 26.000 anos. Assim, como mostra a (figura anterior XXXXX), em lugar de apontar para a atual estrela Polaris, o eixo da Terra apontará para uma direção deslocada de 47° na esfera celeste daqui a 13.000 anos, e o verão no hemisfério sul acontecerá na parte da órbita da Terra onde agora ocorre o inverno.

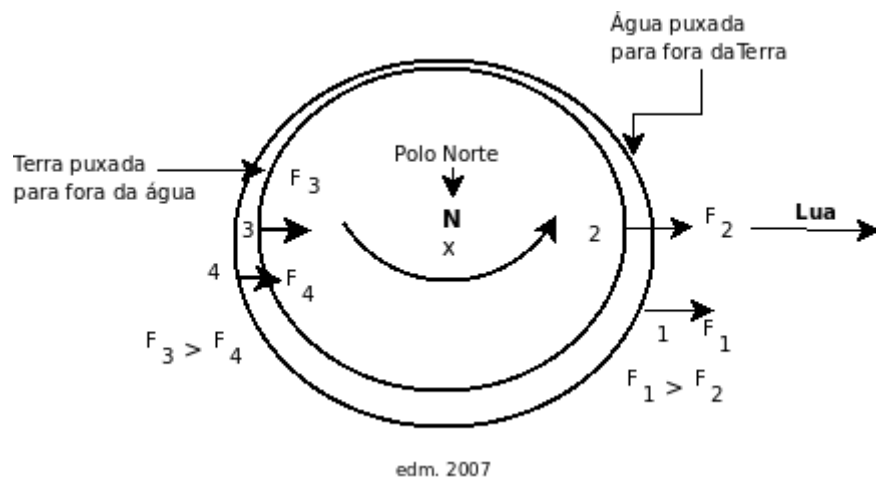
Newton deu a explicação da precessão: por ser a Terra um esferóide oblato, a atração da Lua, e, com menor intensidade, a do Sol, produzem um torque (indicado pelas forças $\vec{F}_e - \vec{F}_s$ na figura XXX) que é responsável pela precessão. Newton tratou o problema que discutiremos mais tarde, e calculou a taxa de precessão, obtendo $50''$ por ano, em excelente acordo com o resultado experimental. Este é dos resultados mais notáveis que se encontram nos “Principia”.



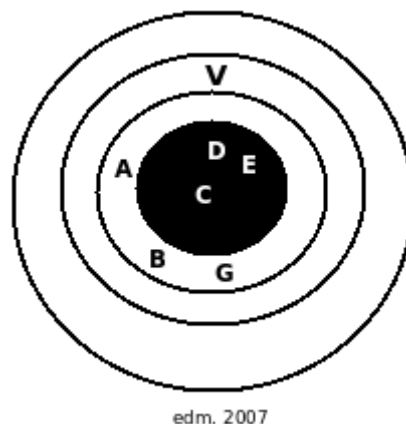
“(d)” As marés: Newton foi o primeiro a explicar a causa das marés como sendo devidas à

atração gravitacional da Lua e, em menor escala, do Sol sobre os oceanos. A primeira vista, poderia parecer que isso causaria apenas uma protuberância da massa líquida do lado da Terra num dado momento voltado para a Lua. Entretanto, um pouco de reflexão adicional mostra que deve haver duas protuberâncias, localizadas em extremos opostos da Terra (figura XXXX ao lado). Com efeito a distância da Lua ao centro da Terra sendo de aproximadamente

$60 R_T$, ao lado mais próximo está a cerca de $59 R_T$ e o mais distante a $61 R_T$. Do lado mais próximo, a atração da Lua sobre 1 ponto superfície do oceano é mais forte que sobre o ponto 2 da superfície da Terra (figura XXX acima) e a água é puxada para fora. Do lado mais distante, a superfície do oceano (ponto 4) é menos atraída que a da Terra (ponto 3), o que causa a protuberância do lado oposto. Em 12 horas, devido à rotação da Terra, o ponto 2 vai parar na posição 3, de modo que se produzem **duas** marés altas por dia, conforme é observado.



“(e)” Satélites artificiais da Terra: Newton considerou explicitamente a possibilidade da existência de satélites artificiais da Terra. Conforme ilustrado na (figura XXX abaixo), adaptada de seu “Sistema do Mundo”, ele discutiu o que aconteceria se, do topo “V” de uma montanha muito alta, projéteis fossem lançados horizontalmente com velocidades iniciais crescentes.



A princípio, teríamos trajetórias parabólicas, como VD, VE na (figura XXXX), as parábolas são na verdade aproximações de pequenas porções de elipses keplerianas. Entretanto, para velocidade inicial suficientemente grande, Newton observa que o projétil descreveria uma órbita fechada em torno da Terra, voltando ao ponto de partida. E se os lançamentos fossem feitos de altitudes crescentes, diz ele, os corpos “descreveriam arcos concêntricos com a Terra, ou de excentricidades várias, e continuariam circulando nos céus nessas órbitas como fazem os planetas em suas órbitas”.

Qual seria o período T de revolução de um satélite artificial em órbita a uma distância R do centro da Terra? Onde “ m ” é a massa do satélite e $M = M_T$ a massa da Terra, podemos

aplicar a 3. lei de Kepler sob a forma:

$$\frac{R^3}{T^2} = C = \frac{GM_T}{4\pi^2} = \frac{g R_T^2}{4\pi^2}$$

Onde aplicamos a (10.6.6). Resolvendo em relação a T, com $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ e

$R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$, obtemos:

$$T \approx 3,14 \times 10^{-7} (R_{\text{metros}})^{3/2} (\text{Segundos})$$

Note que o resultado independe da massa “m” do satélite. O primeiro satélite (1957), tinha uma órbita de altitude média $\sim 550 \text{ Km}$, ou seja, $R \approx 6,95 \times 10^6 \text{ m}$. Levando esse valor (10.7.2), obtém-se $T \approx 96 \text{ min}$, que era o período observado. Se fizermos $T = 24$ horas na (10.7.2), obtemos $R \approx 42.000 \text{ km} \approx 6,5 R_T$. Um satélite a essa altitude é síncrono, ou seja, como tem período orbital igual ao de rotação da Terra, permanece sempre acima do mesmo ponto da Terra, o que é importante para transmitir comunicações. O primeiro satélite deste tipo foi, Syncom II, foi lançado em 1963.

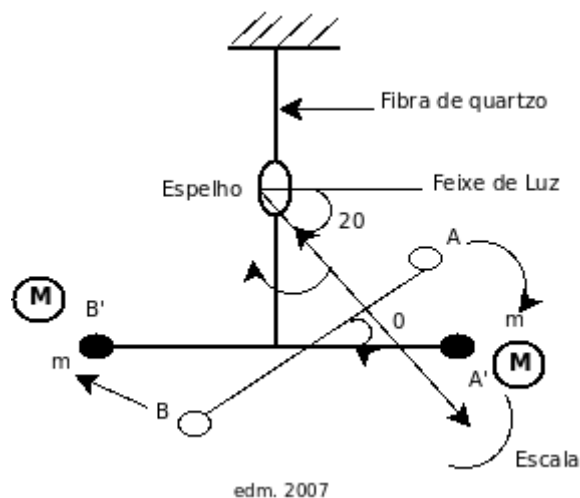
No final dos “Principia”, Newton diz: “Até aqui explicamos os fenômenos celestes e dos aceanos pelo poder da gravidade, mas não determinamos a causa deste poder. Ele certamente provém de uma causa que penetra até o âmago do Sol e dos planetas, sem que sua força sofra a menor diminuição, que opera.... proporcionalmente à quantidade de matéria das partículas, e propaga sua virtude em todas as direções até distâncias imensas, descrevendo sempre como o inverso do quadrado das distâncias” Está é a formulação mais explícita que aparece nos “Principia” da lei da gravitação universal.

Depois da publicação dos “Principia”, Newton recebeu inúmeras honrarias. De 1703 até sua morte em 1727, foi presidente da Royal Society. Foi enterrado na Abadia de Westminster. Referindo-se à contribuição de seus precursores, ele disse: “Se fui capaz de ver mais longe, é porque me apoiei nos ombros de gigantes”. Pouco antes de sua morte, disse: “Não sei como apareço aos olhos do mundo; aos meus próprios, pareço ter sido apenas como um menino, brincando na praia, e divertindo-me em encontrar de vez em quando um seixo mais roliço ou uma concha mais bela que de ordinário, enquanto o grande oceano da verdade jazia todo inexplorado à minha frente.”

10.8 O Triunfo da mecânica newtoniana

A era pós newtoniana foi marcada por uma séria crescente de sucessos na aplicação dos princípios da dinâmica e da lei da gravitação ao Sistema Solar e mesmo além dele.

(a) O valor de G e a massa da Terra: Para determinar o valor da constante gravitacional G na (10.6.5 XXXXX) é preciso medir a força de atração gravitacional entre duas massas conhecidas o que é muito difícil no laboratório por ser muito fraca a interação gravitacional. A primeira medida foi feita por Cavendish em 1798, utilizando um aparelho extremamente sensível, a balança de torção. Um par de esferas de massa “m” nas extremidades de uma barra por uma fibra fina de quartzo numa posição de equilíbrio AB (figura abaixo). Trazem-se então duas outras esferas de massas “M” à mesma distância das esferas de massa “m” (figura acima XXX), o que produz um torque pelas forças gravitacionais entre cada par de esferas. Esse torque faz girar a barra de um ângulo θ , que é calibrada de forma a poder medir o torque, e por conseguinte as forças gravitacionais, pelo desvio de um feixe de luz refletido por um “espelhinho” preso na fio (alavanca ótica).



Cavendish obteve $G = 6,71 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$ que é bastante próximo do valor atualmente aceito $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$.

Cavendish chamou a sua experiência de “Pesagem da Terra”. O valor de Cavendish,

$P_T \approx 5,48 \text{ g/cm}^3$, foi obtido bem depois da morte de Newton, mas Newton havia feito, nos “Principia”, a seguinte estimativa célebre de P_T : “Como a matéria comum da Terra em sua superfície é cerca de duas vezes mais pesada que água, e um pouco abaixo, em minas, verifica-se ser três, quatro, ou menos cinco vezes mais pesada, é provável que a quantidade total de matéria da Terra seja cinco ou seis vezes maior do que se consistisse toda a água...”

(b) A massa do Sol: O análogo da (10.7.1) aplicada à órbita da Terra em torno do Sol é:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_S}{\pi^2}$$

(10.8.1)

onde T é o período da órbita (=1 ano sideral), R é a distância média da Terra ao Sol e M_S a massa do Sol. O único dado que falta para determinar esta massa é o valor de R. A distância da terra ao Sol já havia sido estimada no século III A.C por Aristarco, usando um método de triangulação que tomava como base a distância da Terra à Lua quando o ângulo Lua-Terra-Sol pe reto, o que corresponde a metade da fase da Lua iluminada (quadratura). Entretanto, o ângulo oposto a essa base é tão pequena que a medida é difícil, e o valor obtido por Aristarco, de que o Sol estaria 20 vezes mais distante do que a lua, era muito inferior ao valor real (cerca de 400 vezes).

Kepler e depois Flamsteed obtiveram R indiretamente medindo a distância da terra a Marte através da determinação da **paralaxe** de Marte visto de diferentes pontos da terra (ou do mesmo ponto em horas diferentes, transportado pela rotação da Terra). Como a escala **relativa** do Sistema Solar era conhecida deste Copérnico, bastava medir uma distância absoluta para determinar qualquer outra em particular R.

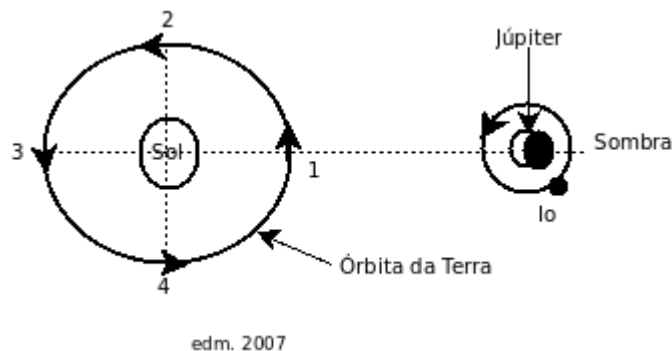
A primeira medida de maior precisão (~5%) de R foi feita em 1761 usando um método que havia sido proposto por Halley, através de observações do trânsito de Vênus, ou seja, sua passagem pelo disco solar, vista de diferentes pontos da Terra. Determinações de paralaxe se tornam mais fáceis e precisas quando a simultaneidade das observações de pontos diferentes

pôde ser garantida pela sincronização de cronômetros.

O valor atualmente aceito é R que corresponde 1 U.A é $R \approx 1.49 \times 10^{11} m$. Substituindo na (10.8.1), obtém-se para a massa do Sol o valor $M_S \approx 2 \times 10^{30} kg$ (≈ 333.000 vezes a massa da Terra).

“(c)” Os satélites de Júpiter e a velocidade da luz: O mais interno dos 4 satélites de Júpiter descoberto por Galileu, Io, tem um período de $\approx 42,5 h$, e é fácil determinar os instantes em que é eclipsado pelo planeta. Em 1675, o astrônomo dinamarquês Olaf Romer verificou que o intervalo entre dois eclipses consecutivos crescia quando a Terra estava se afastando de Júpiter e diminuía quando se aproximava.

Tendo confiança nas leis de Newton. Segundo as quais o período real deveria ser invariável, Romer atribuiu as variações aparentes do período a uma velocidade finita de propagação da luz, e determinou o seu valor. Pela primeira vez, com o auxílio dessas observações. O argumento de Romer está ilustrado esquematicamente na (figura ao lado XXXX). Nas posições 1 e 3 em sua órbita, quando a Terra se move mantendo-se aproximadamente equidistante de Júpiter, o atraso na observação do eclipse devido ao tempo que a luz leva para vir de Júpiter à Terra é o mesmo para dois eclipses consecutivos, de modo que medimos o período verdadeiro de Io. Na posição 2, porém a Terra se terá afastado de Júpiter entre dois eclipses consecutivos, e o intervalo aparente entre eles será maior, porque a luz tem que percorrer uma distância maior até atingir a Terra assinalando o 2. eclipse; analogamente, em 4, quando a Terra está se aproximando de Júpiter, o intervalo aparente diminui. A variação fracionária do período orbital de Io observada é igual à razão da velocidade da Terra em sua órbita à velocidade da luz, e que permitiu Romer estimar essa velocidade, tendo obtido um valor cerca de 25% inferior ao atualmente aceito, $c = 3 \times 10^8 m/s$.



Uma vez estabelecido o valor de c por métodos independentes, foi possível empregá-lo em sentido inverso, para estabelecer distâncias absolutas no Sistema Solar, seja em termos do efeito como os atrasos de eclipses de satélites de Júpiter, seja através dos modernos métodos de radar.

“(d)” Outros planetas: Até aqui, consideramos cada planeta como se movesse apenas sob a ação da atração gravitacional do Sol. Na realidade, o movimento de um planeta também é afetado pelas forças de atração exercidas pelos demais planetas (além de seus satélites, se os tiver), que **perturbam** as órbitas elípticas keplerianas.

Felizmente, estas perturbações são pequenas, porque a massa do Sol é muitíssimo maior do que a massa de qualquer planeta (o mais pesado, Júpiter, tem menos de um centésimo da massa do Sol). Mas tiveram de ser levadas em conta à medida que a precisão das observações astronômicas foi aumentando.

Uma solução exata do problema do movimento de mais de dois corpos em interação gravitacional uns com os outros é tão difícil que, mesmo no caso de três corpos, o problema só pôde ser resolvido em casos especiais extremamente restritivos. Por outro lado, soluções aproximadas utilizando o fato de que as perturbações exercidas pelos demais planetas são muito menores do que a força atrativa do Sol podem ser desenvolvidas de forma sistemática, constituindo o objeto do **cálculo das perturbações**. Este complicado problema da Mecânica Celeste foi tratado durante a segunda metade do século 18 e a primeira metade do século 19

por Euler, Lagrange e Laplace. Os resultados foram um sucesso, particularmente a explicação por Laplace de irregularidades observadas nos movimentos de Júpiter e Saturno. Atualmente, a resolução numérica de problemas de Mecânica Celeste é grandemente facilitada pela utilização de computadores.

Na noite de 13 de março de 1781, William Herschel, músico de profissão e astrônomo amador, descobriu com seu telescópio um objeto que obviamente não era uma estrela, pois seu diâmetro aparente aumentava incrementando o aumento do telescópio. Pensou a princípio que se tratasse de um cometa, mas cerca de um ano mais tarde se havia tornado claro que se tratava de um novo planeta, o primeiro descoberto desde a antiguidade. A descoberta teve grande impacto. O novo planeta, foi chamado de Urano, tem órbita de raio médio

$\approx 19,2 \text{ U.A.}$, aproximadamente o dobro de Saturno. Verificou-se depois que já havia aparecido em observações bem anteriores (desde de 1690), embora não reconhecido como planeta.

Entretanto, as novas observações que foram sendo feitas, juntamente com as anteriores, levavam a desvios da órbita predita pelas leis de Newton. Essas irregularidades e desvios sistemáticos, embora pequeno da ordem de $20''$ de arco, em média, não podiam ser explicados por perturbações devidas aos demais planetas conhecidos.

Tamamho era o grau de confiança nas leis de Newton, nessa época, que, em 1820, Besse já sugeriu que os desvios talvez fossem devidos a um novo planeta ainda não descoberto. Mais distante que Urano.

Entretanto, para provar um tal resultado e determinar os elementos da órbita do novo planeta. Era preciso resolver um problema matemático muito mais difícil do que o tratado por Lagrange e Laplace, o problema inverso de perturbações.

O primeiro a obter uma solução foi John Couch Adams, jovem matemático de Cambridge recém formado, em setembro de 1845. Comunicou seus resultados a J. Challis, diretor do observatório de Cambridge, e ao Astrônomo Real, George Airy, prevendo a posição do novo planeta em 1/10/1845 com erro < 2 . (nessa data). Entretanto, Airy não ficou convencido pelos resultados e houve uma série de quiproquós, em consequência da qual nenhuma tentativa de observação foi feita. Enquanto isso, em Paris, Le Verrier, um astrônomo de reputação já estabelecida, começou a se interessar pelo problema e publicou, em junho de 1846, um trabalho contendo conclusões semelhantes se bem menos completas às de Adams. Airy recomendou então Challis que procurasse o planeta hipotético no observatório de Cambridge. Challis fez observações nas noites de 29/7, 30/7, 4/8 e 12/8, mas os resultados de 30/7 e 12/8, parando na estrela n. 39.

Se tivesse ido 10 estrelas mais adiante, teria percebido que uma “estrela de 8. grandeza” observada em 12/8 não aparecia nos dados de 30/7 e teria descoberto o novo planeta. Mas não o fez.

Em 31/8, Le Verrier publicou outro trabalho e escreveu a Galle, astrônomo do observatório de Berlin, sugerindo que procurasse o planeta. Galle descobriu-o, a cerca de 1 Grau da posição predita, na mesma noite em que recebeu a carta, a 23/9/1846. Verificou-se depois que o planeta já havia sido registrado em observações de Paris 50 anos antes, mas sem que percebesse não se tratava de uma estrela.

A predição da existência de Netuno foi um dos grandes triunfos da história da ciência, e foi aclamada como tal. Entretanto, além da “dedução pura”, interveio também um forte elemento de sorte. Com efeito, tanto Adams como Le Verrier usaram em seus cálculos uma hipótese que se revelou “a posteriori” injustificada, a “lei de Bode”, (descoberta por Titius, mas publicada por Bode em 1772). Segundo essas “lei”, o raio da órbita do n ésimo planeta ($n=1,2,3,\dots$), em U.A., seria dado por:

$$R_n = 0,4 + 0,3 \times 2^{n-1} \text{ U.A.} \quad (10.8.2)$$

A tabela abaixo compara os resultados da (10.8.2) com os valores observados:

Planeta	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	(Ceres)	Júpiter	Urano	Netuno	Plutão
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Lei de Bode	0,4	0,7	1,0	1,6	2,8	5,2	10,0	19,6	38,8
Observado	0,39	0,72	1,0	1,52	2,77	5,20	9,54	19,2	30,1

Quando Bode publicou sua regra empírica, Urano ainda não havia sido descoberto, e sua descoberta 9 anos depois estava em muito bom acordo com a lei. Nenhum planeta havia sido observado na posição n. 5 da série, mas em 1801 Piazzzi descobriu o “planetóide” Ceres, parte da faixa de cerca de 2.000 asteróides existentes entre Marte e Júpiter, supostamente resultantes da fragmentação de um planeta.

Assim, o valor de 38,8 U.A. Usado por Adamns e Le Verrier para o raio da órbita de Netuno estava errado de mais de 20% em relação ao valor real. Por coincidência, em 1846, Netuno estava na única parte de sua órbita para a qual esse erro não tinha grande importância, mas 75 anos antes ou depois ele teria invalidado totalmente os resultados.

Em 1930, C. Tombaugh descobriu Plutão, com base em irregularidades observadas na órbita de Netuno. O desvio em relação à lei de Bode é ainda maior. Até hoje não se sabe se o bom acordo com a lei de Bode até Urano tem alguma explicação ou se trata de mera coincidência. Os raios das órbitas dos planetas, que Kepler também havia querido deduzir, dependem das condições de sua formação, e talvez estejam ligados ao problema matemático extremamente difícil e ainda não resolvido da estabilidade do Sistema Solar.

“(e)” Além do Sistema Solar: Como se poderia testar a validade da lei da gravitação além do Sistema Solar? Isto se tornou possível depois que William Herschel e seu filho John descobriram que as estrelas “fixas” não o são realmente, tendo observado vários movimentos estelares; em particular, o Sol se desloca em direção a um ponto da constelação de Hércules, com velocidade comparável à da Terra em sua órbita.

Os Herschels descobriram inúmeras **estrelas duplas**: um par de estrelas em órbita uma em torno da outra. Um exemplo é Sirius, que tem uma “companheira” bem menos luminosa, descoberta em 1862, denominada Sirius B *Sirius B* . A (figura ao lado XXXX) mostra a órbita de *Sirius B* em torno de Sirius A (que é a estrela Sirius mais visível), projetada contra a esfera celeste. É claramente uma elipse kepleriana, a projeção distorce a posição do foco, com período $T=50$ anos. Sirius está a uma distância de 8,7 anos luz da Terra, mostrando assim que a lei da gravitação permanece válida a essa distância; o mesmo se observou para outras estrelas binárias mais distante.

A distância bem maiores, da ordem de 10^4 anos luz, observam-se aglomerados de estrelas de forma aproximadamente esférica e dimensões da ordem de 10^5 vezes as do Sistema Solar. Esses aglomerados devem ser mantidos pela atração gravitacional.

A nossa Galáxia, também chamada de Via Láctea, é uma galáxia espiral como a Nebulosa de Andrômeda, vista de lado, ele teria aproximadamente a forma esboçada na (figura XXXX ao lado), com um núcleo central e um disco em rotação contendo os braços espirais. Podemos interpretar esta forma como resultante da condensação por atração gravitacional de uma vasta nuvem de gás em rotação lenta. À medida que nuvem de gás se condensava, sua velocidade de rotação aumentaria até que impedisse a contração em direção ao eixo, permitindo apenas contração paralela ao eixo.

O Sistema Solar como um todo e estrelas vizinhas estão num dos braços espirais, a cerca de 30.000 anos luz do centro, e giram em torno dele com uma velocidade orbital da ordem de 200 km/s e um período de rotação da ordem de $2,5 \times 10^8$ anos . Se tratarmos esse movimento como uma órbita kepleriana sob a ação da massa total M da Galáxia concentrada em seu centro, podemos estimar essa massa a partir dos dados acima, como fizemos para o Sol usando a (10.8.1).

O resultado que obtemos é $M \sim 3 \times 10^{41} \text{ kg}$. Como o Sol é uma estrela típica e tem massa $\sim 2 \times 10^{30} \text{ kg}$, concluímos que há da ordem de 10^{11} estrelas em nossa Galáxia Via Láctea. Numa escala ainda mais vasta, observamos aglomerados de galáxias, o que também atribuímos à atração gravitacional entre elas. A Via Láctea faz parte do “Grupo Local”, que contém cerca de uma vintena de galáxias, inclusive a galáxia de Andrômeda e as nuvens de Magalhães. Foram observados aglomerados de até $\sim 10^5$ galáxias, e há observações de aglomerados de galáxia até a distância da ordem de 10^9 anos luz , ou seja, $\sim 1/10$ do raio do Universo. Podemos portanto colaborar com a audaz hipótese de Newton, de que a lei da gravitação é realmente universal.

O sucesso imenso da Mecânica Newtoniana em sua aplicação à astronomia levou a uma grau de confiança muito grande no esquema da física por ele sugerido. O próprio Newton formulou esse esquema no prefácio dos “Principia”: “Ofereço este trabalho como os princípios matemáticos da filosofia, pois toda a tarefa de filosofia parece consistir nisso – a partir dos fenômenos de movimento investigar as forças demonstrar os demais fenômenos...” Laplace em seu “Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades” (1814), enunciou claramente o programa associado a essa concepção mecanicista, em termos do que se tornou conhecido como o “determinismo Laplaciano”: “Devemos... considerar o presente estado do universo como efeito de seu estado anterior e causa do que se vai seguir. Se imaginarmos por um instante um inteligência que pudesse conhecer todas as forças de que a Natureza é animada e as posições respectivas dos corpos que a compõem – uma inteligência suficientemente vasta para submeter estes dados à análise – ele compreenderia na mesma fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e os átomos mais minúsculo; para ela, nada seria incerto e futuro, bem como o passado, estariam presentes à sua visão. A mente humana oferece, na perfeição que foi capaz de dar à Astronomia, um exemplo modesto do que seria essa inteligência.”

Quando Laplace presenteou Napoleão com um exemplar de sua monumental “Mecânica Celeste” (5 volumes, 1799-1825), o imperador lhe perguntou se era verdade que Deus não era mencionado em parte alguma do tratado. Laplace respondeu: “Sire, je n' ai pas eu besoin de cette hypothèse-là.”

10.9 A atração gravitacional de uma distribuição esfericamente simétrica de massa

Vamos demonstrar nessa seção o resultado que Newton obteve em 1685 (figura página número XXXXXXX) que uma distribuição esfericamente simétrica de massa como a Terra atrai uma partícula externa como se toda a massa da distribuição estivesse concentrada em seu centro.

“(a)” **Energia potencial e princípio de superposição:** As forças gravitacionais Newtonianas obedecem ao **princípio de superposição**, quando várias massas atuam sobre uma partícula, a força gravitacional sobre a partícula é a **resultante** (soma vetorial!) das atrações exercidas por cada uma dessas massas.

Para calcular o efeito de uma distribuição contínua de massa, como a Terra, sobre uma partícula externa, poderíamos então subdividir essa distribuição em um grande número de elementos de volume (suficientemente pequenos para que cada um pudesse ser tratado como uma partícula), calcular a atração gravitacional sobre a partícula exercida por cada um desses elementos, e depois efetuar a soma vetorial de todas essas forças de direções diferentes. Esse cálculo pode ser simplificado, de que a força gravitacional é conservativa e substituindo o cálculo da força pelo da energia potencial da partícula na presença da distribuição de massa. A força pode ser calculada a partir da energia potencial.

É fácil ver que o princípio de superposição se aplica também à energia potencial. Com efeito, decorre imediatamente da definição do gradiente que: (XXXX)

$$\text{grad}(U_1 + U_2 + \dots) = \text{grad} U_1 + \text{grad} U_2 + \dots$$

(10.9.1)

Logo, se cada uma das forças que atuam sobre uma partícula é conservativa, a sua resultante é:

$$\vec{F} = -\text{grad } U_1 - \text{grad } U_2 - \dots = -\text{grad } U \quad (10.9.2)$$

onde

$$U = U_1 + U_2 + \dots = \sum_j U_j \quad (10.9.3)$$

É bem mais simples efetuar uma soma de grandezas escalares do que calcular a resultante de vetores, o que é uma das grandes vantagens de trabalhar com a energia potencial.

A energia potencial, associada a duas partículas de massa m_1 e m_2 separadas pela distância r_{12} , correspondente à força gravitacional é:

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \quad (10.9.4)$$

“(b)” Camada esférica: O truque básico que vamos usar consiste em decompor a distribuição de massa em camadas esféricas concêntricas delgadas, como uma cebola é constituída de camadas, e calcular inicialmente o potencial devido a uma dessas “cascas de cebola”.

(Figura XXXXXXXXXXXX)

Considerando então uma camada esférica de raio “a” e espessura “h” muito pequena sobre a qual, pela simetria esférica da distribuição, a massa estará distribuída uniformemente, e calculemos a energia potencial resultante sobre uma partícula de massa “m” num ponto “P” à distância “r” do centro (figura XXX acima), é mais simples para isso decompor a camada em anéis infinitésimos como aquele mostrado na figura, cujos pontos são todos equidistantes de P (aditância s).

Pela (XXX 10.9.4), a contribuição de uma tal anel para a energia potencial em P é:

$$dU_{(anel)} = -G \frac{m}{s} dM \quad (10.9.5)$$

onde dM é a massa (infinitésima) do anel.

Se M é a massa total da camada esférica uniforme, temos:

$$\frac{dM}{M} = \frac{\text{Área do Anel}}{4\pi a^2} \quad (10.9.6)$$

Como vemos pela figura (XXXXXX), o raio do anel é $p = a \sin \theta$, e sua largura é a $d\theta$, de modo que:

área do anel = $2\pi \cdot a d\theta = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$ e a (10.9.6) fica:

$$dM = \frac{1}{2} M \sin \theta d\theta$$

Substituindo na (10.9.5), obtemos:

$$dU_{(anel)} = -G \frac{Mm}{2} \frac{\sin \theta}{S} d\theta \quad (10.9.7)$$

A energia potencial total se obtém somando sobre todos os anéis, o que equivale, pela (figura XXXXX), a integrar sobre θ , fazendo esse ângulo variar de 0 a π :

$$U = -G \frac{Mm}{r} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{S} d\theta \quad (10.9.8)$$

onde “s” varia com θ . Podemos relacionar “s” com θ aplicando a lei dos co-senos ao triângulo OAP da figura (XXXXXXX):

$$S^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta \quad (10.9.9)$$

Derivando ambos os membros em relação a θ (note que a e r são constantes, nunca se alteram), obtemos:

$$2s \frac{ds}{d\theta} = -2ar \frac{d}{d\theta} (\cos \theta) = 2ar \sin \theta$$

ou seja:

$$ar \cdot \frac{\sin \theta}{s} d\theta = ds \quad (10.9.10)$$

Comparando esta expressão com o integrando da (10.9.8), vemos que é mais fácil mudar a variável de integração de θ para S e integrar sobre S. Pela (10.9.9), os limites de integração se obtêm a partir das relações:

$$\theta = 0 \Rightarrow s^2 = s_{\min}^2 = (r-a)^2 ; \quad \theta = \pi \Rightarrow s^2 = s_{\max}^2 = (r+a)^2 \quad (10.9.11)$$

correspondendo aos valores mínimos e máximo, respectivamente, da distância do ponto P à camada esférica. Logo, substituindo a (10.9.10) na (10.9.8) obtemos:

$$U = -G \frac{Mm}{2ar} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} ds = -\frac{GMm}{2ar} (s_{\max} - s_{\min}) \quad (10.9.11)$$

Embora tenhamos desenhado a figura XXXXXXXX do ponto P **externo** à camada esférica, nenhum dos resultados acima se altera quando o ponto P é **interno** (verifique!). Logo, podemos aproveitar o cálculo para tratar os dois casos. A única diferença surge no sinal da raiz quadrada das relações (10.9.11); como “s” é uma distância, “s > 0”, temos sempre

$s_{\max} = r + a$, mas $s_{\min} = r - a$ para “r > a” (ponto P externo) e $s_{\min} = a - r$ “r < a” (ponto interno):

Figura (XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX)

Logo, para “r > a”, $s_{\max} - s_{\min} = (r + a) - (r - a) = 2a$, e para “r < 0” é

$s_{\max} - s_{\min} = (r + a) - (a - r) = 2r$, de modo que a (10.9.11) dá, finalmente,

$$U(r) = - \frac{GMm}{r} \quad (r > a) \quad (10.9.12)$$

E:

$$U(r) = - \frac{GMm}{a} \quad (r < a) \quad (10.9.13)$$

Note que, em ambos os casos, $U(\vec{r}) = U(|\vec{r}|)$ só depende de $r = |\vec{r}|$ e não da direção, o que é óbvio “a priori” pela simetria esférica da camada.

A (10.9.12) mostra que a energia potencial de interação entre a camada esférica e uma partícula externa é a mesma que se toda a massa M da camada estivesse concentrada em seu centro. A (10.9.13) mostra que, para uma partícula interna à camada, a energia potencial é constante (independente da distância ao centro). A força gravitacional correspondente a cada um dos dois casos se obtém:

$$\vec{F}(r) = - \text{grad } U = \frac{-dU}{dr} \hat{r} = F(r) \hat{r} \quad (10.9.14)$$

onde

$$\vec{F}(r) = \frac{-GMm}{r^2} (r > a) \quad (10.9.15)$$

é a mesma que se toda a massa da camada estivesse concentrada em seu centro, ao passo que, pela (10.9.13),

$$F(r) = 0 \quad (r < 0) \quad (10.9.16)$$

ou seja, **a força gravitacional sobre uma partícula interna a uma camada esférica uniforme oca (cavidade esférica) é nula!**

Este resultado de aparência tão surpreendente tem uma explicação bastante simples. Com o efeito, consideramos uma reta qualquer que passa pelo ponto P interno à camada, cortando a esfera nos pontos A e B (figura ao lado). Um cone infinitésimo de vértice P e eixo AB intercepta a esfera em duas áreas infinitésimas dA e dB , cujas projeções no plano da figura são $A'A''$ e $B'B''$. Os triângulos infinitos $PA'A''$ e $PB'B''$ são semelhantes, pela igualdade dos ângulos correspondentes, de modo que:

$$\frac{A'A''}{B'B''} = \frac{PA''}{PB''} = \frac{PA}{PB} = \frac{r_A}{r_B} \quad (10.9.17)$$

Logo, segmentos correspondentes dos elementos de área dA e dB estão entre si na razão constante de r_A/r_B , e as áreas desses elementos estarão uma para a outra como o quadrado dessa razão:

$$\frac{dA}{r_A^2} = \frac{dB}{r_B^2} \quad (10.9.18)$$

O 1. e o 2. membro dessa igualdade dão, a menos de um fator comum (= densidade de massa \times espessura da camada $\times Gm$), as magnitudes das forças de atração exercidas sobre P pelos elementos de área dA e dB , as quais têm sentido apostos. Logo, essas forças são iguais e

contrárias, e se cancelam. Como a superfície da camada pode toda ela ser subdividida em pares de elementos apostos de forma análoga, isto explica o resultado (10.9.16). Este resultado só é válido por ser a lei de forças do tipo r^{-2} , como vemos pela (10.9.18); se fosse r^{-2+E} , com $E \neq 0$, deixaria de valer. As (10.9.13), bem como as (10.9.15) e (10.9.16), estão representadas graficamente nas figuras ao lado:

(FIGURA XXXXXX)

Note que as expressões obtidas são válidas dentro ou fora da camada esférica cuja espessura h supusemos muito pequena. Se extrapolássemos essas expressões até $r=a$ (limite quando $h \rightarrow 0$), vemos que a energia potencial $U(r)$ seria uma função contínua, mas a força $F(r)$ seria descontínua, saltando bruscamente do valor 0 para $-GMm/a^2$ para um ponto externo muito próximo à superfície. Na realidade, quando levamos em conta que $h \neq 0$, há uma transição contínua entre esses dois valores da força, transição essa que tem lugar no interior da camada, conforme indicado pela curva em linha pontilhada na (Figura acima XXXX). O cálculo de $U(r)$ e $F(r)$ dentro da camada pode ser feito de forma análogo ao que indicaremos a seguir.

“(c)” Esfera maciça: Dizer que uma distribuição de massa é esfericamente simétrica significa que a densidade P , dessa distribuição (massa por unidade de volume só depende da distância r ao centro da esfera e não da direção, ou seja:

$$p = p(r) \quad (10.9.19)$$

Não é preciso que a esfera seja homogênea, o que corresponderia a ($P =$ constante distribuição uniforme). Isto é importante, porque no caso da Terra sabemos que a distribuição de massa está de ser uniforme: a densidade tende a crescer com a profundidade, conforme indica o gráfico ao lado, que representa $p(r)$ (em g/cm^3) em função de r/R_T , onde R_T é o raio da Terra.

(GRAFICA)

Considerando o caso geral R com uma distribuição esfericamente simétrica de massa, os resultados precedentes permitem calcular a energia potencial e a força sobre uma partícula de massa m imaginado a esfera decomposta em camada concêntricas delgada. Seja r a distância de partícula ao centro da esfera.

Um **ponto externo à esfera** ($r > R$) é externo a todas as camadas, de modo que a energia potencial resultante é a mesma que se a soma das potencial resultante é a mesma que se a soma das massas das camadas (igual à massa total M da esfera) estivesse concentrada no centro, ou seja:

$$U(r) = \frac{-GMm}{r} \quad (r > R) \quad (10.9.20)$$

e a força resultante é $F(r)\hat{r}$, onde

$$U(r) = \frac{-GMm}{r^2} \quad (r > R) \quad (10.9.21)$$

Estes são os resultados de Newton. Vemos que sua validade só depende da simetria esférica da distribuição, e não de sua homogeneidade, aplicando-se portanto ao caso da Terra.

Consideremos agora um ponto interno à esfera ($r < R$). Neste caso, pela (10.9.16), as camadas esféricas concêntricas de raio $> r$ não exercem nenhuma força sobre ele, e as demais camadas (de raio $< r$) atuam como se sua massa estivesse concentrada no centro, de

modo que a força resultante é:

$$F(r) = \frac{-Gm \cdot M(r)}{r^2} \quad (r < R) \quad (10.9.22)$$

onde $\mathbf{M(r)}$, é a massa total contida dentro de uma esfera de raio r: (FIGURA XXXXXXXX). Para calcular $\mathbf{M(r)}$, é preciso conhecer a distribuição de densidade.

O caso mais simples é o de uma esfera homogênea, em que $p(r) = p_0 = \text{constante}$. Neste caso:

$$M(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 P_0 = M \frac{r^3}{R^3}$$

de modo que a (10.9.22) dá

$$F(r) = \frac{-Gm M}{R^3} r, \quad r < R, \quad p = p_0 \quad (10.9.23)$$

Neste caso, portanto, temos uma força radial atrativa que varia linearmente com distância r ao centro, como na lei de Hooke. Se fosse possível escavar um túnel atravessando a Terra até os antípodas, e se a Terra fosse homogênea, uma partícula dentro do túnel se comportaria então como se houvesse uma mola ideal prendendo-a ao centro da Terra (figura acima XXXXXX). Evidentemente, nenhuma dessas duas hipóteses é verdadeira.

A energia potencial $\mathbf{U(r)}$ associada à (10.9.23) pode ser calculada, relacionando-a com $\mathbf{U(R)}$ que pode ser obtido da (10.9.20):

$$U(r) - U(R) = - \int_r^R F(r') dr' = \frac{GmM}{R^3} \int_R^r r' dr' = \frac{GMm}{2R^3} \frac{r'^2}{2} = \frac{GMm}{2R^3} (r^2 - R^2)$$

Logo,

$$U(r) = U(R) - \frac{GMm}{2R} + \frac{GMm}{2R^3} r^2 \quad (r < R) \quad (10.9.24)$$

que tem um comportamento parabólico como função de r. A figura (XXX ao lado) dá os gráficos de U(r) e F(r) para uma esfera **homogênea**, representando as (10.9.20), (10.9.24), (10.9.21) e (10.9.23).

Para uma distribuição in-homogênea, como a da Terra, as porções para $r > R$ dessas figuras permanecem inalteradas, mas o comportamento para $r < R$ seria modificado.

“(d)” **Duas esferas:** Consideremos finalmente a força de interação gravitacional entre duas esferas 1 e 2 (massas m_1 e m_2) cujos centros estão separados por uma distância r: (Figura XXXXXXXX). A esfera 1 atua sobre 2 como se toda a sua massa m_1 estivesse concentrada em seu centro:

Figura(XXXXXXXXXx)

Mas, pelo princípio da ação e reação, a atração da partícula de massa m_1 sobre a esfera 2 é igual e contrária à exercida pela esfera 2 sobre m_1 , e esta pode ser calculada substituindo a esfera 2 por uma partícula de massa m_2 em seu centro:

(FIGURA XXXXXXXXXXXXX)

Vemos, por conseguinte que a interação gravitacional entre duas **esferas** é a mesma que se toda a massa de cada uma delas estivesse concentrada em seu centro. Este resultado desempenha um papel importante na análise da experiência de Cavendish, em que as esferas estão usualmente muito próximas entre si, mas apesar disso continuam interagindo com se fossem dias partículas puntiformes, o que não valeria para corpos de forma não esférica.

10.10 Massa Reduzida.

Ao tratar o problema da movimento de um planeta em torno do Sol na aproximação de órbitas circulares, tomamos a posição do Sol como um ponto fixo, que serviu como origem do referencial empregado na descrição do movimento. Na realidade, para um sistema isolado de partículas, ou seja, um sistema sobre o qual atuam apenas forças internas, como as gravitacionais, é o centro de massa do sistema que permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, podendo ser tomado como origem de um referencial inercial. Como a massa do Sol é muito maior do que a de qualquer planeta, o CM está muito próximo dele, de modo que o erro da aproximação anterior (tomá-lo como fixo), é que as massas das duas componentes do par podem ser de mesma ordem, uma aproximação desse tipo é inviável. Vejamos como tratar, sem essa aproximação, o **problema de dois corpos**: a interação gravitacional entre duas partículas de massa quaisquer, m_1 e m_2 .

A figura (XXXXXXXXXX) ao lado ilustra as posições \vec{r}_1, \vec{r}_2 e \vec{R} das duas partículas e do **CM** em relação a um referencial qualquer de origem O, onde \vec{R} é dado. Tomando um novo referencial com origem **O'** no **CM** (referencial do CM), os vetores de posição \vec{r}_1 e \vec{r}_2 das duas partículas relativos a esse referencial, ou seja:

$$\vec{r}_1 = \frac{-m_2}{M} \vec{r} \quad , \quad \vec{r}_2 = \frac{-m_1}{M} \vec{r} \quad (10.10.1)$$

onde $M = m_1 + m_2$ é a massa total do sistema, e

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (10.10.2)$$

é o vetor de posição de m_2 em relação a m_1 . As equações de movimento no referencial do **CM** se escrevem:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{1(2)} \quad , \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{2(1)} \quad (10.10.3)$$

onde, pela (10.10.2),

$$\vec{F}_{2(1)} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} = -\vec{F}_{1(2)} \quad (10.10.4)$$

com $\hat{r} = \vec{r}/r$, $r = |\vec{r}|$

Substituindo as (10.10.1) nas (10.10.3), vemos que ambas as equações de movimento se reduzem a uma única:

$$\frac{m_1 m_2}{M} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2(1)} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (10.10.5)$$

ou seja,

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad (= F_{2(1)}) \quad (10.10.6)$$

onde, $\vec{F} \equiv F_{2(1)}$ depende somente de \vec{r} , e

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (10.10.7)$$

que tem as dimensões de massa, chama-se **massa reduzida** do sistema de dois corpos (FIGURA XXXXXXXX da).

A (10.10.6) é formalmente idêntica à equação de movimento de uma única partícula de massa μ igual à massa reduzida e vetor de posição \vec{r} , sujeita à força \vec{F} . Conseguimos assim reduzir o problema de dois corpos ao de um só corpo. Essa redução vale não somente para o caso gravitacional, mas para qualquer força de interação **central**, ou seja, sempre que $\vec{F}_{2(1)} = -\vec{F}_{1(2)}$ depende apenas de $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ (*única propriedade usada*).

A “partícula” de massa μ é fictícia, mas uma vez resolvida a (10.10.1) para obter as posições de $\vec{r}_1(t)$ e $\vec{r}_2(t)$ das duas partículas em relação ao **CM** em função do tempo. Note que $\vec{r}(T)$ da órbita de uma partícula em relação à outra.

Temos, pela (10.10.7):

$$\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (10.10.8)$$

de modo que μ é sempre menor que m_1 e m_2 . Se uma das duas massas é muito maior que a outra, por exemplo $m_2 \gg m_1$, podemos desprezar $1/m_1$ em confronto com $1/m_2$ e vem $\mu \approx m_1$. Assim, por exemplo, a massa reduzida do sistema Terra-Sol é aproximadamente igual à massa da Terra.

Vejamos agora qual é o efeito da massa reduzida no problema da órbitas circulares sob a ação de forças gravitacionais. As (10.10.5) e (10.10.6) dão:

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{\mu r^2} \hat{r} = \frac{-G}{(m_1 + m_2) r^2} \hat{r} \quad (10.10.9)$$

Para uma órbita circular um período T da partícula fictícia de massa μ identificamos $\ddot{\vec{r}}$ com a aceleração centrípeta (10.6.1)

$$\ddot{\vec{r}} = -4\pi^2 \frac{r}{T^2} \hat{r} \quad (10.10.10)$$

Das (10.10.9) e (10.10.10), obtemos:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} (m_1 + m_2) = \frac{G m_2}{4\pi^2} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \quad (10.10.11)$$

No caso do movimento dos planetas em torno do Sol, na aproximação de órbitas circulares, r seria o raio da órbita, m_2 a massa do Sol e m_1 a massa do planeta. Pode-se demonstrar que a (10.10.11) permanece válida para órbitas elípticas, substituindo r pelo raio médio da órbita (semi-eixo maior da elipse).

Comparando a (10.10.11) com a (10.8.1), vemos que o único efeito da massa reduzida é introduzir o fator de correção $1 + (m_1/m_2)$ na 3. lei de Kepler. Devido a esse fator, a 3. lei não é mais exata, ou seja, a “constante” da 3. lei não é exatamente a mesma para todos os planetas, variando de planeta a planeta pelo fator de correção. Entretanto, mesmo para Júpiter, o planeta que tem a maior massa, $m_1/m_2 \sim 10^{-3}$ (para a Terra, $m_1/m_2 \sim 3 \times 10^{-6}$), de modo que o fator de correção é muito próximo da unidade e a 3. lei de Kepler é uma excelente aproximação (Tabela XXXXX).

Se a partícula fictícia de vetor de posição \vec{r} descreve um círculo, as (10.10.1) mostram que as duas partículas reais também descrevem órbitas circulares em torno do CM. Para o sistema **Sol-Planeta**, o CM está muito próximo do Sol, e o raio da órbita do planeta em torno do CM, $|\vec{r}_1| = (m_2/M)r \approx r$ praticamente coincide com o da órbita em torno do Sol.

Por outro lado, o Sol também descreve uma órbita circular em torno do CM, mas o raio dessa órbita é $|\vec{r}_2| = (m_1/M)r \ll r$, ou seja, é extremamente pequeno em confronto com a distância Sol-Planeta.

Para um sistema de dois corpos de massas iguais, $m_1 = m_2$, e uma órbita circular de raio r da partícula de massa reduzida $\mu = m_1/2$, as (10.10.1) mostram que

$$\vec{r}_1 = -\frac{1}{2}\vec{r} \text{ e } \vec{r}_2 = \frac{1}{2}\vec{r},$$

neste caso, o CM é ponto médio do segmento que une as duas partículas, e elas giram em torno do centro, descrevendo círculos de raio $r/2$.

10.11 Energia potencial para um sistema de partículas

A energia potencial de uma partícula sujeita a forças conservativas num ponto P é dada por:

$$U(P) = - \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{l}, \text{ onde } U(P_0) = 0 \quad (10.11.1)$$

e o resultado independe do caminho de P_0 a P . Um sistema de duas partículas de massas m_1 e m_2 em interação gravitacional, a energia potencial da partícula 1 numa posição situada à distância r_{12} da partícula 2 é dada por (10.9.4)

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \quad (10.11.2)$$

adotando com nível zero de energia potencial um ponto P_0 infinitamente afastado, onde a força gravitacional se anula ($r_{12} \rightarrow \infty$).

A (10.11.2) é também a energia potencial da partícula 2 sob o efeito gravitacional da partícula 1. Existe uma completa simetria com respeito às duas partículas, sugerindo que se deve interpretar “ U ” como a energia potencial associada ao sistema de duas partículas na configuração considerada, ou seja, quando estão à distância r_{12} uma da outra; podemos usar a notação $U = U_{12}$ para exprimir esta idéia.

Consideramos agora uma terceira partícula, de massa m_3 , situada na posição 3 (figura XXX ao lado). Qual é a energia potencial da partícula nessa posição sob a ação das forças gravitacionais devida a m_1 e m_2 . Podemos calculá-la pela (10.11.1), onde P_0 está infinitamente afastado e $\vec{F} = \vec{F}_{3(1)} + \vec{F}_{3(2)}$, usando notação análoga:

$$U_3 = - \int_{P_0}^3 \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{P_0}^3 \vec{F}_{3(1)} \cdot d\vec{l} - \int_{P_0}^3 \vec{F}_{3(2)} \cdot d\vec{l} = Gm_1 m_3 \int_{\alpha}^{r_{13}} \frac{dr'_{13}}{(r'_{13})^2} + Gm_2 m_1 \int_{\alpha}^{r_{23}} \frac{dr'_{23}}{(r'_{23})^2}$$

onde as notações estão explicadas na figura (XXXXXXXX) acima.

Cada uma dessas integrais é análoga, e o resultado é:

$$U_3 = -G \frac{m_1 m_3}{r_{13}} - G \frac{m_1 m_2}{r_{23}} \quad (10.11.3)$$

Isto decorre diretamente do princípio de superposição. Note que, adotamos a notação simétrica mencionada acima, escreveríamos a (10.11.3) sob a forma:

$$U_3 = U_{13} + U_{23} \quad (10.11.4)$$

ou seja, a energia potencial da partícula 3 é a soma de suas energias de interação com as partículas 1 e 2.

A energia potencial total do sistema de 3 partículas obtém-se somando a U_3 a energia potencial (10.11.1) do sistema das 2 partículas 1 e 2:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_2}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) \quad (10.11.5)$$

Novamente, o resultado é simétrico em relação às três partículas: a energia potencial total é uma propriedade da configuração. Obteríamos o mesmo resultado, por exemplo, somando à energia potencial do sistema formado pelas partículas 2 e 3 (U_{23}) a energia potencial da partícula 1 sob a ação das duas outras ($U_{12} + U_{13}$).

O resultado se generaliza imediatamente à energia potencial gravitacional de um sistema de um número qualquer N de partículas: a energia total é a soma das energias de interação entre todos os pares de partículas:

$$U = \sum_{i \neq j} \sum U_{ij} = \sum_{i < j} \sum_{j=1}^N U_{ij} \quad (10.11.6)$$

onde os índices i e j também todos os valores diferentes de 1 a N que correspondem a **pares** de partícula. Para isto, como indicado, basta restringir a soma a $i < j$, o que impede que o mesmo par seja contado duas vezes (o par 21 é o mesmo que 1 2); isto foi feito na (10.11.5). Também podemos remover esta restrição contando cada par duas vezes, e dividir por 2 o resultado:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N U_{ij} = -\frac{1}{2} G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (10.11.7)$$

Se as partículas estão sujeitas unicamente à interação gravitacional entre elas, a energia total do sistema é:

$$E = T + U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^2 + U \quad (10.11.8)$$

onde T é a energia cinética total e \vec{v}_i é a velocidade da partícula i . Como a força gravitacional é conservativa, a energia total se conserva no tempo, embora as velocidades \vec{v}_i e as distâncias r_{ij} variem com o tempo. É o que sucede, por exemplo, no movimento do sistema planetário como um todo em redor do Sol. O fato de que a energia potencial do sistema é negativa significa que se trata de um sistema ligado: seria preciso fornecer energia aos planetas para removê-los a uma distância infinita uns dos outros e do Sol ($r_{ij} \rightarrow \infty$), onde a interação gravitacional seria nula. Por outro lado, a contração gravitacional de uma estrela ou de uma galáxia diminui as distâncias r_{ij} , e por conseguinte também o valor de U ($|U|$ aumenta e $U < 0$). A energia assim despreendida pode transformar-se em energia cinética ou converter-se em outras formas de energia.

Problemas

1. Em 1968, a nave espacial Apollo 8 foi colocada em uma órbita circular em torno da Lua, a uma altitude de 113 km acima da superfície. O período observado dessa órbita foi de 1 hora e 59 minutos. Sabendo que o raio da Lua é de 1.738 km, utilize esses dados para calcular a massa da Lua.

Resposta: $7,35 \times 10^{22}$ kg.

2. Considere um satélite em órbita circular próxima da superfície de um planeta.
 - a) Mostre que o período T dessa órbita só depende da densidade média ρ do planeta, e não de sua massa total.
 - b) Calcule o valor de T para a Terra, para o qual $\rho = 5,52 \text{ kg/m}^3$, desprezando os efeitos da atmosfera sobre a órbita.
 - c) Ainda no caso da terra, calcule a velocidade do satélite nessa órbita.

Resposta:

3. Para uma partícula em órbita circular em torno de centro de força gravitacional, demonstre que:
 - a) A energia total da partícula é a metade da energia potencial associada à órbita.
 - b) A velocidade da partícula é inversamente proporcional à raiz quadrada do raio da órbita.
4. Considere um satélite em órbita circular próxima da superfície de um planeta do raio R_p , onde aceleração da gravidade vale g_p .
 - a) Calcule a velocidade de escape do satélite partindo dessa órbita.
 - b) Aplique o resultado à Terra, desprezando os efeitos atmosféricos.
5. O diâmetro angular aparente do Sol visto da Terra (ângulo subtendido pelo disco solar) é $0,55$ (XXXXXX) Graus. A constante gravitacional é $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ (XXXXXX). Utilizando apenas estes dados, juntamente com o período da órbita da Terra em torno do Sol, aproximando por um círculo, calcule a densidade média "u"XXXXX do Sol.