

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/281450688>

Clonado y teleclonado probabilista de estados cuánticos

Thesis · April 2013

DOI: 10.13140/RG.2.1.2135.4723

CITATIONS

0

READS

317

1 author:



Gabriel Araneda

University of Oxford

44 PUBLICATIONS 446 CITATIONS

SEE PROFILE



UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
MAGÍSTER EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA

Clonado y Teleclonado Probabilista de Estados Cuánticos

GABRIEL ANDRÉS ARANEDA MACHUCA

Profesor Guía: Dr. Aldo Delgado Hidalgo
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias con mención en
Física de la Universidad de Concepción
Código Programa: 4102

CONCEPCIÓN - CHILE
18 de Marzo de 2013

Comisión Examinadora : Dr. Aldo Delgado Hidalgo

Dr. Carlos Saavedra Rubilar

Dr. Gustavo Moreira Lima

dedicado a Magdalena y a mis Padres

Resumen

En esta tesis estudiamos la implementación del protocolo de clonado perfecto probabilista de estados cuánticos de qubits codificados en estados de fotones. Este tipo de proceso produce copias exactas que pueden estar distanciadas del sistema físico que alberga al estado de entrada, pero con una probabilidad de éxito diferente de uno, que depende del conjunto de posibles estados de entrada. Para ello consideramos fotones gemelos generados por Conversión Paramétrica Espontánea Descendente y codificamos la información en los grados de libertad de polarización y camino de propagación de los fotones. El objetivo es estudiar la factibilidad y calidad de este sistema de codificación y procesamiento de información en procesos de transmisión de información cuántica.

En la segunda parte de esta tesis estudiaremos el proceso de Telecloning de estados cuánticos, el cual es un proceso que permite distribuir información a usuarios alejados espacialmente. Este proceso se presenta como una alternativa de bajo costo informacional a la simple combinación entre clonado y teleportación de estados cuánticos. Buscamos proponer un protocolo que permita teleclonar estados cuánticos cuando el recurso entrelazado, o canal cuántico, no es máximamente entrelazado. Para ello, proponemos la aplicación de estrategias de discriminación de estados cuánticos y así obtener protocolos probabilista que logren el proceso de telecloning con la máxima fidelidad permitida.

Abstract

In this thesis we study the implementation of quantum probabilistic cloning by mean of twin photons. This kind of process can probabilistically produce perfect copies of the input state, and the probability depends on the set of the possible input states. The copies can be spatially separated from the system hosting the input state. We use twin photons generated by spontaneous parametric down conversion, and the states are encoded in the polarization and path degree of freedom of photons.

In the second part of this thesis we study the telecloning protocol. This process permits us to distribute quantum information to different spatially separated parties. This process is a low-cost alternative to the simple combination of cloning and teleportation. We propose a protocol which allows the telecloning by means of a non-maximal multiparticle entangled state. To achieve this task, we make use of quantum state discrimination strategies and then get the maximum fidelity and probability for the process.

Índice general

Resumen	III
Abstract	V
Índice de Figuras	IX
1. Introducción.	1
2. Marco Teórico.	5
2.1. Estados Cuánticos.	5
2.2. El Qubit y el Qudit.	6
2.3. Entrelazamiento Cuántico.	8
2.4. Teleportación Cuántica.	12
2.5. Teorema de No-Cloning	13
2.5.1. Más allá del Teorema de No-Cloning.	15
2.5.2. Clonado Cuántico Óptimo Universal.	17
2.5.3. Clonado Perfecto Probabilista.	17
2.6. Luz Polarizada.	18
2.6.1. Matrices de Jones.	19
2.6.2. Beam Splitter y Beam Splitter Polarizador.	24
2.7. Conversión Paramétrica Espontánea Descendente.	27

3. Clonado Cuántico Probabilista de Qubits.	33
3.1. Clonado Cuántico Probabilista	33
3.2. Clonado Probabilista de dos Qubits.	34
3.3. Propuesta Experimental con RNM.	37
3.4. Propuesta Experimental con Fotones Gemelos.	39
3.4.1. Clonado Cuántico Probabilista no Local con Fotones Entrelazados en Polarización.	39
3.4.2. Detección y Tomografía.	47
3.4.3. Consideraciones Experimentales.	48
3.4.4. Clonado Cuántico Óptimo no Local con Fotones con Entrelaza- miento en Caminos.	50
3.4.5. Clonado Cuántico Subóptimo Local.	52
3.5. Clonado Probabilista no Local Con Canales Parcialmente Entrelazados.	57
3.6. Futuros Trabajos.	63
4. Telecloning de Estados Cuánticos vía Canales Parcialmente Entrelazados.	65
4.1. Clonado Cuántico Óptimo.	65
4.2. Telecloning de Qubits a través de un Canal Máximamente Entrelazado.	67
4.3. Telecloning de Qubits a través de un Canal Parcialmente Entrelazado. .	69
4.4. Telecloning de $1 \rightarrow M$ Qudits a través de un Canal Máximamente entre- lazado.	76
4.5. Telecloning de $1 \rightarrow M$ Qudits a través de un Canal Parcialmente Entre- lazado.	79
4.6. Discriminación de Estados Simétricos Linealmente Independientes vía USD.	82
4.6.1. Fidelidad en Caso de Falla en la Discriminación.	86
4.7. Futuros Trabajos.	96
4.7.1. Transformación de Discriminación.	97
4.7.2. Telecloning vía Maximum Confidence Measurements.	99
5. Conclusión y Perspectivas.	101

Publicación de Resultados	103
Bibliografía	104
Agradecimientos	111

Índice de figuras

2.1. Esfera de Bloch.	8
2.2. Esfera de Poincaré.	24
2.3. Beam Splitter.	25
2.4. Conversión paramétrica descendente tipo-I	29
2.5. Conversión paramétrica descendente tipo-II	30
2.6. Doble rendija para selección de modos espaciales.	32
3.1. Circuito optimizado para clonado cuántico de qubits	38
3.2. Esquema general para clonado cuántico probabilista con fotones gemelos	40
3.3. Operación Unitaria de Reconstrucción (RUO) en el caso de que el fotón sea medido en el camino a	45
3.4. Operación Unitaria de Reconstrucción en el caso de que el fotón sea medido en el camino c	46
3.5. Esquema básico detección fotón 2.	48
3.6. Setup de generación y preparación para clonado cuántico probabilista utilizando entrelazamiento espacial utilizando una doble rendija.	51
3.7. Esquema general para clonado cuántico probabilista sub-óptimo.	53
3.8. Interferómetros condicionales CI_0 y CI_1	60
4.1. Esquema Telecloning para $M = 3$	78

Introducción.

En las últimas décadas, el concepto de información se ha hecho parte fundamental en la formulación de teorías físicas, tomando parte en varias áreas, desde gravitación (entropía de agujeros negros, ver por ejemplo [1]) a la física cuántica. En este trabajo nos concentraremos en una de las características esenciales de la información: La posibilidad de copiarla y distribuirla. Se podría pensar que esta posibilidad es una característica esencial de toda buena forma de codificar la información. Sin embargo, este no es el caso: cuando la información es codificada en sistemas cuánticos, en general ésta no puede ser replicada sin introducir errores. Esta limitación, sin embargo, no hace que la información cuántica sea inútil, más bien todo lo contrario, como trataremos de mostrar.

Una de las aplicaciones más importantes del entrelazamiento multipartículas se encuentra en computación cuántica distribuida, donde varias partes distantes (Alice, Bob, Claire, Dinosaur, etc) comparten un estado inicial entrelazado y a los cuales se les pide llevar a cabo una tarea computacional dada usando solo operaciones locales y comunicación clásica (LOCC). El problema es encontrar un protocolo que complete la tarea con una precisión dada usando los mínimos recursos posibles, en particular, la mínima cantidad inicial de entrelazamiento no local, el cual es un recurso caro dado que es físicamente difícil de conseguir y frágil de mantener.

El problema general a tratar consiste en que Alice tiene un qubit en un estado desconocido $|\phi\rangle$ y desea transmitir copias idénticas de este a sus M asociados (Bob, Claire, etc.). Por supuesto, el teorema de no-cloning, el cual revisaremos en la primera parte, nos dice que el proceso de copiado no puede ser perfecto. Lo mejor que Alice puede

hacer es enviar *clones cuánticos óptimos* de su estado, lo que asumimos es suficiente para su propósito. La tarea computacional que Alice debe llevar a cabo es generar M copias cuánticas óptimas de su qubit de entrada y distribuirla entre todas las partes distantes.

La forma más directa disponible de realizar la tarea propuesta sería que Alice generara los clones óptimos de forma local, usando algún algoritmo cuántico, y luego teleportar cada uno a sus destinatarios mediante un canal previamente entrelazado. Esto requeriría M pares entrelazados iniciales (*e-bits*), así como el envío de M mensajes clásicos de dos bits (uno por cada resultado de la medición). Se requeriría también que Alice implementara una red compleja para hacer las mediciones que involucraría varios qubits extras y operaciones de dos qubits.

Comenzamos estudiando el proceso de clonado cuántico exacto, donde es posible producir copias idénticas al de un estado de entrada, pero solo de forma probabilista. Esto podría permitir el clonado y la posterior teleportación (o viceversa) de los estados requeridos para así lograr la tarea propuesta. A continuación estudiaremos también la posibilidad de implementación de un esquema no local de clonado cuántico probabilista, el cual nos permite copiar y teleportar en un solo paso.

En general, como veremos más adelante, es posible encontrar estrategias mucho menos costosas, siempre que Alice y sus asociados compartan un estado entrelazado multipartícula específico [2]. En este caso, es posible transmitir simultáneamente todas las M copias mediante una sola medición en el qubit de Alice. Alice solo necesita publicar su resultado y luego, atendiendo a este resultado, todas las demás partes deben realizar operaciones locales para así obtener las copias óptimas. Este “telecloning” es reminiscente del conocido protocolo de teleportación de Bennet *et. al.* [3]. De hecho puede ser visto como la generalización natural de la teleportación al caso de varios receptores.

Esta tesis está organizada como sigue:

- El capítulo 2 está dedicado a revisar el marco teórico básico necesario para la realización de esta tesis. Revisamos conceptos básicos de información cuántica y procesamiento de información cuántica óptica utilizando grados de libertad como

la polarización y el camino de un fotón.

- En el capítulo 3 comenzamos revisando el proceso de clonado cuántico probabilista propuesto por Duan y Guo [4] y la propuesta de realización de este protocolo efectuada por Chen *et. al.* [5]. Luego explicamos detalladamente nuestra propuesta para la implementación de éste protocolo utilizando fotones gemelos producidos por conversión paramétrica espontánea. También mostramos que es posible modificar levemente el setup para producir clonado local y no local.
- En el capítulo 4 introducimos y estudiamos el proceso de telecloning de qubits propuesto originalmente por Murao *et. al.* [2]. Estudiamos luego una forma práctica de generalizarlo a qudits y un esquema general que permite realizar el telecloning de qudits utilizando canales multipartícula parcialmente entrelazados recurriendo a discriminación de estados no ortogonales.
- Finalmente resumimos, analizamos y ponemos en perspectiva los resultados obtenidos.

En este capítulo introduciremos algunos conceptos y métodos básicos en información cuántica y procesamiento óptico de información cuántica. Nos restringiremos a estudiar aquellos que están directamente relacionados con nuestros objetivos finales. Para una mayor y más amplia introducción al campo de la información cuántica, ver por ejemplo [6, 7], y el caso de procesamiento con fotones individuales, ver por ejemplo [8].

2.1. Estados Cuánticos.

El estado físico de un sistema cuántico se denomina *estado cuántico*. Un estado cuántico puede ser *puro* o *mezcla*, como revisaremos a continuación.

Un estado cuántico puro está dado por un vector $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Este vector puede ser expandido en una base arbitraria

$$|\psi\rangle = \sum_m \langle m|\psi\rangle |m\rangle, \quad (2.1)$$

donde la suma va desde $m = 0$ hasta $d - 1$, donde d la dimensionalidad del espacio de Hilbert al que pertenece $|\psi\rangle$. Si la base es completa y ortonormal, se satisface

$$\sum_m |m\rangle\langle m| = \mathbb{1}, \quad \langle m|m'\rangle = \delta_{mm'}. \quad (2.2)$$

Los números complejos $\langle m|\psi\rangle$ son los componentes el vector $|\psi\rangle$ en el espacio de Hilbert y $\mathbb{1}$ es la matriz identidad m -dimensional.

Por otro lado, los estados *mezcla* son descritos en el espacio de operadores ligados $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, que corresponde al espacio formado por las transformaciones lineales que automapean \mathcal{H} . Estos estados no pueden ser descritos como vectores en un espacio de Hilbert, tomando así en cuenta el caso en que el conocimiento acerca de la preparación del estado es incompleto. Un estado mezcla es una mezcla estadística de estados puros dados por el *operador densidad* ρ ,

$$\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|, \quad (2.3)$$

que es hermítico ($\rho = \rho^\dagger$), de traza unitaria ($\text{Tr}(\rho) = 1$) y semidefinido positivo, es decir, todos sus eigenvalores son mayores o iguales a cero.

A diferencia de la superposición coherente de la Ec. (2.1), un estado mezcla es llamado a veces *superposición incoherente*.

Notemos que los estados $|\psi_k\rangle$ en la mezcla ρ no son necesariamente ortogonales entre sí. Además, la descomposición de la Ec. (2.3) no es única. Sin embargo, cuando el operador densidad es escrito en su base de estados propios, encontramos que

$$\text{Tr}(\rho^2) = \sum_k \rho_k^2 \leq \sum_k \rho_k = 1, \quad (2.4)$$

donde ρ_k son los eigenvalores de ρ . La igualdad $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ solo se mantiene para estados puros, por lo tanto, todo estado con $\text{Tr}(\rho^2) < 1$ es un estado mezcla. Alternativamente, esto se hace evidente si utilizamos la entropía de von Neumann del estado,

$$S(\rho) = -\text{Tr} \rho \log \rho \quad (2.5)$$

$$= -\text{Tr} \left[\sum_k \rho_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \sum_l (\log \rho_l) |\psi_l\rangle \langle \psi_l| \right] \quad (2.6)$$

$$= -\sum_k \rho_k \log \rho_k, \quad (2.7)$$

la cual es distinta de cero para todo estado mezcla e igual a cero para todo estado puro.

2.2. El Qubit y el Qudit.

La unidad básica de información clásica es el *bit*, el cual es un número que puede tomar solo dos valores posibles: 0 o 1. Los bits pueden ser codificados en cualquier

sistema con dos estados distinguibles, por ejemplo, dos voltajes diferentes entre dos placas de un condensador. Un mensaje puede entonces ser codificado en una cadena de bits, los que pueden ser almacenados, copiados, transferidos, etc., de forma clásica.

Un *qubit* es el análogo cuántico del bit. Es también un sistema con dos estados bien definidos: $|0\rangle$ y $|1\rangle$, que pueden ser representados como vectores columna

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

A diferencia del bit clásico, un qubit puede estar también en cualquier superposición coherente de estos dos estados, es decir

$$|\psi_{\theta,\phi}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|1\rangle, \quad (2.9)$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

donde se satisface de forma automática la condición de normalización. Este estado también puede ser expresado en términos de su representación en la *esfera de Bloch*

$$\rho = |\psi_{\theta,\phi}\rangle\langle\psi_{\theta,\phi}| \quad (2.11)$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{1} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+s_3 & s_1-is_2 \\ s_1+is_2 & 1-s_3 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.14)$$

donde $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ es el vector de Pauli, formado por las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

y

$$\vec{s} = (s_1, s_2, s_3) = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta). \quad (2.16)$$

El vector de Bloch, \vec{s} , describe completamente el estado del qubit. Este vector se orienta en la dirección especificada por las coordenadas esféricas θ y ϕ . La punta del vector

descansa sobre la superficie de la esfera de Bloch (figura 2.1), representando un estado puro con $|s| = 1$. Para estados mezcla, tendremos que $|s| < 1$.

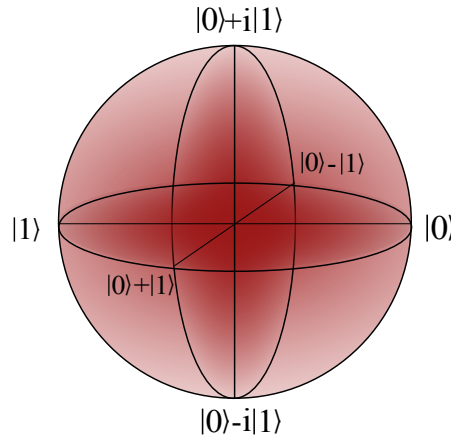


Figura 2.1: Esfera de Bloch.

Existen muchas formas diferentes de codificar qubits. En principio cualquier sistema cuántico con al menos dos estados puede ser usado, por ejemplo, dos estados electrónicos de un átomo o los dos estados de espín de una partícula de espín $1/2$, o en el estado de polarización de un fotón.

Del mismo modo, es posible codificar información en sistemas cuánticos de más dimensiones. Estos sistemas cuánticos son llamados *qudits*. Durante el desarrollo de esta tesis, d estará reservado para la dimensionalidad del sistema cuántico en que se codifica la información. Aunque podemos definir un vector generalizado de Bloch y una hiperesfera de Bloch, los estados puros d -dimensionales solo ocupan un subconjunto de los puntos de la hipersuperficie de la hiperesfera de Bloch [9].

2.3. Entrelazamiento Cuántico.

Un sistema que contiene más de un qubit, o en general, más de un qudit, es llamado *sistema compuesto*. En un sistema compuesto pueden existir correlaciones cuánticas entre los diferentes subsistemas. Una de estas correlaciones cuánticas puede ser el entrelazamiento (aunque pueden existir otras, ver [10, 11]). Por ejemplo, en un estado de dos qubits máximamente entrelazados el resultado de la medición sobre uno de los qudits puede predecir de forma exacta el estado del segundo qubit aun sin ser observado. Toda

la información portada por un sistema entrelazado es codificada en las correlaciones entre los qubits mientras que un solo qubit no contiene información.

Por muchos años el entrelazamiento fue visto como una característica “curiosa” de la mecánica cuántica, pero en el campo relativamente nuevo de la teoría de información cuántica el entrelazamiento es usado como un recurso para la comunicación. Como ejemplo de esto tenemos la teleportación cuántica [3, 12], criptografía cuántica [13] o codificación superdensa [14, 15], entre otras aplicaciones.

El entrelazamiento se puede definir como explicamos a continuación:

- Estados Puros. El estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ de un estado compuesto de N subsistemas es llamado *separable* si puede ser escrito como un producto tensorial

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_N\rangle, \quad (2.17)$$

con $|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$, ..., $|\psi_N\rangle \in \mathcal{H}_N$. Si esto no es posible, el estado es llamado *entrelazado*.

- Estados mezcla. El estado $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_N)$ es llamado *separable* si puede ser escrito en la forma

$$\rho = \sum_k p_k |1_k\rangle\langle 1_k| \otimes |2_k\rangle\langle 2_k| \otimes \cdots \otimes |N_k\rangle\langle N_k|, \quad (2.18)$$

con $|1_k\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|2_k\rangle \in \mathcal{H}_2$, ..., $|N_k\rangle \in \mathcal{H}_N$, y donde $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es el espacio de operadores acotados actuando sobre \mathcal{H} . Si esto no es posible, entonces el estado es llamado *entrelazado*.

El ejemplo mejor conocido de estados entrelazados en sistemas de dos qubits son los *estados de Bell*

$$|\phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle \pm |1\rangle|1\rangle) \quad (2.19)$$

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle|0\rangle \pm |0\rangle|1\rangle). \quad (2.20)$$

Estos estados forman un base ortonormal en el espacio de Hilbert de dos qubits y están máximamente entrelazados, lo que significa que las matrices densidad reducidas de los estados de un qubit (las cuales son obtenidas trazando sobre el segundo qubit) son

máximamente mezcladas, es decir, con matriz densidad $\rho = \frac{1}{2}\mathbb{1}$, conocida también como matriz de la ignorancia ya que corresponde a la completa ignorancia acerca de cual de los estados ortogonales corresponde la preparación.

Descomposición de Schmidt La descomposición de Schmidt [16] es muy útil cuando hablamos de entrelazamiento. Supongamos que $|\psi\rangle$ es un estado puro de un sistema compuesto AB , entonces existe una base de estados ortonormales $\{|i_A\rangle\}$ para el sistema A , y una base de estados ortonormales $\{|i_B\rangle\}$ para el sistema B tal que

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle, \quad (2.21)$$

donde λ_i son números reales no negativos que satisfacen $\sum_i \lambda_i^2 = 1$, conocidos como *coeficientes de Schmidt*, mientras que los vectores $\{|i_A\rangle\}$ y $\{|i_B\rangle\}$ como son conocidos como *bases de Schmidt* para los sistemas A y B .

Este resultado es muy útil, ya que muchas de las propiedades importantes de los sistemas cuánticos pueden ser completamente determinadas por los valores propios de las matrices reducidas del sistema. Las matrices densidad reducidas del sistema pueden ser calculadas de forma muy sencilla utilizando la descomposición en la base de Schmidt, llegando a

$$\rho_A = \text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_i \lambda_i^2 |i_A\rangle\langle i_A|, \quad (2.22)$$

$$\rho_B = \text{Tr}_A(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_i \lambda_i^2 |i_B\rangle\langle i_B|, \quad (2.23)$$

de donde podemos ver que los eigenvalores λ_i^2 de ρ_A y ρ_B (que resultan ser matrices diagonales en esta base) son idénticos para ambos operadores densidad, por lo que muchas de las propiedades físicas son las mismas para ambos sistemas.

Para probar la existencia de estas bases consideraremos el caso simple en el que A y B que pertenecen a espacios de Hilbert de la misma dimensión. Sean $\{|j\rangle\}$ y $\{|k\rangle\}$ alguna base ortonormal para los sistemas A y B , respectivamente. Entonces $|\psi\rangle$ puede ser escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} a_{jk} |j\rangle |k\rangle, \quad (2.24)$$

para alguna matriz con elementos complejos a_{jk} . Mediante la descomposición en valores singulares tenemos que $a = uDv$, donde D es una matriz diagonal con elementos no negativos, y donde u y v son matrices unitarias. De este modo

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j,k} u_{ji} D_{ii} v_{ik} |j\rangle |k\rangle. \quad (2.25)$$

Definiendo $|i_A\rangle := \sum_j u_{ji} |j\rangle$, $|i_B\rangle := \sum_k v_{ik} |k\rangle$, y $\lambda_i := D_{ii}$, vemos que podemos escribir

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle. \quad (2.26)$$

Dado que u y v son matrices unitarias, la ortonormalidad de las bases $\{|j\rangle\}$ y $\{|k\rangle\}$ conlleva que también lo serán las bases $\{|i_A\rangle\}$ y $\{|i_B\rangle\}$.

El número de valores λ_i es llamado *número o rango de Schmidt* del estado $|\psi\rangle$. El número de Schmidt es una propiedad muy importante de un sistema cuántico compuesto, ya que ayuda a cuantificar la cantidad de entrelazamiento entre los sistemas A y B . El número de Schmidt de un sistema compuesto se preserva bajo transformaciones unitarias locales, es decir, sobre A o B por separado. Para ver esto, notemos que si $\sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle$ es la descomposición para $|\psi\rangle$, entonces $\sum_i \lambda_i (U|i_A\rangle |i_B\rangle)$ es la descomposición para $U|\psi\rangle$, donde U es una transformación unitaria sobre A .

Un estado puro de dos sistemas de d -dimensiones es máximamente entrelazado cuando los coeficientes de Schmidt del vector de estado total son todos iguales. Dado que los eigenvalores de la matriz densidad reducida (después de trazar la mitad del estado bipartito) son los coeficientes de Schmidt al cuadrado, entonces al trazar cualquier subsistema de un estado máximamente entrelazado, el otro será el estado máximamente mezclado (con entropía máxima). Por otro lado, un estado bipartito puro es *factorizable* (no entrelazado) si su número de Schmidt es uno. En este caso, los estados reducidos son puros y tienen entropía cero. Una medida del entrelazamiento bipartito para estados puros es la entropía de von Neumann, es decir, la entropía definida en la Eq. (2.5) para el sistema restante luego de trazar alguno de los subsistemas [17],

$$-Tr(\rho_2 \log_d \rho_2) = -\sum_i \lambda_i^2 \log_d \lambda_i^2. \quad (2.27)$$

Esta medida va desde cero hasta uno, y para el caso de qubits ($d = 2$) sus unidades son los *ebits*.

Un método muy simple para calcular la descomposición de Schmidt está basado en la observación de que las matrices reducidas del sistema compuesto son diagonales en la base de Schmidt. La idea es calcular la traza parcial para cualquier subsistema y diagonalizarlo para encontrar la base de Schmidt para este subsistema. Consideremos como ejemplo el estado de dos qubits

$$|\psi\rangle = \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}\right)|00\rangle + \left(\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{6}}\right)|01\rangle + \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}\right)|10\rangle + \left(\frac{\sqrt{6}-1}{2\sqrt{6}}\right)|11\rangle. \quad (2.28)$$

Trazando el segundo qubit, obtenemos el operador densidad reducido para el primer qubit

$$\text{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|, \quad (2.29)$$

o, en su representación matricial,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

de donde vemos que sus autovalores son $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$, con eigenvectores $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ y $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ respectivamente. Tomaremos estos vectores como la base de Schmidt del primer sistema. Para escribir el estado $|\psi\rangle$ en su forma de Schmidt, simplemente llevamos a cabo un cambio de base en el primer subsistema desde la base lógica hasta la base de Schmidt que acabamos de encontrar. La base de Schmidt para el segundo sistema aparecerá de forma automática una vez que escribimos el primer sistema en la base de Schmidt. Finalmente el estado escrito en la base de Schmidt es

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|+\rangle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle\right) + \frac{1}{2}|-\rangle \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right). \quad (2.31)$$

2.4. Teleportación Cuántica.

El protocolo de teleportación nos permite transmitir fielmente un estado $|\phi\rangle_X$ de un sistema cuántico X entre dos partes espacialmente separadas: un emisor, Alice, y un receptor, Bob. Los pasos esenciales de este procedimiento en el caso simple donde X es un sistema de un qubit, son los siguientes: El primero y más importante es que Alice y Bob deben compartir un estado maximalmente entrelazado de dos qubits S (*sender*) y

R (*receiver*), tal como

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle_{SR} + |11\rangle_{SR}). \quad (2.32)$$

Supongamos que el qubit que Alice quiere enviar a Bob es $|\phi_X\rangle = a|0\rangle_X + b|1\rangle_X$, por lo que el estado conjunto de este qubit y el canal es

$$|T\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a|0\rangle_X + b|1\rangle_X) (|00\rangle_{SR} + |11\rangle_{SR}). \quad (2.33)$$

Este estado puede ser escrito como

$$|T\rangle = \frac{1}{2} [|\Phi^+\rangle_{XS}(a|0\rangle_R + b|1\rangle_R) + |\Phi^-\rangle_{XS}(a|0\rangle_R - b|1\rangle_R) \quad (2.34)$$

$$+ |\Psi^+\rangle_{XS}(b|0\rangle_R + a|1\rangle_R) + |\Psi^-\rangle_{XS}(b|0\rangle_R - a|1\rangle_R)], \quad (2.35)$$

donde

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle), \quad (2.36)$$

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle), \quad (2.37)$$

es la base formada por los estados de Bell en el espacio de dos qubits. Alice debe realizar una medición conjunta en el sistema $X \otimes S$ en la base de Bell. Finalmente, Alice envía un mensaje de dos bits a Bob informándolo de los resultados de la medición, a través de un canal clásico. Bob entonces rota su qubit usando uno de los operadores unitarios $\mathbb{1}, \sigma_z, \sigma_x$ o σ_y definidos por (2.15), de acuerdo a si el resultado de Alice fue, respectivamente, $|\Phi^+\rangle$, $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$ o $|\Psi^-\rangle$. Entonces el estado final del qubit de Bob es igual al estado original $|\phi\rangle_X$ sin importar el resultado de la medición. Que el protocolo no sea sensible al resultado de la medición es la propiedad crucial de la teleportación y que también requeriremos para un esquema de telecloning.

El protocolo de teleportación ha sido generalizado a qudits [18], y se han propuesto estrategias en el caso de que solo se disponga de canales parcialmente entrelazados [19].

2.5. Teorema de No-Cloning

Para hablar de clonado de estados cuánticos es esencial comenzar por revisar uno de los resultados trascendentales en información cuántica, el teorema de no clonning [20].

Es sabido que no se puede medir el estado $|\psi\rangle$ de un sistema cuántico a través de una sola medición; el resultado de toda medición de un observable A es uno de sus valores propios, lo cual nos da muy poca información acerca de $|\psi\rangle$. Lo mejor que sabemos es solo que el estado no puede ser ortogonal al eigenestado medido. Para reconstruir $|\psi\rangle$ (o, de forma más general, cualquier estado mixto ρ) se debe medir los valores promedios de varios observables, y esto implica calcular promedios estadísticos sobre un número grande de sistemas idénticamente preparados. Uno podría imaginar cómo evitar esta imposibilidad de la siguiente forma: tomar el sistema en el estado desconocido $|\psi\rangle$ y dejarlo interactuar con N sistemas diferentes preparados previamente en un estado en blanco de referencia $|R\rangle$ para preparar $N + 1$ copias del estado inicial, es decir

$$|\psi\rangle \otimes |R\rangle \otimes \cdots \otimes |R\rangle \xrightarrow{?} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi\rangle. \quad (2.38)$$

Un procedimiento como este nos permitiría determinar el estado cuántico de un sistema sin siquiera medirlo, ya que uno podría medir las N copias y dejar el original intacto. El teorema de no-cloning de la información cuántica formaliza la sospecha de que un procedimiento como este es imposible.

Teorema de no-cloning: *No existen operaciones cuánticas que puedan duplicar perfectamente un estado cuántico arbitrario.*[\[20\]](#)

Este teorema puede ser probado mediante reducción al absurdo si consideramos el caso de clonning $1 \rightarrow 2$, es decir, partimos de un original y obtenemos dos copias. La evolución más general de un sistema cuántico es a través de mapeo completamente positivo que preserve la traza del estado, un *operador de Krauss*. Un teorema muy conocido [\[21\]](#) nos dice que todo mapeo que respete estas condiciones puede ser implementado adhiriendo un sistema auxiliar o *ancilla* al sistema bajo estudio, dejando que ambos evolucionen en forma unitaria, y luego trazar la ancilla. Supongamos entonces que el clonning perfecto puede ser realizado como una evolución unitaria, posiblemente, involucrando una ancilla (el estado de la máquina):

$$|\psi\rangle \otimes |R\rangle \otimes |\mathcal{M}\rangle \xrightarrow{U?} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |\mathcal{M}(\psi)\rangle. \quad (2.39)$$

Entonces, en particular, para los dos estados ortogonales $|0\rangle$ y $|1\rangle$, tales que $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, se tiene

$$|0\rangle \otimes |R\rangle \otimes |\mathcal{M}\rangle \rightarrow |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\mathcal{M}(0)\rangle, \quad (2.40)$$

$$|1\rangle \otimes |R\rangle \otimes |\mathcal{M}\rangle \rightarrow |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |\mathcal{M}(1)\rangle. \quad (2.41)$$

Pero dado que la evolución de los estados cuánticos es lineal, entonces esta condición implica que

$$(a|0\rangle + b|1\rangle) |R\rangle |\mathcal{M}\rangle \rightarrow a|0\rangle |0\rangle |\mathcal{M}(0)\rangle + b|1\rangle |1\rangle |\mathcal{M}(1)\rangle. \quad (2.42)$$

Claramente el lado derecho de la expresión (2.42) no puede ser igual a

$$(a|0\rangle + b|1\rangle) (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |\mathcal{M}(0+1)\rangle = (|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|1\rangle) |\mathcal{M}(0+1)\rangle. \quad (2.43)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.39) solo es válida para estados de una base ortonormal, pero no para todos los estados. Esto concluye la prueba del teorema usando solamente la linealidad de las transformaciones unitarias, siguiendo el trabajo de Wootters y Zurek [20].

2.5.1. Más allá del Teorema de No-Cloning.

En septiembre de 1996 Buzek y Hillery publicaron un artículo titulado *Quantum copying: beyond the no-cloning theorem* [22], donde apelaban a la posibilidad de clonning imperfecto. Específicamente, ellos encontraron una operación unitaria

$$|\psi\rangle_A \otimes |R\rangle_B \otimes |\mathcal{M}\rangle_M \rightarrow |\Psi\rangle_{ABM}, \quad (2.44)$$

tal que las trazas parciales en el qubit original A y el en qubit clonado B satisfacen

$$\rho_A = \rho_B = \gamma |\psi\rangle\langle\psi| + (1 - \gamma) |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|, \quad (2.45)$$

donde obtenemos que es posible copiar un estado desconocido de un qubit de forma no perfecta, pero lo más parecido perfecto al qubit original. Existen diversas formas de cuantificar cuan parecido son dos estados pero una de las más comunes es la fidelidad. La fidelidad entre dos estados mezcla ρ_i y ρ_j está definida como

$$F_{ij} = \text{Tr} \left[\sqrt{\sqrt{\rho_i} \rho_j \sqrt{\rho_i}} \right]. \quad (2.46)$$

Si uno de los estados es un estado puro, por ejemplo $\rho_i = |\psi\rangle\langle\psi|$, entonces $\sqrt{\rho_i} = \rho_i$, por lo tanto está dada por

$$F_{ij} = \sqrt{\langle\psi|\rho_j|\psi\rangle}. \quad (2.47)$$

El esquema propuesto por Buzek y Hillery logra la tarea de crear copias con una fidelidad de $5/6$. Este esquema fue la primera “máquina de clonado cuántico” y marcó el inicio de todo un campo de estudio en torno a clonado cuántico. Luego se probó que la fidelidad $5/6$ encontrada por Buzek y Hillery era la fidelidad óptima para máquinas de clonado universales de qubits.

Tipos de Máquinas.

Desde ese entonces, ha sido demostrada la existencia de distintos tipos de máquinas de cloning [23, 24], las cuales pueden ser clasificadas de forma general como sigue.

- Una máquina de clonado cuántica o *QCM* es llamada universal si copia con la misma fidelidad cualquier estado de entrada, es decir F_j es independiente del estado $|\psi\rangle$. Comúnmente este tipo de máquinas se denota por *UQCM*. Las máquinas de clonado no universales son llamadas *estado dependientes*.
- Una QCM es llamada *simétrica* si todos los clones que produce tienen la misma fidelidad, es decir, $F_j = F_{j'}$, para todos los $j, j' = 1, \dots, M$. Para las máquinas asimétricas se usa otra clasificación adicional: por ejemplo, en el estudio de máquinas asimétricas tipo $1 \rightarrow 3$, se puede considerar el caso $F_1 \neq F_2 = F_3$ (que se acostumbra a escribir como $1 \rightarrow 1 + 2$) o considerando el caso $F_1 \neq F_2 \neq F_3$ (que se puede denotar por $1 \rightarrow 1 + 1 + 1$).
- Una QCM es llamada *óptima* si la fidelidad de la copia es la máxima permitida por la mecánica cuántica. Más específicamente, si \mathcal{S} es el conjunto de estados a ser clonados, que las copias sean óptimas o no puede ser definido mediante la maximización, mediante la fidelidad promedio sobre los estados, es decir, $\bar{F} = \int_{\mathcal{S}} d\psi F(\psi)$ o mediante la fidelidad mínima sobre los estados, $F_{min} = \min_{\psi \in \mathcal{S}} F(\psi)$. Estas definiciones pueden coincidir.

2.5.2. Clonado Cuántico Óptimo Universal.

Si la calidad de las copias, (medida por ejemplo por la fidelidad con respecto al estado original $|\phi\rangle_X$) es elegida ser independiente de $|\phi\rangle_X$ entonces la respuesta esta dada por las máquinas universales de clonig $N \rightarrow M$ [25, 26].

Estas máquinas son transformaciones unitarias que transforman N sistemas de entrada, idénticamente preparados en el estado $|\phi\rangle_X$, en M sistemas de salida ($M \geq N$), cada una de los cuales termina en un estado mezcla descrito por el operador densidad reducido:

$$\rho_{out} = \gamma |\phi\rangle_X \langle\phi| + (1 - \gamma) |\phi^\perp\rangle_X \langle\phi^\perp|. \quad (2.48)$$

El factor de fidelidad γ de estas copias imperfectas tiene un límite superior definido impuesto por la mecánica cuántica. En el caso en que cada sistema de salida es un qubit, este valor óptimo está dado por

$$\gamma = \frac{M(N+1) + N}{M(N+2)}. \quad (2.49)$$

Las transformaciones unitarias que alcanzan este límite han sido construidas de forma explícita por Gisin y Massar [25]. En general, estas comprenden los N qubits originales, $M - N$ “papeles en blanco” (inicialmente preparados en algún estado fijo $|0 \cdots 0\rangle_B$), y un sistema ancilla A que contiene al menos $M - N + 1$ niveles (también inicialmente preparados en algún estado fijo $|0 \cdots 0\rangle_A$). También ha sido generalizado al caso de qudits [26].

2.5.3. Clonado Perfecto Probabilista.

En mecánica cuántica, la combinación de evoluciones unitarias junto con mediciones a menudo llevan a resultados bastante interesantes, tales como la teleportación [3], la preparación remota [27] y la purificación del entrelazamiento [28]. El clonado probabilista es otro ejemplo de aplicación de esta combinación. En 1998, Lu-Ming Duan *et. al* [4] probaron la existencia de una máquina que puede generar copias perfectas del estado de entrada pero solo de forma probabilista. Su principal resultado es el teorema que enuncia que estados secretamente elegidos de un conjunto $\mathcal{S} = \{|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, \dots, |\Psi_n\rangle\}$ pueden ser clonados de forma probabilista mediante una operación unitaria seguida de

una medición general si y solo si los estados pertenecientes al conjunto son linealmente independientes. Este tipo de procesos puede ser muy útil, por ejemplo, en criptografía cuántica [13], donde los estados utilizados no son completamente arbitrarios pero elegidos secretamente desde un conjunto conocido de estados; o en algunos esquemas de computación cuántica [29, 30]. La forma general de esta operación tiene la forma

$$U(|P_0\rangle_A|\Psi_i\rangle_B|\Sigma\rangle_C) = \sqrt{\gamma_i}|P_0\rangle_A|\Psi_i\rangle_B|\Psi_i\rangle_C + \sum_{j=1}^n c_{ij}|P_j\rangle_A|\Phi_{BC}^{(j)}\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.50)$$

donde el sistema B alberga inicialmente el estado que queremos clonar, el sistema C es el sistema que albergará la copia y A es el sistema de prueba o ancilla que permite saber si el proceso fue exitoso. Los estados $|P_j\rangle$ son n estados ortogonales a $|P_0\rangle$ y los estados $|\Phi_{AB}^{(j)}\rangle$ son n estados del sistema compuesto, en general no ortogonales. Por lo tanto, si medimos el sistema A y detectamos un estado diferente de $|P_0\rangle$, entonces el proceso falló. En caso contrario, si detectamos $|P_0\rangle$ (lo cual tiene una probabilidad de ocurrencia γ_i), entonces, con certeza tenemos dos estados idénticos en los sistemas A y B .

La probabilidad de éxito tiene un límite superior. Por ejemplo en el caso de que el conjunto contenga solo dos elementos se satisface

$$\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \leq \frac{1}{1 + |\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle|}. \quad (2.51)$$

Profundizaremos en esta clase de clonado en el capítulo 3.

A continuación revisaremos algunos conceptos físicos básicos necesarios para entender la nuestra propuesta experimental que implementa el clonado cuántico probabilista con fotones, así también introduciremos algunos procesos necesarios para generar nuestros estados cuánticos, comenzando por una pequeña revisión sobre luz polarizada y Conversión Paramétrica Espontánea Descendente .

2.6. Luz Polarizada.

Una onda de luz puede ser descrita como un campo electromagnético oscilante [31]. Este campo está *polarizado* si las direcciones de oscilación del campo son funciones periódicas del espacio y del tiempo, en directa oposición a la luz no polarizada donde estas

direcciones varían de forma aleatoria [32]. Dado que el campo magnético está siempre orientado perpendicularmente al campo eléctrico, usualmente solo se considera el campo eléctrico para describir este tipo de luz. Para luz polarizada propagándose a lo largo del eje z , el campo eléctrico puede ser siempre descompuesto en un campo en la dirección x y otro en la dirección y ,

$$\begin{aligned}\vec{E}_x(z, t) &= E_x \vec{e}_x \sin(\omega t - kz + \phi_1) \\ \vec{E}_y(z, t) &= E_y \vec{e}_y \sin(\omega t - kz + \phi_1).\end{aligned}\quad (2.52)$$

Si estas dos componentes están en fase, entonces la luz está *linealmente polarizada*,

$$\vec{E}(z, t) = (E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y) \sin(\omega t - kz + \phi_0). \quad (2.53)$$

Si las componentes tienen la misma magnitud, pero una fase relativa de $\pi/2$, la luz está *circularmente polarizada*. Esta puede ser, polarización circular derecha (rcp):

$$\vec{E}_{rcp}(z, t) = E [\sin(\omega t - kz + \phi_0) \vec{e}_x + \cos(\omega t - kz + \phi_0) \vec{e}_y], \quad (2.54)$$

o con polarización circular izquierda (lcp):

$$\vec{E}_{lcp}(z, t) = E [\sin(\omega t - kz + \phi_0) \vec{e}_x - \cos(\omega t - kz + \phi_0) \vec{e}_y]. \quad (2.55)$$

Para cualquier otra combinación de \vec{E}_x y \vec{E}_y , la luz es llamada *elípticamente polarizada*. En lugar de \vec{E}_x y \vec{E}_y , se puede elegir \vec{E}_{rcp} y \vec{E}_{lcp} como base, es decir, toda polarización puede ser descrita como una combinación de luz con polarización circular derecha e izquierda.

2.6.1. Matrices de Jones.

La descomposición de la ecuación (2.52) puede ser generalizada para albergar de forma natural la diferencia de fase [31]. Esta forma consiste en considerar las componentes como números complejos. La forma más general de expresar la amplitud compleja de una onda armónica plana es

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y, \quad (2.56)$$

donde E_x y E_y son ambos complejos, y, por lo tanto, pueden ser escritos en la forma exponencial como

$$E_x = |E_x| e^{i\phi_x}, \quad (2.57)$$

$$E_y = |E_y| e^{i\phi_y}. \quad (2.58)$$

Una notación conveniente para este par de amplitudes complejas es la matriz

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |E_x| e^{i\phi_x} \\ |E_y| e^{i\phi_y} \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

la cual es llamada *vector de Jones*, en honor a R. Clark Jones [33]. El vector normalizado de Jones es obtenido mediante el algoritmo estándar de normalización. Una forma de normalización útil (pero no necesaria) es obtenida si factorizamos algún factor común. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

representa una onda linealmente polarizada en la dirección x , mientras que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ A \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

representa una onda linealmente polarizada en la dirección y . El vector

$$\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

representa una onda linealmente polarizada a 45° relativos al eje x . La polarización circular derecha es representada por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

y la polarización circular izquierda por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Una de las aplicaciones de la notación de Jones es poder calcular de forma fácil la polarización de la adición de dos o más ondas. El resultado es obtenido simplemente

sumando los vectores de Jones. Otro uso es calcular el efecto de insertar elementos ópticos (o una serie de estos) en el camino de un haz de polarización conocida. Los elementos ópticos pueden ser representados por matrices de 2×2 , llamadas *matrices de Jones*. Los tipos de elementos ópticos que pueden ser representados de esta manera incluyen polarizadores lineales, polarizadores circulares, retardadores de fase, placas de media y cuarto de onda y absorbedores isotrópicos. Estas matrices son utilizadas como se explica a continuación: Sea la luz incidente caracterizada por el vector de Jones

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

mientras que la luz luego de atravesar el elemento óptico está dada por

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

entonces

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

Si la luz es enviada a través de una serie de elementos ópticos $1, 2, \dots, n$, entonces el resultado esta dado por la multiplicación de matrices

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

En la tabla 2.1 listamos diferentes elementos ópticos y su correspondiente matriz de Jones.

Dado que puede existir cualquier combinación lineal compleja de polarización, podemos hacer el paralelo entre un qubit y un estado de polarización y utilizarlo para codificar información. Podemos, de este modo usar la notación de Dirac (*bra* y *kets*) para describir estados de polarización. Si por ejemplo, utilizamos como base para describir la polarización lineal horizontal y vertical podemos escribir

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A|h\rangle + B|v\rangle, \quad (2.68)$$

Polarizador lineal orientado horizontalmente.	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Polarizador lineal orientado verticalmente.	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Polarizador lineal a $\pm 45^\circ$ respecto del eje horizontal	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}$
Polarizador lineal con eje de transmisión en un ángulo θ con respecto a eje horizontal.	$\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$
Polarizador circular derecho	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$
Polarizador circular izquierdo	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
Retardador de fase isotrópico	$e^{i\phi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Placa de cuarto de onda con eje rápido vertical	$e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
Placa de cuarto de onda con eje rápido horizontal	$e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
Placa de media onda con eje rápido a un ángulo θ con respecto al eje horizontal	$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

Cuadro 2.1: Matrices de Jones de algunos elementos ópticos.

donde

$$|h\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |v\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Si por ejemplo, el estado de polarización de la luz antes de la placa es horizontal, y queremos rotarla y transformarla en polarización vertical, debemos girar la placa en 45° , obteniendo así

$$\begin{aligned} HWP(45^\circ)|h\rangle &= \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= |v\rangle. \end{aligned}$$

Para crear una superposición con igual peso de polarización horizontal y vertical, debemos girar la placa en $22,5^\circ$:

$$HWP(22,5^\circ)|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + |v\rangle). \quad (2.70)$$

Las diferentes formas de polarización pueden ser representadas como puntos en la superficie de la esfera de Poincaré, como se muestra en la figura 2.2. Los puntos en el ecuador representan polarización lineal, donde h y v representan polarización lineal horizontal y vertical. Los polos norte y sur representan polarización circular izquierda y derecha respectivamente y todos los demás puntos representan polarizaciones elípticas. Al comparar las figuras 2.1 y 2.2 podemos ver el isomorfismo entre la la esfera de Bloch y la esfera de Poincaré.

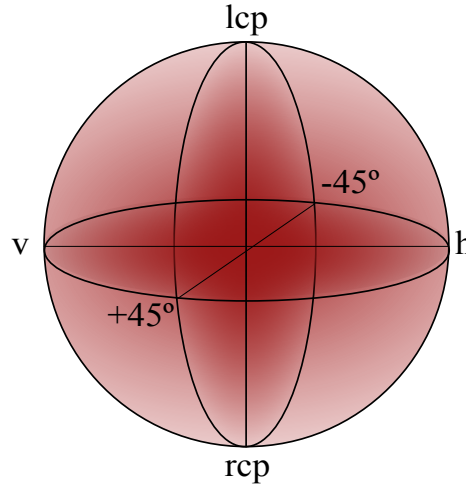


Figura 2.2: Esfera de Poincaré.

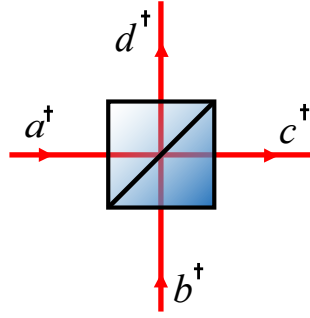
Para codificar información y procesarla utilizando estados de polarización de fotones individuales, hacemos la analogía entre la base lógica y la base de polarización,

$$\begin{aligned} |0\rangle &\leftrightarrow |h\rangle, \\ |1\rangle &\leftrightarrow |v\rangle. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Las transformaciones de este tipo en un qubits pueden ser realizadas a través de los componentes ópticos mostrados en la tabla 2.1 y *beam splitters*. Estudiaremos estos elementos en la siguiente subsección.

2.6.2. Beam Splitter y Beam Splitter Polarizador.

Un beam splitter es un elemento óptico que divide un haz de luz en dos. En su forma más común es un cubo hecho de dos prismas de vidrio triangulares, los cuales son pegados juntos. La capa de resina entre los prismas es ajustada de forma tal que, para una longitud de onda dada, la mitad de la luz incidente a través de un puerto (la cara de un cubo) es reflejada y la otra mitad es transmitida debido a la reflexión total interna frustrada. Es posible ajustar esta capa para que la proporción de luz reflejada y transmitida sea distinta a 50:50.

**Figura 2.3:** Beam Splitter.

Consideremos la descripción cuántica de un beam splitter ideal con transmitividad η y reflectividad $1 - \eta$ [34], en el cual los dos puertos de entrada están ocupados por dos modos con igual frecuencia. Sean a^\dagger y b^\dagger los operadores de creación que caracterizan a los modos del campo en estos puertos de entrada, como se muestra en la figura 2.3. Sean c^\dagger y d^\dagger los operadores de creación de los modos de salida (figura 2.3). Si consideramos que estos modos tienen todos la misma frecuencia y polarización, entonces corresponden a *modos de camino*. La acción del beam splitter sobre estos modos está caracterizada por

$$a^\dagger \rightarrow \sqrt{\eta}c^\dagger + i\sqrt{1-\eta}d^\dagger, \quad (2.72)$$

$$b^\dagger \rightarrow i\sqrt{1-\eta}c^\dagger + \sqrt{\eta}d^\dagger, \quad (2.73)$$

donde la fase $\pi/2$ entre los dos modos aparece como una consecuencia de la continuidad del campo electromagnético. Si, por ejemplo, el estado inicial del campo está dado en su representación de Fock, con un fotón poblando el modo a y ningún fotón poblando el modo b y, además, ambos con la misma frecuencia, entonces tenemos

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = |1\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_c |0\rangle_d = a^\dagger |0\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_c |0\rangle_d. \quad (2.74)$$

Si consideramos un beam splitter 50:50, es decir $\eta = 1/2$, entonces el estado de salida será

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\text{out}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c^\dagger + id^\dagger) |0\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_c |0\rangle_d \\ &= |0\rangle_a |0\rangle_b \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_c |0\rangle_d + i|0\rangle_c |1\rangle_d). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Por lo tanto, si definimos $|a\rangle = |1\rangle_a|0\rangle_b|0\rangle_c|0\rangle_d$ como el estado de camino inicial del fotón, y $|c\rangle = |0\rangle_a|0\rangle_b|1\rangle_c|0\rangle_d$ y $|d\rangle = |0\rangle_a|0\rangle_b|0\rangle_c|1\rangle_d$ como los posibles estados de camino de salida del fotón, tenemos que la acción del beam splitter está caracterizada por

$$|a\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|c\rangle + i|d\rangle). \quad (2.76)$$

Del mismo modo, si el estado inicial del fotón es $|b\rangle = |0\rangle_a|1\rangle_b|0\rangle_c|0\rangle_d$, entonces la acción del beam splitter sobre su estado de camino está caracterizada por

$$|b\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|d\rangle + i|c\rangle). \quad (2.77)$$

Por otra parte, es posible también construir beam splitters polarizadores (*PBS*). Un beam splitter polarizador divide un haz de luz en dos haces con diferente polarización lineal. Para un beam splitter polarizador ideal, la luz en los puertos de salida estará totalmente polarizada con polarizaciones ortogonales entre sí. En su forma más común, los PBS son contruidos de cristales birrefringentes, tales como el cuarzo y la calcita. En estos cristales, un haz de luz no polarizada (una mezcla de polarizaciones) es dividido por refracción. Típicamente, la fracción del haz que es transmitida tiene polarización horizontal, mientras que la reflejada tiene polarización vertical.

Consideremos la versión cuántica del PBS. Supongamos que, siguiendo la representación de estados de camino, el estado de entrada del PBS está dado por

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = |a\rangle (\alpha|h\rangle + \beta|v\rangle), \quad (2.78)$$

es decir, tenemos el estado $|a\rangle$ asociado al modo a poblado por un fotón, y cuyo estado de polarización es una superposición de polarización horizontal y vertical. Entonces, el estado de salida es caracterizado por

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = \alpha|c\rangle|h\rangle + \beta|d\rangle|v\rangle. \quad (2.79)$$

Del mismo modo, si el estado de entrada es el estado de camino $|b\rangle$, y es una superposición de estados de polarización, es decir,

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = |b\rangle (\alpha|h\rangle + \beta|v\rangle), \quad (2.80)$$

entonces el estado de salida está caracterizado por

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = \alpha|c\rangle|v\rangle + \beta|d\rangle|h\rangle. \quad (2.81)$$

2.7. Conversión Paramétrica Espontánea Descendente.

En el procesamiento óptico de información la cuántica, dos de los elementos más básicos son las *fuentes de estados cuánticos ópticos* y los *detectores* que pueden detectar estos estados. En esta sección introduciremos el fenómeno de la conversión paramétrica espontánea y cómo éste puede ser usado como fuente de fotones individuales y pares de fotones entrelazados. No es la intención de este trabajo hacer una revisión exhaustiva del proceso no lineal de conversión paramétrica descendente. En el desarrollo de esta tesis usamos este proceso como una herramienta para generar los recursos entrelazados necesarios. Discusiones detalladas pueden ser encontradas en [8, 35–43].

La conversión paramétrica descendente (PDC) es una forma muy práctica de producir una fuente de fotones de alta calidad. En este sistema, un cristal con una no linealidad de segundo orden $\chi^{(2)}$ grande es bombeado con un láser intenso a frecuencia ω_P . Los cristales más comúnmente usados son los KDP (KD_2PO_4) y los BBO ($\beta - BaB_2O_4$). Existe una probabilidad proporcional a $\chi^{(2)}$ de que los fotones provenientes del bombeo sean absorbidos por el cristal y reemitidos como dos fotones con frecuencias ω_S y ω_I . Los índices S e I indican “*signal*” y “*idler*”, los cuales son los nombres que tradicionalmente se les dan a los modos de salida. El Hamiltoniano que gobierna el proceso puede ser escrito como [43]

$$\mathcal{H} \propto e^{i\theta} \chi^{(2)} a_{\vec{k}_P, \omega_P} a_{\vec{k}_S, \omega_S}^\dagger a_{\vec{k}_I, \omega_I}^\dagger + H.c., \quad (2.82)$$

donde $a_{\vec{k}, \omega}$ y a^\dagger son operadores de creación y destrucción de un fotón con vector de onda \vec{k} y frecuencia ω , y donde hemos introducido la fase θ para que sea más general. En general, el bombeo es muy intenso y, por lo tanto, podemos describirlo como un estado coherente clásico, es decir, $|a_{\vec{k}_p, \omega_p}\rangle \rightarrow \alpha_P$. Si juntamos todos los factores en un solo número complejo $\xi \propto \alpha_P \chi^{(2)} e^{i\theta}$, podemos escribir el Hamiltoniano como

$$\mathcal{H}_{PDC} = \xi a_{\vec{k}_S, \omega_S} a_{\vec{k}_I, \omega_I} + \xi^* a_{\vec{k}_S, \omega_S}^\dagger a_{\vec{k}_I, \omega_I}^\dagger, \quad (2.83)$$

el cual es el generador de squeezing de dos modos. El operador de bombeo corresponde en este límite a un *parámetro* en el Hamiltoniano, y los fotones del haz bombeo son convertidos en dos fotones con menor energía. De ahí el nombre de *conversión paramétrica*

descendente. Si los modos a los cuales se transforma el fot3n est3n inicialmente en el estado de vac3o, la conversi3n se dice *espont3nea* (SPDC).

Si aplicamos la evoluci3n generada por el Hamiltoniano (2.83) sobre el vac3o de los modos signal y idler obtenemos (a partir de las propiedades del operador de squeezing)

$$|SPDC(\lambda, \phi)\rangle = \frac{1}{\cosh|\xi|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{|\xi|^n} \tanh^n |\xi| |n\rangle_S |n\rangle_I. \quad (2.84)$$

Si elegimos $\tanh |\xi| = \lambda$, y la fase de ξ igual a cero, podemos entonces describir el estado producido

$$|SPDC(\lambda)\rangle = \sqrt{1 - \lambda^2} |0, 0\rangle_{S,I} + \lambda |1, 1\rangle_{S,I} + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (2.85)$$

que corresponde a una superposici3n de estados de Fock. Los t6rminos de mayor orden pueden ser despreciados ya que en general λ es peque1o.

En la pr3ctica, el filtrado de los modos puede ser usado para hacer los modos signal y idler extremadamente puros. Sin embargo, la eficiencia de la conversi3n param6trica descendente es muy baja. Existen propuestas te3ricas en las cuales un arreglo de muchas conversiones param6tricas ($\sim 10^4$) pueden ser usadas en paralelo para producir un fot3n con probabilidad 1 [44]. Sin embargo, esto sigue siendo extremadamente costoso.

Consideremos ahora la producci3n de pares entrelazados. Los modos signal y Idler tienen frecuencias ω_S y ω_I y vectores de onda \vec{k}_S y \vec{k}_I , respectivamente. Los valores de estas cantidades pueden ser determinados mediante las llamadas *condiciones de phase-matching* en el cristal, que deben ser satisfechas por el proceso, las cuales son la conservaci3n de energ3a y momentum del proceso,

$$\omega_P = \omega_S + \omega_I, \quad (2.86)$$

$$\vec{k}_P = \vec{k}_S + \vec{k}_I. \quad (2.87)$$

Estas condiciones son satisfechas solo en el l3mite de un cristal infinito. Para cristales finitos, las condiciones de phase-matching son solo aproximadas.

Para considerar todos los posibles modos de salida, podemos escribir el Hamiltoniano como una integral sobre todos los vectores de onda signal y idler e incluir las condiciones de phase-matching, por simplicidad, como funciones deltas de Dirac, aunque si consideramos cristales finitos debemos usar funciones *sinc*, ver por ejemplo [8].

Este Hamiltoniano toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{PDC} = & \int d\vec{k}_S d\vec{k}_I d\omega_S d\omega_I \delta(\vec{k}_P - \vec{k}_S - \vec{k}_I) \delta(\omega_P - \omega_S - \omega_I) \\ & \times \left[\xi a_{\vec{k}_S, \omega_S} a_{\vec{k}_I, \omega_I} + \xi^* a_{\vec{k}_S, \omega_S}^\dagger a_{\vec{k}_I, \omega_I}^\dagger \right]. \end{aligned} \quad (2.88)$$

En general el parámetro de squeezing ξ también depende de los vectores de onda y las frecuencias. Las delta de Dirac remueven la integración sobre \vec{k}_S y ω_S , pero aún hay una integral sobre \vec{k}_I . La consecuencia de esto es que, por simetría, los fotones convertidos forman conos. En un experimento se pueden seleccionar \vec{k}_S y \vec{k}_I específicos poniendo pantallas con filtros espaciales en el cono de salida (*pinholes*). Cuando los dos filtros espaciales son ubicados correctamente, el número de fotones pasando a través de uno de ellos es igual al número atravesando por el otro. Los estados de salida son, por lo tanto, superposiciones de estados de número $|n\rangle_S |n\rangle_I$, como mostramos antes.

Aparte de la frecuencia y los vectores de onda, tenemos la polarización como grado de libertad. En este esquema, el cristal puede ser cortado a lo largo de ciertos ejes de modo que los modos \vec{k}_S y \vec{k}_I tengan la misma polarización, ortogonal a la del bombeo. Este tipo de conversión es llamada *tipo-I*. En la conversión paramétrica descendente, los fotones desde el bombeo son convertidos en fotones signal y idler, los cuales emergen del cristal en diferentes direcciones. Las posibles direcciones forman un conjunto de conos concéntricos, como se muestra en la figura 2.4. La luz de diferentes conos tiene diferentes frecuencias, típicamente desde naranja, cerca del centro, a rojo profundo para los ángulos más abiertos, en el caso de que el bombeo sea ultravioleta.

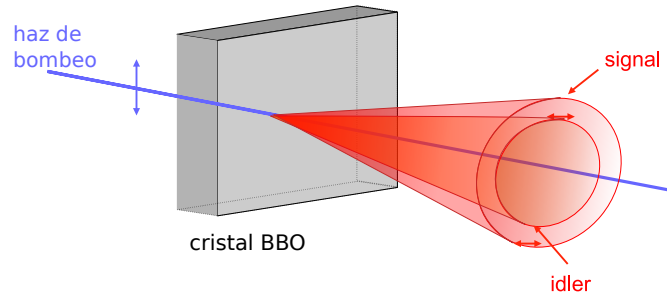


Figura 2.4: Conversión paramétrica descendente tipo-I

Cuando el cristal es cortado de forma tal que los modos de salida tengan polarización ortogonal, entonces hablamos de conversión paramétrica descendente *tipo-II*. En este

caso, los efectos de birrefringencia del cristal causan que los fotones sean emitidos a lo largo de dos conos que se intersectan, uno correspondiente al rayo ordinario, el cual se propaga con polarizaci3n paralela al eje 3ptico del cristal, y el otro correspondiente al componente extraordinario, es decir, con polarizaci3n ortogonal al eje 3ptico del cristal, como se muestra en la figura 2.5.

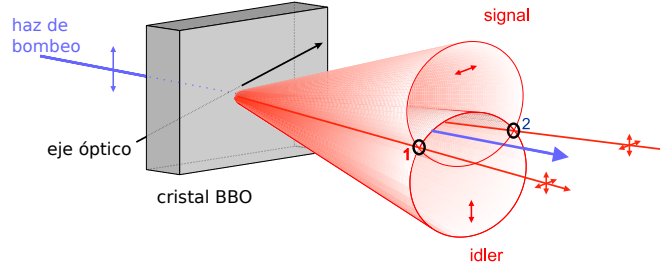


Figura 2.5: Conversi3n paramétrica descendente tipo-II

En el caso de la conversi3n paramétrica espontánea tipo-II (SPDC-II), los conos pueden estar completamente separados, ser tangentes uno al otro (caso colineal) o exhibir dos líneas de intersecci3n, como se muestra en la figura 2.5. Esto depende del ángulo entre la direcci3n del haz de bombeo y el eje 3ptico. Si ambos fotones tienen la misma longitud de onda (caso degenerado), estas líneas de intersecci3n conducirán a fotones entrelazados. La polarizaci3n de los fotones emitidos en estas direcciones est3 completamente indefinida, pero si un fot3n tiene polarizaci3n horizontal, el segundo tendr3 polarizaci3n vertical, y viceversa. La selecci3n de estos dos modos espaciales puede ser hecha, como ya mencionamos, acoplándolos a pinholes, fibras monomodo, o a otro elemento 3ptico que permita seleccionarlos. Sin embargo, en la intersecci3n de los conos existir3 una ambigüedad, ya que no podemos determinar de que cono proviene cada fot3n, dando lugar a una superposici3n de dos estados con polarizaciones invertidas. El Hamiltoniano efectivo que describe este proceso est3 dado por

$$\mathcal{H}_I = \xi \left(a_{v,S}^\dagger a_{h,I}^\dagger + a_{h,S}^\dagger a_{v,I}^\dagger \right) + H.c., \quad (2.89)$$

donde los subíndices v y h denotan la polarizaci3n del fot3n creado. Si consideramos que el estado inicial es el vacío en los modos relevantes, $|0\rangle = |0\rangle_{v,S} |0\rangle_{h,S} |0\rangle_{v,I} |0\rangle_{h,I}$, (por

lo que la conversión sería espontánea), entonces

$$\begin{aligned}
|\psi_{SPDC-II}\rangle &= Z \exp \left[-i\mu \left(a_{v,S}^\dagger a_{h,I}^\dagger + a_{h,S}^\dagger a_{v,I}^\dagger \right) \right] |0\rangle \\
&= Z \left[|0\rangle - \underbrace{i\mu \left(a_{v,S}^\dagger a_{h,I}^\dagger + a_{h,S}^\dagger a_{v,I}^\dagger \right)}_{2 \text{ fotones}} |0\rangle - \underbrace{\frac{\mu^2}{2} \left(a_{v,S}^\dagger a_{h,I}^\dagger + a_{h,S}^\dagger a_{v,I}^\dagger \right)^2}_{4 \text{ fotones}} |0\rangle \right] \\
&\quad + \text{términos de mayor orden,}
\end{aligned} \tag{2.90}$$

donde Z es una constante de normalización y $\mu = ct$. Típicamente, $Z\mu \approx 10^{-2}$. De esta ecuación podemos ver del segundo término que es posible generar, con cierta probabilidad, el estado normalizado en la representación de estados de Fock

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_{v,S} |0\rangle_{h,S} |0\rangle_{v,I} |1\rangle_{h,I} + |0\rangle_{v,S} |1\rangle_{h,S} |1\rangle_{v,I} |0\rangle_{h,I}). \tag{2.91}$$

Si definimos los estados $|0\rangle := |0\rangle_v |0\rangle_h$, $|v\rangle := |1\rangle_v |0\rangle_h$ y $|h\rangle = |0\rangle_v |1\rangle_h$, entonces podemos escribir

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|v\rangle_S |h\rangle_I + |h\rangle_S |v\rangle_I). \tag{2.92}$$

También es posible observar de la ecuación (2.90), en el tercer término, que a través del mismo proceso se generan estados de cuatro fotones entrelazados con una probabilidad muy baja. Este estado está descrito en la representación de Fock por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [|2\rangle_{v,S} |0\rangle_{h,S} |0\rangle_{v,I} |2\rangle_{h,I} + |0\rangle_{v,S} |2\rangle_{h,S} |2\rangle_{v,I} |0\rangle_{h,I} \tag{2.93}$$

$$+ 2 |1\rangle_{v,S} |1\rangle_{h,S} |1\rangle_{v,I} |1\rangle_{h,I}]. \tag{2.94}$$

También es posible generar estados con más fotones entrelazados, los cuales están dados por los términos de mayor orden en la ecuación (2.90). El siguiente termino, de orden μ^3 describe el proceso de creación de $2^3 = 8$ fotones entrelazados, y así sucesivamente. Estos sucesos tienen probabilidad casi nula con los parámetros comúnmente usados.

Es también posible crear pares de fotones entrelazados en polarización con conversión usando SPDC-I. Para lograrlo, debemos ubicar dos cristales delgados cortados para SPDC-I uno junto al otro, de manera que los conos de salida de cada cristal se superpongan casi perfectamente. Los cristales deben ser rotados en torno al haz de bombeo, de modo que el primer cristal produce fotones de acuerdo a $a_{h,\vec{k}_S}^\dagger a_{h,\vec{k}_I}^\dagger$, y el segundo cristal produce fotones de acuerdo a $a_{v,\vec{k}_S}^\dagger a_{v,\vec{k}_I}^\dagger$. Dado que los cristales son delgados en

comparaci3n con la longitud de coherencia del pulso de bombeo, los dos t6rminos se suman coherentemente. Incluyendo una fase π y una rotaci3n de $\pi/2$ en el modo idler (o signal). El Hamiltoniano se hace proporcional a

$$\mathcal{H} \propto a_{h,\vec{k}_S}^\dagger a_{v,\vec{k}_I}^\dagger + a_{v,\vec{k}_S}^\dagger a_{h,\vec{k}_I}^\dagger. \quad (2.95)$$

Usando conversi3n param6trica espont3nea descendente es posible producir un estado cu3ntico con entrelazamiento en camino. En el l6mite de cristal muy delgado, el estado espacial de los fotones convertidos se hace [43]

$$|\psi\rangle = \int d\vec{k} |\vec{k}\rangle_S |-\vec{k}\rangle_I. \quad (2.96)$$

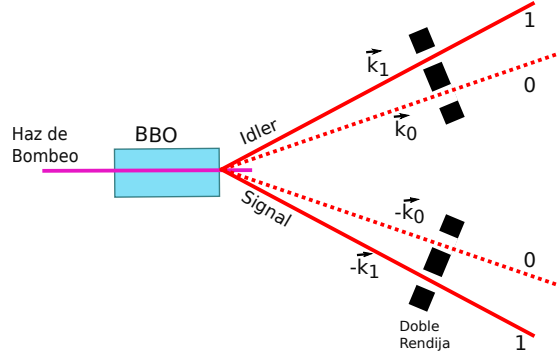


Figura 2.6: Doble rendija para selecci3n de modos espaciales.

Es posible discretizar este estado a trav6s de el uso de rendijas o filtros espaciales. En este caso el haz de bombeo debe ser enfocado en el plano de las rendijas para realizar transferencia del espectro angular del haz a las correlaciones espaciales [45]. Si ubicamos sim6tricamente arreglos de doble rendija, como se muestra en la figura 2.6, las cuales restringen la posici3n transversal de cada fot3n a solo dos regiones espaciales bien definidas, 0 y 1, entonces el estado espacial puede escribirse como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_S |0\rangle_I + |1\rangle_I |1\rangle_S). \quad (2.97)$$

Este estado es muy 3til en procesamiento de informaci3n cu3ntica y lo utilizaremos para una de nuestras alternativas de propuesta experimental en el clonado cu3ntico probabilista.

Clonado Cuántico Probabilista de Qubits.

En este capítulo estudiaremos en detalle el proceso de clonado probabilista de estados cuánticos. En particular, nos enfocaremos en el problema en el cual el conjunto de posibles estados a clonar consiste de estados linealmente independientes entre si. Luego, proponemos una implementación experimental del protocolo con fotones gemelos producidos por SPDC. El setup propuesto puede ser modificado para crear copias locales y no locales del qubit de entrada. Cuando hablamos de copias no locales nos referimos al caso en que el qubit de entrada es algún grado de libertad de un fotón, y las copias se crean, ambas, en el otro fotón, destruyendo la información en el qubit original. El proceso es llevado a cabo a través de una transformación unitaria, una medición generalizada y la aplicación de una transformación local unitaria de reconstrucción, la cual es condicional al resultado de la medición.

3.1. Clonado Cuántico Probabilista

En 1998 Duan *et. al.* [4], probaron la existencia de una máquina de clonaje que puede generar copias perfectas del estado de entrada pero solo de forma probabilista. Su principal resultado es el siguiente teorema:

Teorema. *Los estados secretamente elegidos desde el conjunto $\mathcal{S} = \{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$ pueden ser probabilísticamente clonados por una operación general unitaria y de reducción si y solo si los estados $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$ son linealmente independientes.*

La forma general de esta operación se puede representar mediante una transformación unitaria la cual tiene la forma

$$U(|P_0\rangle_A|\psi_i\rangle_B|\Sigma\rangle_C) = \sqrt{p_i}|P_0\rangle_A|\psi_i\rangle_B|\psi_i\rangle_C + \sum_{j=1}^n c_{ij}|P_j\rangle_A|\Phi_{BC}^{(j)}\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

donde el sistema B alberga inicialmente el estado que queremos clonar, el sistema C es el sistema que albergará la copia y A es el sistema de prueba o ancilla que permite saber si el proceso fue exitoso. Los estados $|P_j\rangle$ son n estados ortogonales a $|P_0\rangle$ y los estados $|\Phi_{BC}^{(j)}\rangle$ son n estados del sistema compuesto, en general no ortogonales. Por lo tanto, si medimos el sistema A y detectamos un estado diferente de $|P_0\rangle$, entonces el proceso falló. En caso contrario, si detectamos $|P_0\rangle$, o cual tiene una probabilidad de ocurrencia p_i , entonces con certeza tenemos dos estados idénticos en los sistemas B y C .

La probabilidad de éxito tiene un límite superior, y está dado, por ejemplo, en el caso de que el conjunto contenga solo dos elementos por [4]

$$\frac{p_1 + p_2}{2} \leq \frac{1}{1 + |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|}, \quad (3.2)$$

donde p_1 y p_2 son las probabilidades de clonar el estado $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ respectivamente.

3.2. Clonado Probabilista de dos Qubits.

Consideraremos una máquina de clonación para qubits, descrita por una evolución unitaria y un proceso de medición [4, 5]. Dado que en el espacio de los qubits solo pueden existir hasta dos estados linealmente independientes, los cuales forman en general una base no ortogonal, consideraremos operación unitaria que tiene la forma

$$U(|\psi_i\rangle_B|\Psi^{(0)}\rangle_{CA}) = \sqrt{p_i}|0\rangle_A|\psi_i\rangle_B|\psi_i\rangle_C + \sqrt{1-p_i}|1\rangle_A|\Phi^{(i)}\rangle_{BC}, \quad i = 1, 2, \quad (3.3)$$

donde p_i es la eficiencia del proceso con estado de entrada $|\psi_i\rangle_B$, el sistema A es el sistema auxiliar o *ancilla*, el cual es también un sistema de dos estados y servirá de prueba para saber si el clonado exacto tuvo o no éxito: si es medido en el estado $|0\rangle$, entonces el proceso fue exitoso, y en el caso en que sea medido en el estado $|1\rangle$ el proceso falló. El sistema C albergará la copia. Los estados $|0\rangle_A$ y $|1\rangle_A$ son estados ortonormales

de la ancilla. $|\Psi^{(0)}\rangle_{CA}$ y $|\Phi^{(i)}\rangle_{BC}$ son estados normalizados de los sistemas compuestos CA y BC respectivamente. En la base computacional podemos escribir

$$|\Phi\rangle_{BC} = c|0\rangle_B|0\rangle_C + d|1\rangle_B|1\rangle_C. \quad (3.4)$$

Nuestro conjunto de entrada estará compuesto por solo dos posibles estados,

$$\mathcal{S} = \{|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle\}, \quad (3.5)$$

definidos por

$$|\psi_+\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (3.6)$$

$$|\psi_-\rangle = a|0\rangle - b|1\rangle, \quad (3.7)$$

con $a = \cos \frac{\theta}{2}$, $b = \sin \frac{\theta}{2}$ y $\theta \in [0, \pi/2]$. En $\pi/2$ el conjunto forma una base ortonormal, por lo cual nuestro proceso de clonado probabilista debería volverse determinista (funcionar con probabilidad 1) y perfecto en ese límite.

Buscaremos una solución en que las probabilidades de éxito sean iguales para ambos estados, es decir consideraremos $p_1 = p_2 = p$.

De forma explícita la transformación se puede escribir como

$$\begin{aligned} U \left[(a|0\rangle_B \pm b|1\rangle_B) |\Psi^{(0)}\rangle_{CA} \right] &= \sqrt{p}|0\rangle_A (a|0\rangle_B \pm b|1\rangle_B) (a|0\rangle_C \pm b|1\rangle_C) \\ &\quad + \sqrt{1-p}|1\rangle_A (c|0\rangle_B|0\rangle_C + d|1\rangle_B|1\rangle_C). \end{aligned}$$

Sumando y restando ambas ecuaciones encontramos

$$p_{opt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1 + \cos \theta}, \quad (3.8)$$

que corresponde la probabilidad óptima de clonado

$$\frac{p_1 + p_2}{2} = p_{opt} = \frac{1}{1 + |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|}, \quad (3.9)$$

con $\langle \psi_+ | \psi_- \rangle = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \cos \theta$.

Deduciremos ahora el valor de las constantes c y d considerando la linealidad de la transformación:

$$\begin{aligned}
aU \left[|0\rangle_B |\Psi^{(0)}\rangle_{CA} \right] \pm bU \left[|1\rangle_B |\Psi^{(0)}\rangle_{CA} \right] &= \sqrt{p}|0\rangle_A (a^2|0\rangle_B|0\rangle_C \pm ab|0\rangle_B|1\rangle_C \\
&\quad \pm ab|1\rangle_B|0\rangle_C + b^2|1\rangle_B|1\rangle_C) \\
&\quad + \sqrt{1-p}|1\rangle_A (c|0\rangle_B|0\rangle_C + d|1\rangle_B|1\rangle_C).
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos 2 ecuaciones (la con + y la con -), sumándolas obtenemos:

$$\begin{aligned}
aU \left[|0\rangle_B |\Psi^{(0)}\rangle_{CA} \right] &= \sqrt{p}|0\rangle_A (a^2|0\rangle_B|0\rangle_C + b^2|1\rangle_B|1\rangle_C) \\
&\quad + \sqrt{1-p}|1\rangle_A (c|0\rangle_B|0\rangle_C + d|1\rangle_B|1\rangle_C),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

y restando

$$U \left[|1\rangle_B |\Psi^{(0)}\rangle_{CA} \right] = a\sqrt{\gamma}|0\rangle_A (|0\rangle_B|1\rangle_C + |1\rangle_B|0\rangle_C). \tag{3.11}$$

De la ecuación (3.10) tenemos:

$$\begin{aligned}
U \left[|0\rangle_B |\Psi^{(0)}\rangle_{CA} \right] &= a\sqrt{p}|0\rangle_A|0\rangle_B|0\rangle_C + \frac{b^2}{a}\sqrt{p}|0\rangle_A|1\rangle_B|1\rangle_C \\
&\quad + \frac{c}{a}\sqrt{1-p}|1\rangle_A|0\rangle_B|0\rangle_C + \frac{d}{a}\sqrt{1-p}|1\rangle_A|1\rangle_B|1\rangle_C.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Ya que nuestro objetivo final es crear un setup experimental basado en óptica lineal, escribimos esta ecuación en una forma que nos permita identificar que componentes ópticos a usar,

$$\begin{aligned}
U \left[|0\rangle_B |\Psi^{(0)}\rangle_{CA} \right] &= \left(\tilde{\alpha}|0\rangle_A + \tilde{\beta}|1\rangle_A \right) (\alpha|0\rangle_B|0\rangle_C + \beta|1\rangle_B|1\rangle_C) \\
&= \tilde{\alpha}\alpha|0\rangle_A|0\rangle_B|0\rangle_C + \tilde{\alpha}\beta|0\rangle_A|1\rangle_B|1\rangle_C \\
&\quad + \tilde{\beta}\alpha|1\rangle_A|0\rangle_B|0\rangle_C + \tilde{\beta}\beta|1\rangle_A|1\rangle_B|1\rangle_C.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Comparando (3.12) y (3.13) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}\alpha &= a\sqrt{p}, \\
\tilde{\alpha}\beta &= \frac{b^2}{a}\sqrt{p}, \\
\tilde{\beta}\alpha &= \frac{c}{a}\sqrt{1-p}, \\
\tilde{\beta}\beta &= \frac{d}{a}\sqrt{1-p},
\end{aligned}$$

y además exigimos la normalización de los estados, es decir

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1, \\ |\tilde{\alpha}|^2 + |\tilde{\beta}|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Si resolvemos este conjunto de ecuaciones para todas sus incógnitas, encontramos que la transformación unitaria que permite el clonaje probabilista de los estados está dada por (3.13) con parámetros,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^4 \frac{\theta}{2}}}, & \beta &= \frac{\tan^2 \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1+\tan^4 \frac{\theta}{2}}}, \\ \tilde{\alpha} &= \sqrt{\frac{1+\tan^4 \frac{\theta}{2}}{2}}, & \tilde{\beta} &= \sqrt{\frac{1-\tan^4 \frac{\theta}{2}}{2}}, \\ c &= \frac{1}{\sqrt{(1+\tan^4 \frac{\theta}{2})}}, & d &= \sqrt{\frac{\tan^4 \frac{\theta}{2}}{(1+\tan^4 \frac{\theta}{2})}}, \\ p &= \frac{1}{1+\cos \theta}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Cabe destacar que estos parámetros son independientes del estado de entrada, pero sí dependen del conjunto posible de estados a clonar a través de la variable θ .

3.3. Propuesta Experimental con RNM.

Hasta el momento se ha realizado solo un test experimental de este protocolo [5]. En esté se diseñó e implementó un circuito cuántico en un computador cuántico de resonancia nuclear magnética. Este circuito donde se logra la probabilidad óptima de clonaje. El circuito cuántico implementado se muestra en la figura 3.1, donde la compuerta θ prepara el qubit de entrada, U_1 y U_2 son rotaciones controladas y H es la compuerta de Hadamard.

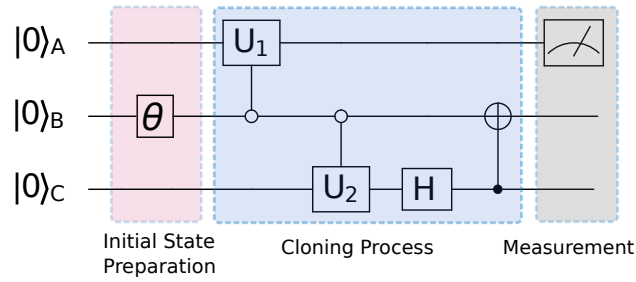


Figura 3.1: Circuito optimizado para clonado cuántico de qubits. Detalles en el texto principal.

A continuación estudiaremos una posible implementación experimental del protocolo de clonado probabilista utilizando fotones gemelos, cuya ventaja en comparación con la resonancia nuclear magnética, es que los clones pueden ser no locales ya que los fotones pueden ser separados espacialmente. Cuando nos referimos a separación espacial entre dos sistemas físicos hablamos de sistemas que no pueden interactuar de forma local. En física, el principio de localidad establece que dos objetos suficientemente alejados uno de otro no pueden interactuar, de manera que cada objeto solamente puede ser influido por su entorno inmediato.

A pesar de que la resonancia nuclear magnética ha tenido resultados destacados, no es una solución en el futuro, primero porque requiere la síntesis de una molécula que posea tantos sitios distinguibles como qubits necesarios y la habilidad para seleccionar las frecuencias actuando en cada transición representando un qubit. Además, las señales decrecen exponencialmente cuando el número de qubits crece. De hecho, la resonancia nuclear magnética no usa objetos cuánticos individuales, si no que un conjunto de $\gtrsim 10^{18}$ moléculas activas diluidas en un solvente: la señal es colectiva. Para obtener un estado “pseudo-puro” es necesario llevar a cabo operaciones de inicialización muy complejas, y los mismo para medir los estados finales. Son estas operaciones la que causan que la señal caiga cuando el número de qubits crece.

3.4. Propuesta Experimental con Fotones Gemelos.

3.4.1. Clonado Cuántico Probabilista no Local con Fotones Entrelazados en Polarización.

Como recurso básico para nuestra propuesta experimental usaremos fotones gemelos producidos por conversión paramétrica espontánea. En particular consideraremos conversión paramétrica espontánea descendente del tipo-II, (ver capítulo 2, sección 8) la cual produce dos fotones máximamente entrelazados en polarización, esto es

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|h\rangle_1|h\rangle_2 + |v\rangle_1|v\rangle_2), \quad (3.15)$$

donde los subíndices 1 y 2 denotan a cada fotón, idler y signal, respectivamente. El esquema general se muestra en la figura 3.2. Si ubicamos dos polarizadores, PBS_1 y PBS_2 en el camino de cada uno de los fotones gemelos, lo cuales crean dos caminos distinguibles, entonces el estado de los fotones, considerando sus grados de libertad de polarización y camino es

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|h\rangle_1|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 + |v\rangle_1|1\rangle_1|v\rangle_2|1\rangle_2). \quad (3.16)$$

Ubicamos ahora la placa de media onda HWP_1 en el camino 1 del fotón 1. Esta placa cambia la polarización de acuerdo a $|v\rangle_1|1\rangle_1 \rightarrow |h\rangle_1|1\rangle_1$, obteniendo de este modo el estado

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |h\rangle_1 (|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 + |1\rangle_1|v\rangle_2|1\rangle_2), \quad (3.17)$$

en el cual ahora la polarización del fotón 1 está factorizada de los otros grados de libertad. En este grado de libertad codificaremos el estado de entrada, el cual es elegido de forma aleatoria entre $|\psi_+\rangle$ y $|\psi_-\rangle$. Para lograr la codificación del estado de entrada utilizamos las placas HWP_s , dispuestas en los caminos 0 y 1 del fotón 1, como se muestra en la figura 3.1. Esta placa puede crear una superposición de polarización. El estado después de la placa está descrito por

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_\pm\rangle_1 (|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 + |1\rangle_1|v\rangle_2|1\rangle_2). \quad (3.18)$$

Hasta el momento, hemos hecho la identificación del sistema de entrada, es decir $|0\rangle_B \leftrightarrow |h\rangle_1$ y $|1\rangle_B \leftrightarrow |v\rangle_1$, y por lo tanto $|\psi_\pm\rangle = a|h\rangle_1 + b|v\rangle_1$. Lo que resta del setup permite

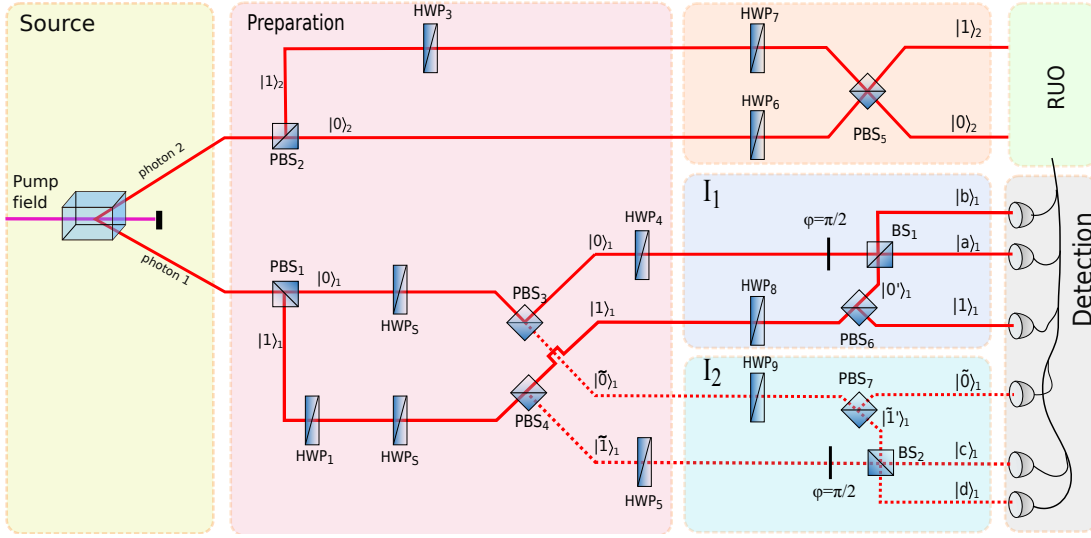


Figura 3.2: Esquema general para clonado cuántico probabilista con fotones gemelos. Los PBS son beam splitter polarizadores, los BS son beam splitter, HWP son placas de media onda, ϕ es una placa retardadora de fase, y es una operación de reconstrucción unitaria. Los detalles se explican en el texto principal.

crear dos copias del qubit de entrada, una en la polarización del fotón 2 y la otra en el grado de libertad de camino del fotón 2, destruyendo la información que inicialmente porta el fotón 1. Para conseguir esto, primero ponemos otra placa de onda, HWP_3 , en el camino 1 del fotón 2, la cual transforma la polarización vertical en polarización horizontal, esto conduce al estado

$$\begin{aligned}
 |\Psi_3\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}} (a|h\rangle_1|1\rangle_1|h\rangle_2|1\rangle_2 \pm b|v\rangle_1|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 \\
 & + a|h\rangle_1|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 \pm b|v\rangle_1|1\rangle_1|h\rangle_2|1\rangle_2). \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Dirigimos ahora ambos caminos del fotón 1 a los PBS_3 y PBS_4 , los cuales crean los caminos 0 y $\tilde{0}$ a partir del camino cero y 1 y $\tilde{1}$ a partir del camino 1. La acción de estos PBS 's puede ser caracterizada por

$$\begin{aligned}
 PBS_3|h\rangle_1|0\rangle_1 &= |h\rangle_1|\tilde{0}\rangle_1, \\
 PBS_3|v\rangle_1|0\rangle_1 &= |v\rangle_1|0\rangle_1, \\
 PBS_4|h\rangle_1|1\rangle_1 &= |h\rangle_1|1\rangle_1, \\
 PBS_4|v\rangle_1|1\rangle_1 &= |h\rangle_1|\tilde{1}\rangle_1,
 \end{aligned}$$

por lo que estado luego de generar estos caminos puede ser descrito por

$$\begin{aligned} |\Psi_4\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}} [a|h\rangle_1|1\rangle_1|h\rangle_2|1\rangle_2 \pm b|v\rangle_1|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 \\ & + a|h\rangle_1|\tilde{0}\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 \pm b|v\rangle_1|\tilde{1}\rangle_1|h\rangle_2|1\rangle_2] . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Consideremos ahora la acción de las placas de media onda HWP_4 y HWP_5 en los caminos 0 y 1, los cuales transforman polarización vertical en polarización horizontal, de modo que el estado está descrito ahora por

$$\begin{aligned} |\Psi_5\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}} [a|h\rangle_1|1\rangle_1|h\rangle_2|1\rangle_2 \pm b|h\rangle_1|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 \\ & + a|h\rangle_1|\tilde{0}\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 \pm b|h\rangle_1|\tilde{1}\rangle_1|h\rangle_2|1\rangle_2] . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Este conjunto de transformaciones concluyen la preparación de la máquina de clonado cuántico probabilista. Con la excepción de las placas de onda HWP_s , estas transformaciones no dependen de los coeficientes que definen el conjunto de estados a clonar. Como veremos luego, esta etapa de preparación es crucial para lograr la probabilidad óptima de éxito.

La siguiente etapa implementa el clonaje probabilista. Esta etapa está compuesta por un conjunto de placas de media onda, beam splitters y beam splitters polarizadores. Aquí, la información acerca de los posibles estados a ser clonado entran como el ángulo θ de las placas de media onda, con los cuales es posible introducir los coeficientes α , β , $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$, definidos en (3.14), en las superposiciones de polarización. La primera parte de la máquina de clonado actúa en el fotón 2. Este fotón es transformado por la acción de dos placas de media onda, la primera es la placa HWP_6 , la cual crea una superposición simétrica de polarización horizontal en el camino 0 del fotón 2, es decir

$$|h\rangle_2|0\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|h\rangle_2 + |v\rangle_2) . \quad (3.22)$$

Esto se consigue girando la placa HWP_6 en $22,5^\circ$ con respecto al eje horizontal. En el camino 1 del fotón 2 ubicamos la placa HWP_7 que genera el cambio

$$|h\rangle_2|1\rangle_2 \rightarrow (\alpha|h\rangle_2 + \beta|v\rangle_2)|1\rangle_2, \quad (3.23)$$

lo cual se logra girando la placa en un ángulo $\frac{1}{2} \arccos \alpha$. Luego de las placas se ubica el beam splitter polarizador PBS_5 , el cual actúa como una compuerta $cNOT$ entre

camino y polarización, con control en polarización, es decir

$$\begin{aligned} PBS_5|h\rangle_2|0\rangle_2 &= |h\rangle_2|1\rangle_2, \\ PBS_5|v\rangle_2|0\rangle_2 &= |v\rangle_2|0\rangle_2, \\ PBS_5|h\rangle_2|1\rangle_2 &= |h\rangle_2|0\rangle_2, \\ PBS_5|v\rangle_2|1\rangle_2 &= |v\rangle_2|1\rangle_2. \end{aligned}$$

El estado luego de este polarizador es descrito por

$$|\Psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi\rangle + |\tilde{\phi}\rangle \right), \quad (3.24)$$

con

$$|\phi\rangle = a|h\rangle_1|1\rangle_1 (\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2) \pm b\frac{1}{\sqrt{2}}|h\rangle_1|0\rangle_1 (|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2) \quad (3.25)$$

y

$$|\tilde{\phi}\rangle = a|h\rangle_1|\tilde{0}\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2) \pm b|h\rangle_1|\tilde{1}\rangle_1 (\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2). \quad (3.26)$$

Notemos que es posible mapear el estado $|\tilde{\phi}\rangle$ en el estado $|\phi\rangle$ si intercambiamos los estados en el fotón dos y los estados de camino $\{|\tilde{0}\rangle, |\tilde{1}\rangle\}$ por los estados $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Los estados $|\phi\rangle$ y $|\tilde{\phi}\rangle$ son transformados por los interferómetros I_1 e I_2 respectivamente. Los brazos del interferómetro I_1 están formados por los caminos de propagación 0 y 1 del fotón 1. En el camino 1 la placa de media onda HWP_8 genera la superposición de polarización $\tilde{\alpha}|h\rangle + \tilde{\beta}|v\rangle$, mientras en el camino 0 ponemos un phase-shifter que genera un retardo de fase $\varphi = \pi/2$. En el camino 1 ponemos además el beam splitter polarizador PBS_6 que actúa según

$$\begin{aligned} PBS_6|h\rangle_1|1\rangle_1 &= |h\rangle_1|0'\rangle_1, \\ PBS_6|v\rangle_1|1\rangle_1 &= |h\rangle_1|1\rangle_1, \end{aligned} \quad (3.27)$$

por lo que es estado que involucra estos caminos está descrito ahora por

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= a \left(\tilde{\alpha}|h\rangle_1|0'\rangle_1 + \tilde{\beta}|v\rangle_1|1\rangle_1 \right) (\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2) \\ &\quad \pm ib \frac{1}{\sqrt{2}} |h\rangle_1|0\rangle_1 (|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Finalmente dirigimos los caminos 0 y 1 a un beam splitter, como se muestra en la figura y que actúa según

$$\begin{aligned} BS_1|0\rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle_1 + i|b\rangle_1), \\ BS_1|0'\rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|b\rangle_1 + i|a\rangle_1). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Luego de esta operación, el estado es descrito por

$$\begin{aligned} |\phi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}i \left[a(\tilde{\alpha}|h\rangle_1|0\rangle_1 + \tilde{\beta}|v\rangle_1|1\rangle_1) (\alpha|h\rangle_2|a\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2) \right. \\ &\quad \left. \pm b\frac{1}{\sqrt{2}}|h\rangle_1|a\rangle_1(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}i \left[a(\tilde{\alpha}|h\rangle_1|0\rangle_1 + \tilde{\beta}|v\rangle_1|1\rangle_1) (\alpha|h\rangle_2|b\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2) \right. \\ &\quad \left. \mp b\frac{1}{\sqrt{2}}|h\rangle_1|b\rangle_1(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2) \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

el cual, usando las definiciones de la ecuación (3.14) se puede escribir como

$$\begin{aligned} |\phi_2\rangle &= a\tilde{\beta}(\alpha|h\rangle_1|0\rangle_1 + \beta|v\rangle_1|1\rangle_1)|v\rangle_2|1\rangle_2 \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}i|h\rangle_1|a\rangle_1(a|h\rangle_2 \pm b|v\rangle_2)(a|0\rangle_2 \pm b|1\rangle_2) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}|h\rangle_1|b\rangle_1(a|h\rangle_2 \mp b|v\rangle_2)(a|0\rangle_2 \mp b|1\rangle_2). \end{aligned} \quad (3.31)$$

De forma similar, efectuamos una operación como ésta en el interferómetro I_2 , pero con los componentes ópticos “reflejados”, como se muestra en la figura 3.2. El estado final del interferómetro I_2 se puede expresar como

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_2\rangle &= a\tilde{\beta}|v\rangle_1|\tilde{0}\rangle_1\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2) \\ &\quad + i\frac{1}{\sqrt{2}}|h\rangle_1|c\rangle_1 \left[a\tilde{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2) \pm b(\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}|h\rangle_1|d\rangle_1 \left[a\tilde{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2) \mp b(\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2) \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Finalmente, el estado total del sistema luego de todas las operaciones es descrito por

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_2\rangle + |\tilde{\phi}_2\rangle), \quad (3.33)$$

o si expandimos todo:

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle = & a\tilde{\beta}|v\rangle_1|1\rangle_1(\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2) \\
& + a\tilde{\beta}|v\rangle_1|\tilde{0}\rangle_1\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2) \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}}i|h\rangle_1|a\rangle_1(a|h\rangle_2 \pm b|v\rangle_2)(a|0\rangle_2 \pm b|1\rangle_2) \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}}|h\rangle_1|b\rangle_1(a|h\rangle_2 \mp b|v\rangle_2)(a|0\rangle_2 \mp b|1\rangle_2) \\
& + i\frac{1}{\sqrt{2}}|h\rangle_1|c\rangle_1\left[a\tilde{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2) \pm b(\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2)\right] \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}}|h\rangle_1|d\rangle_1\left[a\tilde{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2) \mp b(\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2)\right].
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Por lo tanto, debemos medir en cual de los 6 caminos posibles colapsa el fotón 1 y de acuerdo al resultado aplicar una operación unitaria local de reconstrucción del estado (*RUO*).

1. Si el fotón 1 colapsa en el camino $|1\rangle$ o $|\tilde{0}\rangle$, entonces, el proceso falló. Este evento ocurre con probabilidad $1 - p_{opt}$.
2. Si el fotón 1 colapsa en el camino $|a\rangle$, entonces tenemos dos copias exactas albergadas una en la polarización y la otra en el camino del fotón 2. Este evento ocurre con probabilidad $p_{opt}/4$.
3. Si el fotón 1 colapsa en el camino $|b\rangle$, lo cual ocurre con probabilidad $p_{opt}/4$, entonces, a través de comunicación clásica transmitimos el resultado de la medición al portador del fotón 2 y aplicamos una operación que nos permita recuperar los clones. En esta caso esa operación corresponde a poner una fase π en el camino 2 de fotón 2 y a ubicar un *HWP* en 0 grados en ambos caminos, como se muestra en la figura 3.3
4. Si el fotón 1 colapsa en el camino $|c\rangle$, con probabilidad $p_{opt}/4$, entonces el estado no normalizado del sistema es

$$|\phi_c\rangle = a\tilde{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2) \pm b(\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2), \tag{3.35}$$

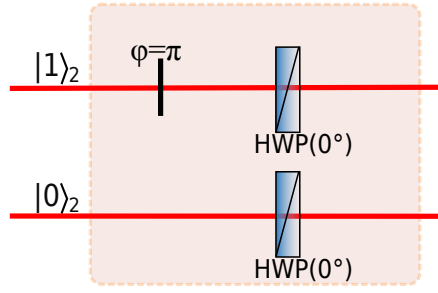


Figura 3.3: Operación Unitaria de Reconstrucción (RUO) en el caso de que el fotón sea medido en el camino a

[Operación Unitaria de Reconstrucción (RUO) en el caso de que el fotón sea medido en el camino a . La placa retardadora de fase introduce una fase relativa φ entre ambos caminos, mientras que las placas $HWP(0)$ introducen una diferencia de fase π entre ambas polarizaciones]

por lo que para recuperar el estado deseado primero ponemos un PBS que cruza los caminos $|1\rangle$ y $|2\rangle$, como se muestra en la figura 3.4, obteniendo así,

$$|\phi_c\rangle = a\tilde{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2 + |v\rangle_2)|0\rangle_2 \pm b(\alpha|h\rangle_2 + \beta|v\rangle_2)|1\rangle_2. \quad (3.36)$$

Dado que α y β son conocidos, podemos poner una placa de media onda, HWP_j en el camino $|0\rangle_2$ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2 + |v\rangle_2)|0\rangle_2 \rightarrow (\alpha|h\rangle_2 + \beta|v\rangle_2)|0\rangle_2 \quad (3.37)$$

y otra en el camino $|0\rangle_2$ la placa HWP_k tal que

$$(\alpha|h\rangle_2 + \beta|v\rangle_2)|1\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2 + |v\rangle_2)|1\rangle_2, \quad (3.38)$$

luego tenemos que

$$|\phi_c\rangle = a\tilde{\alpha}(\alpha|h\rangle_2 + \beta|v\rangle_2)|0\rangle_2 \pm b\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2 + |v\rangle_2)|1\rangle_2, \quad (3.39)$$

y aplicamos nuevamente la compuerta $CNOT$ entre polarización y camino, es decir, cruzamos los caminos en un PBS , obteniendo así

$$|\phi_c\rangle = a\tilde{\alpha}(\alpha|h\rangle_2|1\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|0\rangle_2) \pm b\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|0\rangle_2 + |v\rangle_2|1\rangle_2), \quad (3.40)$$

finalmente cruzamos los caminos y obtenemos

$$|\phi_c\rangle = a\tilde{\alpha}(\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2) \pm b\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2), \quad (3.41)$$

y entonces tenemos dos copias exactas albergadas una en la polarización y la otra en el camino del fotón 2.

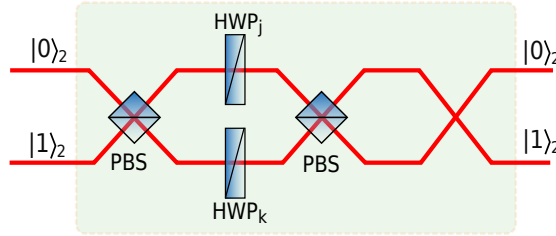


Figura 3.4: Operación Unitaria de Reconstrucción en el caso de que el fotón sea medido en el camino c .

5. Si el fotón 1 colapsa en $|d\rangle$, con probabilidad $p_{opt}/4$, entonces debemos aplicar la operación descrita para el caso en que colapsa en $|c\rangle$ seguida de la operación descrita en el caso en que colapsa en $|b\rangle$.

Por lo tanto, hemos logrado crear un esquema que produce 2 copias albergadas en dos grados de libertad de un fotón, separado espacialmente del fotón que albergaba el estado original (el cual es destruido) con probabilidad óptima p_{opt} , que es la suma de la probabilidad de detección en los caminos a , b , c y d .

El setup mostrado en la figura 3.2 puede ser un poco complicado de implementar ya que presenta lo que correspondería a dos interferómetros sobrepuestos. La complicación se presenta al momento de estabilización en fase de los distintos brazos. Para ahorrar recursos y problemas, es posible simplemente eliminar los caminos mostrados con líneas segmentadas en la figura 3.2, bloqueándolos con algún elemento óptico. De esta manera filtramos la mitad de los fotones en los que fue codificado el estado inicial y reduciendo hasta la mitad la probabilidad de éxito.

Por otro lado, el sistema completo debe permitir que ambos fotones sean detectados en coincidencia y el tiempo de aplicación de la operación unitaria y la detección del fotón que alberga las copias debe ser menor que el tiempo de coherencia de los fotones. Una opción es introducir un retraso en el fotón que alberga las copias a través de fibra óptica

mientras la medición activa la electrónica necesaria para realizar las transformaciones de reconstrucción, las cuales pueden ser llevadas a cabo de forma rápida y eficiente por dispositivos electro-ópticos programables tales como Celdas pockels en vez de placas de onda [8].

3.4.2. Detección y Tomografía.

Como ya explicamos, en el esquema planteado se espera que el estado inicialmente codificado en la polarización del fotón 1 sea copiado en los grados de libertad de camino y polarización del fotón 2. Por lo tanto, para testear el funcionamiento debemos realizar tomografía de estos estados y comparar los resultados con el estado inicialmente codificado por las placas de media onda, verificar que sean razonablemente iguales en términos de fidelidad y además verificar que la probabilidad de éxito corresponda a la esperada. Para esto es necesario barrer todos los posibles conjuntos de estados de entradas, es decir, variar θ desde 0 a $\pi/2$. Para cada uno de estos ángulos debemos repetir el esquema muchas veces, alternado entre el estado $|\psi_+\rangle$ y $|\psi_-\rangle$ y aplicar la transformación de reconstrucción.

Una estimación básica para saber si el proceso está funcionando puede llevarse a cabo simplemente a través de la estadística de detección del fotón 1, la cual es obtenida contando y registrando el número de detecciones en cada detector.

El número de fotones detectados en cada detector es caracterizado por el número C_i , con $i = 1, a, b, \tilde{0}, c, d$ identificando a cada detector. Si enviamos N pares de fotones entrelazados, y en cada uno de ellos codificamos de forma correcta el estado de entrada $|\psi_+\rangle$ o $|\psi_-\rangle$, entonces se espera que

$$C_a + C_b + C_c + C_d = p_{opt}\eta N \quad (3.42)$$

$$C_1 + C_{\tilde{0}} = (1 - p_{opt})\eta N, \quad (3.43)$$

donde η describe la eficiencia cuántica de la detección. Por otro lado, si sobre el fotón 2 implementamos el sistema de detección mostrado en la figura 3.5 y caracterizamos como $\tilde{C}_{i,j}$ (con $i = 0, 1$ indicando el camino y $j = h, v$ la polarización) al número de cuentas solo después de haber tenido un resultado en la medición del fotón 1 que indique éxito en el esquema de cloning, entonces se espera que

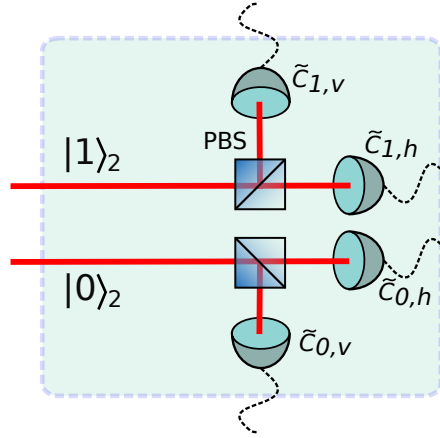


Figura 3.5: Esquema básico detección fotón 2.

$$\tilde{C}_{0,h} + \tilde{C}_{0,v} = a^2 \eta N p_{opt} \quad (3.44)$$

$$\tilde{C}_{1,v} + \tilde{C}_{1,h} = b^2 \eta N p_{opt} \quad (3.45)$$

y

$$\tilde{C}_{0,h} + \tilde{C}_{1,h} = a^2 \eta N p_{opt} \quad (3.46)$$

$$\tilde{C}_{0,v} + \tilde{C}_{1,v} = b^2 \eta N p_{opt} \quad (3.47)$$

Por último, debemos realizar tomografía de los estados finales de camino y polarización del fotón 2 en los casos en que la ancilla muestre que el proceso haya sido exitoso y luego comparar las fidelidades entre estos estados y el estado de entrada. No es la intención de este trabajo profundizar en tomografía de estados cuánticos, para una breve introducción ver por ejemplo sección 8.4.2 de [6]. Lo importante es que nuestra figura de mérito, la fidelidad, sea lo más cercana a 1 posible. Es necesario también comprobar que la codificación del estado inicial es preparada con una fidelidad suficientemente alta, por lo cual debemos realizar tomografía de este estado también.

3.4.3. Consideraciones Experimentales.

Podemos considerar otras dos formas de abordar el problema del clonado perfecto de estados de fotones. Podríamos generar primero los clones y luego utilizar un esquema típico de teleportación cuántica. En este caso los clones son generados localmente

y el proceso de teleportación requiere dos canales máximamente entrelazados, uno para cada clon. El proceso inverso sería teleportar el estado que queremos clonar y luego clonarlo localmente. Desde el punto de vista de los recursos ocupados en el experimento propuesto, ninguna de estas estrategias puede ser realizada. En nuestra propuesta, solo se hace uso de dos fotones, cada uno dotado de espacios de Hilbert correspondientes a polarización y camino. Inicialmente ambos están en un estado máximamente entrelazado de polarización mientras que sus estados de camino son separables. En las otras estrategias el clonado es local y debe ser llevado en un solo fotón. Dado que la máquina de clonado probabilista requiere, al menos, de tres espacios de Hilbert y en nuestro esquema hacemos uso de dos grados de libertad en cada fotón, esta tarea no puede ser llevada a cabo.

Los bloques que construyen nuestra propuesta experimental han sido todos implementados experimentalmente. El conjunto de transformaciones actuando sobre el fotón 1 ha sido usada para implementar una medición de Bell actuando en un estado puro entrelazado entre polarización y camino de un fotón [46], para incrementar o disminuir de forma conclusiva el producto interno entre dos estados no ortogonales [47], y para controlar las franjas de interferencia en un experimento de borrado cuántico [48, 49]. Todo esto fue implementado utilizando fotones gemelos con longitud de onda 702,2nm producidos mediante el bombeo de un cristal con un láser continuo de ion Ar^+ a 351,1nm con potencia de salida de 100 a 150mW. Notemos que las placas de onda HWP_3 y HWP_7 pueden ser reunidas en una sola placa de media onda. El conjunto de transformaciones que actúan en el fotón 2 son los interferómetros con pérdida I_1 e I_2 . Cada uno de estos está compuesto por un conjunto de transformaciones que son similares a las transformaciones actuando en el fotón 1 pero reemplazando uno de los espejos usados para cerrar el interferómetro por un beam splitter polarizador, el cual permite las pérdidas. Los puertos de entrada de los interferómetros I_1 e I_2 reciben los fotones originados en dos polarizadores diferentes (PBS_3 y PBS_4 en la figura 3.2). Aquí, las placas de media onda HWP_1 y HWP_s pueden también juntarse en una sola placa de media onda. Esta clase de arreglos ya han sido usados en experimentos, en particular, han sido usados para implementar teleportación cuántica [50] de un qubit mediante un canal cuántico formado por dos modos de un campo electromagnético poblados por el

vació y un estado de Fock de un solo fotón. Este experimento fue llevado a cabo usando fotones gemelos a 727,6nm generados bombeando un cristal por un láser continuo de ion Ar^+ a 363,8nm con una potencia de salida promedio cercana a los 100 mW. Nuestra propuesta requiere de operaciones de recuperación unitarias; todas estas operaciones están dentro de técnicas experimentales actuales. Sin embargo, dado que debemos realizar tomografía cuántica sobre los clones para testear la calidad del proceso de clonaje, es más simple evitar el proceso de recuperación y llevar a cabo tomografía directamente en los estados clonados y compararlos con los estados iniciales antes de la aplicación de las operaciones de recuperación, como en el caso de teleportación cuántica pasiva [51].

3.4.4. Clonado Cuántico Óptimo no Local con Fotones con Entrelazamiento en Caminos.

Es posible realizar un procedimiento similar al descrito en la subsección anterior, pero considerando el entrelazamiento espacial transversal de los fotones gemelos generados mediante conversión paramétrica espontánea descendente, en vez del entrelazamiento en polarización.

Para realizar un experimento que implemente la transformación propuesta consideraremos fotones gemelos generados por conversión paramétrica espontánea descendente, lo cual se consigue bombeando un cristal cortado para SPDC tipo-I colineal. Los fotones convertidos son emitidos en la misma dirección de propagación, y luego son separados de forma probabilista con un beam splitter balanceado. El par de fotones son producidos sin entrelazamiento en polarización. El estado de los fotones emitidos puede ser descrito como

$$|h\rangle_1 |h\rangle_2 |\xi\rangle_{12} \quad (3.48)$$

donde el subíndice denota el fotón 1 o 2, h es polarización horizontal (v es vertical) y $|\xi\rangle$ denota el estado espacial de cada fotón y contiene las correlaciones espaciales transversales entre el par de fotones. En nuestro setup propuesto, consideraremos luego dos caminos definidos por una doble rendija. A priori los fotones pueden atravesar cualquiera de las dos rendijas, pero dadas las correlaciones espaciales transversales, en particular, el entrelazamiento en las posiciones transversales de cada fotón, el estado

espacial del par de fotones $|\xi\rangle$ luego de atravesar cada uno un par de rendijas, como se muestra en la figura 3.6, puede ser escrito como

$$|\xi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2), \quad (3.49)$$

donde los *estados de rendija* $|0\rangle_i$ y $|1\rangle_i$ denotan el estado del fotón $i = 1, 2$ después de pasar a través de la rendija 0 o 1 respectivamente, en cada arreglo de doble rendija.

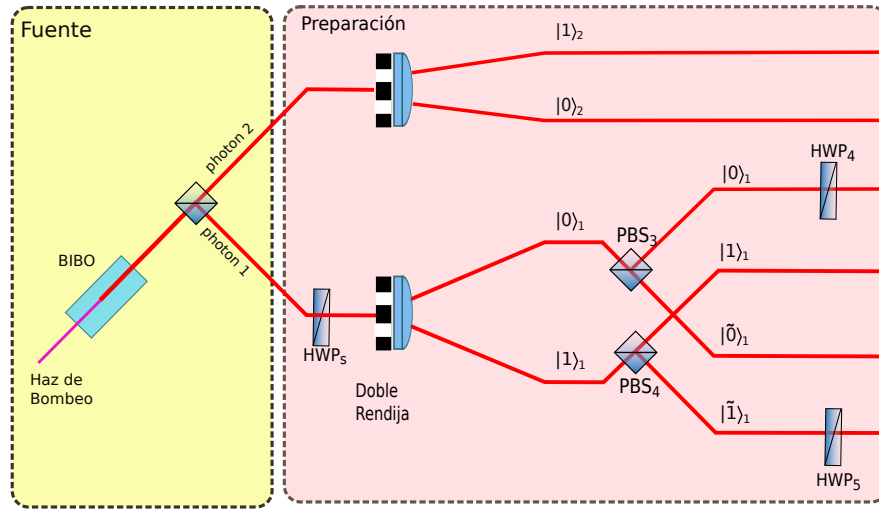


Figura 3.6: Setup de generación y preparación para clonado cuántico probabilista utilizando entrelazamiento espacial utilizando una doble rendija.

Añadimos ahora una placa de media onda (y un elemento retardador de fase) en el fotón 1, de forma tal que podamos modificar su polarización a voluntad y así codificar el estado de entrada en este grado de libertad, obteniendo así un estado descrito por

$$|\Psi_1\rangle = (a|h\rangle_1 \pm b|v\rangle_1)|h\rangle_2 \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2) \quad (3.50)$$

Este estado representará el estado inicial de nuestra máquina de clonaje, donde la polarización del fotón 1 codificará el estado a clonar, el estado de rendija del fotón 1 será receptor de la copia y el fotón dos, considerando polarización y estado de rendija

será nuestra ancilla de cuatro niveles. De este modo, mapeando los estados relevantes

$$|0\rangle_A \leftrightarrow |0\rangle_2,$$

$$|1\rangle_A \leftrightarrow |1\rangle_2,$$

$$|0\rangle_B \leftrightarrow |h\rangle_1,$$

$$|1\rangle_B \leftrightarrow |v\rangle_1,$$

$$|0\rangle_C \leftrightarrow |0\rangle_1,$$

$$|1\rangle_C \leftrightarrow |1\rangle_1,$$

tenemos la correspondencia

$$|\psi\rangle_B \leftrightarrow a|h\rangle_1 + b|v\rangle_1$$

$$|\Psi^{(0)}\rangle_{CA} \leftrightarrow |h\rangle_2 |\xi\rangle_{12}.$$

El estado de la ecuación (3.50) se puede escribir como

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle = & \frac{1}{\sqrt{2}} (a|h\rangle_1|1\rangle_1|h\rangle_2|1\rangle_2 \pm b|v\rangle_1|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 \\ & a|h\rangle_1|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 \pm b|v\rangle_1|1\rangle_1|h\rangle_2|1\rangle_2). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Este estado luce exactamente igual al estado de la ecuación (3.19), por lo que podemos proceder exactamente igual que en la subsección anterior, es decir, ubicaremos los beam splitter polarizadores PBS_3 y PBS_4 para crear los caminos $\tilde{0}$ y $\tilde{1}$ para el fotón uno, y luego las placas de media onda HWP_4 y HWP_5 . Esto termina la preparación para la máquina de clonado y reemplaza la etapa de preparación de la figura 3.2. Para lograr los clones idénticos con fidelidad 1 y probabilidad óptima solo debemos seguir con el esquema descrito en la figura 3.2.

3.4.5. Clonado Cuántico Subóptimo Local.

Es posible implementar el clonado probabilista de forma local, pero dada las limitaciones que impone la falta de interacción entre fotones, solo hemos podido crear un

setup que funciona con la mitad de la probabilidad óptima. Esto sucede ya que debemos realizar un proceso de filtrado, donde descartamos la mitad de los fotones en que hemos codificado nuestro estado inicial. De todos modos, todos los fotones detectados en coincidencia portan los clones deseados [52].

Consideremos la preparación de la figura 3.2, donde utilizamos conversión paramétrica tipo-II, aunque bien podría ser hecho a partir de la implementación con rendijas. Como ya describimos en la subsección 3.4.1, el estado justo antes de los PBS_3 y PBS_4 puede ser descrito por la ecuación. (3.19), es decir

$$\begin{aligned} |\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} & (a|h\rangle_1|1\rangle_1|h\rangle_2|1\rangle_2 \pm b|v\rangle_1|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 \\ & + a|h\rangle_1|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 \pm b|v\rangle_1|1\rangle_1|h\rangle_2|1\rangle_2). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ubicaremos ahora un par de polarizadores lineales, el primero, un polarizador lineal vertical en el camino 0 ($POL(v)$) y un polarizador lineal horizontal ($POL(h)$) en el camino 1, ambos en el fotón 1, tal como se muestra en la figura 3.7.

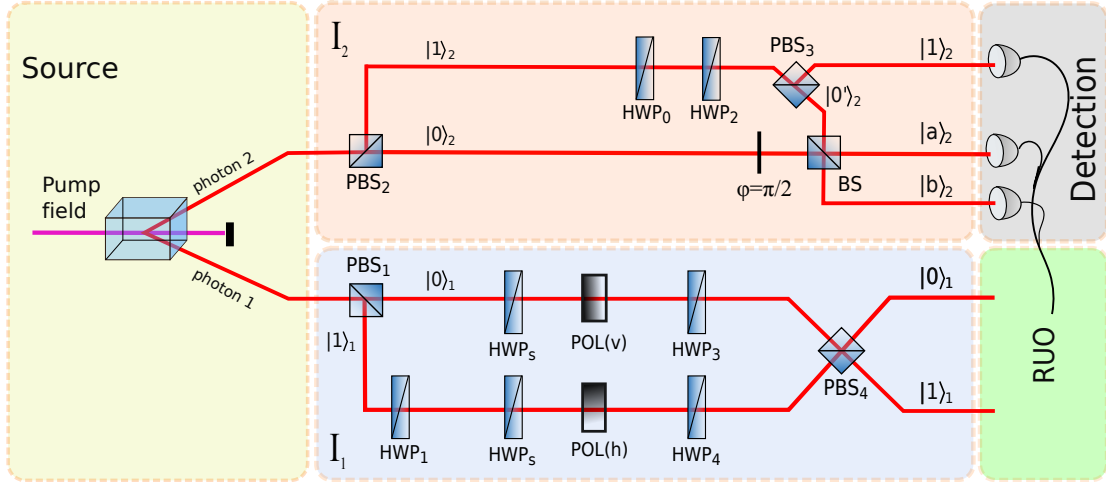


Figura 3.7: Esquema general para clonado cuántico probabilista sub-óptimo.

Mediante estos polarizadores estamos eliminando la segunda parte del estado, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} & [a|h\rangle_1|1\rangle_1|v\rangle_2|1\rangle_2 \pm b|v\rangle_1|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 \\ & + \cancel{a|h\rangle_1|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2} \pm \cancel{b|v\rangle_1|1\rangle_1|v\rangle_2|1\rangle_2}], \end{aligned} \quad (3.53)$$

por lo que el estado normalizado ahora es

$$|\Psi_4\rangle = a|h\rangle_1|1\rangle_1|v\rangle_2|1\rangle_2 \pm b|v\rangle_1|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2. \quad (3.54)$$

Este estado es generado con probabilidad $1/2$.

El procedimiento posterior es similar al de las subsecciones anteriores, solo que las operaciones unitarias están intercambiadas entre el fotón 1 y el fotón 2. Ponemos primero las placas de media onda HWP_3 y HWP_4 dentro del interferómetro con pérdida I_1 , como muestra la figura. La placa de onda HWP_3 (más una fase π) transforma la polarización vertical de los fotones viajando en el camino 0 del fotón 1 en una superposición equilibrada de vertical y horizontal, es decir,

$$|v\rangle_1|0\rangle_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_1 + |v\rangle_1)|0\rangle_1. \quad (3.55)$$

La placa HWP_4 mapea la polarización horizontal del camino 1 del fotón 1 en una superposición de polarización vertical y horizontal, tal que

$$|h\rangle_1|1\rangle_1 \rightarrow (\alpha|h\rangle_1 + \beta|v\rangle_1), \quad (3.56)$$

con α y β definidos en la ecuación (3.14), por lo que el estado de ambos fotones puede ser descrito por

$$|\Psi_5\rangle = a(\alpha|h\rangle_1 + \beta|v\rangle_1)|1\rangle_1|v\rangle_2|1\rangle_2 \pm b\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_1 + |v\rangle_1)|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2. \quad (3.57)$$

Finalmente, los fotones propagándose en el interferómetro I_1 se juntan en el beam splitter polarizador PBS_4 , como se muestra en la figura 3.7. Así, el estado conjunto de ambos fotones es

$$\begin{aligned} |\Psi_6\rangle &= a(\alpha|h\rangle_1|0\rangle_1 + \beta|v\rangle_1|1\rangle_1)|v\rangle_2|1\rangle_2 \\ &\pm b\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_1|1\rangle_1 + |v\rangle_1|0\rangle_1)|h\rangle_2|0\rangle_2. \end{aligned} \quad (3.58)$$

El estado del fotón dos es modificado en el interferómetro I_2 . Aquí, la placa de media onda HWP_0 cambia la polarización de los fotones propagándose en el camino 1 desde vertical a horizontal, es decir

$$\begin{aligned} |\Psi_7\rangle &= a(\alpha|h\rangle_1|0\rangle_1 + \beta|v\rangle_1|1\rangle_1)|h\rangle_2|1\rangle_2 \\ &\pm b\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_1|1\rangle_1 + |v\rangle_1|0\rangle_1)|h\rangle_2|0\rangle_2. \end{aligned} \quad (3.59)$$

La placa de media onda $HW P_2$ transforma la polarización horizontal de los fotones viajando en el camino 1 de acuerdo a

$$|h\rangle_2|1\rangle_2 \rightarrow (\tilde{\alpha}|h\rangle_2 + \tilde{\beta}|v\rangle_2), \quad (3.60)$$

con $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ dados por la ecuación (3.14), mientras que los fotones viajando por el camino 0 adquieren una fase extra de $\varphi = \pi/2$. Obtenemos así

$$\begin{aligned} |\Psi_8\rangle &= a(\alpha|h\rangle_1|0\rangle_1 + \beta|v\rangle_1|1\rangle_1) (\tilde{\alpha}|h\rangle_2 + \tilde{\beta}|v\rangle_2) |1\rangle_2 \\ &\quad \pm ib \frac{1}{\sqrt{2}} (|h\rangle_1|1\rangle_1 + |v\rangle_1|0\rangle_1) |h\rangle_2|0\rangle_2. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Ubicamos ahora el beam splitter polarizador PBS_3 en el camino 1, como se muestra en la figura 3.7, el cual actúa de acuerdo a

$$PBS_3|h\rangle_2|1\rangle_2 = |h\rangle_2|0'\rangle_2 \quad (3.62)$$

$$PBS_3|v\rangle_2|1\rangle_2 = |v\rangle_2|1\rangle_2. \quad (3.63)$$

Luego dirigimos los caminos 0 y 0' a un beam splitter BS , el que actúa de forma similar a como se muestra en la ecuación (3.29), obteniendo así el estado

$$\begin{aligned} |\Psi_9\rangle &= \alpha\tilde{\beta}|\phi^{(1)}\rangle_1|v\rangle_2|1\rangle_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}|\phi^{(2)}\rangle_1|h\rangle_2|a\rangle_2 \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi^{(3)}\rangle_1|h\rangle_2|b\rangle_2, \end{aligned} \quad (3.64)$$

donde los estados no normalizados del fotón 1 de esta expresión son

$$\begin{aligned} |\phi^{(1)}\rangle_1 &= \alpha|h\rangle_1|0\rangle_1 + \beta|v\rangle_1|1\rangle_1, \\ |\phi^{(2)}\rangle_1 &= a\tilde{\alpha}(|h\rangle_1|0\rangle_1 + \beta|v\rangle_1|1\rangle_1) \\ &\quad \pm b \frac{1}{\sqrt{2}} (|h\rangle_1|1\rangle_1 + |v\rangle_1|0\rangle_1), \\ |\phi^{(3)}\rangle_1 &= a\tilde{\alpha}(|h\rangle_1|0\rangle_1 + \beta|v\rangle_1|1\rangle_1) \\ &\quad \mp b \frac{1}{\sqrt{2}} (|h\rangle_1|1\rangle_1 + |v\rangle_1|0\rangle_1). \end{aligned}$$

De acuerdo al estado $|\Psi_9\rangle$, la detección del fotón 2 proyecta al fotón 1 en uno de los tres posibles estados. Como en el caso no local, es posible saber si el proceso falló o funcionó, y reconstruir el estado inicial dos veces, a través del resultado del proceso de

medición. La fotodetección del fotón 1 en el camino 1 proyecta al fotón 2 en el estado $|\phi^{(1)}\rangle$. Este estado es obtenido independientemente del estado de entrada a ser clonado y representa la falla en el intento de clonación. La fotodetección del fotón 2 en el camino a proyecta el fotón 1 en el estado $|\phi^{(2)}\rangle_1$, el cual considerando las definiciones (3.14) puede ser escrito como

$$\frac{1}{a\sqrt{2}} (a|h\rangle_1 \pm b|v\rangle_1) (a|0\rangle_1 \pm b|1\rangle_1), \quad (3.65)$$

el cual describe el proceso de clonación exitoso, y sin necesidad de realizar ninguna operación de reconstrucción. Finalmente, la fotodetección del fotón 2 en el camino b implica que el estado del fotón 1 fue proyectado en el estado $|\phi^{(3)}\rangle_1$, el cual puede ser escrito como

$$\frac{1}{a\sqrt{2}} (a|h\rangle_1 \mp b|v\rangle_1) (a|0\rangle_1 \mp b|1\rangle_1). \quad (3.66)$$

En este caso el intento de clonar el estado $|\psi_{\pm}\rangle$ conduce a dos copias del estado $|\psi_{\mp}\rangle$. Sin embargo, al igual que en las subsecciones anteriores, es posible reconstruir el estado original utilizando una operación unitaria de reconstrucción. En particular, solo es necesario utilizar la *RUO* de la figura 3.3.

El fotón se proyecta en el estado $|\phi^{(2)}\rangle$ y $|\phi^{(3)}\rangle$ con la misma probabilidad. Considerando la fotodetección en los caminos a y b del fotón 2 y la operación condicional de corrección en el fotón 1, la probabilidad de éxito p_s del proceso de clonación propuesto aquí es

$$p_s = 1 - |a\tilde{\beta}|^2, \quad (3.67)$$

o equivalentemente

$$p_s = p_{opt} = \frac{1}{1 + \cos \theta}, \quad (3.68)$$

que es la probabilidad óptima de clonado cuántico para el conjunto elegido. Sin embargo, el proceso de filtrado que es llevado a cabo después de codificar el estado a ser clonado reduce la probabilidad con un factor $1/2$. Por lo tanto, la probabilidad de éxito total p_{total}^{me} del esquema es solo la mitad de la probabilidad óptima, es decir,

$$p_{total}^{me} = \frac{p_{opt}}{2}. \quad (3.69)$$

3.5. Clonado Probabilista no Local Con Canales Parcialmente Entrelazados.

En la sección anterior hemos propuesto un setup experimental para implementar el clonado probabilista de dos estados de qubits no ortogonales. Este proceso está basado en el uso de un estado máximamente entrelazado de dos fotones, ya sea en polarización, como es el caso de la Ec. (3.15), o en camino, como en la Ec. (3.49). En esta sección mostraremos que es posible usar un estado parcialmente entrelazado conocido para implementar el clonado probabilista. Esto, sin embargo, conduce a una reducción en la probabilidad de éxito.

Consideremos el esquema en el cual nuestro recurso inicial es un estado con entrelazamiento en polarización y supongamos que nuestro recurso inicial es un estado parcialmente entrelazado (puro) de los fotones 1 y 2, como

$$|\tilde{\Psi}_0\rangle = c_h|h\rangle_1|h\rangle_2 + c_v|v\rangle_1|v\rangle_2. \quad (3.70)$$

Por simplicidad los coeficientes c_h y c_v son elegidos como números reales y tales que $c_h \leq c_v$ y tales que $c_h^2 + c_v^2 = 1$. Este es el estado de entrada para el setup descrito en la figura 3.2, por lo que luego de codificar el estado a clonar, el estado de ambos fotones es descrito por

$$|\tilde{\Psi}_2\rangle = |\psi_{\pm}\rangle_1 (c_h|0\rangle_1|h\rangle_2|0\rangle_2 + c_v|1\rangle_1|v\rangle_2|1\rangle_2), \quad (3.71)$$

o

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}_2\rangle = & c_v a |h\rangle_1 |1\rangle_1 |v\rangle_2 |1\rangle_2 \pm c_h b |v\rangle_1 |0\rangle_1 |h\rangle_2 |0\rangle_2 \\ & + c_h a |h\rangle_1 |0\rangle_1 |h\rangle_2 |0\rangle_2 \pm c_v b |v\rangle_1 |1\rangle_1 |v\rangle_2 |1\rangle_2. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Por lo tanto, el estado del sistema, siguiendo el esquema de la figura 3.2, luego del beam splitter polarizador PBS_5 y sin aún aplicar las transformaciones de los interferómetros I_1 e I_2 está dado por

$$|\tilde{\Psi}_4\rangle = |\vartheta\rangle + |\tilde{\vartheta}\rangle, \quad (3.73)$$

con

$$|\vartheta\rangle = ac_v |h\rangle_1 |1\rangle_1 (\alpha |h\rangle_2 |0\rangle_2 + \beta |v\rangle_2 |1\rangle_2) \pm bc_h \frac{1}{\sqrt{2}} |h\rangle_1 |0\rangle_1 (|h\rangle_2 |1\rangle_2 + |v\rangle_2 |0\rangle_2) \quad (3.74)$$

y

$$|\tilde{\vartheta}\rangle = ac_h|h\rangle_1|\tilde{0}\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}} (|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2) \pm bc_v|h\rangle_1|\tilde{1}\rangle_1 (\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2), \quad (3.75)$$

los cuales son los estados no normalizados y equivalentes a los estados $|\phi\rangle$ y $|\tilde{\phi}\rangle$ definidos en las ecuaciones (3.25) y (3.26), salvo que en estado $|\vartheta\rangle$ el coeficiente a es reemplazado por el coeficiente ac_v y b por bc_h ; y en el estado ϑ , a es reemplazado por el coeficiente ac_h y b por bc_v .

Luego de la acción de las transformaciones en los interferómetros, el estado conjunto de los fotones 1 y 2 es dado por

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}_9\rangle = & ac_v\tilde{\beta}|v\rangle_1|1\rangle_1|\tilde{\phi}^{(1)}\rangle_2 + \frac{i}{\sqrt{2}}|h\rangle_1|a\rangle_1|\tilde{\phi}^{(2)}\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}|h\rangle_1|b\rangle_1|\tilde{\phi}^{(3)}\rangle_2 \\ & + ac_h\tilde{\beta}|v\rangle_1|\tilde{0}\rangle_1|\tilde{\phi}^{(4)}\rangle_2 + \frac{i}{\sqrt{2}}|h\rangle_1|c\rangle_1|\tilde{\phi}^{(5)}\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}|h\rangle_1|d\rangle_1|\tilde{\phi}^{(6)}\rangle_2, \end{aligned} \quad (3.76)$$

con

$$|\tilde{\phi}^{(1)}\rangle_2 = \alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2, \quad (3.77)$$

$$|\tilde{\phi}^{(2)}\rangle_2 = ac_v\tilde{\alpha}(\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2) \pm bc_h\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2), \quad (3.78)$$

$$|\tilde{\phi}^{(3)}\rangle_2 = ac_v\tilde{\alpha}(\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2) \mp bc_h\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2), \quad (3.79)$$

$$|\tilde{\phi}^{(4)}\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2), \quad (3.80)$$

$$|\tilde{\phi}^{(5)}\rangle_2 = ac_h\tilde{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2) \pm bc_v(\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2), \quad (3.81)$$

$$|\tilde{\phi}^{(6)}\rangle_2 = ac_h\tilde{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1\rangle_2 + |v\rangle_2|0\rangle_2) \mp bc_v(\alpha|h\rangle_2|0\rangle_2 + \beta|v\rangle_2|1\rangle_2). \quad (3.82)$$

Al igual que antes, dependiendo del camino en que es detectado es fotón 1, tendremos distintos estados en el fotón 2, y en principio, podemos realizar alguna operación para recuperar las dos copias del estado original.

Los estados $|\phi^{(1)}\rangle_2$ y $|\phi^{(4)}\rangle_2$ representan la falla en el proceso de clonaje, los cuales corresponden a la detección del fotón 1 en el camino $|1\rangle_1$ y $|\tilde{0}\rangle_1$ respectivamente. Considerando las definiciones de las ecuaciones (3.14), el estado $|\tilde{\phi}^{(2)}\rangle_2$ puede ser escrito como

$$|\tilde{\phi}^{(2)}\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[a(c_v a|h\rangle_2 \pm c_h b|v\rangle_2)|0\rangle_2 \pm b(c_h a|h\rangle_2 \pm c_v b|v\rangle_2)|1\rangle_2]. \quad (3.83)$$

De acuerdo a esta expresión, los coeficientes c_h y c_v , los cuales caracterizan el entrelazamiento parcial del recurso inicial, conducen a un error en los clones. Sin embargo, este error puede ser corregido.

Consideremos los siguientes pares de estados de polarización no ortogonales

$$|\alpha_{\pm}\rangle_2|0\rangle_2 = c_v|h\rangle_2|0\rangle_2 \pm c_h|v\rangle_2|0\rangle_2, \quad (3.84)$$

$$|\tilde{\alpha}_{\pm}\rangle_2|1\rangle_2 = c_h|h\rangle_2|1\rangle_2 \pm c_v|v\rangle_2|1\rangle_2. \quad (3.85)$$

Esto nos permite escribir el estado $|\tilde{\phi}^{(2)}\rangle_2$ en la forma

$$|\tilde{\phi}^{(2)}\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2a}} \{a[d_{\pm}|\alpha_{+}\rangle_2 + d_{\mp}|\alpha_{-}\rangle_2]|0\rangle_2 \pm b[d_{\pm}|\tilde{\alpha}_{+}\rangle_2 + d_{\mp}|\tilde{\alpha}_{-}\rangle_2]|1\rangle_2\}, \quad (3.86)$$

donde $d_{\pm} = (a \pm b)/2$. Si podemos implementar las siguientes transformaciones

$$|\alpha_{\pm}\rangle_2|0\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|0\rangle_2 \pm |v\rangle_2|0\rangle_2), \quad (3.87)$$

$$|\tilde{\alpha}_{\pm}\rangle_2|1\rangle_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1\rangle_2 \pm |v\rangle_2|1\rangle_2), \quad (3.88)$$

entonces es posible mapear el estado $|\tilde{\phi}^{(2)}\rangle_2$ en el estado correspondiente que porta posibles clones idénticos al estado de entrada. Dado que estas transformaciones mapéan estados no ortogonales en estados ortogonales, no pueden ser llevadas a cabo por transformaciones unitarias. Sin embargo, es posible llevarlas a cabo de forma probabilista. Esta clase de transformaciones ha sido estudiada en profundidad de discriminación de estados cuánticos [53, 54]. En particular, *unambiguous state discrimination* nos permite identificar estados linealmente independientes mapeándolas en estados ortogonales, los cuales pueden ser distinguidos con certeza. El costo de esta estrategia es que debemos introducir una salida no conclusiva, caracterizada por una cierta probabilidad de ocurrencia, la cual puede ser minimizada. En el caso de discriminar entre dos estados no ortogonales $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$, la probabilidad de discriminación p_d está dada por la expresión

$$p_d = 1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|, \quad (3.89)$$

donde hemos asumido que ambos estados son generados con la misma probabilidad a priori.

La discriminación no ambigua de dos estados no ortogonales puede ser llevada a cabo experimentalmente con la ayuda de dos interferómetros condicionales [46, 47, 49, 54],

CI_0 y CI_1 , ilustrados en la figura 3.8. Los puertos de salida y la entrada de estos interferómetros están definidos por beam splitter polarizadores. Cada interferómetro tiene en un brazo una placa de media onda la cual modifica el estado de polarización de los fotones, condicional al camino de propagación.

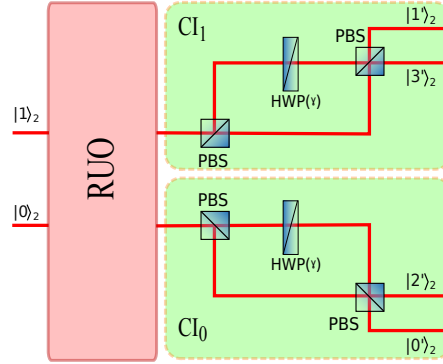


Figura 3.8: Interferómetros condicionales CI_0 y CI_1 para discriminación de estado y corrección de errores inducidos por el uso de canal parcialmente entrelazados.

El interferómetro condicional CI_0 recibe fotones en estado espacial $|0\rangle_2$. Este interferómetro es descrito por la transformación $U^{(0)}$ cuya acción esta dada por

$$U^{(0)}|h\rangle_2|0\rangle_2 = \cos(2\gamma)|h\rangle_2|0'\rangle_2 + \sin(2\gamma)|v\rangle_2|2'\rangle_2, \quad (3.90)$$

donde γ es el ángulo de inclinación de la placa de media onda dentro del interferómetro, y los estados $|0'\rangle$ y $|2'\rangle$ describen el estado espacial de los fotones al salir del interferómetro condicional. El valor de γ está dado por

$$\gamma = \frac{1}{2} \arccos \frac{c_h}{c_v}. \quad (3.91)$$

Este interferómetro implementa la transformación de la ecuación (3.87). Los estados no ortogonales están dados por $|\alpha_{\pm}\rangle_2|0\rangle_2$ de la ecuación (3.84) y son mapeados en los estados ortogonales $\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|0'\rangle_2 \pm |v\rangle_2|0'\rangle_2)$. La falla en el proceso de discriminación es indicado por la detección de un fotón en el camino $|2'\rangle_2$. La probabilidad de discriminar exitosamente entre los dos estados no ortogonales está dado por

$$p_{d,0} = 2c_h^2. \quad (3.92)$$

El segundo interferómetro condicional CI_1 actúa sobre el camino $|1\rangle_2$ e implementan la transformación de la Ec. (3.88). La acción de este interferómetro es análoga a la acción

de CI_0 y es descrita por la transformación $U^{(1)}$ dada por

$$U^{(1)}|v\rangle_2|1\rangle_2 = \cos(2\gamma)|v\rangle_2|1'\rangle_2 + \sin(2\gamma)|h\rangle_2|3'\rangle_2, \quad (3.93)$$

donde $|1'\rangle$ y $|3'\rangle$ describen el estado espacial de los fotones que emergen de los puertos de salida de CI_1 , como se muestra en la figura 3.8. Los estados no-ortogonales a ser discriminados por CI_1 son $|\tilde{\alpha}_{\pm}\rangle_2|1\rangle_2$ de la ecuación (3.85), los cuales son mapeados en los estados ortogonales $\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle_2|1'\rangle_2 \pm |v\rangle_2|1'\rangle_2)$. La falla del proceso de discriminación es indicada por la detección de un fotón en el camino $|3'\rangle_2$. La probabilidad $p_{d,1}$ de éxito en la discriminación está dada por

$$p_{d,1} = 2c_h^2. \quad (3.94)$$

La acción conjunta de los interferómetros condicionales CI_0 y CI_1 en el estado $|\tilde{\phi}^{(2)}\rangle_2$ es así dada por

$$U^{(0)}U^{(1)}|\tilde{\phi}^{(2)}\rangle_2 = \frac{c_h}{a\sqrt{2}}(a|h\rangle_2 \pm b|v\rangle_2)(a|0'\rangle_2 \pm b|1'\rangle_2) \pm \frac{\sqrt{c_v^2 - c_h^2}}{a\sqrt{2}}(a^2|v\rangle_2|2'\rangle_2 + b^2|h\rangle_2|3'\rangle_2). \quad (3.95)$$

El primer término al lado derecho de la ecuación describe el clonado perfecto probabilista donde los clones son codificados como una superposición de los estados de polarización $|h\rangle_2$ y $|v\rangle_2$ del fotón 2 y como una superposición de caminos $|0'\rangle_2$ y $|1'\rangle_2$ del mismo fotón. El segundo término del lado derecho de esta ecuación es un estado parcialmente entrelazado entre camino y polarización del fotón 2. Este estado describe la falla en el intento de corrección de errores introducidos por el uso del canal parcialmente entrelazado y es independiente del estado a ser clonado.

Por otro lado, la foto detección del fotón 1 en el camino b proyecta el fotón 2 en el estado $|\tilde{\phi}^{(3)}\rangle_2$. En este caso los errores introducidos por el canal parcialmente entrelazado también pueden ser corregidos usando las transformaciones $U^{(0)}$ y $U^{(1)}$, como en el caso de $|\tilde{\phi}^{(2)}\rangle_2$. Estas dos transformaciones son llevadas a cabo luego de aplicar la operación unitaria de reconstrucción. La secuencia completa se muestra en la figura 3.8

En el caso en que el fotón 1 sea detectado en el camino c , entonces el fotón 2 se proyecta en el estado $|\tilde{\phi}^{(5)}\rangle$. En este caso debemos aplicar primero la operación de reconstrucción que se mostró en la figura 3.4. Luego de aplicar esta transformación el

estado conjunto de polarización del fotón tiene la forma

$$|\tilde{\phi}'^{(2)}\rangle_2 = ac_h \tilde{\alpha} (\alpha |h\rangle_2 |0\rangle_2 + \beta |v\rangle_2 |1\rangle_2) \pm bc_v \frac{1}{\sqrt{2}} (|h\rangle_2 |1\rangle_2 + |v\rangle_2 |0\rangle_2), \quad (3.96)$$

el cual puede ser escrito en la forma

$$|\tilde{\phi}'^{(2)}\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}a} \{a [d_{\pm} |\tilde{\alpha}_{\pm}\rangle_2 + d_{\mp} |\tilde{\alpha}_{\mp}\rangle_2] |0\rangle_2 \pm b [d_{\pm} |\alpha_{\pm}\rangle_2 + d_{\mp} |\alpha_{\mp}\rangle_2] |1\rangle_2\}, \quad (3.97)$$

En este caso usaremos la transformación $\tilde{U}^{(0)}$ para discriminar entre los estados $|\tilde{\alpha}_{\pm}\rangle$, esta transformación está definida por

$$\tilde{U}^{(0)} |h\rangle_2 |0\rangle_2 = \cos(2\gamma') |h\rangle_2 |0'\rangle_2 + \sin(2\gamma') |v\rangle_2 |2'\rangle_2, \quad (3.98)$$

con

$$\gamma = \frac{1}{2} \arccos \frac{c_v}{c_h}, \quad (3.99)$$

la cual tiene una probabilidad de éxito $\tilde{p}_{d,0} = 2c_h^2$. Para discriminar entre los estados $|\alpha_{\pm}\rangle$ utilizamos la transformación $\tilde{U}^{(1)}$, dada por

$$\tilde{U}^{(1)} |v\rangle_2 |1\rangle_2 = \cos(2\gamma') |v\rangle_2 |1'\rangle_2 + \sin(2\gamma') |h\rangle_2 |3'\rangle_2. \quad (3.100)$$

La probabilidad de éxito está otra vez dada por $\tilde{p}_{d,1} = 2c_h^2$. La acción conjunta de estas dos transformaciones sobre el estado $|\tilde{\phi}^{(2)}\rangle_2$ es

$$\tilde{U}^{(0)} \tilde{U}^{(1)} |\tilde{\phi}'^{(2)}\rangle_2 = \frac{c_h}{a\sqrt{2}} (a|h\rangle_2 \pm b|v\rangle_2) (a|0'\rangle_2 \pm b|1'\rangle_2) \pm \frac{\sqrt{c_v^2 - c_h^2}}{a\sqrt{2}} (a^2|v\rangle_2 |2'\rangle_2 + b^2|h\rangle_2 |3'\rangle_2). \quad (3.101)$$

Este estado es idéntico al de la ecuación (3.95), por lo que las conclusiones son las mismas presentadas anteriormente y las transformaciones pueden ser aplicadas a través de los mismos interferómetros condicionales CI_0 y CI_1 (fig. 3.8), pero cambiando el ángulo de la placa de media onda.

En el caso en que el fotón 1 sea medido en el camino d y el fotón 2 sea proyectado en el estado $|\tilde{\phi}^{(6)}\rangle$, el mismo esquema aplica luego de aplicar la operación de reconstrucción correspondiente mostrada en la subsección 3.4.1.

Por lo tanto, en este esquema donde utilizamos canales parcialmente entrelazados, debemos medir el fotón 1, y dependiendo del camino en que fue detectado, a , b , c , o d , debemos seleccionar y aplicar una operación unitaria de reconstrucción en el fotón 2, y

luego corregir los errores producidos por la utilización del canal parcialmente entrelazado utilizando los interferómetros condicionales CI_0 y CI_1 . El setup de corrección de errores, figura 3.8, es el mismo para todos los posibles escenarios de detección, solo es necesario cambiar la inclinación del ángulo de la placa de media onda. Si el fotón 2 fue detectado en el camino a o b , entonces debemos fijar el ángulo de inclinación de la placa de media onda en γ , y si fue detectado en los caminos c o d , entonces el ángulo de inclinación de la placa debe ser γ' . La detección del fotón 1 en los caminos 1 y $\tilde{0}$ siguen representando el fracaso en el intento de clonado, mientras que los fotones 2 que salgan por los caminos $2'$ y $3'$ representan el fracaso en el proceso de corrección del error inducido por el uso de canales parcialmente entrelazados.

La probabilidad total p_{total}^{pe} de generar copias con fidelidad 1 a través de un canal parcialmente entrelazado es dado en este esquema por el producto de la probabilidad óptima de clonaje con la probabilidad óptima de discriminación no ambigua de los estados $|\alpha_{\pm}\rangle$ y $|\tilde{\alpha}_{\pm}\rangle$, es decir

$$p_{\text{total}}^{pe} = \frac{1 - |\langle\alpha_+|\alpha_-\rangle|}{1 + |\langle\psi_+|\psi_-\rangle|} = \frac{2c_h^2}{1 + \cos\theta}, \quad (3.102)$$

la cual es menor que la probabilidad de éxito utilizando canales máximamente entrelazados.

Si consideramos el esquema de clonado local de la subsección 3.4.5 pero ahora utilizando un canal parcialmente entrelazado podemos usar un esquema similar al aquí abordado. La diferencia, es que en este caso solo tendremos salidas en los camino a y b , por lo que solo necesitamos implementar las transformaciones $U^{(0)}$ y $U^{(1)}$ sobre el fotón 1. La probabilidad total de éxito será en este caso $\frac{1}{2}p_{\text{total}}^{pe}$, dado que la mitad de los fotones son filtrados.

3.6. Futuros Trabajos.

En este capítulo hemos estudiado principalmente la implementación experimental del clonado probabilista de Cloning con fotones gemelos pero hemos dejado de lado algunos estudios teóricos muy factibles de realizar. Por ejemplo, es posible estudiar la generalización del esquema de la transformación unitaria y medición para el clonado

probabilista con más copias. Podemos ver de la ecuación (3.18) que después de aplicar ciertas transformaciones el estado del sistema total puede ser escrito como

$$|\Psi_2\rangle = |\psi_{\pm}\rangle_1 |GHZ\rangle_{122}, \quad (3.103)$$

donde en este caso el estado $|GHZ\rangle_{122}$ esta dado por

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |h\rangle_2 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |v\rangle_2 |1\rangle_2). \quad (3.104)$$

Los estados $|GHZ\rangle$ están definidos para un sistema entrelazado de M subsistemas en la base abstracta como

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle^{\otimes M} + |1\rangle^{\otimes M}), \quad (3.105)$$

por lo cual un buen punto de partida sería estudiar que podemos hacer con este estado entrelazado general en vez del estado $|GHZ\rangle_{122}$ usado en nuestra propuesta.

Por otro lado, si lo que queremos estudiar es la generalización del esquema, pero esta vez manteniendo el número de copias, pero considerando que cada uno de nuestros sistemas es un qudit, entonces un buen punto de partida sería usar el estado

$$|GA\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} (|0\rangle^{\otimes 3} + |1\rangle^{\otimes 3} + \dots + |d-1\rangle^{\otimes 3}) \quad (3.106)$$

en vez del estado $|GHZ\rangle_{122}$. Podríamos también combinar ambas estrategias y ver estudiar el clonado probabilista de qudits.

Finalmente, creemos que es posible estudiar un esquema para generar copias alteradas y no simétricas de un estado original, es decir, estudiar un proceso del tipo

$$|\phi\rangle|0\rangle|0\rangle = \sqrt{p}|\tilde{\phi}\rangle|\tilde{\phi}\rangle|0\rangle + \sqrt{1-p}|\Phi\rangle|1\rangle, \quad (3.107)$$

donde $|\tilde{\phi}\rangle$ y $|\tilde{\phi}\rangle$ son en general distintos entre ellos y distintos de $|\phi\rangle$, por lo que podemos estudiar la relación entre las distintas fidelidades y la probabilidad de que el proceso deseado sea exitoso.

Telecloning de Estados Cuánticos vía Canales Parcialmente Entrelazados.

En este capítulo estudiaremos otra posibilidad de clonar estados cuánticos de forma no local, el así llamado *Telecloning*, propuesto inicialmente por Murao *et. al.* [2]. En este esquema es posible teleclonar de forma determinista estados cuánticos arbitrarios con fidelidad óptima e independiente del estado de entrada, es decir, es posible crear M copias no locales del estado inicial de forma determinista a través de un canal cuántico maximalmente entrelazado. Estas copias son idénticas entre sí. Sin embargo la fidelidad con respecto al estado inicial es diferente de 1, pero es la máxima permitida por la mecánica cuántica. Estudiamos el caso general de estados d -dimensionales donde cambiamos el canal por uno parcialmente entrelazado, lo cual convierte el proceso en un proceso probabilista. Buscaremos que esa probabilidad sea óptima.

Comenzamos primero revisando nuevamente el esquema de clonado cuántico óptimo de qubits para el caso $1 \rightarrow 2$ en el lenguaje del artículo original de telecloning que luego utilizaremos para el resto de este capítulo.

4.1. Clonado Cuántico Óptimo.

La linealidad de la mecánica cuántica prohíbe la existencia de procesos deterministas que produzcan copias exactas de estados cuánticos. Para la máquina de clonación universal (el cual funciona del mismo modo para todos los estados cuánticos) la máxima fidelidad que podemos obtener es $\gamma = 5/6$.

Para realizar este proceso necesitamos un solo papel en blanco (el qubit B), inicialmente preparado en el estado $|0\rangle_B$ y una ancilla de dos niveles (el sistema A) también preparado inicialmente en el estado $|0\rangle_A$. La transformación de clonaje está definida para un estado inicial $|\phi\rangle_X = a|0\rangle_X + b|1\rangle_X$ albergado en el sistema X como

$$U(|\phi\rangle_X \otimes |0\rangle_A |0\rangle_B) = a|\phi_0\rangle_{AXB} + b|\phi_1\rangle_{AXB}, \quad (4.1)$$

con

$$\begin{aligned} |\phi_0\rangle_{AXB} &= U|0\rangle_X |0\rangle_A |0\rangle_B \\ &= \sqrt{\frac{4}{6}}|0\rangle_A |00\rangle_{XB} + \sqrt{\frac{2}{6}}|1\rangle_A \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{XB} + |10\rangle_{XB}) \\ &= 2\frac{1}{\sqrt{6}}|000\rangle_{AXB} + \frac{1}{\sqrt{6}}|101\rangle_{AXB} + \frac{1}{\sqrt{6}}|110\rangle_{XB}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle_{AXB} &= U|1\rangle_X |0\rangle_A |0\rangle_B \\ &= \sqrt{\frac{4}{6}}|1\rangle_A |11\rangle_{XB} + \sqrt{\frac{2}{6}}|0\rangle_A \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{XB} + |10\rangle_{XB}) \\ &= 2\frac{1}{\sqrt{6}}|111\rangle_{AXB} + \frac{1}{\sqrt{6}}|001\rangle_{AXB} + \frac{1}{\sqrt{6}}|010\rangle_{AXB}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

De esta forma, los estados $|\phi_0\rangle$ y $|\phi_1\rangle$ son simétricos ante intercambio de los sistemas X y B , donde además satisfacen las simetrías

$$\sigma_z^{(A)} \otimes \sigma_z^{(X)} \otimes \sigma_z^{(B)} |\phi_0\rangle = |\phi_0\rangle, \quad (4.4)$$

$$\sigma_z^{(A)} \otimes \sigma_z^{(X)} \otimes \sigma_z^{(B)} |\phi_1\rangle = -|\phi_1\rangle, \quad (4.5)$$

$$\sigma_x^{(A)} \otimes \sigma_x^{(X)} \otimes \sigma_x^{(B)} |\phi_0\rangle = |\phi_1\rangle, \quad (4.6)$$

$$\sigma_x^{(A)} \otimes \sigma_x^{(X)} \otimes \sigma_x^{(B)} |\phi_1\rangle = |\phi_0\rangle, \quad (4.7)$$

de modo que

$$\begin{aligned} U(|\phi\rangle_X \otimes |0\rangle_A |0\rangle_B) &= |0\rangle_A \left[a\sqrt{\frac{4}{6}}|00\rangle_{XB} + b\sqrt{\frac{1}{6}}(|01\rangle_{XB} + |10\rangle_{XB}) \right] \\ &\quad + |1\rangle_A \left[a\sqrt{\frac{1}{6}}(|01\rangle_{XB} + |10\rangle_{XB}) + b\sqrt{\frac{4}{6}}|11\rangle_{XB} \right]. \end{aligned}$$

Si calculamos la matriz densidad de este estado y trazamos parcialmente primero el sistema ancilla y luego cualquiera de los sistemas X y B , el estado resultante será un qubit clon óptimo del original de entrada, es decir, con una fidelidad $5/6$ con respecto a este.

4.2. Telecloning de Qubits a través de un Canal Máximamente Entrelazado.

Supongamos que Alice tiene un estado de un qubit $|\phi\rangle_X$ que desea teleclonar a $M = 2$ asociados, Bob (B) y Claire (C). Asumimos que ellos comparten un estado entrelazado $|\psi_{TC}\rangle$ como recurso inicial que permita el telecloning. Una elección de $|\psi_{TC}\rangle$ con estas propiedades de estado de 4-qubits es

$$|\psi_{TC}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_P |\phi_0\rangle_{ABC} + |1\rangle_P |\phi_1\rangle_{ABC}), \quad (4.8)$$

con

$$\begin{aligned} |\phi_0\rangle_{ABC} &= \sum_{j=0}^1 \alpha_j |A_j\rangle_A \otimes |\{0, 2-j\}, \{1, j\}\rangle_{BC} \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{6}} |000\rangle_{ABC} + \frac{1}{\sqrt{6}} |101\rangle_{ABC} + \frac{1}{\sqrt{6}} |110\rangle_{ABC}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle_{ABC} &= \sum_{j=0}^1 \alpha_j |A_{1-j}\rangle_A \otimes |\{0, j\}, \{1, 2-j\}\rangle_{BC} \\ &= 2 \frac{1}{\sqrt{6}} |111\rangle_{ABC} + \frac{1}{\sqrt{6}} |001\rangle_{ABC} + \frac{1}{\sqrt{6}} |010\rangle_{ABC}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde P representa al qubit *port* o *puerto* y A al qubit ancilla. Los estados $|A_j\rangle_A$ son M estados normalizados ortogonales de la ancilla y $|\{0, M-j\}, \{1, j\}\rangle$ denota el estado simetrizado y normalizado de M qubits donde $M-j$ de ellos están en el estado $|0\rangle$ y j están en el estado ortogonal $|1\rangle$, por ejemplo, para $M = 3$ y $j = 1$,

$$|\{0, 2\}, \{1, 1\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle). \quad (4.11)$$

El estado $|\psi_{TC}\rangle$ es un estado maximalmente entrelazado del sistema P con el sistema ABC .

El producto tensorial de $|\psi_{TC}\rangle$ con el estado $|\phi\rangle_X = a|0\rangle_X + b|1\rangle_X$ a teleclonar es

un estado de cinco qubits, el cual puede ser descrito como

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_{XPABC} &= (a|0\rangle_X + b|1\rangle_X) \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_P |\phi_0\rangle_{ABC} + |1\rangle_P |\phi_1\rangle_{ABC}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a|0\rangle_X + b|1\rangle_X) \\
 &\quad \times \left[|0\rangle_P \left(2\frac{1}{\sqrt{6}}|000\rangle_{ABC} + \frac{1}{\sqrt{6}}|101\rangle_{ABC} + \frac{1}{\sqrt{6}}|110\rangle_{ABC} \right) \right. \\
 &\quad \left. + |1\rangle_P \left(2\frac{1}{\sqrt{6}}|111\rangle_{ABC} + \frac{1}{\sqrt{6}}|001\rangle_{ABC} + \frac{1}{\sqrt{6}}|010\rangle_{ABC} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Es posible escribir este estado en la forma que pone de manifiesto la base de Bell de XP :

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_{XPABC} &= |\Phi^+\rangle_{XP} \frac{1}{2} (a|\phi_0\rangle_{ABC} + b|\phi_1\rangle_{ABC}) \\
 &\quad + |\Phi^-\rangle_{XP} \frac{1}{2} (a|\phi_0\rangle_{ABC} - b|\phi_1\rangle_{ABC}) \\
 &\quad + |\Psi^+\rangle_{XP} \frac{1}{2} (b|\phi_0\rangle_{ABC} + a|\phi_1\rangle_{ABC}) \\
 &\quad + |\Psi^-\rangle_{XP} \frac{1}{2} (b|\phi_0\rangle_{ABC} - a|\phi_1\rangle_{ABC})
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si Alice mide $|\Phi^+\rangle$, obtenemos precisamente un estado con clones óptimos de $|\phi\rangle_X$ en el sistema B y C . En otro caso, solo debemos hacer uso de la simetría de los estados $|\phi_0\rangle_{ABC}$ y $|\phi_1\rangle_{ABC}$: si Alice mide $|\Phi^-\rangle_{XP}$, se debe aplicar σ_z sobre los qubits ABC . Si Alice detecta $|\Psi^+\rangle_{XP}$ o $|\Psi^-\rangle_{XP}$, entonces se debe aplicar σ_x o $\sigma_x\sigma_z = i\sigma_y$ respectivamente, en cada qubit A , B y C . El resultado de la medición se transmite a través de un canal clásico. Cabe destacar que no es estrictamente necesario aplicar la operación sobre la ancilla.

La fidelidad del estado puede ser comprobada trazando parcialmente primero el sistema ancilla y luego alguno de los sistemas A o B , es decir

$$\begin{aligned}
 \rho_B &= \text{Tr}_{AC} (|\psi\rangle_{ABC}\langle\psi|), \\
 \rho_C &= \text{Tr}_{AB} (|\psi\rangle_{ABC}\langle\psi|),
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

obteniendo

$$\begin{aligned}
 \rho_B = \rho_C &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5|a|^2 + |b|^2 & 2(ab^* + a^*b) \\ 2(ab^* + a^*b) & |a|^2 + 5|b|^2 \end{pmatrix} \\
 &= F|\phi\rangle_X\langle\phi| + (1-F)|\phi^\perp\rangle_X\langle\phi^\perp|,
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde $F = 5/6$ es la fidelidad óptima de clonado dada por

$$\begin{aligned}
 F^2 &= \langle \phi | \rho_{B,C} | \phi \rangle \\
 &= \begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5|a|^2 + |b|^2 & 2(ab^* + a^*b) \\ 2(ab^* + a^*b) & |a|^2 + 5|b|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
 &= \frac{5}{6},
 \end{aligned}$$

y donde $|\phi^\perp\rangle$ es un estado ortogonal a $|\phi\rangle$.

4.3. Telecloning de Qubits a través de un Canal Parcialmente Entrelazado.

Supongamos que ahora, en vez de el recurso entrelazado (4.8) tenemos como canal conocido al estado multipartícula parcialmente entrelazado entre qubit puerto y el sistema ABC

$$|\psi_{TC}\rangle = \cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle_P |\phi_0\rangle_{ABC} + \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_P |\phi_1\rangle_{ABC}. \quad (4.14)$$

El estado total del sistema es el producto tensorial entre el estado que deseamos teleclonar y el canal cuántico

$$|\psi\rangle_{XPABC} = (a|0\rangle_X + b|1\rangle_X) \otimes \left(\cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle_P |\phi_0\rangle_{ABC} + \sin \frac{\alpha}{2} |1\rangle_P |\phi_1\rangle_{ABC} \right), \quad (4.15)$$

el cual se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_{XPABC} &= |\tilde{\Phi}^+\rangle_{XP} \frac{1}{2} (a|\phi_0\rangle_{ABC} + b|\phi_1\rangle_{ABC}) \\
 &\quad + |\tilde{\Phi}^-\rangle_{XP} \frac{1}{2} (a|\phi_0\rangle_{ABC} - b|\phi_1\rangle_{ABC}) \\
 &\quad + |\tilde{\Psi}^+\rangle_{XP} \frac{1}{2} (b|\phi_0\rangle_{ABC} + a|\phi_1\rangle_{ABC}) \\
 &\quad + |\tilde{\Psi}^-\rangle_{XP} \frac{1}{2} (b|\phi_0\rangle_{ABC} - a|\phi_1\rangle_{ABC}),
 \end{aligned}$$

con

$$|\tilde{\Phi}^\pm\rangle_{XP} = \cos \frac{\alpha}{2} |00\rangle_{XP} \pm \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |11\rangle_{XP}, \quad (4.16)$$

$$|\tilde{\Psi}^\pm\rangle_{XP} = \cos \frac{\alpha}{2} |10\rangle_{XP} \pm \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |01\rangle_{XP}. \quad (4.17)$$

El problema ahora es que los estados $|\tilde{\Phi}^\pm\rangle_{XP}$ no son ortogonales entre sí, al igual que $|\tilde{\Psi}^\pm\rangle_{XP}$, y por lo tanto no son distinguibles, por lo cual no podemos comunicar con certeza a los receptores qué transformación aplicar para obtener copias con fidelidad óptima. Para solucionar este problema, aplicaremos un proceso probabilista que nos permita distinguir entre los posibles estados en el sistema XP . Por comodidad, escribimos el estado del sistema total como

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{XPABC} = & \left(\cos \frac{\alpha}{2} |00\rangle_{XP} + \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |11\rangle_{XP} \right) \frac{1}{2} |\nu^+\rangle_{ABC} \\ & + \left(\cos \frac{\alpha}{2} |00\rangle_{XP} - \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |11\rangle_{XP} \right) \frac{1}{2} |\nu^-\rangle_{ABC} \\ & + \left(\cos \frac{\alpha}{2} |10\rangle_{XP} + \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |01\rangle_{XP} \right) \frac{1}{2} |\tilde{\nu}^+\rangle_{ABC} \\ & + \left(\cos \frac{\alpha}{2} |10\rangle_{XP} - \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |01\rangle_{XP} \right) \frac{1}{2} |\tilde{\nu}^-\rangle_{ABC}, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} |\nu^+\rangle_{ABC} &= a|\phi_0\rangle_{ABC} + b|\phi_1\rangle_{ABC}, \\ |\nu^-\rangle_{ABC} &= a|\phi_0\rangle_{ABC} - b|\phi_1\rangle_{ABC}, \\ |\tilde{\nu}^+\rangle_{ABC} &= b|\phi_0\rangle_{ABC} + a|\phi_1\rangle_{ABC}, \\ |\tilde{\nu}^-\rangle_{ABC} &= b|\phi_0\rangle_{ABC} - a|\phi_1\rangle_{ABC}. \end{aligned}$$

A continuación describiremos en detalle los pasos a seguir para lograr las copias con fidelidad óptima de forma probabilista. Para comenzar con la discriminación de estados, aplicamos una compuerta $CNOT_{XP}$ sobre nuestro estado, obteniendo

$$\begin{aligned} CNOT_{XP}|\psi\rangle_{XPABC} = & \left(\cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle_X + \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_X \right) |0\rangle_P \frac{1}{2} |\nu^+\rangle_{ABC} \\ & + \left(\cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle_X - \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_X \right) |0\rangle_P \frac{1}{2} |\nu^-\rangle_{ABC} \\ & + \left(\cos \frac{\alpha}{2} |1\rangle_X + \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |0\rangle_X \right) |1\rangle_P \frac{1}{2} |\tilde{\nu}^+\rangle_{ABC} \\ & + \left(\cos \frac{\alpha}{2} |1\rangle_X - \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |0\rangle_X \right) |1\rangle_P \frac{1}{2} |\tilde{\nu}^-\rangle_{ABC}. \end{aligned}$$

Realizamos ahora una medición proyectiva en el qubit P . Si la medición proyecta en el

estado $|0\rangle_P$, el nuevo estado está dado por:

$$\begin{aligned} |\psi^0\rangle_{XPABC} &= \left(\cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle_X + \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_X \right) |0\rangle_P \frac{N_1}{2} |\nu^+\rangle_{ABC} \\ &\quad + \left(\cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle_X - \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_X \right) |0\rangle_P \frac{N_1}{2} |\nu^-\rangle_{ABC}, \end{aligned}$$

donde N es una constante de normalización

$$N_1 = \left[1 + \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) (a^2 - b^2) \right]^{-1/2}. \quad (4.18)$$

En caso de el que estado del qubit P se proyecte en el estado $|1\rangle_X$, el estado después de la medición será

$$\begin{aligned} |\psi^1\rangle_{XPABC} &= \left(\cos \frac{\alpha}{2} |1\rangle_X + \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |0\rangle_X \right) |1\rangle_P \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^+\rangle_{ABC} \\ &\quad + \left(\cos \frac{\alpha}{2} |1\rangle_X - \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |0\rangle_X \right) |1\rangle_P \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^-\rangle_{ABC}, \end{aligned}$$

con N_2 la normalización

$$N_2 = \left[1 - \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) (a^2 - b^2) \right]^{-1/2}. \quad (4.19)$$

Aplicaremos ahora alguna transformación U_d que nos permita distinguir de forma probabilista entre los estados $(\cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle_X + \sin \frac{\alpha}{2} |1\rangle_X)$ y $(\cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle_X - \sin \frac{\alpha}{2} |1\rangle_X)$ en el primer caso, y entre $(\cos \frac{\alpha}{2} |1\rangle_X + \sin \frac{\alpha}{2} |0\rangle_X)$ y $(\cos \frac{\alpha}{2} |1\rangle_X - \sin \frac{\alpha}{2} |0\rangle_X)$, en el segundo caso. Para esto, podemos utilizar el subsistema P como ancilla de la transformación de discriminación de estados para realizar una transformación del tipo

$$\begin{aligned} U_d |\psi^0\rangle_{XPABC} &= \sqrt{P} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X + |1\rangle_X) \frac{N_1}{2} |\nu^+\rangle_{ABC} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X - |1\rangle_X) \frac{N_1}{2} |\nu^-\rangle_{ABC} \right) |0\rangle_P \\ &\quad + \sqrt{1-P} |\tilde{\psi}\rangle_{XABC} |1\rangle_P, \end{aligned}$$

con P dado por la probabilidad de Discriminación sin Ambigüedad [53]

$$P = 1 - |\cos \frac{\alpha}{2}|^2 + |\sin \frac{\alpha}{2}|^2 = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (4.20)$$

Por lo tanto, debemos medir el qubit P y aplicar una transformación condicional al resultado. Si obtenemos $|0\rangle_P$, entonces podremos distinguir los estados de X en la base

de Bell en la medición de este subsistema, y, por lo tanto, el proceso de telecloning óptimo se llevará a cabo con éxito. La probabilidad de éxito del proceso está dada por P . En el caso contrario, mediremos $|1\rangle_P$ en el subsistema P y sabremos entonces que el proceso ha fracasado. El proceso fracasa con probabilidad $1 - P$.

Del mismo modo, en el caso de que en la primera medición en el subsistema P proyectamos en $|1\rangle_P$, es posible encontrar una transformación tal que:

$$\begin{aligned} U'_d |\psi^1\rangle_{XPABC} = & \sqrt{P} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X + |1\rangle_X) \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^+\rangle_{ABC} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X - |1\rangle_X) \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^-\rangle_{ABC} \right) |0\rangle_P \\ & + \sqrt{1-P} |\tilde{\psi}'\rangle_{XABC} |1\rangle_P. \end{aligned}$$

A continuación se muestran posibles transformaciones para la discriminación de estados para los dos posibles resultados, luego de hacer la primera medición en el subsistema P .

Caso 1. El sistema P es proyectado en $|\psi^0\rangle$

Si tras la medición del subsistema P el estado se proyecta en $|0\rangle_P$, entonces el estado del sistema completo esta dado por

$$\begin{aligned} |\psi^0\rangle_{XPABC} = & \left(\cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle_X + \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_X \right) |0\rangle_P \frac{N_1}{2} |\nu^+\rangle_{ABC} \\ & + \left(\cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle_X - \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_X \right) |0\rangle_P \frac{N_1}{2} |\nu^-\rangle_{ABC}, \end{aligned}$$

Aplicamos ahora una compuerta $CNOT_{XP}$, obteniendo así

$$\begin{aligned} CNOT_{XP} |\psi^0\rangle_{XPABC} = & \left(\cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle_X |0\rangle_P + \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_X |1\rangle_P \right) \frac{N_1}{2} |\nu^+\rangle_{ABC} \\ & + \left(\cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle_X |0\rangle_P - \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_X |1\rangle_P \right) \frac{N_1}{2} |\nu^-\rangle_{ABC}. \end{aligned}$$

Luego aplicamos ahora una rotación condicionada del qubit X en el eje y , es decir, aplicamos la rotación solo si el qubit P esta en el estado $|0\rangle$ la cual denotamos por $CROT_X$, tal que

$$CROT_X(\gamma) |0\rangle_X |0\rangle_P = (\cos(2\gamma) |0\rangle_X + \sin(2\gamma) |1\rangle_X) |0\rangle_P, \quad (4.21)$$

y, de este modo,

$$\begin{aligned}
CROT_X CNOT_{XP} |\psi^0\rangle_{XPABC} = & \left[\cos \frac{\alpha}{2} (\cos(2\gamma)|0\rangle_X + \sin(2\gamma)|1\rangle_X) |0\rangle_P \right. \\
& + \left. \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_X |1\rangle_P \right] \frac{N_1}{2} |\nu^+\rangle_{ABC} \\
& + \left[\cos \frac{\alpha}{2} (\cos(2\gamma)|0\rangle_X + \sin(2\gamma)|1\rangle_X) |0\rangle_P \right. \\
& - \left. \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_X |1\rangle_P \right] \frac{N_1}{2} |\nu^-\rangle_{ABC}.
\end{aligned}$$

Si hacemos la elección de γ tal que

$$\cos(2\gamma) = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\pi}{4}}, \quad (4.22)$$

podemos definir

$$P = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (4.23)$$

por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned}
CROT_X CNOT_{XP} |\psi^0\rangle_{XPABC} = & \left[\sqrt{P} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X |0\rangle_P + e^{i\phi} |1\rangle_X |1\rangle_P) \right. \\
& + \left. \sqrt{1-P} |1\rangle_X |0\rangle_P \right] \frac{N_1}{2} |\nu^+\rangle_{ABC} \\
& + \left[\sqrt{P} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X |0\rangle_P - e^{i\phi} |1\rangle_X |1\rangle_P) \right. \\
& + \left. \sqrt{1-P} |1\rangle_X |0\rangle_P \right] \frac{N_1}{2} |\nu^-\rangle_{ABC}
\end{aligned}$$

Aplicamos ahora un desplazamiento de fase $F_X = e^{-i\phi} |1\rangle_X \langle 1| + |0\rangle_X \langle 0|$, obteniendo

$$\begin{aligned}
F_X CROT_X CNOT_{XP} |\psi^0\rangle_{XPABC} = & \left[\sqrt{P} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X |0\rangle_P + |1\rangle_X |1\rangle_P) \right. \\
& + \left. \sqrt{1-P} |1\rangle_X |0\rangle_P \right] \frac{N_1}{2} |\nu^+\rangle_{ABC} \\
& + \left[\sqrt{P} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X |0\rangle_P - |1\rangle_X |1\rangle_P) \right. \\
& + \left. \sqrt{1-P} |1\rangle_X |0\rangle_P \right] \frac{N_1}{2} |\nu^-\rangle_{ABC}.
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos una compuerta $CNOT_{XP}$

$$\begin{aligned}
CNOT_{XP} F_X CROT_X CNOT_{XP} |\psi^0\rangle_{XPABC} = & \left[\sqrt{P} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X + |1\rangle_X) |0\rangle_P \right. \\
& + \left. \sqrt{1-P} |1\rangle_X |1\rangle_P \right] \frac{N_1}{2} |\nu^+\rangle_{ABC} \\
& + \left[\sqrt{P} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X - |1\rangle_X) |0\rangle_P \right. \\
& + \left. \sqrt{1-P} |1\rangle_X |1\rangle_P \right] \frac{N_1}{2} |\nu^-\rangle_{ABC}.
\end{aligned}$$

Esto puede ser escrito como

$$\begin{aligned} CNOT_{XP}F_XCROT_XCNOT_{XP}|\psi^0\rangle_{XPABC} = & \sqrt{P} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X + |1\rangle_X) \frac{N_1}{2} |\nu^+\rangle_{ABC} \right. \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X - |1\rangle_X) \frac{N_1}{2} |\nu^-\rangle_{ABC} \left. \right] |0\rangle_P \\ & + \sqrt{1-P} [|1\rangle_X N_1 a |\phi_0\rangle_{ABC}] |1\rangle_P. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una probabilidad P de que el proceso de discriminación de estados sea exitoso, y probabilidad $1 - P$ de que falle. Ambos procesos son distinguibles a través de la medición de qubit P . Ahora el emisor puede hacer una medición en el qubit X y comunicar el resultado para que Bob y Claire realicen la transformación adecuada a sus partículas y así obtener copias teleclonadas de fidelidad óptima. La transformación de discriminación de estados en este caso es

$$U_d = CNOT_{XP}F_XROT_XCNOT_{XP}. \quad (4.24)$$

Caso 2. El sistema P es proyectado en $|\psi^1\rangle$

Si tras la medición del subsistema P el estado se proyecta en $|1\rangle_P$, entonces el estado del sistema completo está dado por

$$\begin{aligned} |\psi^1\rangle_{XPABC} = & + \left(\cos \frac{\alpha}{2} |1\rangle_X + \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |0\rangle_X \right) |1\rangle_P \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^+\rangle_{ABC} \\ & + \left(\cos \frac{\alpha}{2} |1\rangle_X - \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |0\rangle_X \right) |1\rangle_P \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^-\rangle_{ABC}. \end{aligned}$$

Primero aplicamos una compuerta $CNOT_{XP}$

$$\begin{aligned} CNOT_{XP}|\psi^1\rangle_{XPABC} = & \left(\cos \frac{\alpha}{2} |1\rangle_X |0\rangle_P + \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |0\rangle_X |1\rangle_P \right) \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^+\rangle_{ABC} \\ & + \left(\cos \frac{\alpha}{2} |1\rangle_X |0\rangle_P - \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |0\rangle_X |1\rangle_P \right) \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^-\rangle_{ABC}, \end{aligned}$$

y luego una compuerta NOT_X

$$\begin{aligned} NOT_X CNOT_{XP}|\psi^1\rangle_{XPABC} = & \left(\cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle_X |0\rangle_P + \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_X |1\rangle_P \right) \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^+\rangle_{ABC} \\ & + \left(\cos \frac{\alpha}{2} |0\rangle_X |0\rangle_P - \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_X |1\rangle_P \right) \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^-\rangle_{ABC}. \end{aligned}$$

Ahora aplicamos una rotación controlada, es decir, una rotación solo en el caso en que el qubit P esté en el estado $|0\rangle$, al igual que el caso anterior

$$\begin{aligned} CROT_X NOT_X CNOT_{XP} |\psi^1\rangle &= \left[\cos \frac{\alpha}{2} (\cos(2\gamma)|0\rangle_X + \sin(2\gamma)|1\rangle_X) |0\rangle_P \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_X |1\rangle_P \right] \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^+\rangle_{ABC} \\ &\quad + \left[\cos \frac{\alpha}{2} (\cos(2\gamma)|0\rangle_X + \sin(2\gamma)|1\rangle_X) |0\rangle_P \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\phi} |1\rangle_X |1\rangle_P \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^-\rangle_{ABC} \right]. \end{aligned}$$

Si elegimos γ tal que

$$\cos(2\gamma) = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\pi}{4}}, \quad (4.25)$$

haciendo uso de la definición anterior obtenemos

$$P = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (4.26)$$

De este, modo podemos escribir

$$\begin{aligned} CROT_X NOT_X CNOT_{XP} |\psi^1\rangle_{XPABC} &= \left[\sqrt{P} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X |0\rangle_P + e^{i\phi} |1\rangle_X |1\rangle_P) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1-P} |1\rangle_X |0\rangle_P \right] \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^+\rangle_{ABC} \\ &\quad + \left[\sqrt{P} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X |0\rangle_P - e^{i\phi} |1\rangle_X |1\rangle_P) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1-P} |1\rangle_X |0\rangle_P \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^-\rangle_{ABC} \right]. \end{aligned}$$

Aplicamos ahora un desplazamiento es fase $F_x = e^{-i\phi} |1\rangle_X \langle 1| + |0\rangle_X \langle 0|$, obteniendo

$$\begin{aligned} CROT_X F_X NOT_X CNOT_{XP} |\psi^1\rangle_{XPABC} &= \left[\sqrt{P} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X |0\rangle_P + |1\rangle_X |1\rangle_P) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1-P} |1\rangle_X |0\rangle_P \right] \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^+\rangle_{ABC} \\ &\quad + \left[\sqrt{P} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_X |0\rangle_P - |1\rangle_X |1\rangle_P) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1-P} |1\rangle_X |0\rangle_P \frac{N_2}{2} |\tilde{\nu}^-\rangle_{ABC} \right]. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos un $CNOT_{XP}$, de modo que el estado está ahora descrito por

$$\begin{aligned} CNOT_{XP}F_XCROT_XNOT_XCNOT_{XP}|\psi^1\rangle &= \left[\sqrt{P}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_X + |1\rangle_X)|0\rangle_P \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1-P}|1\rangle_X|1\rangle_P \right] \frac{N_2}{2}|\tilde{\nu}^+\rangle_{ABC} \\ &\quad + \left[\sqrt{P}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_X - |1\rangle_X)|0\rangle_P \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1-P}|1\rangle_X|1\rangle_P \right] \frac{N_2}{2}|\tilde{\nu}^-\rangle_{ABC}, \end{aligned}$$

el cual se puede escribir como

$$\begin{aligned} CNOT_{XP}F_XCROT_XNOT_XCNOT_{XP}|\psi^1\rangle_{XPABC} &= \sqrt{P} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_X + |1\rangle_X) \frac{N_2}{2}|\tilde{\nu}^+\rangle_{ABC} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_X - |1\rangle_X) \frac{N_2}{2}|\tilde{\nu}^-\rangle_{ABC} \right] |0\rangle_P \\ &\quad + \sqrt{1-P} [|1\rangle_X N_2 b |\phi_0\rangle_{ABC}] |1\rangle_P. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso la transformación de discriminación de estados escogida es

$$U'_d = CNOT_{XP}F_XCROT_XNOT_XCNOT_{XP}|\psi^1\rangle_{XPABC}. \quad (4.27)$$

4.4. Telecloning de $1 \rightarrow M$ Qudits a través de un Canal Máximamente entrelazado.

En el esquema de telecloning, el estado final corresponde a un estado multipartícula entrelazado que contiene los M clones de un estado inicial de un qudit. A continuación estudiaremos en detalle este proceso, primero para el caso de un canal máximamente entrelazado entre el qubit puerto y luego el sistema compuesto por todos los demás subsistemas. En este esquema, la base del estado de entrada y la base del estado puerto son tomadas en la base computacional de la partícula $\{|j\rangle\}$, con $j = 0, 1, \dots, d-1$. La base de salida (del estado que contiene los clones) es representado en la base $\{|\phi_j\rangle\}$, con $j = 0, 1, \dots, d-1$, que consiste de $N_0 = 2M-1$ partículas de d niveles, donde $M-1$ son ancillas y M son las partículas que albergarán las copias.

El estado de salida es representado en la base de estados $\{|\xi_k^M\rangle\}$, normalizados y simetrizados

$$|\phi_j\rangle_{AC} = \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{d[M]}} \sum_{k=0}^{d[M]} P\langle j|\xi_k^M\rangle_{PA} \otimes |\xi_k^M\rangle_C, \quad (4.28)$$

con

$$d[M] = \binom{d+M-1}{M} = \frac{(d+M-1)!}{M!(d-1)!}. \quad (4.29)$$

El subíndice P representa el qudit puerto, A representa a las $M-1$ ancillas y C los M qudits que albergarán las copias.

La estructura del estado simetrizado (que porta la estructura del canal y la base de las copias) es la característica clave del telecloning óptimo. En la base computacional, el estado $|\xi_k^M\rangle$ puede ser representado como

$$|\xi_k^M\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}(\xi_k^M)}} |\mathcal{P}(a_0, a_1, \dots, a_{M-1})\rangle, \quad (4.30)$$

donde \mathcal{P} denota un operador que crea la suma de todos los posibles estados representados por permutaciones de los elementos $\{a_0, \dots, a_{M-1}\}$ con $a_n \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ y $a_{n+1} \geq a_n$ y $\mathcal{N}(\xi_k^M)$ es la normalización de $|\xi_k^M\rangle$. El índice k para los estados simetrizados es definido por la siguiente receta:

- Asignamos a cada cadena $\{a_0, \dots, a_{M-1}\}$ un número h

$$h(\{a_0, \dots, a_{M-1}\}) = \sum_{n=0}^{M-1} a_n d^{M-1-n}. \quad (4.31)$$

- Luego ordenamos estos números en forma creciente. El índice k ($0 \leq k \leq d[M]-1$) está asociado con la cadena $\{a_0, \dots, a_{M-1}\}$ a través de

$$k = f_M(\{a_0, \dots, a_{M-1}\}) \quad (4.32)$$

es decir, a la cadena que tiene el menor h le corresponde el $k = 0$, a la segunda con menor h le corresponde el $k = 1$, y así a la cadena con mayor h le corresponde $k = d[M] - 1$.

Teniendo todo esto, podemos entender como funciona el esquema de telecloning de qudits óptimo simétrico universal de $1 \rightarrow M$. Supongamos que tenemos un qudit en el estado inicial

$$|\psi\rangle_X = \sum_j \alpha_j |j\rangle_X, \quad (4.33)$$

los sistemas que albergarán las copias:

$$\mathcal{U}_{nm}^A = \sum_{j=0}^{d-1} \exp(-2\pi i j n / d) |j\rangle \otimes \langle j \oplus m| \quad (4.38)$$

$$\mathcal{U}_{nm}^C = \sum_{j=0}^{d-1} \exp(2\pi i j n / d) |j\rangle \otimes \langle j \oplus m|, \quad (4.39)$$

obteniendo así el estado

$$|\phi\rangle_{AC} = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k |\phi_k\rangle_{AC}. \quad (4.40)$$

Este estado contiene copias de máxima fidelidad en los estados que albergan las copias.

Esta fidelidad está dada por

$$\gamma = \frac{2M+1}{3M}. \quad (4.41)$$

4.5. Telecloning de $1 \rightarrow M$ Qudits a través de un Canal Parcialmente Entrelazado.

Supongamos que ahora, en vez del canal maximalmente entrelazado de la ecuación (4.34) disponemos de un canal parcialmente entrelazado, es decir,

$$|\tilde{\xi}\rangle_{PAC} = \sum_{j=0}^{d-1} c_j |j\rangle_P \otimes |\phi_j\rangle_{AC}, \quad (4.42)$$

donde se satisface la condición de normalización $\sum_j^{d-1} |c_j|^2 = 1$. Ahora, el estado del sistema total estará dado por

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{total} &= |\psi\rangle_X \otimes |\tilde{\xi}\rangle_{PAC} \\ &= \left(\sum_k^{d-1} \alpha_k |k\rangle_X \right) \otimes \left(\sum_{j=0}^{d-1} c_j |j\rangle_P \otimes |\phi_j\rangle_{AC} \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

El estado anterior se puede escribir como

$$|\psi\rangle_X \otimes |\tilde{\xi}\rangle_{PAC} = \frac{1}{d} \sum_{n,m} |\tilde{\Phi}_{nm}\rangle_{XP} \sum_j^{d-1} \exp\left(-2\pi i (j+m) \frac{n}{d}\right) \alpha_j |\phi_{j \oplus m}\rangle_{AC}, \quad (4.44)$$

donde $|\tilde{\Phi}_{nm}\rangle_{XP}$ es un estado simétrico definido por

$$|\tilde{\Phi}_{nm}\rangle_{XP} = \sum_{k=0}^{d-1} c_k \exp(2\pi i k n / d) |k \ominus m\rangle_X |k\rangle_P. \quad (4.45)$$

El problema ahora es que los estados $|\tilde{\Phi}_{nm}\rangle_{XP}$ no son mutuamente ortogonales y, por lo tanto, no son distinguibles a través de mediciones de Von Neumann, por lo cual no sabemos con precisión qué transformación debemos aplicar en el sistema AC para obtener copias de fidelidad óptima en los subsistemas C . Para solucionar este problema, recurriremos a discriminación de estados, un procedimiento que nos permitirá distinguir probabilísticamente entre los estados $|\tilde{\Phi}_{nm}\rangle_{XP}$.

Antes de aplicar la discriminación de estados, aplicamos la compuerta lógica $GXOR_{PX}$. Esta compuerta actúa sobre la base lógica de la siguiente forma:

$$GXOR_{PX}|n\rangle_P|m\rangle_X = |n\rangle_P|n \ominus m\rangle_X. \quad (4.46)$$

Al aplicar esta operación al estado del sistema total, obtenemos

$$\begin{aligned} GXOR_{PX}|\xi\rangle_{PAC}|\psi\rangle_X &= \frac{1}{d} \sum_{n,m} \sum_k c_k e^{2\pi i k n/d} GXOR_{PX}|k\rangle_P|k \ominus m\rangle_X \\ &\quad \otimes \sum_j e^{-2\pi i (j+m)n/d} \alpha_j |\phi_{j+m}\rangle_{AC} \\ &= \frac{1}{d} \sum_{n,m} \sum_k c_k e^{2\pi i k n/d} |k\rangle_P|m\rangle_X \\ &\quad \otimes \sum_j e^{-2\pi i (j+m)n/d} \alpha_j |\phi_{j+m}\rangle_{AC}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Luego, realizamos una medición proyectiva en el sistema X , por lo que el estado, después de la medición queda proyectado en el estado $|m\rangle_X$, con m conocido. Ahora, el estado total del sistema luego de la medición queda dado por:

$$\begin{aligned} |\psi_m\rangle_{XPAC} &= \frac{1}{\sqrt{P_m}} \frac{1}{d} \sum_n \left[\sum_{k=0}^{d-1} c_k \exp(2\pi i k n/d) |k\rangle_P|m\rangle_X \right. \\ &\quad \left. \otimes \sum_j \exp(-2\pi i (j+m)n/d) \alpha_j |\phi_{j+m}\rangle_{AC} \right], \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde p_m es la probabilidad de obtener un resultado m en particular

$$\begin{aligned}
 P_m &= \sum_{k=0}^{d-1} |c_{k+m}|^2 |\alpha_k|^2 \\
 \sum_{m=0}^{d-1} P_m &= \sum_{m=0}^{d-1} \sum_{k=0}^{d-1} |c_{k+m}|^2 |\alpha_k|^2 \\
 &= \sum_{k=0}^{d-1} |\alpha_k|^2 \sum_{m=0}^{d-1} |c_{k+m}|^2 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Definimos ahora el operador Z , tal que

$$Z^n = \sum_{j=0}^{d-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{d} nj\right) |j\rangle\langle j|, \quad (4.49)$$

$$Z|k\rangle = \exp(2\pi i k/d) |k\rangle, \quad (4.50)$$

y los estados simétricos a partir de la acción sucesiva de este operador sobre un estado semilla, $|\Psi_0\rangle_X$

$$|\Psi_0\rangle_X = \sum_{k=0}^{d-1} c_k |k\rangle_X \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
 |\Psi_n\rangle_X &= Z^n |\Psi_0\rangle_X \\
 &= \sum_{k=0}^{d-1} c_k \exp\left(\frac{2\pi i}{d} nk\right) |k\rangle_X.
 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Definamos también el operador X , tal que

$$X = \sum_{n=0}^{d-1} |n+1\rangle\langle n| \quad (4.53)$$

Podemos escribir ahora

$$|\psi_m\rangle_{XPAC} = \frac{1}{\sqrt{P_m}} \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{d-1} |\Psi_n\rangle_P |m\rangle_X \otimes \sum_{j=0}^{d-1} \exp\left(-2\pi i(j+m)\frac{n}{d}\right) \alpha_j |\phi_{j\oplus m}\rangle_{AC} \quad (4.54)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{P_m}} \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{d-1} |\Psi_n\rangle_P |m\rangle_X \otimes Z_A^n X_A^m Z_C^m X_C^{-n} \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j |\phi_j\rangle_{AC} \quad (4.55)$$

Además, si definimos la operación U_{nm}^{local} sobre los sistemas AC , como el producto de operaciones locales en cada ancilla y en cada clon, tenemos

$$U_{nm}^{(\text{local})} = \underbrace{\mathcal{U}_{nm}^A \otimes \dots \otimes \mathcal{U}_{nm}^A}_{M-1 \text{ ancillas}} \otimes \underbrace{\mathcal{U}_{nm}^C \otimes \dots \otimes \mathcal{U}_{nm}^C}_M \quad (4.56)$$

con

$$\mathcal{U}_{nm}^A = \sum_{j=0}^{d-1} \exp(-2\pi i(j+m)n/d) |j\rangle \otimes \langle j \oplus m| = X^{-m} Z^{-n}, \quad (4.57)$$

$$\mathcal{U}_{nm}^C = \sum_{j=0}^{d-1} \exp(2\pi i(j+m)n/d) |j\rangle \otimes \langle j \oplus m| = X^{-m} Z^n. \quad (4.58)$$

Estas transformaciones corresponden a las operaciones unitarias locales que debemos aplicar en cada sistema para recuperar el estado de máxima fidelidad. Esto nos permite escribir

$$|\psi_m\rangle_{PXAC} = \frac{1}{\sqrt{P_m}} \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{d-1} |\Psi_n\rangle_P |m\rangle_X \otimes U_{nm}^{-1(\text{local})} \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j |\phi_j\rangle_{AC}. \quad (4.59)$$

Ahora, procederemos a aplicar el proceso de discriminación entre los estados $\{|\Psi_n\rangle\}$. Estos estados pueden ser linealmente independientes si los coeficientes c_k son todos diferentes de cero, o linealmente dependientes si, al menos, uno de los coeficientes es igual a cero. En el primer caso, utilizamos *Unambiguous State Discrimination*: un proceso de discriminación de estados que nos permite, luego de una medición, distinguir sin ambigüedad entre los estados simétricos, pero con una probabilidad limitada de éxito. Por otro lado, si los estados son linealmente dependientes, utilizaremos el procedimiento de *Maximum Confidence*. Este procedimiento nos permite asegurar, solo con cierta certeza (la máxima permitida por la mecánica cuántica), si el resultado de una medición tipo POVM mapea a uno de los estados simétricos y, además, agrega un resultado inconclusivo.

4.6. Discriminación de Estados Simétricos Linealmente Independientes vía USD.

Estudiemos primero el caso en que los estados $\{|\Psi_n\rangle\}$ son linealmente independientes. Necesitamos discriminar entre los estados del conjunto $\{|\Psi_n\rangle\}$, con $n = 0, \dots, d-1$. En principio, estos estados pueden presentarse todos con la misma probabilidad a priori $\eta_n = \frac{1}{d}$. El proceso de discriminación de estados que utilizaremos es bien descrito en el lenguaje de los POMV. La estrategia está basada en la existencia de operadores A_k ,

con $k = 0, \dots, d-1$, y el operador A_I satisfaciendo

$$A_I^\dagger A_I + \sum_{k=0}^{d-1} A_k^\dagger A_k = \mathbf{1}, \quad (4.60)$$

y

$$p_{j,k} = \text{tr} \left(|\Psi_k\rangle \langle \Psi_k| A_j^\dagger A_j \right) = p_k \delta_{kj} \quad \forall k, j = 0, \dots, d-1, \quad (4.61)$$

es la probabilidad de discriminar sin ambigüedad el estado $|\Psi_k\rangle$. La probabilidad total de discriminación inclusiva está dada por

$$p_I = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{d-1} \text{tr} \left(|\Psi_k\rangle \langle \Psi_k| A_j^\dagger A_j \right) \quad (4.62)$$

y los operadores A_k con $k = 0, \dots, d-1$ son construidos de forma tal que la probabilidad total de discriminación sin ambigüedad $\frac{1}{d} \sum p_k$ sea máxima. Ha sido demostrado que este límite puede ser alcanzado si los estados $|\Psi_k\rangle$ son linealmente independientes [53], lo que asumiremos como primera aproximación en nuestro caso.

Siguiendo el trabajo de Chefles *et. al.* [54], haremos evolucionar condicionalmente el sistema PX , y utilizaremos el sistema X como ancilla de esta evolución condicionada. La acción de la evolución condicional del sistema PX es descrita por

$$U^{UD} |\Psi_n\rangle_P |m\rangle_X = \sqrt{p_n} |u_n\rangle_P |m\rangle_X + \sqrt{1-p_n} |\chi_n\rangle_P |m \oplus 1\rangle_X, \quad (4.63)$$

donde los estados $\{|u_l\rangle_X\}$ son estados ortogonales y donde los estados $\{|\chi_n\rangle_X\}$ son estados linealmente dependientes. El estado $|m \oplus 1\rangle_P$ es ortogonal al estado $|d \ominus m\rangle_P$, por lo que nos permite distinguir el caso en que el proceso de discriminación falló. En este proceso, la probabilidad óptima de discriminación entre los d estados simétricos no ortogonales es

$$p_{opt} = d |c_{min}|^2, \quad (4.64)$$

donde c_{min} es el coeficiente con menor módulo de $|\Psi_0\rangle$.

Para construir la evolución unitaria condicional, hacemos uso de la técnica propuesta por He y Bergou, la cual nos permite encontrar una transformación que proyecta los estados como muestra la ecuación (4.63). Primero obtenemos la forma diagonal de los operadores $A_I^\dagger A_I$. Esto puede ser hecho cuando existe un operador unitario U_0 actuando

en el espacio de Hilbert tal que

$$U_0 A_I^\dagger A_I U_0^\dagger = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i|, \quad (4.65)$$

con $|\lambda_i\rangle$ eigenvectores del operador $A_I^\dagger A_I$ con eigenvalores λ_i . Dado que el operador $A_I^\dagger A_I$ es un operador definido positivo, sus eigenvalores están definidos entre cero y uno, por lo tanto podemos definir los operadores Hermíticos

$$A_I^\dagger = A_I = U_0^\dagger \sum_{i=0}^{d-1} \sqrt{\lambda_i} |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i| U_0, \quad (4.66)$$

los cuales satisfacen la ecuación (4.65). Si definimos

$$A_S^\dagger A_S = \sum_{k=0}^{d-1} A_k^\dagger A_k = \mathbf{1} - A_I^\dagger A_I \quad (4.67)$$

entonces podemos escoger

$$A_S^\dagger = A_S = U_0^\dagger \sum_{k=0}^{d-1} \sqrt{1 - \lambda_k} |\lambda_k\rangle \langle \lambda_k| U_0. \quad (4.68)$$

De este modo, podemos escribir la transformación unitaria de discriminación de estados en el espacio XP de la forma

$$U = \begin{pmatrix} A_S & -A_I \\ A_I & A_S \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

U no es único; existen otra tres formas similares. Hemos asumido que el sistema ancilla para la discriminación de estados tiene dos niveles. En nuestro caso, el sistema ancilla es el sistema P , que en principio tiene d niveles, solo son necesarios los niveles $|d \ominus m\rangle_P$ y $|d \ominus m \oplus 1\rangle_P$, y que inicialmente está preparado en el estado $|d \ominus m\rangle_P$. Después de la evolución condicional del sistema XP , la medición de la ancilla (el sistema P) determinará si el proceso de discriminación fue exitoso. Si el sistema P se proyecta en el estado $|d \ominus m\rangle_P$, entonces actuó el operador $A_k^\dagger A_k$ y el proceso fue exitoso. Si el sistema P se proyecta en el estado $|d \ominus m \oplus 1\rangle_P$, entonces actuó el operador $A_I^\dagger A_I$ y el proceso falló. Una forma explícita del operador A_k fue encontrada por Chefles

$$A_k = \frac{\sqrt{p_k}}{\langle \Psi_k^\perp | \Psi_k \rangle} |u_k\rangle \langle \Psi_k^\perp|, \quad (4.70)$$

donde $|\Psi_k^\perp\rangle$ es el estado recíproco de $|\Psi\rangle$, definido por

$$|\Psi_k^\perp\rangle = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{r=0}^{d-1} \frac{1}{c_r^*} \exp(2\pi i/dkr) |r\rangle, \quad (4.71)$$

con

$$q = \sum_{j=0}^{d-1} |c_j|^{-2}. \quad (4.72)$$

Los estados $|\Psi_k^\perp\rangle$ son linealmente independientes y simétricos respecto al operador Z .

El operador A_k con la forma explícita (4.70) es consistente con

$$A_k |\Psi_k\rangle = \sqrt{p_k} |u_k\rangle. \quad (4.73)$$

Además, todos los estados tienen la misma probabilidad de ser discriminados, ya que al ser simétricos poseen las mismas características, por lo que $p_k = p_d$. Por lo tanto, en el sistema compuesto XP obtenemos

$$U^{UD} |\Psi_n\rangle_P |m\rangle_X = \sqrt{p_d} |u_n\rangle_P |m\rangle_X + \sqrt{1-p_d} |\chi_n\rangle_P |m \oplus 1\rangle_X. \quad (4.74)$$

Los estados $|u_k\rangle$ resultan ser la transformada de Fourier de los vectores de la base lógica, la cual está definida como

$$|u_n\rangle = \mathcal{F}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} \exp(2\pi i kn/d) |k\rangle. \quad (4.75)$$

Por lo tanto, para discriminar en la base lógica debemos aplicar la transformada de Fourier inversa a los estados $|u_n\rangle$

$$|n\rangle = \mathcal{F}^{-1}|u_n\rangle. \quad (4.76)$$

En resumen, para discriminar entre estados simétricos no ortogonales, primero aplicamos el operador al estado (4.54),

$$\begin{aligned} U_{PX}^{UD} |\psi_m\rangle_{PXAC} &= U_{PX}^{UD} \frac{1}{\sqrt{P_m}} \frac{1}{d} \sum_{n=0}^{d-1} |\Psi_n\rangle_P |m\rangle_X \otimes U_{nm}^{-1(\text{local})} \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j |\phi_j\rangle_{AC} \\ &= \frac{1}{\sqrt{P_m}} \frac{1}{d} \sqrt{p_d} \left(\sum_{n=0}^{d-1} |u_n\rangle_P \otimes U_{nm}^{-1(\text{local})} \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j |\phi_j\rangle_{AC} \right) |m\rangle_X \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{P_m}} \frac{1}{d} \sqrt{1-p_d} \left(\sum_{n=0}^{d-1} |\chi_n\rangle_P \otimes U_{nm}^{-1(\text{local})} \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j |\phi_j\rangle_{AC} \right) |m \oplus 1\rangle_X, \end{aligned}$$

donde

$$|\chi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}_n}} \sum_{a=0}^{d-1} \left[\sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{d} b(n-a)\right) \sqrt{c_b^2 - c_{min}^2} \right] |a\rangle, \quad (4.77)$$

y

$$\mathcal{M}_m = \left\| \sum_{n=0}^{d-1} |\chi_n\rangle_P \otimes \sum_{j=0}^{d-1} \exp(-2\pi i(j+m)n/d) \alpha_j |\phi_{j\oplus m}\rangle_{AC} \right\|^2. \quad (4.78)$$

Si aplicamos la transformada de Fourier inversa obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_X^{-1} U_{PX}^{UD} |\psi_m\rangle_{XPAC} &= \frac{1}{\sqrt{P_m}} \frac{1}{d} \sqrt{p_d} \left(\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} |n\rangle_P U_{nm}^{-1(\text{local})} \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j |\phi_j\rangle_{AC} \right) |m\rangle_X \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{P_m}} \frac{1}{d} \sqrt{1-p_d} \left(\sum_{n=0}^{d-1} \mathcal{F}_P^{-1} |\chi_n\rangle_P \otimes U \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j |\phi_j\rangle_{AC} \right) |m \oplus 1\rangle_X. \end{aligned}$$

Debemos volver a medir en el sistema X . Si el resultado es el estado $|m\rangle_X$, con probabilidad $\sqrt{p_d}$, entonces medimos en la base lógica de P obteniendo el resultado n . Conociendo ahora m y n , debemos aplicar las transformaciones

$$U_{n,m}^A = \sum_{j=0}^{d-1} \exp(-2\pi i(j+m)n/d) |j\rangle \otimes \langle j \oplus m|, \quad (4.79)$$

$$U_{nm}^C = \sum_{j=0}^{d-1} \exp(2\pi i(j+m)n/d) |j\rangle \otimes \langle j \oplus m| \quad (4.80)$$

en los sistemas A y C , y así tenemos copias óptimas en los sistemas albergues representados por C . Si el resultado de la medición en P es un estado diferente a $|d \ominus m\rangle_P$ (lo cual ocurre con probabilidad $1 - p_d$), entonces sabemos que el proceso fracasó. La probabilidad de éxito está dada por

$$p_d = d |c_{min}|^2. \quad (4.81)$$

Por lo tanto, a través de este esquema es posible tener clones con fidelidad óptima.

4.6.1. Fidelidad en Caso de Falla en la Discriminación.

Tenemos que luego de aplicar la transformación de discriminación y la transformada de Fourier inversa, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_X^{-1} U_{PX}^{UD} |\psi_m\rangle_{PXAC} &= \frac{1}{\sqrt{P_m}} \frac{1}{d} \sqrt{p_d} \left(\sum_{n=0}^{d-1} |n\rangle_P U_{nm}^{-1(\text{local})} \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j |\phi_j\rangle_{AC} \right) |m\rangle_X \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{P_m}} \frac{1}{d} \sqrt{1-p_d} \left(\sum_{n=0}^{d-1} \mathcal{F}_P^{-1} |\chi_n\rangle_P U_{nm}^{-1(\text{local})} \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j |\phi_j\rangle_{AC} \right) |m \oplus 1\rangle_X.
\end{aligned}$$

La transformada de Fourier inversa definida por su acción sobre la base canónica es

$$\mathcal{F}^{-1} |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} \exp(-2\pi i k n / d) |k\rangle. \quad (4.82)$$

Los estados $|\chi_n\rangle$ están definidos como

$$|\chi_l\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}_l}} \sum_{a=0}^{d-1} \left[\sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{d} b(l-a)\right) \sqrt{c_b^2 - c_{min}^2} \right] |a\rangle, \quad (4.83)$$

donde \mathcal{M}_l es la normalización del estado $|\chi_l\rangle$, definida por

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_l &= \frac{1}{d} \sum_a \left[\sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{d} b(l-a)\right) \sqrt{c_b^2 - c_{min}^2} \right] \\
&\quad \times \left[\sum_{b'=0}^{d-1} \exp\left(\frac{-2\pi i}{d} b'(l-a)\right) \left(\sqrt{c_{b'}^2 - c_{min}^2} \right)^* \right] \\
&= 1 - d c_{min}^2 \\
&= 1 - p_d,
\end{aligned} \quad (4.84)$$

donde se ha considerado $c_l \in \mathbb{R}$. Entonces, supongamos que medimos el sistema X y obtuvimos el resultado $m \oplus 1$ (por lo que el proceso de discriminación falló), y queremos calcular la fidelidad de los estados de los sistemas C en este caso (en que fallamos), con el estado de entrada

$$|\psi\rangle_X = \sum_j \alpha_j |j\rangle_X, \quad (4.85)$$

dada por

$$F(|\psi\rangle, \sigma_{C_1}) = \langle \psi | \sigma_{C_1} | \psi \rangle, \quad (4.86)$$

con

$$\sigma_{C_1} = \text{Tr}_{C_2} \text{Tr}_A \text{Tr}_P |\eta\rangle_{PAC_1C_2} \langle \eta|. \quad (4.87)$$

El sistema es proyectado en el estado

$$|\eta_m\rangle_{PAC} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_m}} \left[\frac{1}{\sqrt{P_m}} \frac{1}{d} \sqrt{1-p_d} \right] \sum_{n=0}^{d-1} \mathcal{F}_X^{-1} |\chi_n\rangle_P \sum_{j=0}^{d-1} \exp\left(-2\pi i(j+m)\frac{n}{d}\right) \alpha_j |\phi_{j\oplus m}\rangle_{AC}, \quad (4.88)$$

donde \mathcal{N}_m normaliza el estado en el caso de falla, es decir

$$\mathcal{N}_m = \left\| \left[\frac{1}{\sqrt{P_m}} \frac{1}{d} \sqrt{1-p_d} \right] \sum_{n=0}^{d-1} \mathcal{F}_X^{-1} |\chi_n\rangle_P \sum_{j=0}^{d-1} \exp\left(-2\pi i(j+m)\frac{n}{d}\right) \alpha_j |\phi_{j\oplus m}\rangle_{AC} \right\|^2. \quad (4.89)$$

Primero que todo, aplicamos la transformada de Fourier inversa en el sistema X

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_X^{-1} |\chi_n\rangle_P &= \mathcal{F}_X^{-1} \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{1}{\sqrt{1-p_d}} \sum_{a=0}^{d-1} \left[\sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{d} b(n-a)\right) \sqrt{c_b^2 - c_{min}^2} \right] |a\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-p_d}} \sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{d} bn\right) \sqrt{c_b^2 - c_{min}^2} |d \ominus b\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, estado del sistema PAC puede ser descrito por

$$|\eta_m\rangle_{PAC} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_m}} \frac{1}{\sqrt{P_m}} \sum_{j=0}^{d-1} \sqrt{c_{j+m}^2 - c_{min}^2} \alpha_j |d-j-m\rangle_X |\phi_j\rangle_{AC}. \quad (4.90)$$

De la última ecuación podemos ver que \mathcal{N}_m está dado por

$$\mathcal{N}_m = \left[\frac{1}{P_m} \right] \sum_{j=0}^{d-1} (c_{j+m}^2 - c_{min}^2) |\alpha_j|^2, \quad (4.91)$$

por lo que podemos definir

$$\mathcal{C}_m = \sum_{j=0}^{d-1} (c_{j+m}^2 - c_{min}^2) |\alpha_j|^2, \quad (4.92)$$

y, por lo tanto, $\mathcal{N}_m = \frac{\mathcal{C}_m}{P_m}$. \mathcal{C}_m corresponde a la probabilidad de haber obtenido el resultado m en la medición proyectiva en el sistema X y luego fallar en la discriminación.

Además, se satisface

$$\sum_{m=0}^{d-1} \mathcal{C}_m = 1 - p_d. \quad (4.93)$$

De este modo, es posible escribir el estado de la ecuación (4.90) como

$$|\eta_m\rangle_{PAC} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{C}_m}} \sum_{j=0}^{d-1} \sqrt{c_{j+m}^2 - c_{min}^2} \alpha_j |d-j-m\rangle_P |\phi_j\rangle_{AC}. \quad (4.94)$$

La matriz densidad del sistema PAC está descrita por

$$\begin{aligned} |\eta_m\rangle\langle\eta_m| &= \frac{1}{\mathcal{C}_m} \sum_{j,j'=0}^{d-1} \sqrt{c_{j+m}^2 - c_{min}^2} \sqrt{c_{j'+m}^2 - c_{min}^2}^* \alpha_j \alpha_{j'}^* \\ &\quad \times |d-j-m\rangle_P \langle d-j'-m| \otimes |\phi_{j+m}\rangle_{AC} \langle \phi_{j'+m}|. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Para obtener la matriz densidad del sistema AC trazo el sistema P obteniendo así

$$\begin{aligned} Tr_P |\eta_m\rangle\langle\eta_m| &= \sum_l {}_P\langle l|\eta\rangle\langle\eta|l\rangle_P \\ &= \frac{1}{\mathcal{C}_m} \sum_{j=0}^{d-1} (c_{j+m}^2 - c_{min}^2) |\alpha_j|^2 |\phi_{j+m}\rangle_{AC} \langle \phi_{j+m}|. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Dado que los estados $|\phi_j\rangle$ tienen en general una forma compleja, estudiaremos algunos casos particulares donde es fácil reducir el sistema ancilla para estudiar la fidelidad total del proceso.

Caso $d = 2$ y $M = 2$.

En este caso consideramos el caso de $1 \rightarrow 2$ qubits. El estado del AC puede ser descrito por la base del subespacio ortogonal formado por los estados

$$|\phi_0\rangle_{ABC} = 2\frac{1}{\sqrt{6}}|000\rangle_{AC_1C_2} + \frac{1}{\sqrt{6}}|101\rangle_{AC_1C_2} + \frac{1}{\sqrt{6}}|110\rangle_{AC_1C_2} \quad (4.97)$$

$$|\phi_1\rangle_{ABC} = 2\frac{1}{\sqrt{6}}|111\rangle_{AC_1C_2} + \frac{1}{\sqrt{6}}|001\rangle_{AC_1C_2} + \frac{1}{\sqrt{6}}|010\rangle_{AC_1C_2}. \quad (4.98)$$

Por lo tanto, la matriz densidad del sistema AC_1C_2 , luego de aplicar la transformación de reconstrucción necesaria (conocemos m), está dada por

$$|\eta_m\rangle_{AC_1C_2}\langle\eta_m| = \frac{1}{\mathcal{C}_0} \sum_{j=0}^1 (c_j^2 - c_{min}^2) |\alpha_{j-m}|^2 |\phi_j\rangle_{AC_1C_2} \langle \phi_j|. \quad (4.99)$$

Procedemos ahora a trazar el sistema A para estudiar las copias. Consideremos un primer caso en que $m = 0$.

$$\begin{aligned} Tr_A |\eta_0\rangle_{AC_1C_2}\langle\eta_0| &= \sum_{l=0}^{d-1} {}_A\langle l|\eta_0\rangle_{AC_1C_2}\langle\eta_0|l\rangle_A \\ &= \frac{1}{\mathcal{C}_m} \left[(c_0^2 - c_{min}^2) |\alpha_0|^2 {}_A\langle 0|\phi_0\rangle_{AC_1C_2}\langle\phi_0|0\rangle_A \right. \\ &\quad + (c_0^2 - c_{min}^2) |\alpha_0|^2 {}_A\langle 1|\phi_0\rangle_{AC_1C_2}\langle\phi_0|1\rangle_A \\ &\quad + (c_1^2 - c_{min}^2) |\alpha_1|^2 {}_A\langle 0|\phi_1\rangle_{AC_1C_2}\langle\phi_1|0\rangle_A \\ &\quad \left. + (c_1^2 - c_{min}^2) |\alpha_1|^2 {}_A\langle 1|\phi_1\rangle_{AC_1C_2}\langle\phi_1|1\rangle_A \right]. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Supongamos que $c_0 > c_1$, por lo tanto, $c_{min} = c_1$. En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned} Tr_A |\eta\rangle_{AC_1C_2} \langle \eta| &= \frac{1}{\mathcal{C}} \left[(c_0^2 - c_{min}^2) |\alpha_0|^2 {}_A \langle 0 | \phi_0 \rangle_{AC_1C_2} \langle \phi_0 | 0 \rangle_A \right. \\ &\quad \left. + (c_0^2 - c_{min}^2) |\alpha_0|^2 {}_A \langle 1 | \phi_0 \rangle_{AC_1C_2} \langle \phi_0 | 1 \rangle_A \right]. \end{aligned} \quad (4.101)$$

De este modo, reemplazando el valor de los productos interiores, obtenemos

$$\begin{aligned} \sigma_{C_1C_2} = Tr_A |\eta\rangle_{AC_1C_2} \langle \eta| &= \frac{1}{\mathcal{C}_m} (c_0^2 - c_{min}^2) |\alpha_0|^2 \left[\frac{4}{6} |0\rangle_{C_1} \langle 0| \otimes |0\rangle_{C_2} \langle 0| \right. \\ &\quad + \frac{1}{6} (|0\rangle_{C_1} \langle 0| \otimes |1\rangle_{C_2} \langle 1| + |1\rangle_{C_1} \langle 0| \otimes |0\rangle_{C_2} \langle 1| \\ &\quad \left. + |0\rangle_{C_1} \langle 1| \otimes |1\rangle_{C_2} \langle 0| + |1\rangle_{C_1} \langle 1| \otimes |0\rangle_{C_2} \langle 0|) \right]. \end{aligned}$$

Este estado es simétrico con respecto al intercambio del sistema C_1 y C_2 , por lo que podemos trazar cualquiera de los clones. Por ejemplo, si trazamos el sistema C_1 , el estado del sistema C_2 está dado por

$$\begin{aligned} \sigma_{C_2}^{(0)} &= Tr_{C_1} \sigma_{C_1C_2} \\ &= \frac{1}{\mathcal{C}_0} (c_0^2 - c_{min}^2) |\alpha_0|^2 \left[\frac{5}{6} |0\rangle_{C_2} \langle 0| + \frac{1}{6} |1\rangle_{C_2} \langle 1| \right]. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Finalmente, calculamos la fidelidad del estado con respecto al estado original de entrada

$$\begin{aligned} F^2 &= \langle \psi | \sigma_{C_1}^{(m)} | \psi \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{C}_m} (c_0^2 - c_{min}^2) |\alpha_0|^2 \left\{ \frac{5}{6} |\alpha_0|^2 + \frac{1}{6} |\alpha_1|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Además, valor de \mathcal{C}_0 está dado por la ecuación (4.92)

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= (c_0^2 - c_{min}^2) |\alpha_0|^2 + (c_1^2 - c_{min}^2) |\alpha_1|^2 \\ &= (c_0^2 - c_{min}^2) |\alpha_0|^2. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Por lo tanto, la fidelidad en este caso es

$$F^2 = \left\{ \frac{5}{6} |\alpha_0|^2 + \frac{1}{6} |\alpha_1|^2 \right\}. \quad (4.105)$$

A través del mismo procedimiento es posible mostrar que el mismo resultado se obtiene si $m = 1$.

Caso $M = 2$ y d arbitrario.

Revisemos ahora el caso un poco más general en el que generamos dos copias de un qudit. En este caso, el canal de telecloning puede ser escrito como

$$\begin{aligned} |\psi_{TC}\rangle_{PAC_1C_2} &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{d[2]}} \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{k=0}^{d-1} (|lk\rangle + |kl\rangle)^2 \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{d[2]}} \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{k=0}^{d-1} (|lklk\rangle + |lkk l\rangle + |klkl\rangle + |klkk\rangle). \end{aligned} \quad (4.106)$$

Luego, podemos calcular los estados de la base luego del teleclonado, $|\phi_j\rangle_{AC_1C_2}$, con $j = 0, \dots, d-1$,

$$\begin{aligned} |\phi_j\rangle &= \sqrt{d_P} \langle j | \psi_{TC} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d}{d[2]}} \left(\sum_{k=0}^{d-1} |kjk\rangle + |kkj\rangle \right). \end{aligned} \quad (4.107)$$

Por lo tanto, la matriz densidad del sistema AC_1C_2 se puede escribir como

$$\begin{aligned} \sigma_{AC_1C_2}^{(m)} &= \frac{1}{\mathcal{C}_m} \sum_{j=0}^{d-1} (c_{j+m}^2 - c_{min}^2) |\alpha_j|^2 |\phi_{j+m}\rangle_{AC_1C_2} \langle \phi_{j+m}| \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\mathcal{C}_m} \frac{d}{d[2]} \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{k,k'=0}^{d-1} (c_j^2 - c_{min}^2) |\alpha_{j-m}|^2 \\ &\quad \times (|kjk\rangle_{AC_1C_2} + |kkj\rangle_{AC_1C_2}) ({}_{AC_1C_2}\langle k'jk'| + {}_{AC_1C_2}\langle k'k'j|). \end{aligned} \quad (4.108)$$

Para conocer el estado de los sistemas copias, trazamos el sistema A :

$$\begin{aligned} \sigma_{C_1C_2}^{(m)} &= \text{Tr}_A \sigma_{AC_1C_2}^{(m)} \\ &= \frac{1}{4} \frac{d}{d[2]} \frac{1}{\mathcal{C}_m} \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{k=0}^{d-1} (c_j^2 - c_{min}^2) |\alpha_{j-m}|^2 \\ &\quad \times [(|jk\rangle_{C_1C_2} + |kj\rangle_{C_1C_2}) ({}_{C_1C_2}\langle jk| + {}_{C_1C_2}\langle kj|)]. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Este estado es simétrico con respecto al intercambio del sistema C_1 y C_2 , por lo que podemos trazar cualquiera de los clones. Por ejemplo, si trazamos el sistema C_1 , el

estado del sistema C_2 esta dado por

$$\begin{aligned}\sigma_{C_2}^{(m)} &= Tr_{C_1} \sigma_{C_1 C_2}^{(m)} \\ &= \frac{1}{4} \frac{d}{d[2]} \frac{1}{C_m} \left[\sum_{j=0}^{d-1} (c_j^2 - c_{min}^2) |\alpha_{j-m}|^2 \mathbb{I} \right. \\ &\quad \left. + (2+d) \sum_{j=0}^{d-1} (c_j^2 - c_{min}^2) |\alpha_{j-m}|^2 |j\rangle_{C_2} \langle j| \right],\end{aligned}\quad (4.110)$$

que tiene traza uno, por lo que efectivamente describe un estado. Finalmente, calculo la fidelidad de esta copia en relación al estado original de entrada

$$F_m^2 = \langle \psi | \sigma_{C_2}^{(m)} | \psi \rangle, \quad (4.111)$$

la cual está dada por

$$F_m^2 = \frac{1}{4} \frac{d}{d[2]} + \frac{1}{4} \frac{d}{d[2]} \frac{1}{C_m} \sum_{j=0}^{d-1} |\alpha_{j+m}|^2 |\alpha_j|^2 \{ (2+d) (c_{j+m}^2 - c_{min}^2) \} \quad (4.112)$$

Además, ya que estamos considerando $m = 2$, tenemos que

$$\frac{1}{4} \frac{d}{d[2]} = \frac{1}{2(d+1)} \quad (4.113)$$

Así

$$F_m^2 = \frac{1}{2(d+1)} + \frac{1}{2(d+1)} \frac{1}{C_m} \sum_{j=0}^{d-1} |\alpha_{j+m}|^2 |\alpha_j|^2 \{ (2+d) (c_{j+m}^2 - c_{min}^2) \}. \quad (4.114)$$

Esta fidelidad depende de que valor m medimos en el sistema X y del estado de entrada. Podemos calcular la fidelidad promedio en casa de falla, esto lo hacemos integrando sobre todo los posibles estados de entrada y pesando la fidelidad por su probabilidad

de ocurrencia, es decir:

$$\begin{aligned}
F^{2(\text{fail})} &= \int d\alpha \sum_m \mathcal{C}_m F_m^2 \\
&= \sum_m \int d\alpha \mathcal{C}_m \left\{ \frac{1}{2(d+1)} + \frac{1}{2(d+1)} \frac{1}{\mathcal{C}_m} \sum_{j=0}^{d-1} |\alpha_{j+m}|^2 |\alpha_j|^2 (2+d) (c_{j+m}^2 - c_{\min}^2) \right\} \\
&= \sum_m \int d\alpha \left\{ \frac{\mathcal{C}_m}{2(d+1)} + \frac{1}{2(d+1)} \sum_{j=0}^{d-1} |\alpha_{j+m}|^2 |\alpha_j|^2 (2+d) (c_{j+m}^2 - c_{\min}^2) \right\} \\
&= \frac{1}{2(d+1)} \sum_m \mathcal{C}_m \int d\alpha + \frac{(2+d)}{2(d+1)} \sum_m \sum_{j=0}^{d-1} (c_{j+m}^2 - c_{\min}^2) \int d\alpha |\alpha_{j+m}|^2 |\alpha_j|^2 \\
&= \frac{1-p_d}{2(d+1)} \int d\alpha + \frac{(2+d)}{2(d+1)} \sum_m \sum_{j=0}^{d-1} (c_{j+m}^2 - c_{\min}^2) \int d\alpha |\alpha_{j+m}|^2 |\alpha_j|^2. \quad (4.115)
\end{aligned}$$

Usamos ahora la identidad

$$\int d\psi |\psi_j|^2 |\psi_k|^2 = \frac{\delta_{j,k} + 1}{d(d+1)}, \quad (4.116)$$

por lo que tenemos que

$$\begin{aligned}
F^{2(\text{fail})} &= \frac{1-p_d}{2(d+1)} \int d\alpha + \frac{(2+d)}{2(d+1)} \sum_m \sum_{j=0}^{d-1} (c_{j+m}^2 - c_{\min}^2) \left(\frac{\delta_{j+m,j} + 1}{d(d+1)} \right) \\
&= (1-p_d) \left(\frac{1}{2(d+1)} \left(\int d\alpha + 1 + \frac{1}{d} \right) + \frac{1}{2d(d+1)^2} (1+d) \right), \quad (4.117)
\end{aligned}$$

pero dado que $\int d\alpha$ representa una integral sobre todos los estados puros en un espacio de Hilbert d dimensional, tenemos que $\int d\alpha = 1$. Por lo tanto

$$F_m^{2(\text{fail})} = (1-p_d) \frac{1}{d}. \quad (4.118)$$

Recordemos que las máquinas de clonning tipo $N \rightarrow M$ para estados cuánticos d -dimensionales tienen una fidelidad óptima estudiada por Werner [26] (en el trabajo de Werner $d[N]/d[M]$ es el *shrinking factor* o *Black ship factor* de la matriz densidad)

$$F_{OPT} = \frac{M - N + N(M+d)}{M(N+d)}. \quad (4.119)$$

En el caso $1 \rightarrow 2$, tenemos que

$$F_{OPT}^{(1 \rightarrow 2)} = \frac{3+d}{2+2d}, \quad (4.120)$$

por lo que podemos calcular la fidelidad promedio de todo el proceso, considerando los casos de éxito y falla en la discriminación como

$$F^{(\text{total})} = p_d \left(\frac{3+d}{2+2d} \right) + (1-p_d) \frac{1}{d}. \quad (4.121)$$

El límite clásico para este proceso está dado por $\sim 2/(d+1)$. Veamos para que casos de p_d podemos lograr una fidelidad promedio mejor que el límite clásico. Para esto se debe cumplir que

$$p_d \left(\frac{3+d}{2+2d} \right) + (1-p_d) \frac{1}{d} \geq \frac{2}{d+1}, \quad (4.122)$$

y se debe satisfacer además que $p_d \leq 1$. De este modo tenemos que $d \leq 3$ para que haya posibilidades de que el proceso, en promedio, sea mejor que el proceso clásico. Si $d = 2$, tenemos que $c_{\min} > 1/2$.

Sin transformada de Fourier.

En el esquema anterior aplicamos la transformada de Fourier en el proceso de reconstrucción de los clones. Sin embargo, es posible llegar a una fidelidad similar sin aplicar la transformada. Esto es fácil de ver, ya que luego de aplicar la transformación de discriminación, obtenemos el estado

$$\begin{aligned} U_{XP} |\psi_m\rangle_{XPAC} &= \sqrt{p_d} \left(\sum_{n=0}^{d-1} |u_n\rangle_P \sum_{j=0}^{d-1} \exp(2\pi i j n / d) \alpha_j |\phi_{j \oplus m}\rangle_{AC} \right) |m\rangle_X \\ &+ \sqrt{1-p_d} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_m}} \sum_{n=0}^{d-1} |\chi_n\rangle_P \sum_{j=0}^{d-1} \exp\left(-2\pi i (j+m) \frac{n}{d}\right) \alpha_j |\phi_{j \oplus m}\rangle_{AC} \right) |m \oplus 1\rangle_X, \end{aligned}$$

donde \mathcal{N}_m normaliza el estado en el caso de falla, es decir,

$$\mathcal{N}_m = \left\| \sum_{n=0}^{d-1} |\chi_n\rangle_X \otimes \sum_{j=0}^{d-1} \exp(2\pi i j n / d) \alpha_j |\phi_{j \oplus m}\rangle_{AC} \right\|^2. \quad (4.123)$$

Los estados $|\chi_n\rangle$ están definidos como

$$|\chi_l\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_l}} \sum_{a=0}^{d-1} \left[\sum_{b=0}^{d-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{d} b(l-a)\right) \sqrt{c_b^2 - c_{\min}^2} \right] |a\rangle, \quad (4.124)$$

donde se ha considerado $c_l \in \mathbb{R}$. Definamos ahora los estados $|\eta_m\rangle_{PAC}$

$$|\eta_m\rangle_{PAC} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_m}} \sum_{n=0}^{d-1} |\chi_n\rangle_P \otimes \sum_{j=0}^{d-1} \exp(-2\pi i(j+m)n/d) \alpha_j |\phi_{j\oplus m}\rangle_{AC}. \quad (4.125)$$

O equivalentemente

$$|\eta_m\rangle_{PAC} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_m}} \frac{d}{\sqrt{d}} \frac{1}{\sqrt{1-p_d}} \sum_{a=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{d}(j+m)a\right) \sqrt{c_{j+m}^2 - c_{min}^2} \alpha_j |a\rangle_P |\phi_{j\oplus m}\rangle_{AC}.$$

De la última ecuación podemos ver que \mathcal{N}_m está dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_m &= \frac{d}{1-p_d} \sum_{a=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} (c_{j+m}^2 - c_{min}^2) |\alpha_j|^2 \\ &= \frac{d^2}{1-p_d} \sum_{j=0}^{d-1} (c_{j+m}^2 - c_{min}^2) |\alpha_j|^2, \end{aligned} \quad (4.126)$$

por lo que podemos definir nuevamente

$$\mathcal{C}_m = \sum_{j=0}^{d-1} (c_{j+m}^2 - c_{min}^2) |\alpha_j|^2, \quad (4.127)$$

y así escribir

$$|\eta_m\rangle_{PAC} = \frac{1}{d\sqrt{\mathcal{C}_m}} \sum_{a=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{d}(j+m)a\right) \sqrt{c_{j+m}^2 - c_{min}^2} \alpha_j |a\rangle_P |\phi_{j\oplus m}\rangle_{AC}. \quad (4.128)$$

De este modo, la matriz densidad del sistema PAC está dada por

$$\begin{aligned} |\eta_m\rangle\langle\eta_m| &= \frac{1}{d^2\mathcal{C}_m} \sum_{a,a'=0}^{d-1} \sum_{j,j'=0}^{d-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{d}(j+m)a\right) \exp\left(-\frac{2\pi i}{d}(j'+m)a'\right) \\ &\quad \times \sqrt{c_{j+m}^2 - c_{min}^2} \sqrt{c_{j'+m}^2 - c_{min}^2}^* \alpha_j \alpha_{j'}^* |a\rangle_P \langle a'| \otimes |\phi_{j\oplus m}\rangle_{AC} \langle \phi_{j'\oplus m}|. \end{aligned}$$

Ahora, trazamos el sistema P para encontrar la matriz densidad del sistema AC :

$$\begin{aligned} Tr_P |\eta_m\rangle\langle\eta_m| &= \sum_l {}_X \langle l|\eta\rangle \langle\eta|l\rangle_X \\ &= \frac{1}{\mathcal{C}_m} \sum_{j=0}^{d-1} (c_{j+m}^2 - c_{min}^2) |\alpha_j|^2 |\phi_{j+m}\rangle_{AC} \langle\phi_{j+m}|. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Comprobamos así que, aplicando o no la transformada de Fourier, la matriz densidad reducida del sistema AC es la misma que la expresada en la ecuación (4.96).

4.7. Futuros Trabajos.

Hasta el momento, solo hemos hecho uso del esquema de discriminación de estados correspondiente a unambiguous state discrimination, ya que hemos asumido que el canal que estamos usando tiene rango de Schmidt igual a la dimensión del estado a teleclonar. En general, esto podría no ser cierto, lo que llevaría a la discriminación de estados linealmente dependientes, por lo que la discriminación de estados no podría ser no ambigua y recurriremos al esquema de *Maximum Confidence*. En este caso, siempre existirán errores asociados con la identificación de algunos estados, aun cuando permitamos la existencia de resultados no conclusivos en las mediciones. Sin embargo, para conjuntos linealmente dependientes de estados, es posible construir un conjunto de mediciones análogas, permitiendo así que al obtener cierto resultado luego de la medición POVM, podamos identificar ese resultado con uno de los estados a discriminar, con tanta seguridad como sea posible. Tal como en unambiguous discrimination, esta medición debe optimizar la información sobre el estado dado un resultado particular de la medición, específicamente, las probabilidades a posteriori

$$p_{MC}(\hat{\rho}_i|i) = \frac{P(\hat{\rho}_i)P(i|\hat{\rho}_i)}{P(i)}. \quad (4.130)$$

Físicamente, esta probabilidad se refiere a la proporción de ocurrencia del resultado i en la medición debido al estado $\hat{\rho}_i$. En experimentos de un solo intento, esta expresión corresponde a la probabilidad de que el estado $\hat{\rho}_i$ produzca un resultado i . De este modo, se puede pensar en esta cantidad como la *confidencia* o *confianza* de que el resultado i efectivamente indica que el estado era $\hat{\rho}_i$. En términos de los operadores de la medición $\{\hat{\pi}_i\}$, asociados con el resultado i , podemos escribir

$$p_{MC}(\hat{\rho}_i|i) = \frac{p_i \text{Tr}(\hat{\rho}_i \hat{\pi}_i)}{\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\pi}_i)}, \quad (4.131)$$

donde $\hat{\rho} = \sum_j p_j \hat{\rho}_j$ es la matriz densidad a priori. En nuestro caso, las probabilidades a priori son iguales $p_i = 1/d \ \forall i$, por lo que tenemos que

$$\hat{\rho} = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^{d-1} |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|. \quad (4.132)$$

Se ha demostrado que para un conjunto de estados puros, como en nuestro caso, los

elementos del POVM que maximizan la probabilidad (4.130) están dados por

$$\hat{\pi}_j = a_j \hat{\rho}^{-1} \hat{\rho}_j \hat{\rho}^{-1}, \quad (4.133)$$

con el factor de peso a_j dado por

$$a_j = \frac{\text{Tr}(\hat{\pi}_j \hat{\rho})}{\text{Tr}(\hat{\rho}^{-1} \hat{\rho}_j)}. \quad (4.134)$$

De este modo tenemos que

$$p_{MC}(\hat{\rho}_i|i)_{MAX} = \frac{1}{d} \text{Tr}(\hat{\rho}_j \hat{\rho}^{-1}). \quad (4.135)$$

4.7.1. Transformación de Discriminación.

Designaremos como N el número de coeficientes c_k que son diferentes de cero, con $N \leq d$, por lo que podemos escribir el canal de telecloning como

$$|\tilde{\xi}\rangle_{PAC} = \sum_{j=0}^{N-1} c_j |j\rangle_P \otimes |\phi_j\rangle_{AC}, \quad (4.136)$$

donde solo hemos considerado los coeficientes c_j que son diferentes de cero.

Reemplazando la forma explícita de los estados simétricos podemos escribir la matriz densidad a priori como

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \frac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} |\Psi_j\rangle \langle \Psi_j| \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 |k\rangle \langle k|, \end{aligned} \quad (4.137)$$

donde los coeficientes c_k de la última ecuación son solo los que son diferentes de cero. Por comodidad, cuando estemos considerando solo coeficientes no nulos, agregaremos un tilde $\tilde{\cdot}$, de este modo

$$\hat{\rho} = \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{c}_k|^2 |k\rangle \langle k| \quad (4.138)$$

y

$$\hat{\rho}^{-1} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{|\tilde{c}_k|^2} |k\rangle \langle k|. \quad (4.139)$$

De la misma forma, podemos escribir los estados simétricos a discriminar como

$$|\Psi_m\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{c}_k e^{2\pi i m k/d} |k\rangle. \quad (4.140)$$

Por lo tanto, si calculamos la probabilidad la confianza del proceso de discriminación, obtenemos

$$p_{MC}(\hat{\rho}_i|i)_{MAX} = \frac{N}{d} \quad \forall i. \quad (4.141)$$

Esto quiere decir (una vez más) que la confianza o probabilidad de que, al obtener el resultado i en la medición, el estado subyacente sea el estado i es N/d . De este resultado es claro que si $N = d$, entonces podemos asegurar que el resultado obtenido está asociado con el estado correspondiente.

Los elementos POVM que maximizan la confianza resultan ser

$$\hat{\pi}_j = a_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|, \quad (4.142)$$

donde los estados $|\phi_j\rangle$ son estados sin normalizar de la forma

$$|\phi_j\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\tilde{c}_k^*} e^{2\pi i k j/d} |k\rangle. \quad (4.143)$$

Se ha mostrado que los operadores $\hat{\pi}_j$ no forman un POVM a menos que $|c_j| = \frac{1}{\sqrt{N}}$. En este caso particular, el resultado inconclusivo no es necesario y las estrategias de *Minimum Error* y *Maximum Confidence* coinciden. En caso contrario, es necesario definir un operador $\hat{\pi}_?$ que complete el POVM, es decir,

$$\hat{\pi}_? = \mathbb{1}_N - \sum_{j=0}^{d-1} \hat{\pi}_j. \quad (4.144)$$

En el caso que estamos estudiando, dado que todas las probabilidades a priori de los estados simétricos son iguales, podemos escribir $a_j = a$ y, por lo, tanto

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_j &= \mathbb{1}_N - a \sum_{j=0}^{d-1} |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \left(1 - \frac{ad}{|c_m|^2}\right) |m\rangle\langle m|. \end{aligned} \quad (4.145)$$

La restricción $\hat{\pi}_? \geq 0$ impone que $a \leq \frac{|c_m|^2}{d}$ para todo m . Para optimizar el proceso se debe elegir el valor de a que minimiza la probabilidad de obtener un resultado inconclusivo, la que resulta ser

$$p_? = \text{Tr}(\hat{\pi}_? \hat{\rho}) = 1 - aNd, \quad (4.146)$$

cuyo mínimo valor se alcanza cuando $a = c_{min}^2/d$, donde c_{min} es el coeficiente menor (en módulo), y por lo tanto

$$p_{? \min} = 1 - Nc_{min}^2. \quad (4.147)$$

Desde ahora, designaremos esta probabilidad simplemente como $p_?$, por lo tanto

$$p_? = 1 - Nc_{min}^2. \quad (4.148)$$

4.7.2. Telecloning vía Maximum Confidence Measurements.

Aplicaremos (al igual que en el caso de UD) la transformación de discriminación de Maximum Confidence sobre el sistema que alberga los estados simétricos, usando el sistema P como ancilla del proceso, el estado $|d \ominus m\rangle$ como estado inicial y que también representará el caso en que podamos calcular con confianza máxima; y el estado $|d \ominus m + 1\rangle$, que dará cuenta del resultado inconclusivo. El estado del sistema $XPAC$, recordemos, estaba dado por

$$|\psi_m\rangle_{XPAC} = \sum_{n=0}^{d-1} |\Psi_n\rangle_P |m\rangle_X \otimes \sum_{j=0}^{d-1} \exp(2\pi i(j+m)n/d) \alpha_j |\phi_{j \oplus m}\rangle_{AC}. \quad (4.149)$$

Si aplicamos ahora la transformación de discriminación de Maximum Confidence, obtenemos

$$\begin{aligned} U_{XP}^{MC} |\psi_m\rangle_{XPAC} &= \sum_{n=0}^{d-1} U_{PX}^{MC} [|\Psi_n\rangle_P |m\rangle_X] \otimes \sum_{j=0}^{d-1} \exp(2\pi i j n/d) \alpha_j |\phi_{j \oplus m}\rangle_{AC} \\ &= \sqrt{1-p_?} \left[\sum_{n=0}^{d-1} |u_n\rangle_P \otimes \sum_{j=0}^{d-1} \exp(2\pi i(j+m)n/d) \alpha_j |\phi_{j \oplus m}\rangle_{AC} \right] |m\rangle_X \\ &\quad + \sqrt{p_?} \left[\sum_{n=0}^{d-1} |\chi_n\rangle_P \otimes \sum_{j=0}^{d-1} \exp(2\pi i(j+m)n/d) \alpha_j |\phi_{j \oplus m}\rangle_{AC} \right] |m \oplus 1\rangle_X, \end{aligned}$$

donde los estados $|u_n\rangle$ son estados ortonormales dados por

$$\begin{aligned} |u_n\rangle &= \hat{Z}_2^n \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi kn/d} |k\rangle_2, \end{aligned} \quad (4.150)$$

y los estados $|\chi_n\rangle$ son estados normalizados no ortogonales, dados por

$$\begin{aligned} |\chi_n\rangle &= \hat{Z}_2^n \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\frac{c_k^2 - c_{min}^2}{p?}} |k\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\frac{c_k^2 - c_{min}^2}{p?}} e^{2\pi kn/d} |k\rangle. \end{aligned} \quad (4.151)$$

Lo que resta es encontrar la fidelidad total del proceso, considerando los errores inherentes del esquema de discriminación de estados.

Otro estudio que podemos realizar es un esquema experimental que permita implementar nuestro esquema. Una posibilidad es utilizar cuatro fotones generados por conversión paramétrica espontánea a segundo orden, montando un setup parecido al que podemos encontrar en [55]. Es posible realizar una modificación para que sea posible producir un canal entrelazado puro y ajustable y, finalmente, introducir una etapa de discriminación de estados.

Conclusión y Perspectivas.

En este trabajo hemos estudiado diferentes problemas en lo que respecta a la distribución de información. En la primera parte, logramos crear un esquema experimental basado en el uso de fotones gemelos para implementar el clonado cuántico probabilista de qubits. Nuestro esquema permite clonar la información albergada originalmente en el estado de polarización de un fotón en el estado de polarización y camino de fotón gemelo, destruyendo la información que inicialmente se albergaba en el primer fotón. Hasta el momento, existe solo una demostración experimental de un protocolo similar [5], en el cual se utiliza un computador cuántico de resonancia nuclear magnética. Las ventajas de usar fotones frente a resonancia nuclear magnética son amplias: basta considerar que la fidelidad de preparación de los estados es mucho más alta. La ventaja clave de nuestro setup es que, en este, es posible que los dos fotones se encuentren en lugares completamente opuestos del universo. El esquema propuesto permite teleportar y clonar el estado inicial con la probabilidad máxima permitida por la mecánica cuántica. Es posible acotar que en nuestro esquema es necesario preparar el estado inicial, lo que le resta veracidad al setup como prueba del protocolo, pero creemos que en un futuro no muy lejano podremos conseguir nuevas fuentes de fotones entrelazados con otros sistemas a través de nuevas interfaces cuánticas que permitan saltar esta limitación.

En la segunda parte de este trabajo, hemos desarrollado un protocolo teórico que permite teleclonar utilizando como recurso inicial un canal parcialmente entrelazado el estado cuántico de un sistema de d niveles, produciendo m copias idénticas entre ellas, y con la máxima fidelidad permitida por la mecánica cuántica, con respecto al estado

inicial. Este esquema es una generalización de teleportación y clonado determinista universal simétrico óptimo. Para lograr este propósito, hemos recurrido a discriminación de estados cuánticos, creando una receta general a través de discriminación no ambigua de estados, cuando el canal tiene rango de Schmidt completo, y a través de discriminación con error mínimo, en caso contrario. Hasta el momento solo se han publicado artículos donde se estudia que ocurre con la calidad de los clones en el caso en que la calidad de canal baja, y generalizaciones en el caso de máquinas no simétricas.

Cabe comentar también que en el último tiempo se han publicado algunos artículos que discuten cómo la distribución de información cuántica puede mejorar el desempeño de algunas tareas computacionales. La distribución puede ser implementada con diferentes esquemas, ya sean probabilistas o deterministas, como los dos esquemas aquí propuestos. Tenemos por ejemplo [29], donde se discute la utilidad y se presentan algunos ejemplos de tareas computacionales, donde el clonado cuántico probabilista estado dependiente ofrece ventajas que ninguna otra propuesta puede conseguir. En [30] se discute el problema de forma general y se dan dos ejemplos de tareas donde el clonado es una ventaja.

Publicación de Resultados

Los resultados de esta tesis han sido publicados y expuestos en congresos según se muestra a continuación.

Publicaciones ISI

- *Nonlocal optimal probabilistic cloning of qubit states via twin photons*, G. Araneda, N.Cisternas, O. Jiménez, A. Delgado Physical Review A 86, 052332 (2012).
- *Suboptimal local probabilistic cloning of qubit states via twin photons*, N.Cisternas, G. Araneda, O. Jiménez, A. Delgado, Submitted to Physical Review A.

Drafts

- *Telecloning of qudits via partially entangled states*, G. Araneda, N.Cisternas, A. Delgado, In preparation.
- *Experimental probabilistic quantum teleportation*, N.Cisternas, G. Araneda, A. Delgado, In preparation.

Conferencias

- Quantum Optics VI, Piriápolis, Uruguay, Noviembre 2012. Presentación poster *Quantum Local and non-Local Probabilistic Cloning via Twin-Photons*.

- 9th Canadian Student Conference on Quantum Information and the 2nd AQuA Student Congress on Quantum Information and Computation, Institute for Quantum Computing, University of Waterloo, Ontario, Canada, Junio 2012. Presentación posters *Probabilistic Cloning of quantum states with twin photons* and *Quantum telecloning via partially entangled channels*
- XVIII Simposio Chileno de Física, La Serena, Chile, Noviembre 2012. Presentation poster *Probabilistic protocols for Quantum Communication*

Bibliografía

- [1] M. Duff and S. Ferrara, “Black hole entropy and quantum information,” in *Supersymmetric Mechanics - Vol. 3*, vol. 755 of *Lecture Notes in Physics*, pp. 1–22, Springer Berlin Heidelberg, 2008. [1](#)
- [2] M. Murao, D. Jonathan, M. Plenio, and V. Vedral, “Quantum telecloning and multiparticle entanglement,” *Physical Review A*, vol. 59, pp. 156–161, 1999. [1](#), [4](#)
- [3] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 1895–1899, 1993. [1](#), [2.3](#), [2.5.3](#)
- [4] L. Duan and G. Guo, “Probabilistic cloning and identification of linearly independent quantum states,” *Physical review letters*, vol. 80, no. 22, pp. 4999–5002, 1998. [1](#), [2.5.3](#), [3.1](#), [3.1](#), [3.2](#)
- [5] H. Chen, D. Lu, B. Chong, G. Qin, X. Zhou, X. Peng, and J. Du, “Experimental demonstration of probabilistic quantum cloning,” *Physical Review Letters*, vol. 106, no. 18, p. 180404, 2011. [1](#), [3.2](#), [3.3](#), [5](#)
- [6] M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2010. [2](#), [3.4.2](#)
- [7] A. Furusawa and P. van Loock, *Quantum Teleportation and Entanglement*. Wiley, 2011. [2](#)

- [8] P. Kok and B. Lovett, *Introduction to Optical Quantum Information Processing*. Cambridge University Press, 2010. [2](#), [2.7](#), [2.7](#), [3.4.1](#)
- [9] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, 2006. [2.2](#)
- [10] H. Ollivier and W. H. Zurek, “Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 017901, 2001. [2.3](#)
- [11] L. Henderson and V. Vedral, “Classical, quantum and total correlations,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 34, no. 35, p. 6899, 2001. [2.3](#)
- [12] D. Bouwmeester, J. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, “Experimental quantum teleportation,” *Nature*, vol. 390, no. 6660, pp. 575–579, 1997. [2.3](#)
- [13] C. Bennett, G. Brassard, and A. Ekert, “Quantum cryptography,” in *Progress in Atomic physics Neutrinos and Gravitation, proceedings of the XXVIIth Rencontre de Moriond Series: Moriond Workshops, held January 25-February 1, 1992, at Les Arcs, Savoie, France. Published by Editions Frontieres, 1992, p. 371*, vol. 1, p. 371, 1992. [2.3](#), [2.5.3](#)
- [14] C. Bennett and S. Wiesner, “Communication via one-and two-particle operators on einstein-podolsky-rosen states,” *Physical review letters*, vol. 69, no. 20, pp. 2881–2884, 1992. [2.3](#)
- [15] K. Mattle, H. Weinfurter, P. Kwiat, and A. Zeilinger, “Dense coding in experimental quantum communication,” *Physical Review Letters*, vol. 76, no. 25, pp. 4656–4659, 1996. [2.3](#)
- [16] S. E. *Math. Annal.*, vol. 63, p. 433, 1906. [2.3](#)
- [17] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher, “Concentrating partial entanglement by local operations,” *Phys. Rev. A*, vol. 53, pp. 2046–2052, 1996. [2.3](#)

- [18] G. Alber, A. Delgado, N. Gisin, and I. Jex, “Efficient bipartite quantum state purification in arbitrary dimensional hilbert spaces,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 34, no. 42, p. 8821, 2001. [2.4](#)
- [19] L. Roa, A. Delgado, and I. Fuentes-Guridi, “Optimal conclusive teleportation of quantum states,” *Phys. Rev. A*, vol. 68, p. 022310, 2003. [2.4](#)
- [20] W. Wootters and W. Zurek, “A single quanta cannot be cloned,” *Nature*, vol. 299, no. 5886, pp. 802–803, 1982. [2.5](#), [2.5](#), [2.5](#)
- [21] K. Kraus, A. Bohm, J. Dollard, and W. Wootters, eds., *States, Effects, and Operations Fundamental Notions of Quantum Theory*, vol. 190 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 1983. [2.5](#)
- [22] V. Buzek and M. Hillery, “Quantum copying: Beyond the no-cloning theorem,” *Physical Review A*, vol. 54, no. 3, p. 1844, 1996. [2.5.1](#)
- [23] V. Buzek and M. Hillery, “Universal optimal cloning of arbitrary quantum states: From qubits to quantum registers,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 5003–5006, 1998. [2.5.1](#)
- [24] V. Scarani, S. Iblisdir, N. Gisin, and A. Acin, “Quantum cloning,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 77, no. 4, p. 1225, 2005. [2.5.1](#)
- [25] N. Gisin and S. Massar, “Optimal quantum cloning machines,” *Physical review letters*, vol. 79, no. 11, pp. 2153–2156, 1997. [2.5.2](#), [2.5.2](#)
- [26] R. F. Werner, “Optimal cloning of pure states,” *Phys. Rev. A*, vol. 58, pp. 1827–1832, 1998. [2.5.2](#), [2.5.2](#), [4.6.1](#)
- [27] L. Davidovich, A. Maali, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, “Quantum switches and nonlocal microwave fields,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 71, pp. 2360–2363, 1993. [2.5.3](#)
- [28] C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, “Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, pp. 722–725, 1996. [2.5.3](#)

- [29] G. Ting, Y. Feng-Li, and W. Zhi-Xi, “Probabilistic cloning and quantum computation,” *Chinese Physics Letters*, vol. 21, no. 6, p. 995, 2004. [2.5.3](#), [5](#)
- [30] E. F. Galvão and L. Hardy, “Cloning and quantum computation,” *Phys. Rev. A*, vol. 62, p. 022301, 2000. [2.5.3](#), [5](#)
- [31] G. Fowles, *Introduction to Modern Optics*. Dover Books on Physics Series, Dover-Publ., 1975. [2.6](#), [2.6.1](#)
- [32] D. Kliger, J. Lewis, and C. Randall, *Polarized light in optics and spectroscopy*. Academic Press, 1990. [2.6](#)
- [33] R. C. Jones, “A new calculus for the treatment of optical systems,” *JOSA*, vol. 31, no. 7, pp. 500–503, 1941. [2.6.1](#)
- [34] D. Walls and G. Milburn, *Quantum Optics*. SpringerLink: Springer e-Books, Springer, 2008. [2.6.2](#)
- [35] B. Zel’Dovich and D. Klyshko, “Field statistics in parametric luminescence,” *ZhETF Pis ma Redaktsiiu*, vol. 9, p. 69, 1969. [2.7](#)
- [36] D. N. Klyshko and D. Krindach *Optics and Spectroscopy*, vol. 26, p. 532, 1969.
- [37] D. C. Burnham and D. L. Weinberg, “Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 25, pp. 84–87, 1970.
- [38] S. Friberg, C. K. Hong, and L. Mandel, “Measurement of time delays in the parametric production of photon pairs,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 54, pp. 2011–2013, 1985.
- [39] C. K. Hong and L. Mandel, “Theory of parametric frequency down conversion of light,” *Phys. Rev. A*, vol. 31, pp. 2409–2418, 1985.
- [40] C. K. Hong and L. Mandel, “Experimental realization of a localized one-photon state,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, pp. 58–60, 1986.
- [41] R. Ghosh and L. Mandel, “Observation of nonclassical effects in the interference of two photons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 59, pp. 1903–1905, 1987.

- [42] Z. Y. Ou and L. Mandel, “Observation of spatial quantum beating with separated photodetectors,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, pp. 54–57, 1988.
- [43] S. Walborn, C. Monken, S. Pádua, and P. Souto Ribeiro, “Spatial correlations in parametric down-conversion,” *Physics Reports*, vol. 495, no. 4, pp. 87–139, 2010. [2.7](#), [2.7](#)
- [44] T. Pittman, B. Jacobs, and J. Franson, “Single photons on pseudodemand from stored parametric down-conversion,” *Physical Review A*, vol. 66, no. 4, p. 042303, 2002. [2.7](#)
- [45] L. Neves, G. Lima, J. G. Aguirre Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra, and S. Pádua, “Generation of entangled states of qudits using twin photons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, p. 100501, 2005. [2.7](#)
- [46] Y.-H. Kim, “Single-photon two-qubit entangled states: Preparation and measurement,” *Phys. Rev. A*, vol. 67, p. 040301, 2003. [3.4.3](#), [3.5](#)
- [47] F. A. Torres-Ruiz, J. Aguirre, A. Delgado, G. Lima, L. Neves, S. Pádua, L. Roa, and C. Saavedra, “Unambiguous modification of nonorthogonal single- and two-photon polarization states,” *Phys. Rev. A*, vol. 79, p. 052113, 2009. [3.4.3](#), [3.5](#)
- [48] F. A. Torres-Ruiz, G. Lima, A. Delgado, S. Pádua, and C. Saavedra, “Decoherence in a double-slit quantum eraser,” *Phys. Rev. A*, vol. 81, p. 042104, 2010. [3.4.3](#)
- [49] L. Neves, G. Lima, J. Aguirre, F. Torres-Ruiz, C. Saavedra, and A. Delgado, “Control of quantum interference in the quantum eraser,” *New Journal of Physics*, vol. 11, no. 7, p. 073035, 2009. [3.4.3](#), [3.5](#)
- [50] E. Lombardi, F. Sciarrino, S. Popescu, and F. De Martini, “Teleportation of a vacuum one-photon qubit,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 070402, 2002. [3.4.3](#)
- [51] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, L. Hardy, and S. Popescu, “Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, pp. 1121–1125, 1998. [3.4.3](#)

- [52] O. J. A. D. N.Cisternas, G.Araneda, “Suboptimal local probabilistic cloning of qubit states via twin photons,” [3.4.5](#)
- [53] A. Chefles, “Unambiguous discrimination between linearly independent quantum states,” *Physics Letters A*, vol. 239, no. 6, pp. 339–347, 1998. [3.5](#), [4.3](#), [4.6](#)
- [54] A. Chefles and S. Barnett, “Optimum unambiguous discrimination between linearly independent symmetric states,” *Physics Letters A*, vol. 250, no. 4, pp. 223–229, 1998. [3.5](#), [3.5](#), [4.6](#)
- [55] J. Lau, S. Gaertner, N. Kiesel, M. Bourennane, and H. Weinfurter, “Experimental quantum telecloning.” arXiv:0908.2632v2 [quant-ph], 2007. [4.7.2](#)

Agradecimientos

Muchas personas han sido muy importantes para el desarrollo de esta tesis y, en general, durante mis seis años de estudio en la Universidad de Concepción. Primero que todo quiero agradecer todo el apoyo de mi profesor guía, Dr. Aldo Delgado Hidalgo, quien me invito a ser parte de su grupo y ha hecho todo lo posible para que mi formación en estos últimos años haya sido lo más completa posible en un ambiente de cordialidad y amistad. La mayor parte de este trabajo fue llevado a cabo con la ayuda de la tercera miembro del equipo, Nataly Cisternas, a quien también debo agradecer por la paciencia, pero por sobre todo por su compañía y amistad todos estos años.

Durante mi paso por la Universidad de Concepción, siempre he estado acompañado de grandes compañeros, quienes uno a uno hicieron esta estadía muy agradable, llena de alegría y pasión por la física. Me gustaría agradecer en particular a Jorge Bernal, Miguel Campos, Marcela Cardenas, Oscar Fuentealba, Johanna Figueroa, Alejandra Maldonado, Pablo Solano, Patricio Muñoz y Cristian Jara , entre muchos otros. También es la instancia de agradecer a los profesores que, clase a clase, se esmeraron en inspirarnos: Dr. Guillermo Rubilar, Dr. Carlos Saavedra, Dr. Jaime Araneda, al Dr Wallon Nogueira, Dr. Gustavo Lima.

Quiero agradecer de forma especial a mi padre y a mi madre, Juan y Ana, mis dos primeros maestros quienes me educaron en el respeto y amor a la naturaleza y quienes siempre me han apoyado en este viaje. A mi hermana Paula, que cree que soy inteligente, a Magdalena y Camilo. Así también a mis amigos Nancy Riquelme, Ivania Maturana,

Purbasha Halder, Juliane Qiaochu Gong, Antonieta Silva, Mauricio Santibañez Nicolás Castañeda e Ibi Díaz.

Finalmente, pero no menos importante, quiero dar gracias al Centro de Óptica y Fotónica CEFOP, por todo el apoyo prestado durante estos últimos años, que hicieron posible muchos viajes, pero por sobre todo, hizo posible que no trabajáramos en una isla. También agradezco a CONICYT por el financiamiento de mi último año de postgrado a través de su Beca de Magíster Nacional, folio 22122460.

