Producción

1. Curvas de isocuantas cóncavas y convexas

Para las siguientes funciones de producción encuentre: i. Los rendimientos a escala; ii. La función de oferta; iii. Las economías a escala:

$$a.\ y = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$\mathrm{b.}\ y = \min\left(x_1^{1/2}, 2x_2^{1/2}, \dots, nx_n^{1/2}\right)$$

$$\mathrm{c.}\ y = x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n$$

2. Cambio tecnológico

Considere una firma en la cual el trabajo (b) es el único factor variable. En esta pregunta se van a contrastar los siguientes dos tipos de 'mejoras tecnológicas':

Tipo I: Cada unidad de trabajo ahora produce el doble de lo que producía anteriormente.

Tipo II: Cada unidad de producto ahora requiere la mitad de trabajo que se utilizaba antes.

(¡Estos dos tipos suenan parecido, pero no son iguales!)

a. (i) Si la función de producto total original era $q = 100b - b^2$, encuentre la nueva función de producción cuando ocurren mejoras tecnológicas del Tipo I. Llame a esta nueva función de producción q'. (ii) Dibuje un gráfico comparativo con las dos funciones de producción en donde se muestren las curvas de Producto Total, Producto Promedio y Producto Marginal. (En total tiene que dibujar dos gráficos que incluyan ambas funciones de producción). (iii) Encuentre las ecuaciones de producto promedio y producto marginal para ambas funciones de producción.
b. Repita el punto a. suponiendo ahora que la mejora tecnológica es del Tipo II solamente. Llame a esta nueva función de producción q''.

El óptimo de la empresa

1. Óptimo de la empresa y demandas de insumos

Una empresa tiene la siguiente función de producción que depende de n insumos variables (x_i):

$$y = \prod_{i=1}^{n} \theta_i x_i^{1/n^2}$$

Encuentre:

a. La curva de oferta mediante la maximización de la ganancia.

b. La curva de oferta inversa mediante la minimización del costo

c. La curva condicionada para cada uno de los insumos y muestre que $\eta_{ii} = -\eta_{ij} = \alpha_j \sigma$, donde α_j es la proporción que el gasto que todos los insumos excepto x_i representa del costo total y σ es la elasticidad de sustitución de la función de producción.

d. La curva no condicionada para cada uno de los insumos y calcule cuánto es el efecto sustitución y el efecto escala de un cambio en el costo del insumo propio.

2. Producción óptima

La función de producción de una empresa es:

$$Y = min\left[(a_1 X_1)^{\frac{1}{2}} - 1; (a_2 X_2)^{\frac{1}{2}} - 1; \dots; (a_n X_n)^{\frac{1}{2}} - 1\right]$$

a. Encuentre la curva inversa de oferta de esta empresa en el largo plazo.
b. Encuentre el nivel óptimo de producción de esta empresa en el largo plazo.

3. Curva de oferta de una sumatoria

La función de producción de un bien para una empresa está dada por $y = \sum_1^n x_i^{1/2}$, donde x_i son los insumos y son todos positivos. El costo de cada insumo está dado por ω_i.

a. Maximice la ganancia y derive la oferta de esta empresa en el largo plazo.
b. Minimice el costo, obtenga la función de costo total óptima y pruebe que llega al resultado de a.
c. Calcule los rendimientos a escala y las economías a escala de esta función de producción.

Monopolio y discriminación de precios

1. Monopolista discriminador con competencia internacional

Una empresa es un monopolio en el mercado local y es competidor en el mercado internacional. En el mercado local, la empresa se enfrenta a una curva inversa de demanda igual a $P = a - y$. En el mercado internacional, la empresa puede vender la cantidad que desee a un precio de P_I. La empresa puede producir a un costo total igual a y^2.

a. Si los costos de transporte son prohibitivos, encuentre la cantidad óptima que la empresa vendería en cada mercado y el precio que cobraría en el mercado local.
b. Si el costo de transporte es igual a t, encuentre la cantidad de equilibrio que la empresa vendería en cada mercado.

2. Opciones para un monopolista

Un parque de diversiones enfrenta dos tipos de consumidores. El primer grupo de consumidores es de ingreso alto y tiene una demanda igual a $Q_1 = \frac{a}{2} - \frac{p}{2}$. El segundo grupo de consumidores es de bajo ingreso y tiene una demanda igual a $Q_2 = a - \frac{p}{2}$. La empresa tiene un costo nulo en la operación del parque de diversiones.

a. Encuentre el precio de equilibrio si el monopolista **no** puede discriminar entre consumidores.
b. Encuentre el precio de equilibrio si el monopolista puede discriminar entre consumidores.
c. Encuentre el equilibrio para el monopolista si decide cobrar la entrada al parque de diversiones y por cada atracción dentro del parque (debe hallar el precio de la entrada y el precio de cada atracción).
d. ¿Cuál de las opciones anteriores es preferida por el monopolista y cuál genera el menor costo en bienestar?

3. Monopolista multiplanta

Un monopolista opera en un mercado con una demanda inversa igual a $P = a - b\,y$. Los costos de producción del monopolio dependen de la cantidad de plantas que tenga en operación. Cada una de las plantas tiene una función de producción igual a $y_i = L_i^{1/2}$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$, donde $L_i$son las unidades de trabajo contratadas. La empresa enfrenta un costo por unidad de trabajo igual a 1, con independencia de las unidades contratadas. Encuentre:

a. El precio y la cantidad de equilibrio del monopolista.

b. El valor óptimo de n (la cantidad de plantas que debe utilizar).

4. Monopolista discriminador

Un productor tiene una función de producción representada por $y = n^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{2n}}$, donde x_i es la cantidad de insumos utilizados en el proceso de producción e y es la cantidad de producción disponible para la venta. Todos los insumos tienen un costo igual a 1 la unidad. Asuma que este productor es el único vendedor en un mercado de dos consumidores y tiene la posibilidad de realizar discriminación de tercer grado. El primer consumidor tiene una demanda inversa igual a $P_1 = 10 - y_1$, mientras que el segundo consumidor tiene una demanda inversa igual a $P_2 = 20 - 2y_2$. Encuentre en equilibrio en precios y cantidades si:

a. Cualquiera de los consumidores puede revender el bien a cero costo y el bien solo se puede vender en unidades enteras.

Si el bien se pudiera fraccionar, la reventa a cero costo implica que el monopolista no puede discriminar entre consumidores, por lo que se trata de un monopolista ordinario. Así se suman las demandas y se obtiene el IM.

$$y_1 = 10 - P_1; \;\; y_2 = 10 - \frac{1}{2}P_2 \;\; \Longrightarrow y_1 + y_2 = y = 20 - \frac{3}{2}P \;\Longrightarrow\; P = \frac{40}{3} - \frac{2}{3}y \Longrightarrow IM = \frac{40}{3} - \frac{4}{3}y$$

$$IM \equiv \frac{40}{3} - \frac{4}{3}y = 2y \equiv CM \Longrightarrow \frac{40}{3} = \frac{10}{3}y \Longrightarrow y = 4; P = \frac{32}{3}; y_1 < 0,$$

Esto significa que el CM es muy alto y el primer consumidor saldría del mercado, entonces en el tramo relevante la demanda agregada relevante existe solo para el consumidor 2. Esto da como resultado:

$$IM \equiv 20 - 4y = 2y \equiv CM \Longrightarrow y = \frac{10}{3}$$

Como el bien no se puede vender fraccionado, tendríamos que determinar si el productor gana más vendiendo 3 unidades o 4 unidades. Si y = 3 puede cobrar P = 14 y gana 42 – 9 = 33; si y = 4 puede cobrar P = 12 y gana 48 – 16 = 32. Por lo tanto el equilibrio es y = 3 y P = 14.

b. Cualquiera de los consumidores puede revender el bien a un costo igual a t y el bien solo se puede vender en unidades enteras.

Acá no se puede determinar lo de las unidades enteras pues t es indeterminado, así que vamos a asumir que pueden vender unidades fraccionadas. En este caso tendríamos el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = P_1 y_1 + P_2 y_2 - (y_1 + y_2)^2 + \lambda(P_2 - P_1 - t)^2$$

$$\mathcal{L} = (10 - y_1)y_1 + (20 - 2y_2)y_2 - (y_1 + y_2)^2 + \lambda(10 - 2y_2 + y_1 - t)^2$$

Esto produce las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = 10 - 2y_1 - 2(y_1 + y_2) + 2\lambda(10 - 2y_2 + y_1 - t) = 0$$

$$\Rightarrow 10 - 2y_1 - 2(y_1 + y_2) = -2\lambda(10 - 2y_2 + y_1 - t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = 20 - 4y_2 - 2(y_1 + y_2) - 4\lambda(10 - 2y_2 + y_1 - t) = 0$$

$$\Rightarrow -10 + 2y_2 + (y_1 + y_2) = -2\lambda(10 - 2y_2 + y_1 - t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = (10 - 2y_2 + y_1 - t)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 10 - 2y_2 + y_1 = t$$

De las dos primeras ecuaciones se obtiene:

$$10 - 2y_1 - 2(y_1 + y_2) = -10 + 2y_2 + (y_1 + y_2) \Rightarrow 20 - 5y_1 - 3y_2 = 0$$

Esto se resuelve junto con la tercer CPO para obtener:

$$10 - 2y_2 + \left(\frac{20 - 3y_2}{5}\right) = t \Rightarrow 50 - 10y_2 + 20 - 3y_2 = 5t \Rightarrow$$

$$y_2 = \frac{70}{13} - \frac{5}{13}t\,; y_1 = -10 + 2\left(\frac{70}{13} - \frac{5}{13}t\right) + t = \frac{10}{13} + \frac{3}{13}t$$

c. El bien no se puede revender y se puede vender en unidades fraccionadas.

Este es el caso de un monopolista de tercer grado. Así

$$10 - 2y_1 = 2(y_1 + y_2) \Rightarrow 5 - 2y_1 = y_2$$

$$20 - 4y_2 = 2(y_1 + y_2) \Rightarrow 10 - y_1 = 3y_2$$

Solucionando el sistema de ecuaciones:

$$5 - 2y_1 = \frac{10 - y_1}{3} \Rightarrow 15 - 6y_1 = 10 - y_1;\ y_1 = 1;\ y_2 = 3; P_1 = 9; P_2 = 14.$$

d. El bien no se puede revender, se puede vender en unidades fraccionadas, pero solo se pueden producir como máximo 8 unidades.

Es igual a c, pues la restricción de 8 unidades no se alcanza.

5. Comportamiento del monopolista

Un cine ubicado en una zona universitaria proyecta películas de calidad inusualmente buena y se amenaza a los asistentes puntuales con música de órgano en directo. Cuando el cine abre, los propietarios tienen que pagar una cantidad fija cada noche de 500 euros por las películas, los acomodadores y otros servicios, independientemente del número de espectadores que acudan a ver la película. Supongamos, para simplificar el análisis, que si el cine está cerrado, los costes son iguales a cero. El número de estudiantes que van al cine viene dado por $Q_E = 220 - 40 P_E$, donde Q_E es la demanda por parte de los estudiantes al precio P_E, mientras que la demanda de los que no son estudiantes es $Q_N = 140 - 20 P_N$.

a. Si el cine cobra un precio único igual para todos los espectadores, encuentre el número de entradas de equilibrio, el precio, la cantidad que vende a cada tipo de consumidor y los beneficios del cine.

b. Supongamos que la cajera pudiera discernir a los estudiantes de los no estudiantes antes de entrar al cine. Los estudiantes no pueden revender sus entradas a los no estudiantes. Encuentre los precios y cantidades de equilibrio, y los beneficios del cine.

c. Supongamos que el cine puede albergar solamente 150 personas y que la propietaria quiere maximizar los beneficios cobrando distinto precio a los estudiantes y a los no estudiantes. Encuentre la cantidad de entradas que vende a los estudiantes y no estudiantes y el precio que cobra.

Oligopolio

1. Oligopolios por precios y cantidades

N empresas compiten por cantidades en un mercado oligopólico y se enfrentan a la función inversa de demanda P = A / y. Todas las empresas son idénticas y cada empresa tiene la posibilidad de producir en dos plantas, en donde la primer planta tiene un costo total de producción igual a ½ y_i^2 y la segunda y_i^2. Encuentre el equilibrio en precio y cantidades en cada planta si todas las empresas son seguidoras.

2. Oligopolio de Cournot con dos tipos de seguidores

En un mercado existen n empresas, de las cuales existen dos tipos de seguidores. Todas las empresas se enfrentan a la demanda inversa P = a – Q, donde $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$. La mitad de las empresas del mercado tienen un costo marginal igual a c. La otra mitad de las empresas tienen un costo marginal igual nulo. Determine:

a. La cantidad de equilibrio de cada tipo de empresa y el precio de equilibrio del mercado.
b. ¿Cuál de los dos tipos de empresas genera las mayores ganancias?
c. ¿Qué se espera que suceda conforma se incrementa la cantidad de empresas que opera en el mercado?

3. Oligopolio de Cournot con un líder y dos tipos de seguidores

En un mercado existen N+1 empresas, de las cuales una empresa es líder y existen dos tipos de seguidores. Todas las empresas se enfrentan a la demanda inversa P = a – b Q, donde $Q = \sum_{i=1}^{N+1} q_i$. La primera empresa líder del mercado tiene un costo marginal igual a c/2. La mitad de las empresas seguidoras tienen un costo marginal igual a c y la otra mitad un costo marginal nulo. Determine:

a. El precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio de mercado.

b. Ordene las ganancias de las empresas de la más rentable a la menos rentable.

4. Oligopolio de Bertrand con un líder y muchos seguidores

N empresas seguidoras compiten por precio en un mercado en el cual existe una empresa líder. La curva de demanda está representada por la función Q = a – b P (no existe diferenciación de producto). Las n empresas seguidoras son idénticas y tienen un costo total igual a $\frac{1}{2} y_s^2$, la única empresa líder tiene un costo total nulo. Las empresas seguidoras optimizan en el punto donde el precio es igual a su costo marginal y así determinan la cantidad que cada una de ellas produce. La empresa líder toma la demanda residual y maximiza sus ganancias como si fuera un monopolio. La demanda residual es la que resulta de restarle a la demanda total, la parte que fue vendida por las empresas seguidoras. Determine:

a. El precio de equilibrio, las cantidades vendidas por cada empresa y sus ganancias.

b. La tendencia de lo encontrado en el insumo anterior conforme la cantidad de empresas tiende a infinito.

5. Oligopolio de Bertrand

Un total de n empresas compiten en un mercado por precio. Existe diferenciación de producto y la demanda que enfrenta cada empresa está representada por:

$$q_j = A - p_j + \frac{1}{n}\sum_{i \neq j}^{n} p_i$$

a. Encuentre los precios, cantidades y ganancias de equilibrio para cada una de las empresas si se asume que todas las empresas son seguidoras. ¿Qué sucede conforme n tiende a infinito?

b. Encuentre los precios y cantidades de equilibrio para cada una de las empresas si se asume que existe una única empresa líder. Indique si a esa empresa le conviene ser líder.