La Dilatación Ideal

Edgar Trejo Avila

Sábado 29 de octubre del 2022

Dilatación Lineal

Imagínese una barra de longitud inicial L_0 a una determinada temperatura inicial T_0 que hace que ésta (la barra) experimente un cambio de longitud (llamado "dilatación") representado por ΔL, de modo que su longitud final es L. Se sabe que ΔL es directamente proporcional al producto del cambio de temperatura ΔT y L_0, i.e., el cociente $\frac{\Delta L}{L_0 \Delta T}$ es una constante (llamada coeficiente de dilatación) representada por la letra griega α, de modo que:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \tag{1}$$

Esto es:

$$\begin{aligned} L - L_0 &= \alpha L_0 \Delta T \\ L &= \alpha L_0 \Delta T + L_0 \\ &= L_0 \left(\alpha \Delta T + 1 \right) \end{aligned}$$

Dilatación Superficial

Siguiendo con la premisa de la sección anterior, imagínese ahora un cuadrado de longitud L_0 que experimenta una dilatación. Es evidente que un cambio en su longitud desencadena también uno en su área, y es de ahí que nace el propósito de esta sección, que es obtener una relación entre el área final y la inicial del cuadrado.

Por la fórmula del área del cuadrado, se sabe que el área inicial A_0 es igual a L_0^2. De la misma manera, el área final A es tal que:

$$\begin{aligned} A &= L^2 \\ &= (L_0 + \Delta L)^2 \\ &= L_0^2 + 2L_0 \Delta L + \Delta L^2 \end{aligned}$$

Introduciendo a ΔA como el cambio entre el área inicial y la final:

$$\begin{aligned} \Delta A &= A - A_0 \\ &= \left(L_0^2 + 2L_0 \Delta L + \Delta L^2 \right) - A_0 \\ &= \left(L_0^2 + 2L_0 \Delta L + \Delta L^2 \right) - L_0^2 \\ &= 2L_0 \Delta L + \Delta L^2 \end{aligned}$$

El cambio de longitud es lo suficientemente pequeño como para ser depreciable cuando su exponente es mayor a uno (i. e., un cuadrado, un cubo, etc.), de modo que:

$$\Delta A = 2L_0 \Delta L$$

Luego:

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \Delta A \\ &= A_0 + 2L_0 \Delta L \end{aligned}$$

Por (1):

$$\begin{aligned} A &= A_0 + 2L_0 \Delta L \\ &= A_0 + 2L_0 \left(L_0 \alpha \Delta T\right) \\ &= A_0 + 2L_0^2 \alpha \Delta T \\ &= A_0 + 2A_0 \alpha \Delta T \\ &= A_0 \left(2\alpha \Delta T + 1\right) \end{aligned}$$

Dilatación Volumétrica

Siguiendo con la misma premisa, uno puede calcular la relación entre el volumen inicial V_0 y el volumen final V de un cubo de longitud L_0:

$$\begin{aligned} V &= L^3 \\ &= \left(L_0 + \Delta L\right)^3 \\ &= L_0^3 + 3L_0^2 \Delta L + 3L_0 \Delta L^2 + \Delta L^3 \\ &= L_0^3 + 3L_0^2 \Delta L \\ &= L_0^3 + 3L_0^2 \left(\alpha L_0 \Delta T\right) \\ &= L_0^3 + 3L_0^3 \alpha \Delta T \\ &= V_0 + 3V_0 \alpha \Delta T \\ &= V_0 \left(3\alpha \Delta T + 1\right) \end{aligned}$$

Recuérdese que las potencias de ΔL con exponente mayor a uno se pueden depreciar.

Patrón General

Como es fácil de ver, la fórmula para la dilatación sigue la estructura:

$$L_0^n \left(n\alpha \Delta T + 1\right); \qquad 1 \leq n \leq 3 \tag{2}$$

Donde n representa la dimensión de la dilatación que se quiere medir