Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

Компьютерный практикум по учебному курсу
«ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

ЗАДАНИЕ № 2
Подвариант №1

«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ИЛИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА»

ОТЧЕТ
о выполненном задании

студента 206 учебной группы факультета ВМК МГУ
Оганисяна Эдгара Гагиковича

Москва, 2019 г.

Цель работы

Изучить методы Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, применяемые для численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений) первого порядка.

Постановка задачи

1) Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной и имеющее вид:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right), \;\; x_0 < x$$

с дополнительным начальным условием, заданным в точке $x = x_0$: $y(x_0) = y_0$
Условиями задачи гарантируется существование и единственность решения.

2) Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных неизвестных функций:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, y_2\right), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2\left(x, y_1, y_2\right), \;\; x > x_0 \end{cases}$$

Дополнительные начальные условия задаются в точке $x = x_0$:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \qquad y_2(x_0) = y_2^{(0)}$$

Условиями задачи гарантируется существование и единственность решения.

Цели и задачи практической работы

1) Решить задачи Коши методами Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, аппроксимировав дифференциальную задачу соответствующей разностной схемой (на равномерной сетке); полученное конечно-разностное уравнение, представляющее некоторую рекуррентную формулу, просчитать численно.

2) Найти численной решение задачи и построить его график.

3) Найденное численное решение сравнить с точным решением (например с источника wolframalpha.com)

Описание метода решения

- **Метод Рунге-Кутта 2 порядка точности**

Данный метод с использованием схемы вычислений типа «предиктор-корректор» является усовершенствованием метода Эйлера. Для получения результата используется следующая рекуррентная формула:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left\{f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_i + h, y_i + hf\left(x_i, y_i\right)\right)\right\}$$

Сначала делается шаг *h* и по схеме Эйлера вычисляется значение:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + f\left(x_i, y_i\right)h$$

Затем находится значение функции *f* в точке $\left(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}\right)$, составляется полусумма: $$\frac{f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}\right)}{2}$$ и окончательно:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}\right)}{2}h$$

- **Метод Рунге-Кутта 4 порядка точности**

Данный метод усовершенствование уже метода Рунге-Кутта. А именно, если в схеме второго приходилось на каждом шаге функцию *f(x, y)* приходилось вычислять 2 раза, то здесь — 4 раза. Однако усложнение схемы расчета окупается высокой точностью. Сама схема расчета:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),$$ где

$k_1 = f\left(x_i, y_i\right),$

$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right),$

$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right),$

$k_4 = f\left(x_i + h, y_i + hk_3\right).$

Описание и листинг программы

Основной частью программы являются 4 функции реализующие методы Рунге-Кутты с различной точность как для одного уравнения, так и для системы. Пояснения будут далее.

Т.к программа достаточна велика, здесь приведем пояснения ко всем функциям. Текст программы будет доступен в приложении.

Сначала блок из тестовых ф-ций (из условия задания):

```
double f1(double x, double y);
double f1_exac(double x, double y);
double test2(double x, double y);
double test2_exac(double x, double y);
double test3(double x, double y);
double test3_exac(double x, double y);
double f1_sys(double x, double y, double z);
double f2_sys(double x, double y, double z);
```

Далее 4 функции реализующие методы Рунге-Кутта. Они в качестве параметров принимают одну (или две) функции *f, (g)*, указатели на массив переменных *x, y, z* для ф-ций, их размер *n*, шаг алгоритма *h*, а также файл *out* для записи результатаю.

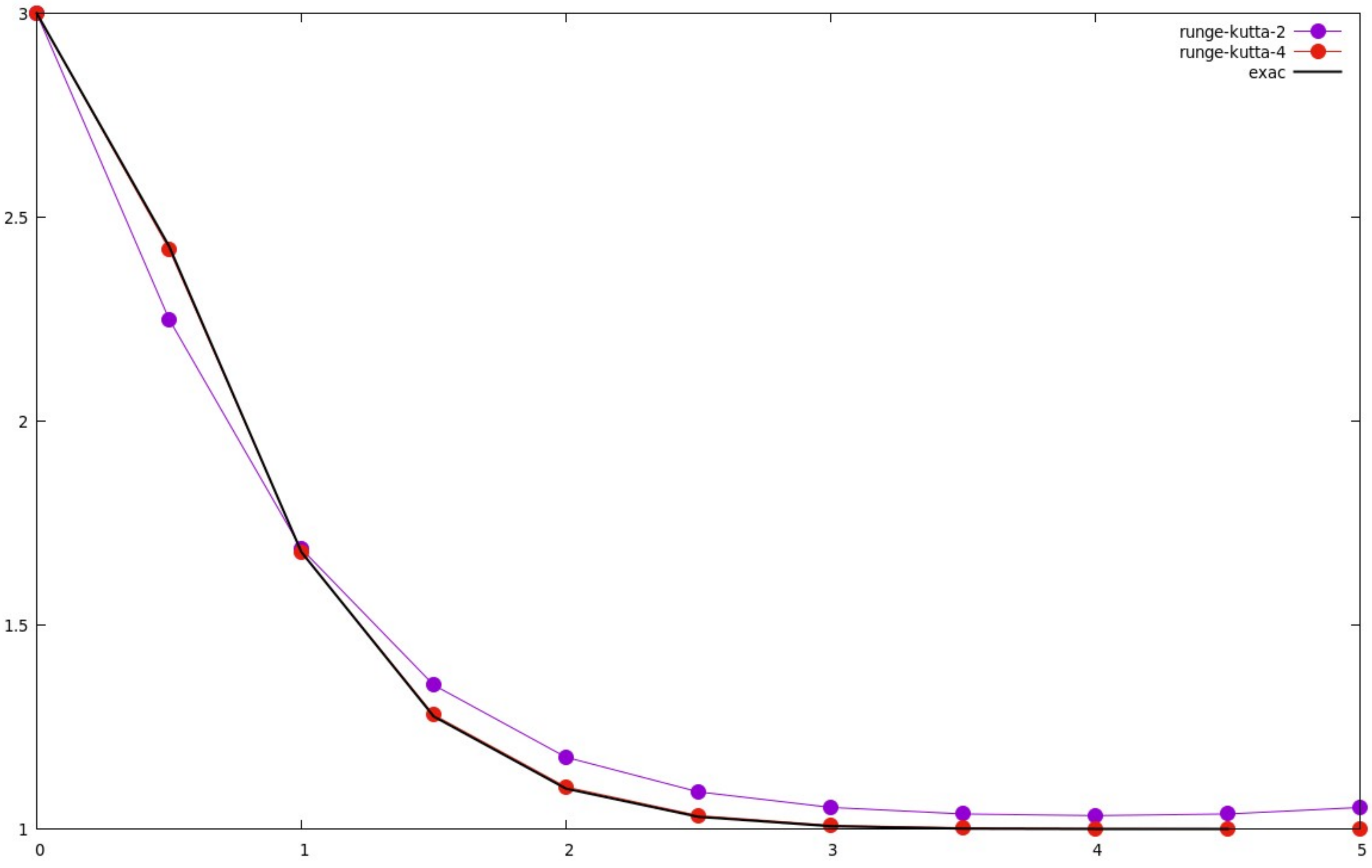
```
void runge_kutta_2(double (*f)(double, double), double
*x, double *y, double h, int n, FILE *out);

void runge_kutta_4(double (*f)(double, double), double
*x, double *y, double h, int n, FILE *out);

void runge_kutta_sys_2(double (*f)(double, double,
double), double (*g)(double, double, double), double *x,
double *y, double *z, double h, int n, FILE *out);

void runge_kutta_sys_4(double (*f)(double, double,
double), double (*g)(double, double, double), double *x,
double *y, double *z, double h, int n, FILE *out);
```

Тесты

Результаты тестов будут представлены в виде графиков с приближенными и точными решениями

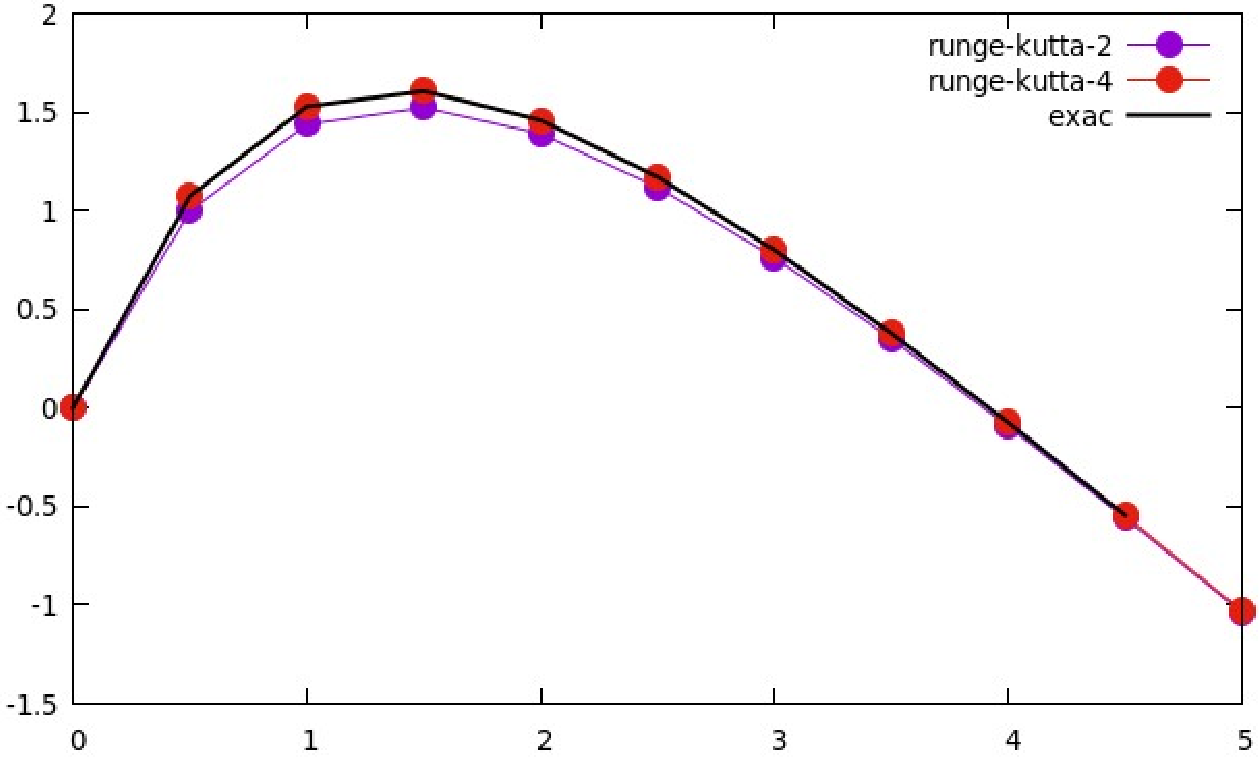
- **Тест №1**

$$f(x,y)=(y-y^2)\cdot x,\ \ y(0)=1 \quad \text{Точное решение:} \quad y(x)=\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{e^{\frac{x^2}{2}}-\frac{2}{3}}$$



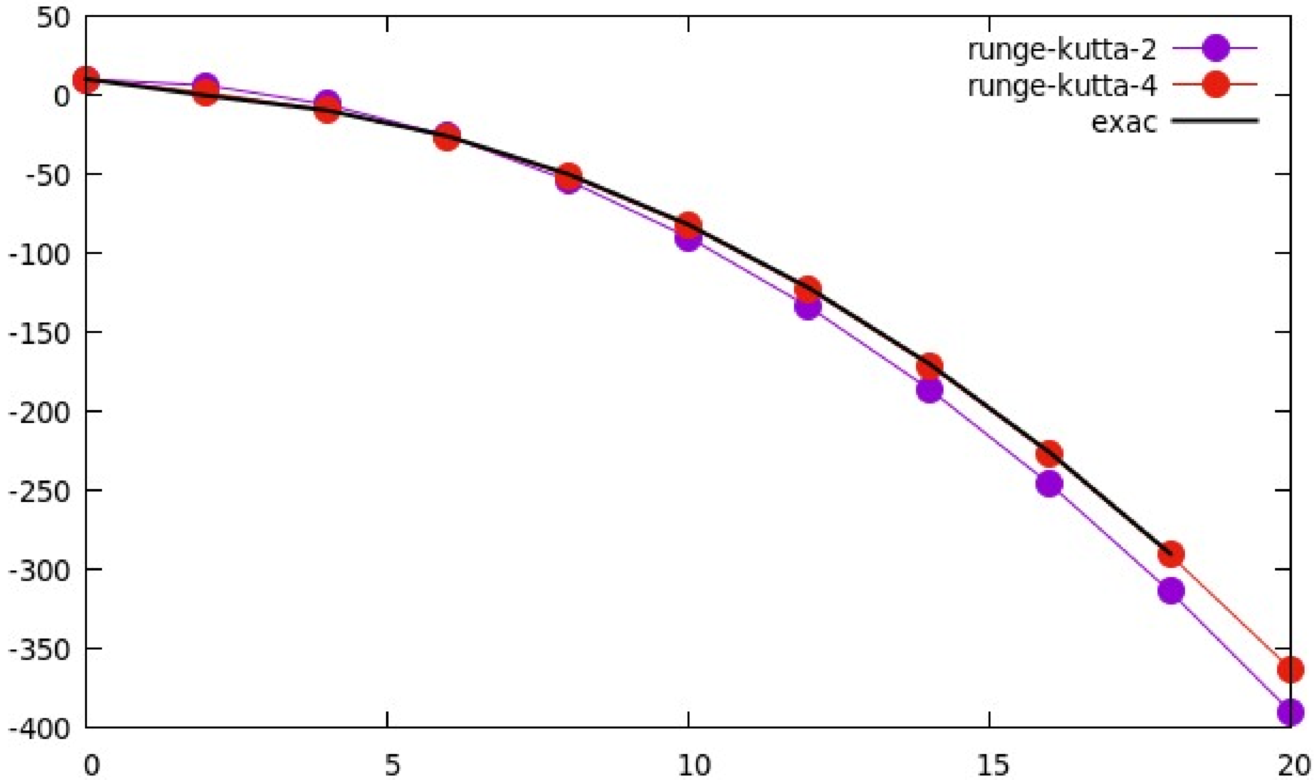
- **Тест №2**

$f(x,y)=3-y-x,\ y(0)=0$ Точное решение: $y(x)=4-x-4e^{-x}$



- **Тест №3**

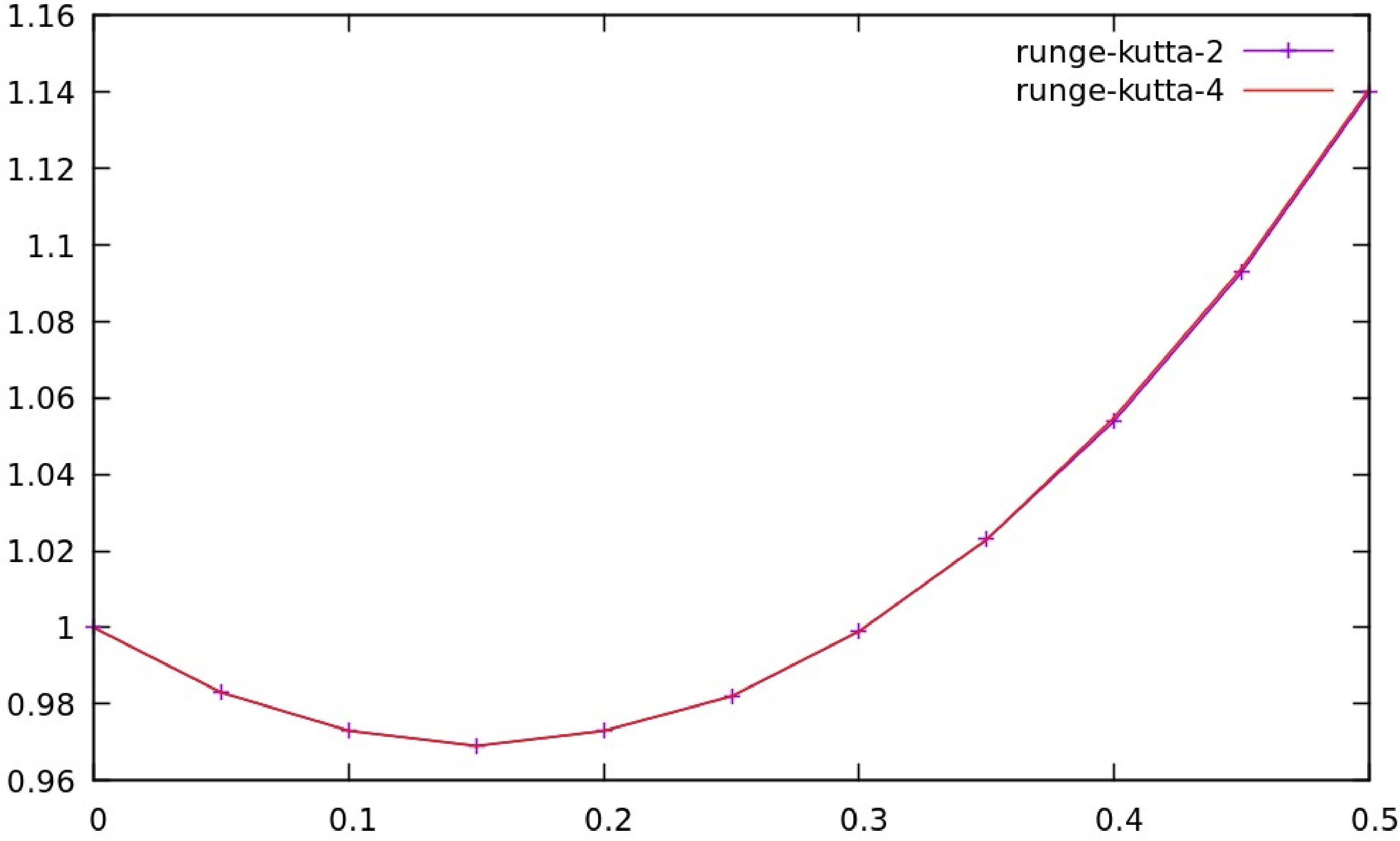
$f(x,y)=-y-x^2,\ y(0)=10$ Точное решение: $y(x)=-x^2+2x-2+12e^{-x}$



- **Тест 4**

  Система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2.4 \cdot v - u\,, & y_1(0) = 1 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = e^{-u} - x + 2.2 \cdot v\,, & y_2(0) = 0.25 \end{cases}$$



Выводы

Были изучены методы Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, применяемые для численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения (или системы дифференциальных уравнений) первого порядка. Экспериментально было показано, что второй дает большую точность вычислений.