

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $AB = c, BC = a, AC = b$. Докажем, например, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (1)$$

Введём систему координат с началом в точке A так, как показано на рисунке 1. Тогда точка B имеет координаты $(c; 0)$, а точка C имеет координаты $(b \cos \alpha; b \sin \alpha)$. По формуле расстояния между двумя точками получаем:

$$\begin{aligned} BC^2 = a^2 &= (b^2 \cos^2 \alpha - c^2)^2 + b^2 \sin^2 \alpha = b^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha - \\ &- 2bc \cos \alpha + c^2 = b^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2bc \cos \alpha + c^2 \end{aligned}$$