

# Geometría y Cinemática

Control y Programación  
de Robots



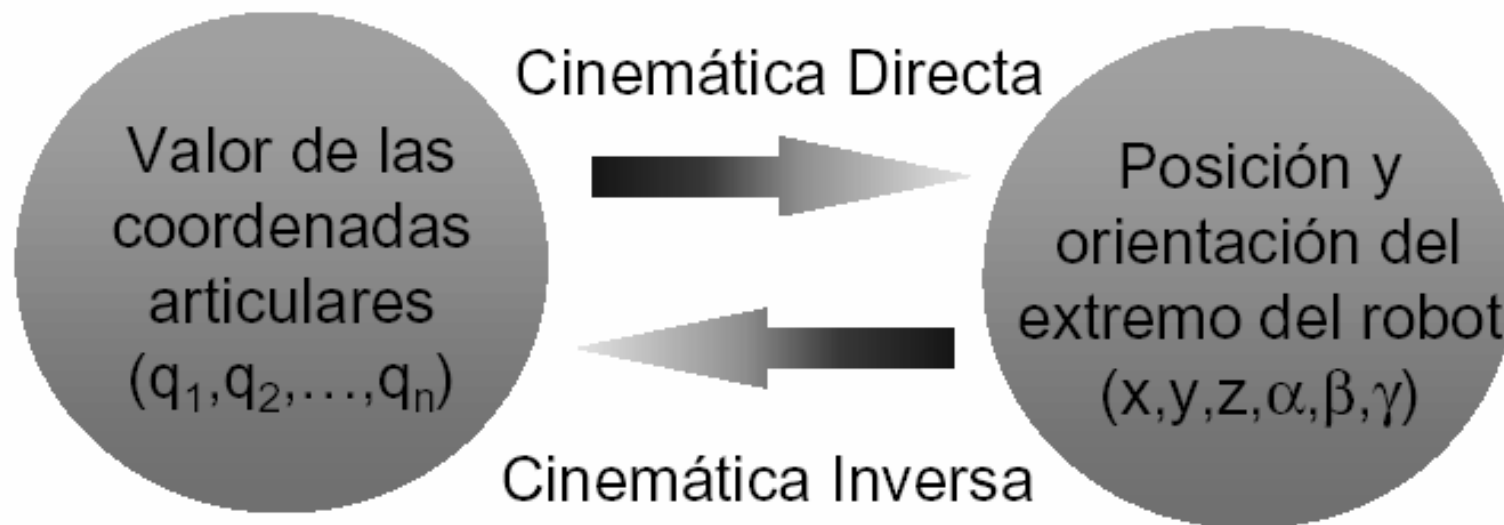
# Cinemática de un Robot Manipulador

- Cinemática directa
- Cinemática Inversa
- Matriz Jacobiana

# Cinemática de un Robot Manipulador

- **Cinemática del robot :** Estudio de su movimiento con respecto a un sistema de referencia
  - Descripción analítica del movimiento espacial en función del tiempo
  - Relaciones: localización del extremo del robot-valores articulares
- **Problema cinemático directo:** Determinar la posición y orientación del extremo final del robot, con respecto a un sistema de coordenadas de referencia, conocidos los ángulos de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot
- **Problema cinemático inverso:** Determinar la configuración que debe adoptar el robot para una posición y orientación del extremo conocidas
- **Modelo diferencial (matriz Jacobiana):** Relaciones entre las velocidades de movimiento de las articulaciones y las del extremo del robot

# Cinemática de un Robot Manipulador



# Cinemática de un Robot Manipulador

Resolución del problema cinemático directo con matrices de transformación homogéneas

■ Objetivo:

Encontrar una matriz de transformación homogénea  $\mathbf{T}$  que relacione posición y orientación del extremo del robot con respecto a un sistema de referencia fijo situado en su base

$$x = f_x(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

$$y = f_y(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

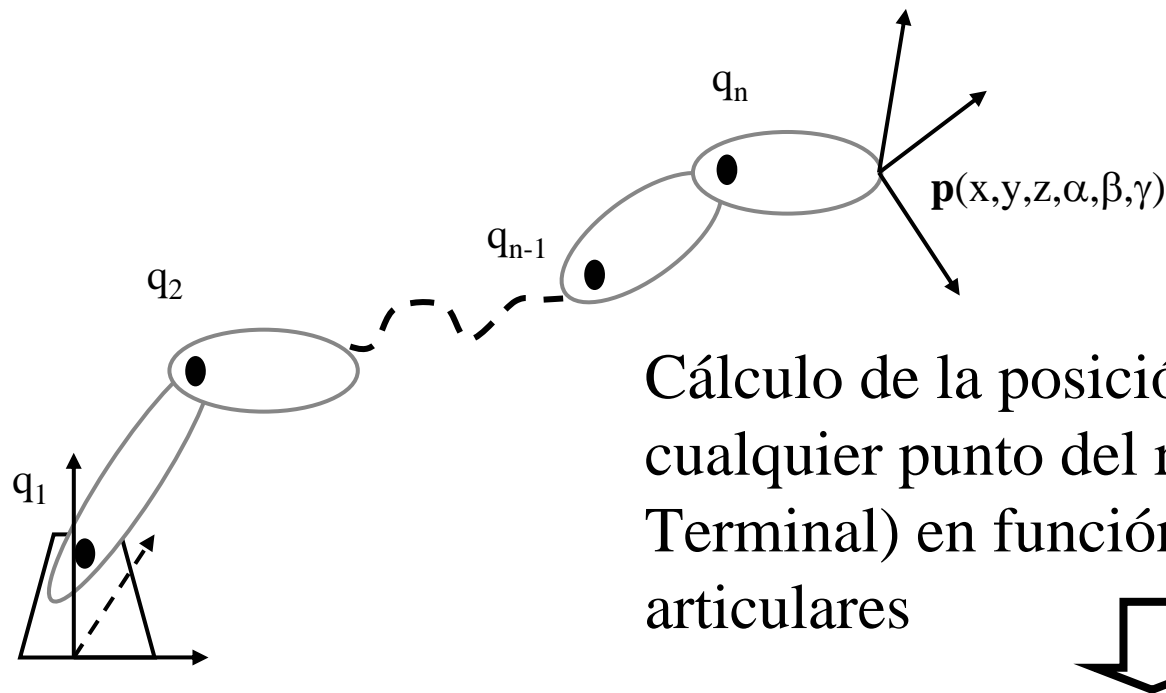
$$z = f_z(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

$$\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

$$\beta = f_\beta(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

$$\gamma = f_\gamma(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

# Modelo directo



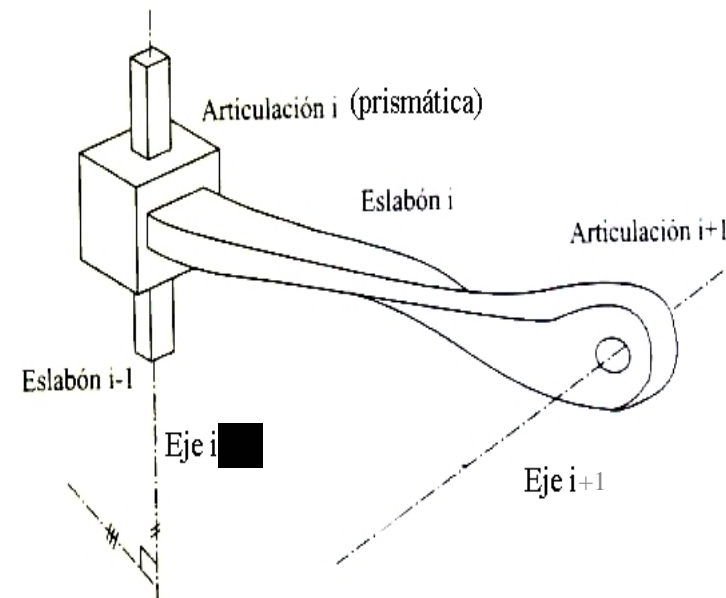
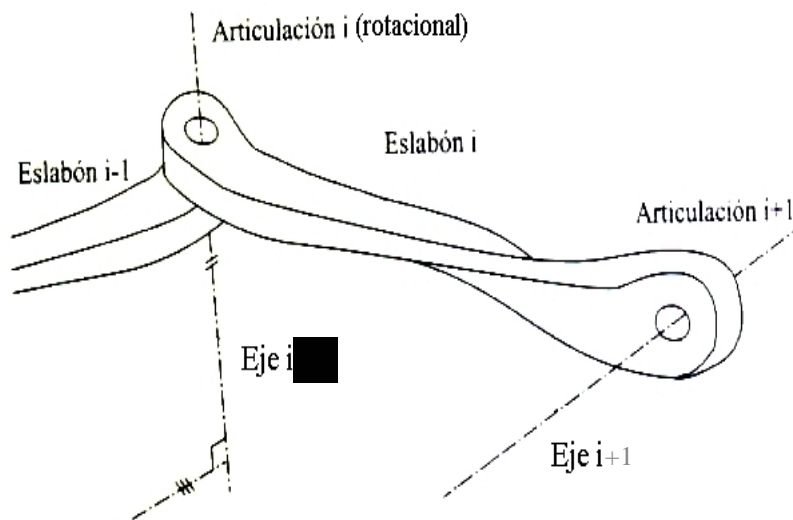
Cálculo de la posición y orientación de cualquier punto del robot (Elemento Terminal) en función las variables articulares



Procedimiento sistemático de Denavit-Hartenberg

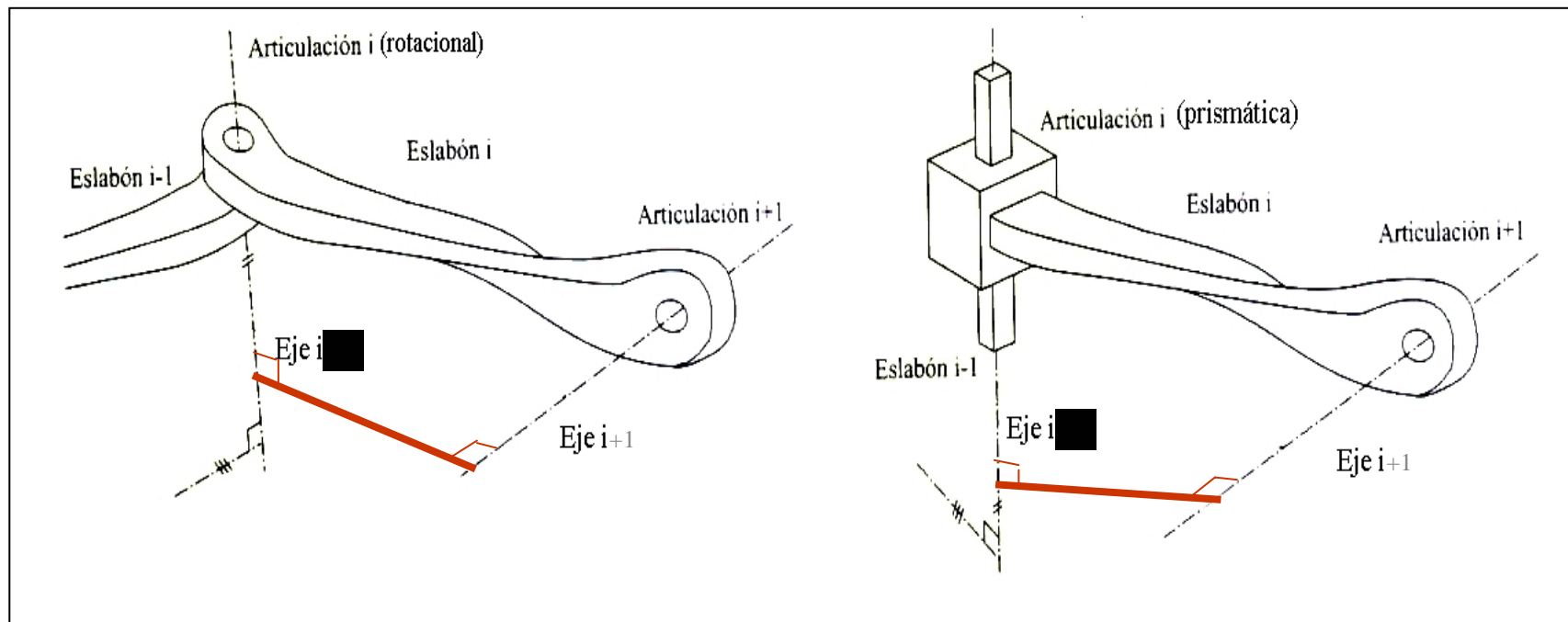
# Procedimiento de colocación de Ejes de Referencia

1. Identificar los Enlaces y Ejes de las articulaciones y trazar líneas imaginarias a lo largo de ellos.



# Procedimiento de colocación de Ejes de Referencia

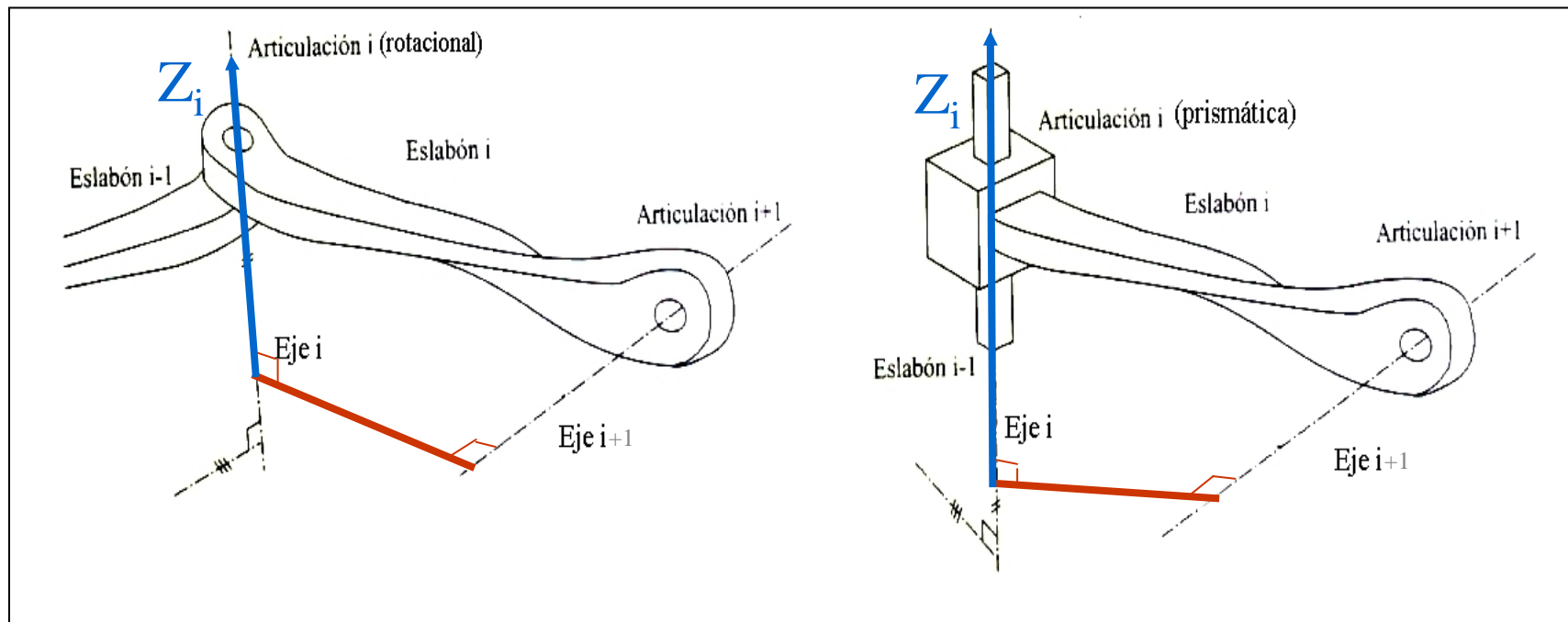
2. Identificar la perpendicular común entre ejes consecutivos. El origen del SR  $i$  estará en la intersección del Eje  $i$  con la normal común entre los ejes  $i$  e  $i+1$





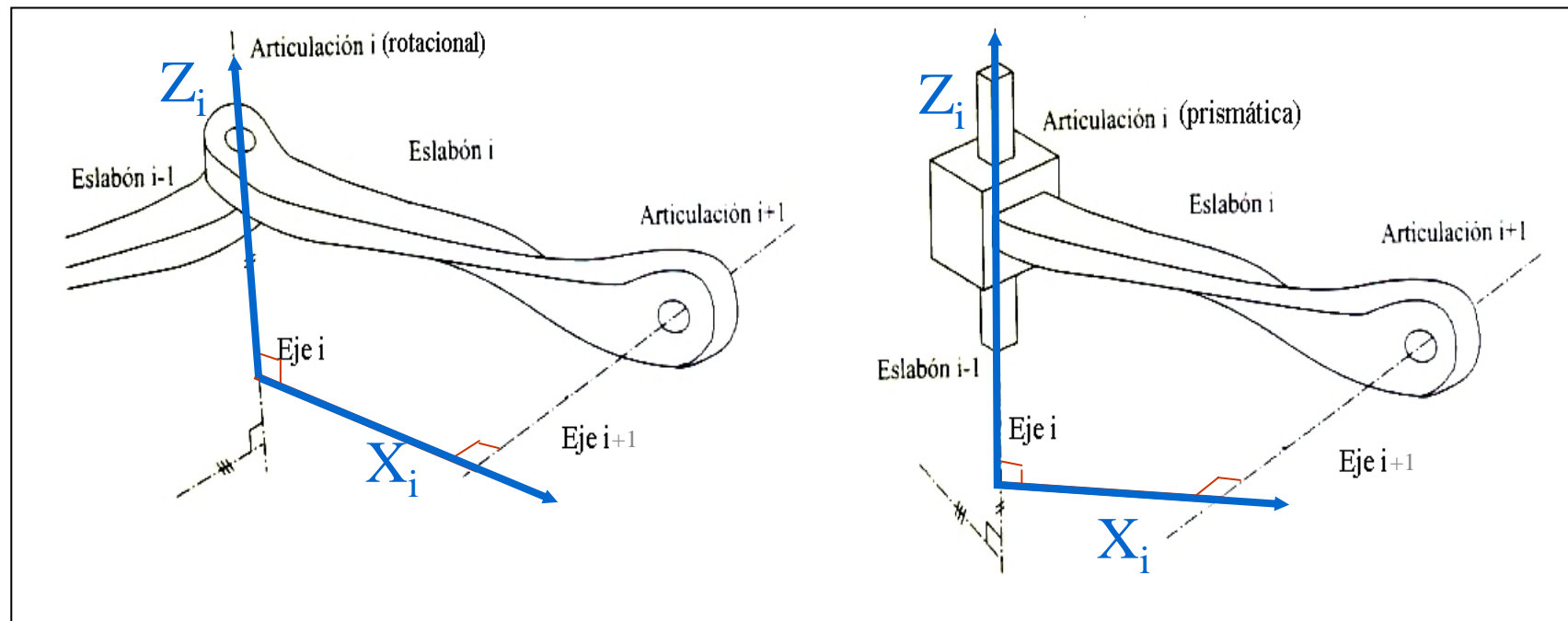
# Procedimiento de colocación de Ejes de Referencia

3. Colocar el eje  $Z_i$  sobre el eje de la articulación  $i$



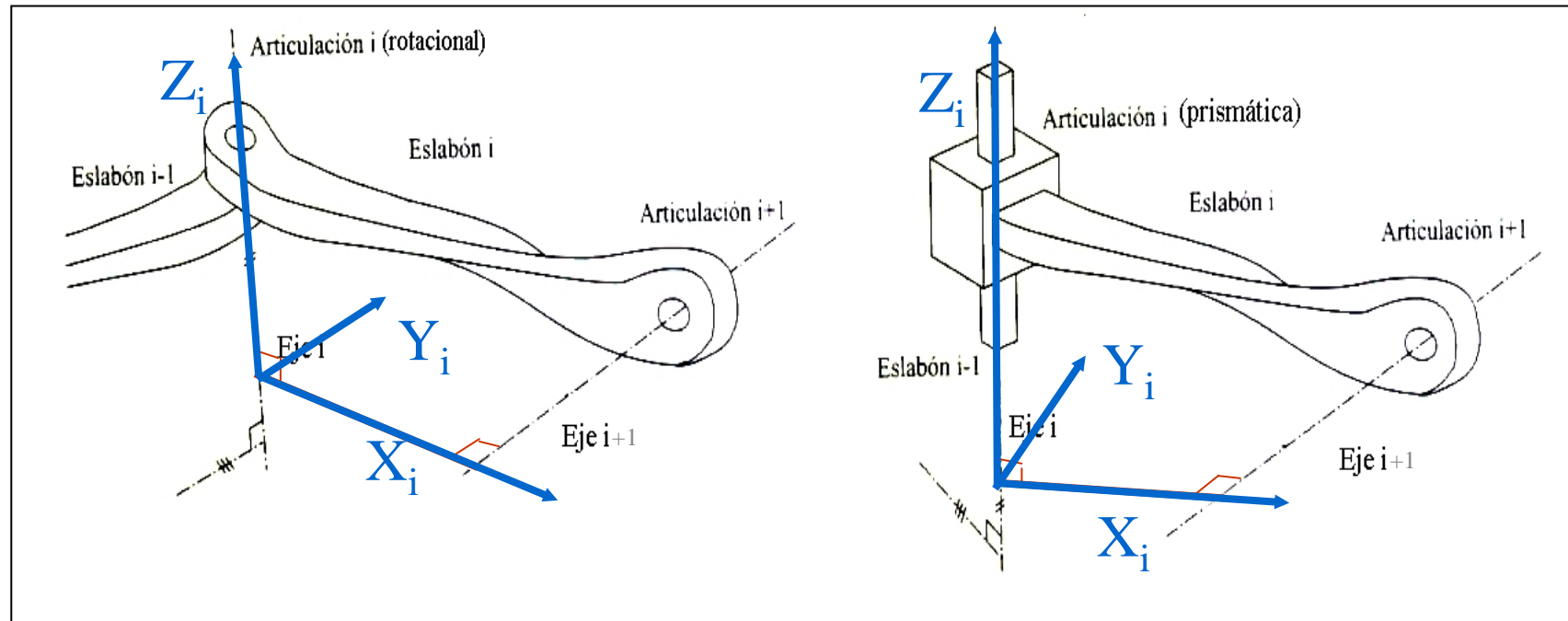
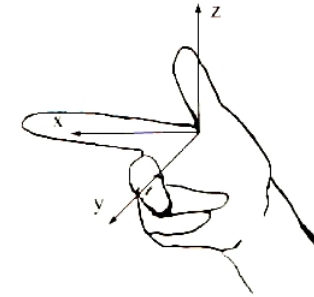
# Procedimiento de colocación de Ejes de Referencia

- Colocar el eje  $X_i$  sobre la perpendicular común, o si los ejes intersectan, sobre la normal al plano que forman los ejes  $Z_i$  y  $Z_{i+1}$



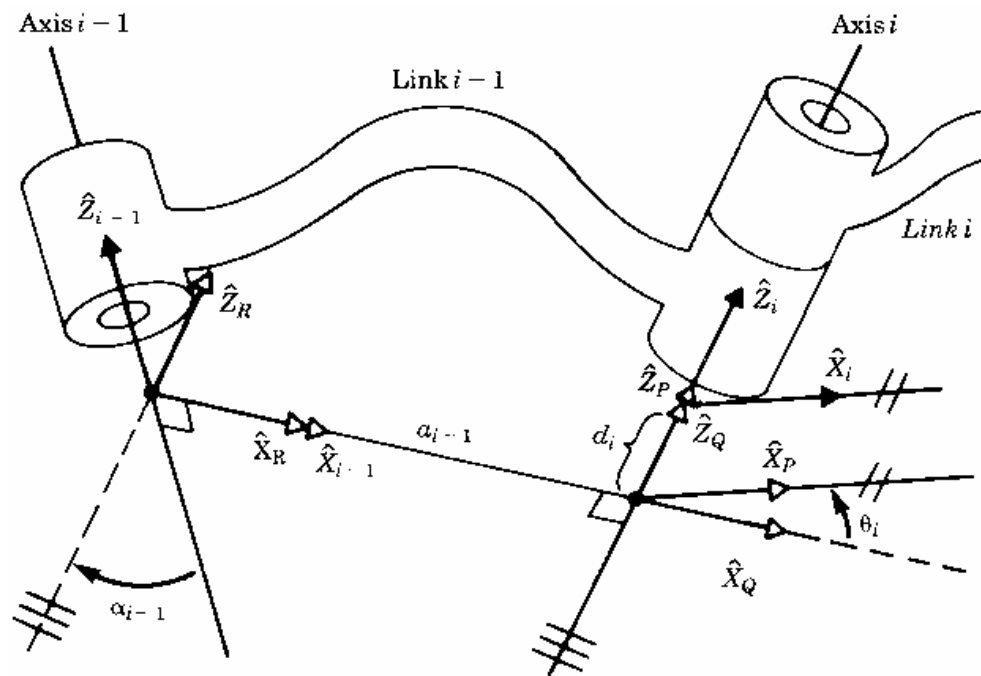
# Procedimiento de colocación de Ejes de Referencia

5. Colocar el eje  $Y_i$  completando un sistema de referencia dextrógiro



# Parámetros D-H

## Parámetros de Denavit-Hartenberg (D-H)



Cuatro Parámetros:

- Dos ángulos ( $\theta_i$ ,  $\alpha_{i-1}$ )
- Dos distancias ( $d_i$ ,  $a_{i-1}$ )

# Parámetros D-H

Definen el paso de un sistema de referencia asociado a una articulación al siguiente

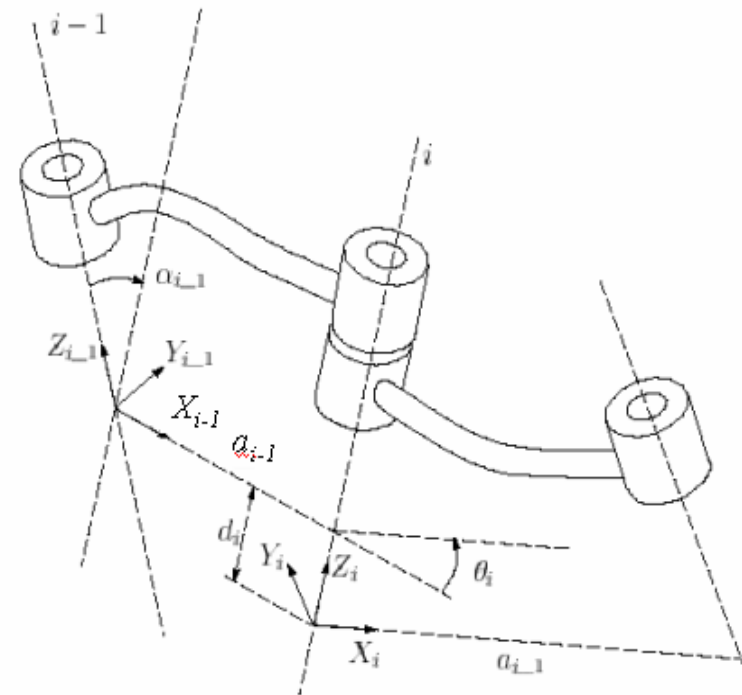
- Sólo dependen de las características geométricas de cada eslabón y de las articulaciones que le unen con el anterior y siguiente (no dependen de la posición del robot)
- Definen las matrices  $A$  que permiten el paso de un sistema de referencia asociado a una articulación al siguiente y por tanto definen las matrices  $T$

Cuatro Parámetros:

- Dos ángulos ( $\theta_i, \alpha_{i-1}$ )
- Dos distancias ( $d_i, a_{i-1}$ )

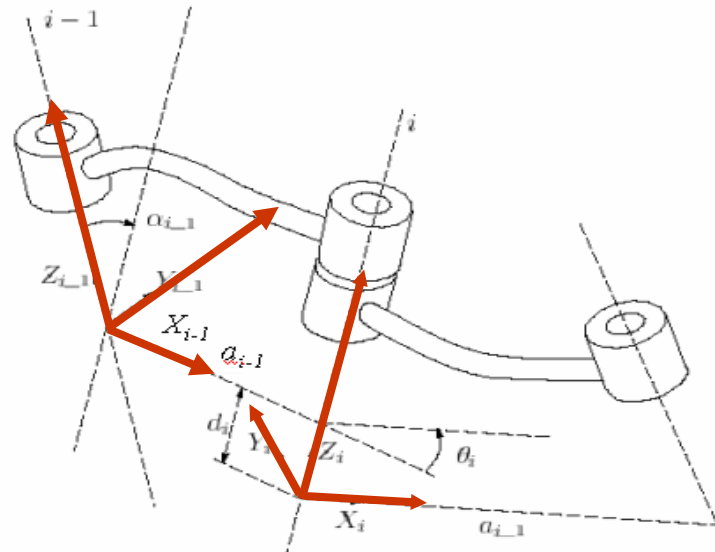
# Interpretación Parámetros D-H

- $\theta_i$ : Es el ángulo de  $x_{i-1}$  a  $x_i$  medida sobre  $z_i$  (utilizando la regla de la mano derecha).
- $d_i$ : Es la distancia de  $x_{i-1}$  a  $x_i$  medida a lo largo de  $z_i$
- $a_i$ : Es la distancia de  $z_i$  a  $z_{i+1}$  medida a lo largo de  $x_i$
- $\alpha_i$ : Es el ángulo de  $z_i$  a  $z_{i+1}$  medida sobre  $x_i$  (utilizando la regla de la mano derecha).



# Matrices de transformación

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}A_i &= T(x, \alpha_{i-1})T(a_{i-1}, 0, 0)T(z, \theta_i)T(0, 0, d_i) \\
 {}^{i-1}A_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ c\alpha_{i-1}s\theta_i & c\alpha_{i-1}c\theta_i & -s\alpha_{i-1} & -d_is\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1}s\theta_i & s\alpha_{i-1}c\theta_i & c\alpha_{i-1} & d_ic\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

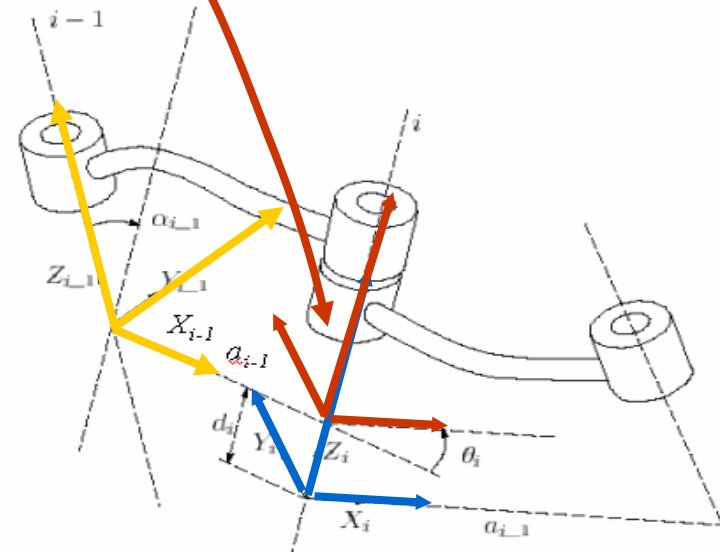


# Matrices de transformación

$${}^{i-1}A_i = T(x, \alpha_{i-1})T(a_{i-1}, 0, 0)T(z, \theta_i)T(0, 0, d_i)$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ c\alpha_{i-1}s\theta_i & c\alpha_{i-1}c\theta_i & -s\alpha_{i-1} & -d_is\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1}s\theta_i & s\alpha_{i-1}c\theta_i & c\alpha_{i-1} & d_ic\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



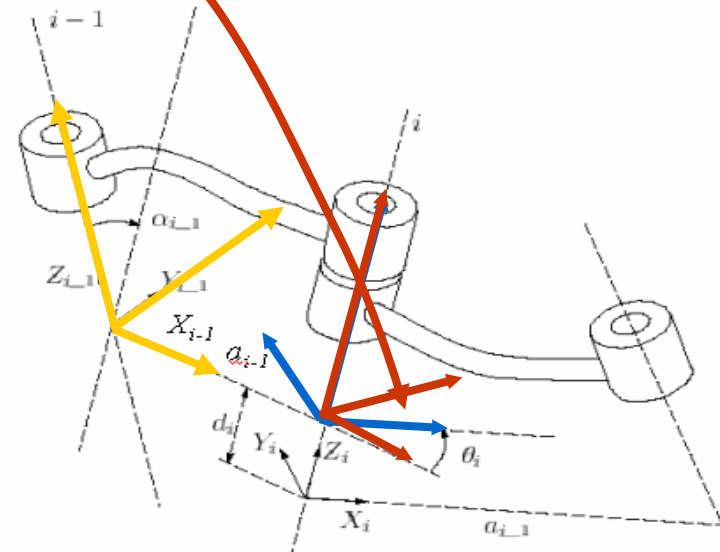


# Matrices de transformación

$${}^{i-1}A_i = T(x, \alpha_{i-1}) T(a_{i-1}, 0, 0) T(z, \theta_i) T(0, 0, d_i)$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ c\alpha_{i-1}s\theta_i & c\alpha_{i-1}c\theta_i & -s\alpha_{i-1} & -d_is\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1}s\theta_i & s\alpha_{i-1}c\theta_i & c\alpha_{i-1} & d_ic\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

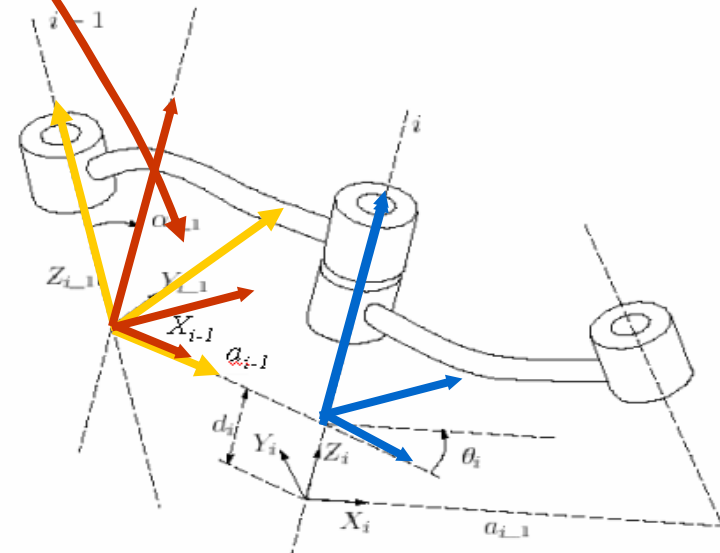


# Matrices de transformación

$${}^{i-1}A_i = T(x, \alpha_{i-1}) T(a_{i-1}, 0, 0) T(z, \theta_i) T(0, 0, d_i)$$

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ c\alpha_{i-1}s\theta_i & c\alpha_{i-1}c\theta_i & -s\alpha_{i-1} & -d_is\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1}s\theta_i & s\alpha_{i-1}c\theta_i & c\alpha_{i-1} & d_ic\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

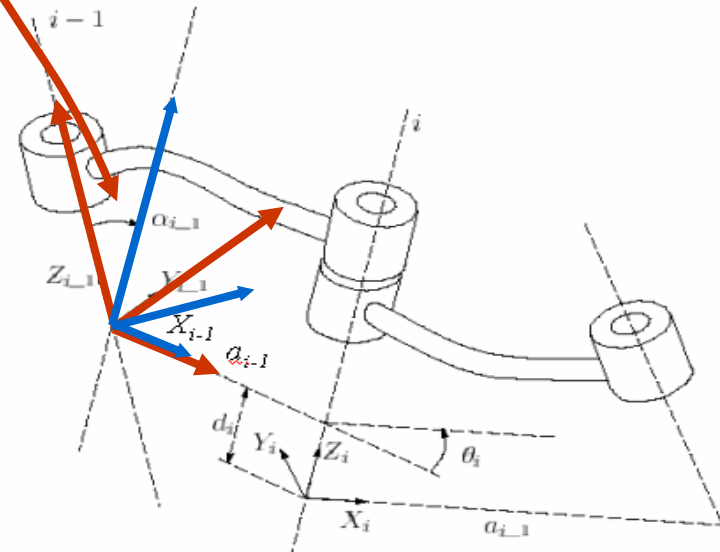


# Matrices de transformación

$${}^{i-1}A_i = T(x, \alpha_{i-1}) T(a_{i-1}, 0, 0) T(z, \theta_i) T(0, 0, d_i)$$

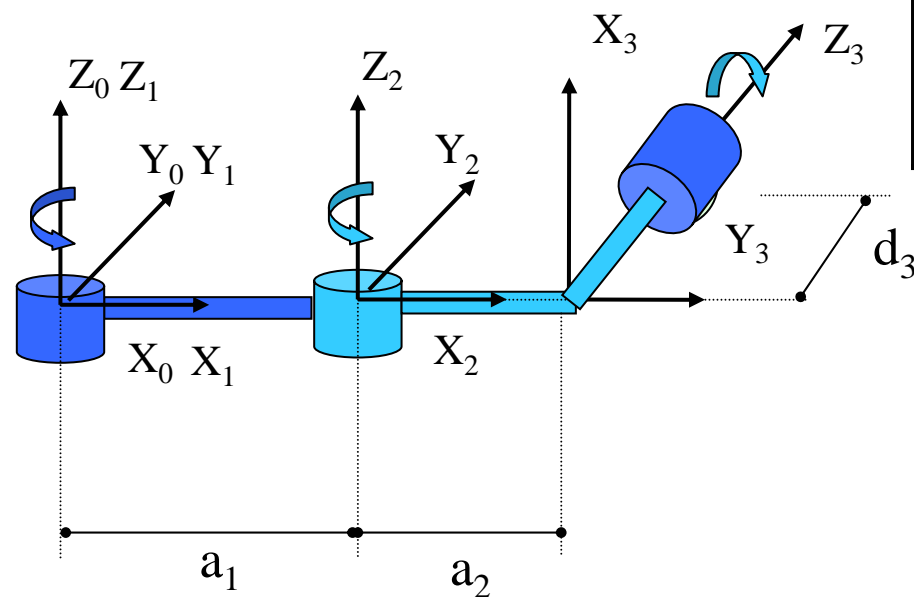
$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ c\alpha_{i-1}s\theta_i & c\alpha_{i-1}c\theta_i & -s\alpha_{i-1} & -d_is\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1}s\theta_i & s\alpha_{i-1}c\theta_i & c\alpha_{i-1} & d_ic\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Cinemática de un Robot Planar 2GDL

Ejemplo:

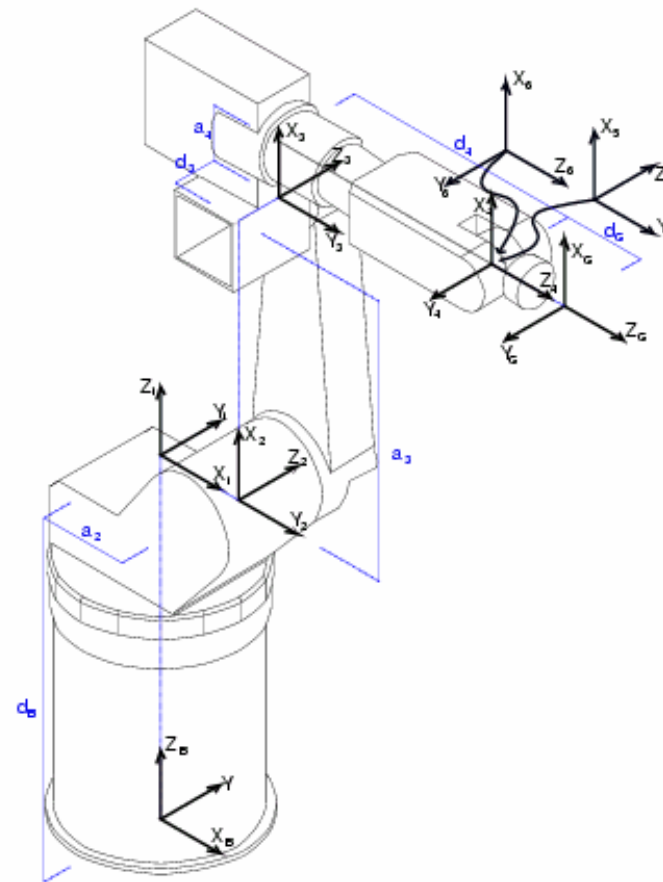


$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	$\theta_1$
<b>2</b>	<b>0</b>	$a_1$	<b>0</b>	$\theta_2$
<b>3</b>	$-90^\circ$	$a_2$	<b>0</b>	$\theta_2$

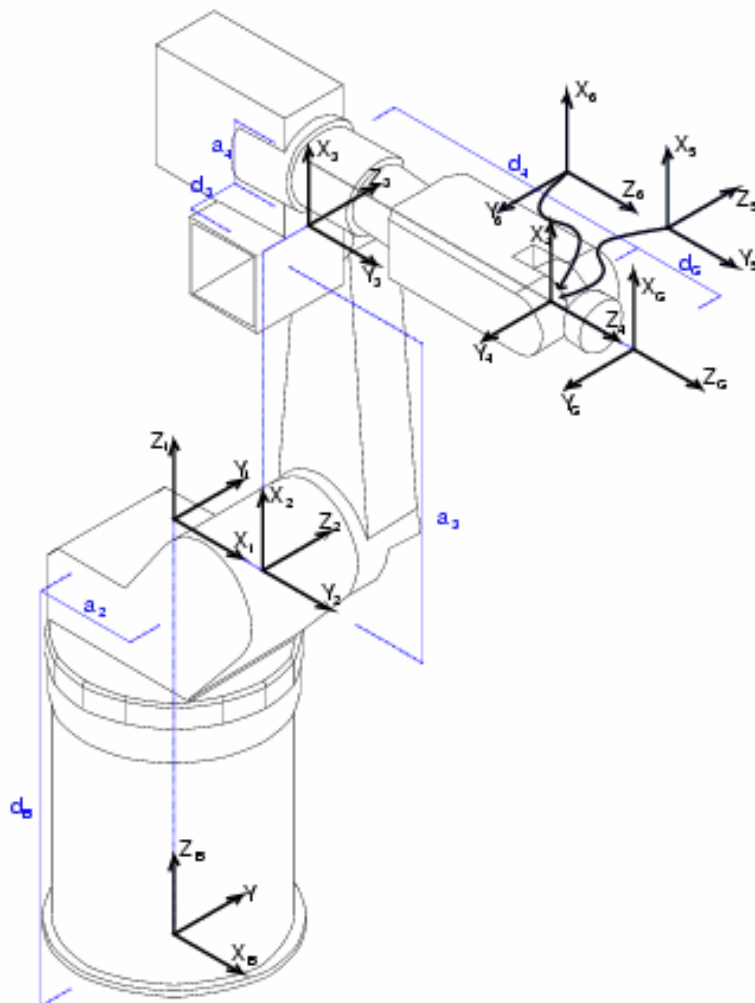
# Cinemática de un Robot Manipulador

Ejemplo:

Robot Industrial RM-10



# Cinemática de un Robot Manipulador



	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$\theta_i$	$d_i$
1	0	0	$\theta_1$	0
2	-90	$a_1$	$\theta_2$	0
3	0	$a_2$	$\theta_3$	$d_3$
4	-90	$a_3$	$\theta_4$	$d_4$
5	90	0	$\theta_5$	0
6	-90	0	$\theta_6$	0

# Cinemática de un Robot Manipulador

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s_4 & -c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_5^4 = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_6^5 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Cinemática de un Robot Manipulador

Matriz de Cambio para  
problema cinemático directo

$$T_G^B = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & x_G \\ n_y & s_y & a_y & y_G \\ n_z & s_z & a_z & z_G \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_G^B = T_0^B T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 T_5^4 T_6^5 T_G^6$$

$$n_x = c_1 c_6 (c_{23} c_4 c_5 - s_{23} s_5) + c_1 c_{23} s_4 s_6 + s_1 s_4 c_5 c_6 + s_1 c_4 s_6$$

$$n_y = s_1 c_6 (c_{23} c_4 c_5 - s_{23} s_5) + s_1 c_{23} s_4 s_6 - c_1 s_4 c_5 c_6 + c_1 c_4 s_6$$

$$n_z = -c_6 (s_{23} c_4 c_5 - c_{23} s_5) + s_{23} s_4 s_6$$

$$s_x = c_1 s_6 (s_{23} s_5 - c_{23} c_4 c_5) - c_1 c_{23} s_4 c_6 - s_1 s_4 c_5 s_6 + s_1 c_4 c_6$$

$$s_y = s_1 s_6 (s_{23} s_5 - c_{23} c_4 c_5) - s_1 c_{23} s_4 c_6 + c_1 s_4 c_5 s_6 + c_1 c_4 c_6$$

$$s_z = s_6 (c_{23} s_5 + s_{23} c_4 c_5) + s_{23} s_4 c_6$$



# Cinemática de un Robot Manipulador

Matriz de Cambio para  
problema cinemático directo

$$a_x = -c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5$$

$$a_y = -s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - c_1s_4s_5$$

$$a_z = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5$$

Y para la posición:

$$x_G = a_1c_1 + a_2c_1c_2 + a_3c_1c_{23} - d_3s_1 - d_4c_1s_{23} + d_Ga_x$$

$$y_G = a_1s_1 + a_2s_1c_2 + a_3s_1c_{23} + d_3c_1 - d_4s_1s_{23} + d_Ga_y$$

$$z_G = -a_2s_2 - a_3s_{23} - d_4c_{23} + d_Ga_z + d_B$$

# Cinemática Inversa

- **Objetivo:** encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial
- La resolución no es sistemática
- Depende de la configuración del robot (soluciones múltiples)
- No siempre existe solución en forma cerrada.
  - Condiciones suficientes para que exista:
    - ❖ Tres ejes de articulación adyacentes interseccionan en un punto (robot PUMA y robot Stanford)
    - ❖ Tres ejes de articulación adyacentes son paralelos entre sí (robot Elbow)

# Cinemática Inversa: Posibles Soluciones

- ❶ Procedimiento genérico a partir de los parámetros D-H
  - ❖ Método iterativo
  - ❖ Problemas de velocidad y convergencia
- ❷ Búsqueda de solución cerrada:  $q_k = f_k(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma); k = 1, \dots, n$ 
  - ❖ Posibilidad de resolución en tiempo real
  - ❖ Posibilidad de selección de la solución más adecuada
  - ❖ Posibilidad de simplificaciones
  - ❖ No siempre es posible

# Cinemática Inversa: Métodos

## ❶ Métodos geométricos

- Se suele utilizar para las primeras variables articulares
- Uso de relaciones geométricas y trigonométricas (resolución de triángulos)

## ❷ Resolución a partir de las matrices de transformación homogénea

- Despejar las  $n$  variables  $q_i$  en función de las componentes de los vectores  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{o}$ ,  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{p}$ .

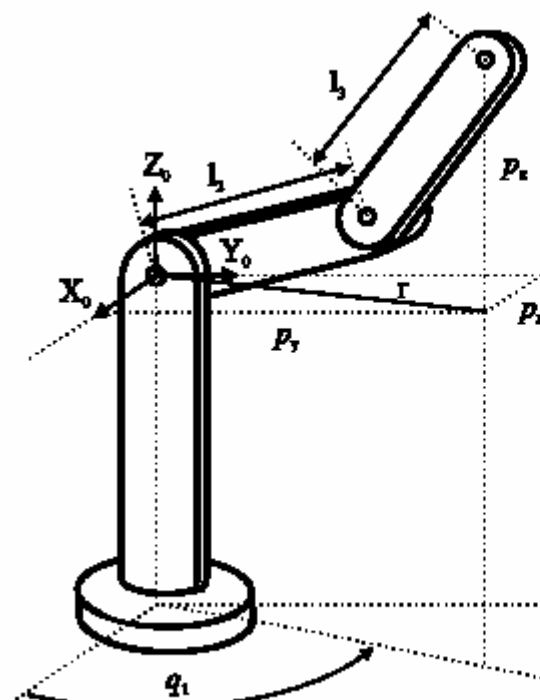
## ❸ Desacoplamiento cinemático

- En robots de 6 GDL
- Separación de orientación y posicionamiento

## ❹ Otros: álgebra de tornillo, cuaterniones duales, métodos iterativos...

# Cinemática Inversa: Método Geométrico

Ejemplo de solución del problema cinemático Inverso por métodos geométricos



$$q_1 = \arctg\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= p_x^2 + p_y^2 \\ r^2 + p_z^2 &= l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3\cos q_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$$

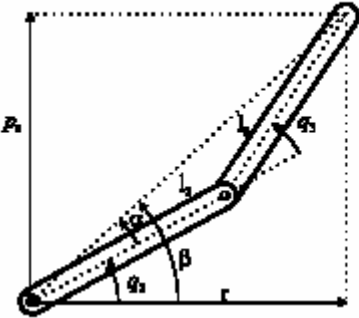
$$\sin q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

$$q_3 = \arctg\left(\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right)$$

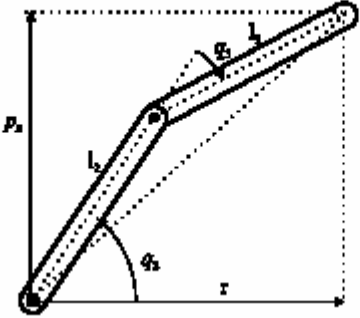
con  $\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$

# Cinemática Inversa: Método Geométrico

Ejemplo de solución del problema cinemático Inverso por métodos geométricos (Múltiples soluciones)



a) Codo estrojo



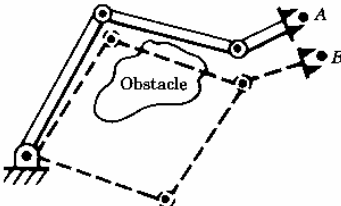
b) Codo abierto

$$q_2 = \beta - \alpha$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{p_z}{r}\right) = \arctg\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

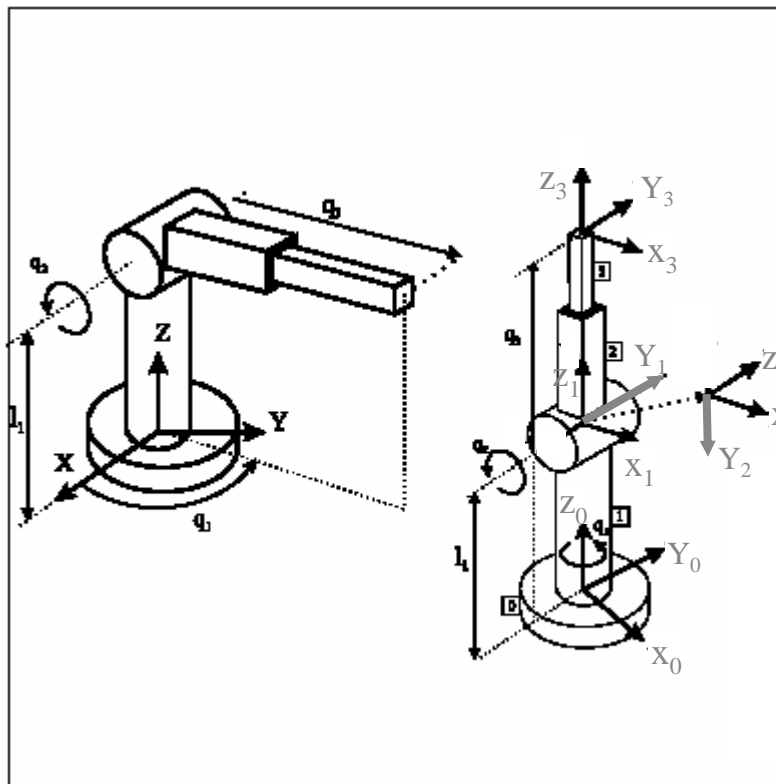
$$\alpha = \arctg\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

$$q_2 = \arctg\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) - \arctg\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$



# Cinemática Inversa: Método Matrices Homogéneas

Ejemplo de solución del problema cinemático Inverso mediante matrices de transformación homogéneas



$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	$l_1$	$q_1$
2	$-90^\circ$	0	0	$q_2$
3	0	0	$q_3$	0

$${}^0_1A_1 = \begin{bmatrix} cq_1 & -sq_1 & 0 & 0 \\ sq_1 & cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2A_2 = \begin{bmatrix} cq_2 & -sq_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sq_2 & -cq_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Cinemática Inversa: Método Matrices Homogéneas

Ejemplo de solución del problema cinemático Inverso mediante matrices de transformación homogéneas

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 \\
 & ({}^0\mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{T} = {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3 \quad \rightarrow \\
 & ({}^1\mathbf{A}_2)^{-1} ({}^0\mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{T} = {}^2\mathbf{A}_3
 \end{aligned}$$

$$({}^0\mathbf{A}_1)^{-1} {}^2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} Cq_1 & Sq_1 & 0 & 0 \\ -Sq_1 & Cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} cq_2 & -sq_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -sq_2 & -cq_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cq_2 & -sq_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ -sq_2 & -cq_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Cq_1 p_x + Sq_1 p_y = 0 \Rightarrow q_1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$q_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{l_1 - p_z}\right)$$

$$q_3 = Cq_2(p_x - 1) - Sq_2\sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$



# Cinemática Inversa: Método de reducción polinómica

Consiste en transformar las ecuaciones trascendentales obtenidas por métodos algebraicos o geométricos para que adopten forma polinómica, más fáciles en principio de resolver.

Algunas transformaciones usuales

$$u = \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

$$\sin \theta = \frac{2u}{1 + u^2}$$



$$a \cos \theta + b \sin \theta = c$$

*solution)*

$$a(1 - u^2) + 2bu = c(1 + u^2)$$

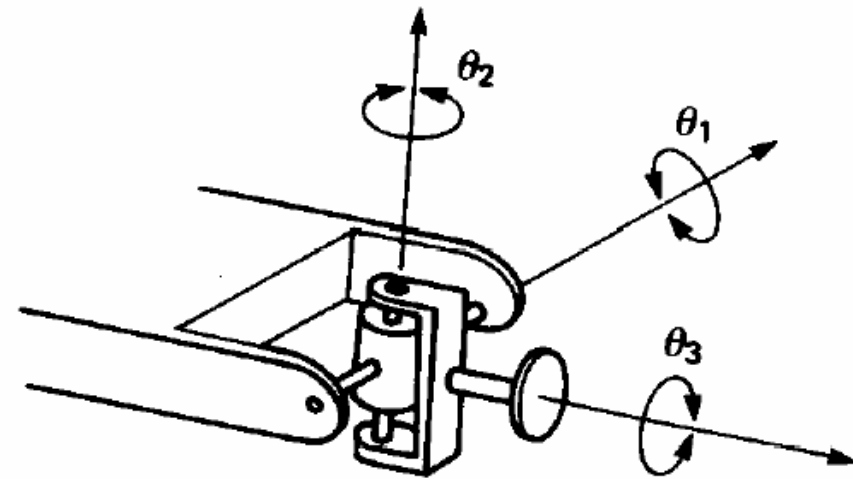
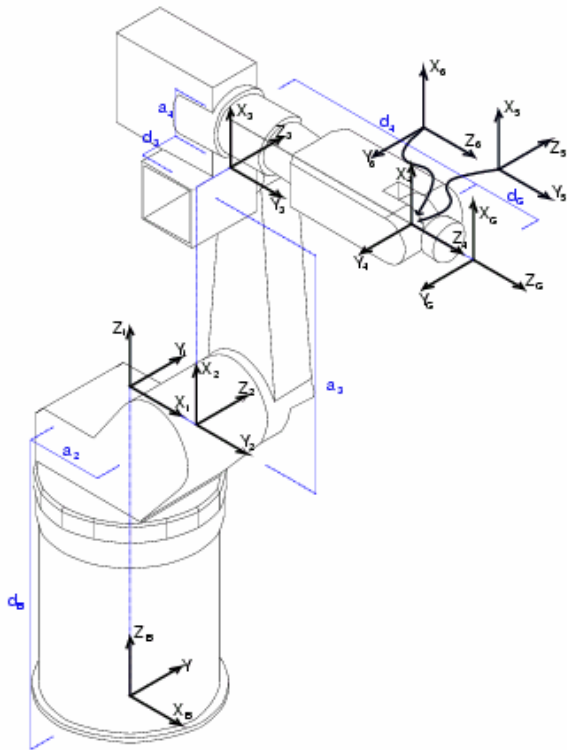
$$(a + c)u^2 - 2bu + (c - a) = 0$$

$$u = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2 - c^2}}{a + c}$$

$$\therefore \theta = 2 \tan^{-1} \left( \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2 - c^2}}{a + c} \right)$$

# Cinemática Inversa: Desacoplamiento cinemático

Es típico en robots de 6 GDL



Se puede resolver de forma explícita los 3GDL que definen la orientación de la garra.

# Cinemática Inversa: Desacoplamiento cinemático

Es típico en robots de 6 GDL

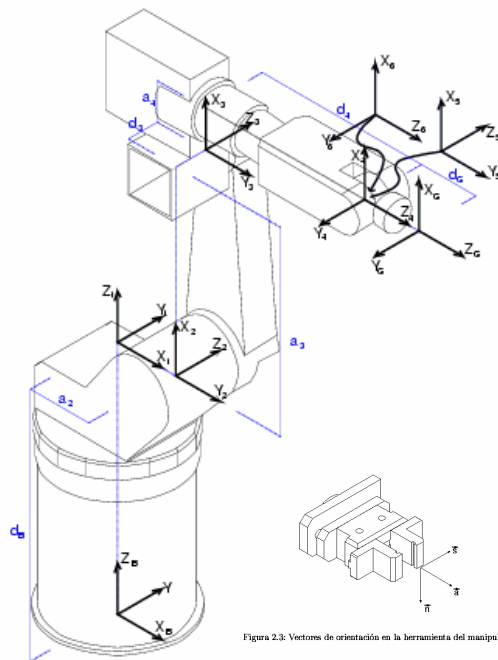


Figura 2.3: Vectores de orientación en la herramienta del manipulador

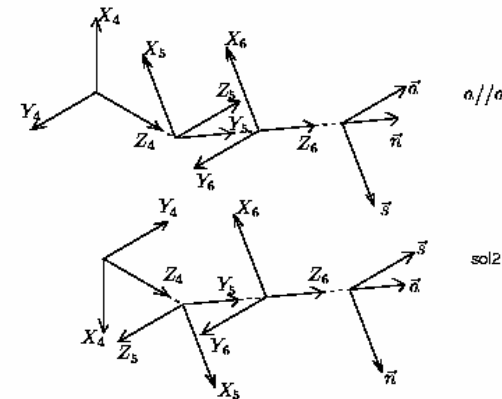


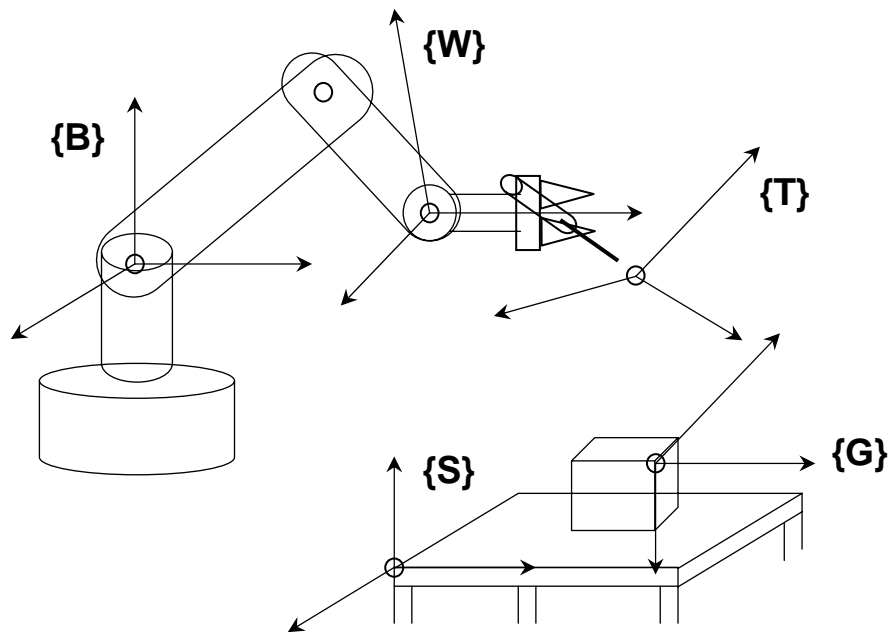
Figura 2.4: Soluciones para las tres últimas articulaciones

Ejes 4,5,6 se intersectan en un punto  $\Rightarrow$  Existe solución analítica por métodos algebraicos (Método de Pieper).

# Cinemática Inversa: Consideraciones computacionales

- Para seguimiento de trayectorias es necesario resolver el problema cinemático a gran velocidad (30 veces/seg o más).
- Son preferibles las soluciones cerradas explícitas (si existen) a las iterativas.
- Para acelerar cálculos generalmente se emplean tablas previamente calculadas (look-up tables)
- El coste de calcular  $n$  soluciones, no es necesariamente  $n$  veces el de calcular una única solución.

# Especificaciones del usuario y localizaciones estándar



- $\{S\}$  Marco de referencia de la celda de trabajo
- $\{B\}$  Marco de referencia base del robot
- $\{T\}$  Marco de referencia de la herramienta
- $\{G\}$  Marco de referencia objetivo (Objeto a manipular)
- $\{W\}$  Marco de referencia del extremo terminal del robot (Sin herramienta)

Objetivo: Planear secuencia de movimientos articulares para llevar  $\{T\}$  a  $\{G\}$  satisfaciendo las restricciones del problema

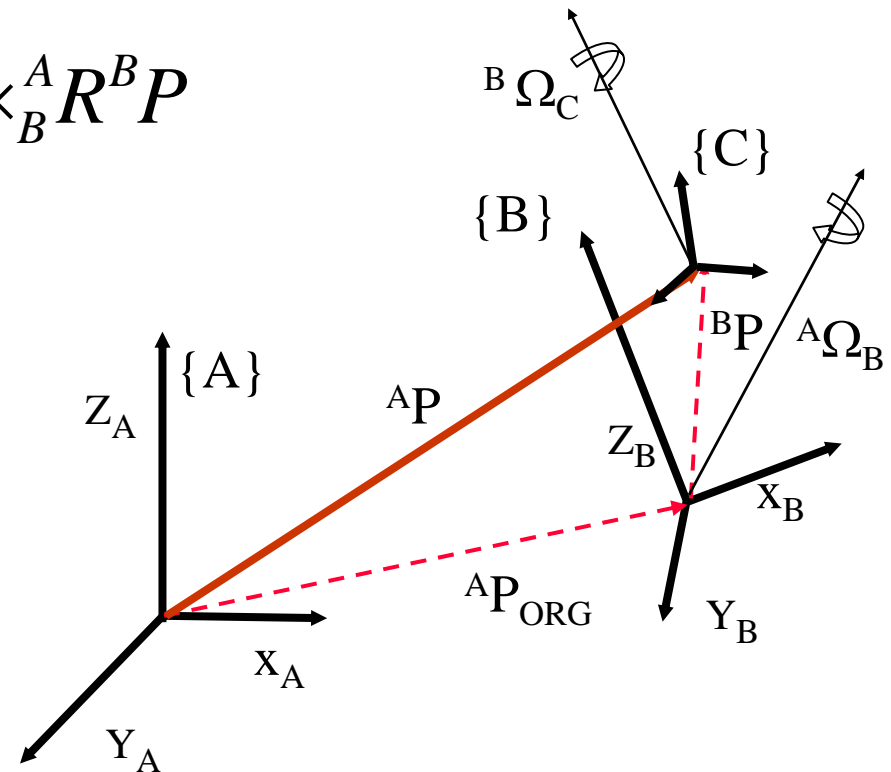
# Velocidades Lineales y Rotacionales

Transformación de velocidades lineales

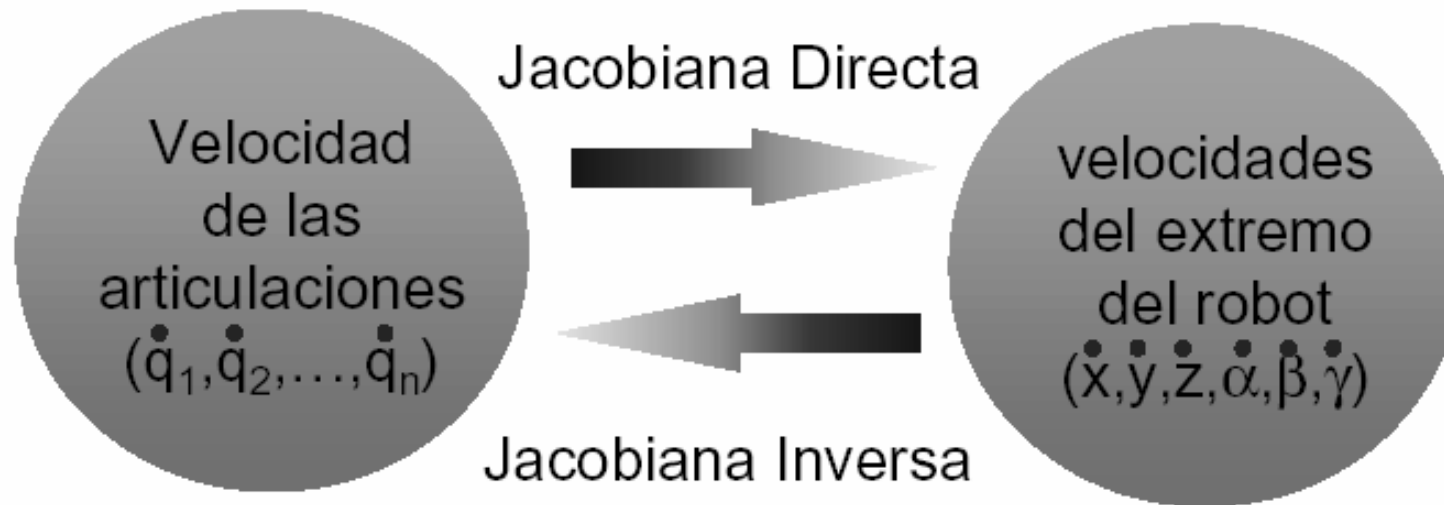
$${}^A V_P = {}^A V_{P_{ORG}} + {}^A R^B V_P + {}^A \Omega_B \times {}^A R^B P$$

Transformación de velocidades  
angulares

$${}^A \Omega_C = {}^A \Omega_B + {}^A R^B \Omega_C$$



# Matriz Jacobiana



**Matriz Jacobiana:** permite conocer las velocidades del extremo del robot a partir de las velocidades de cada articulación

# Matriz Jacobiana

## Relaciones Diferenciales

$$\begin{array}{lll} x = f_x(q_1, \dots, q_n) & y = f_y(q_1, \dots, q_n) & z = f_z(q_1, \dots, q_n) \\ \alpha = f_\alpha(q_1, \dots, q_n) & \beta = f_\beta(q_1, \dots, q_n) & \gamma = f_\gamma(q_1, \dots, q_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \dot{x} = \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{y} = \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{z} = \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ \dot{\alpha} = \sum_1^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{\beta} = \sum_1^n \frac{\partial f_\beta}{\partial q_i} \dot{q}_i & \dot{\gamma} = \sum_1^n \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_i} \dot{q}_i \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$



# Matriz Jacobiana

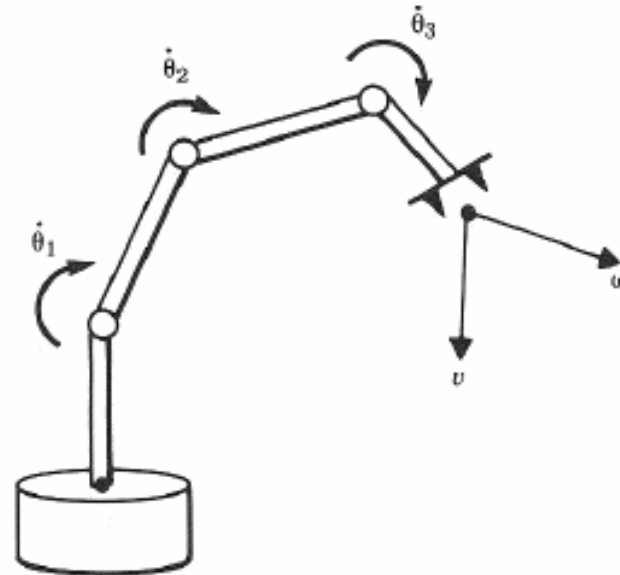
En Robótica la matriz Jacobiana describe las relaciones entre las velocidades articulares ( $\dot{\theta}_i$ ) y las velocidades lineales y de rotación del efector final ( $\dot{x}_i$ )

$$\underline{\dot{x}} = J(\underline{\theta})\underline{\dot{\theta}}$$

$$\underline{\dot{\theta}} = J(\underline{\theta})^{-1}\underline{\dot{x}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J(\underline{\theta}) \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dots \\ \dot{\theta}_N \end{bmatrix}$$

$6 \times 1$ 
 $6 \times N$ 
 $N \times 1$



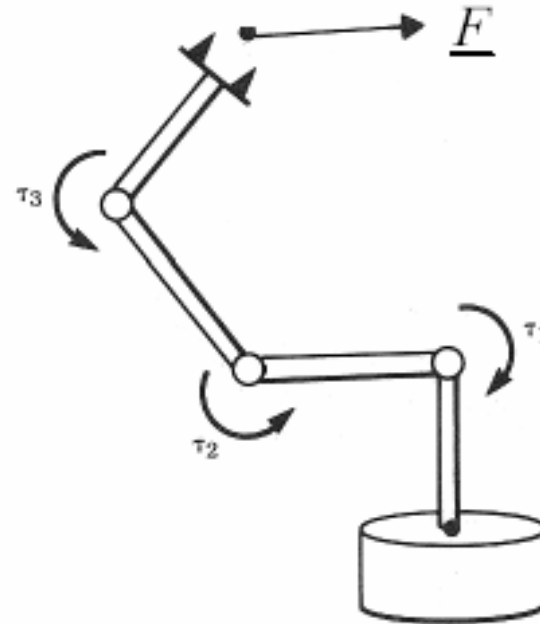
# Matriz Jacobiana en el dominio de las fuerzas

Adicionalmente estamos interesados en conocer la relación entre los pares articulares que se ejercen sobre el robot ( $\tau_i$ ) y las fuerzas/momentos ejercidas por el efector final ( $F_i$ )

Principio de los trabajos virtuales



$$F^T \delta X = \tau^T \delta \theta$$



# Matriz Jacobiana en el dominio de las fuerzas

Definición de Jacobiano

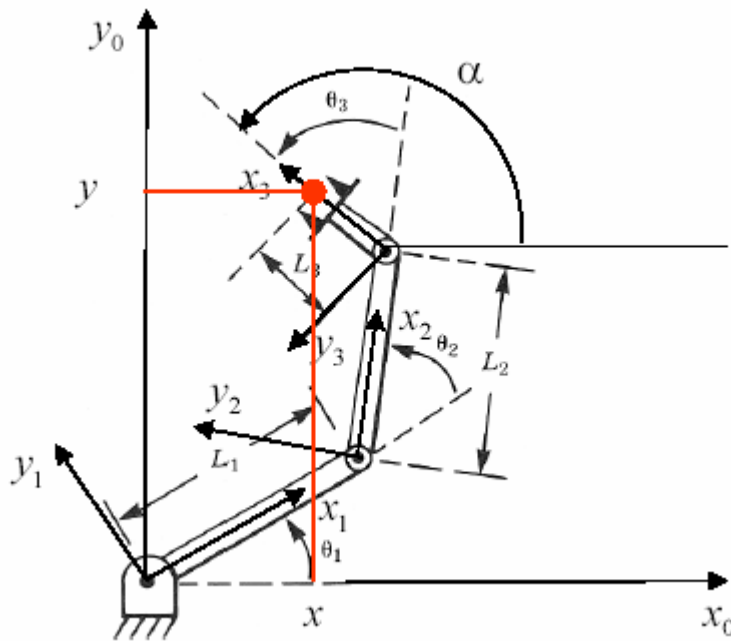
$$\delta X = J \delta \theta \quad \xrightarrow{\quad} \quad F^T J \delta \theta = \tau^T \delta \theta \quad \xrightarrow{\quad \forall \delta \theta \quad} \quad \tau = J^T F$$

La Expresión anterior se puede expandir como

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_N \end{bmatrix} \\ 6 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} J(\underline{\theta}) \\ 6 \times N \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} \tau^T \\ F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \\ N \times 1 \end{matrix}$$

# Matriz Jacobiana

Ejemplo: Jacobiana de un robot Plano de 3GDL



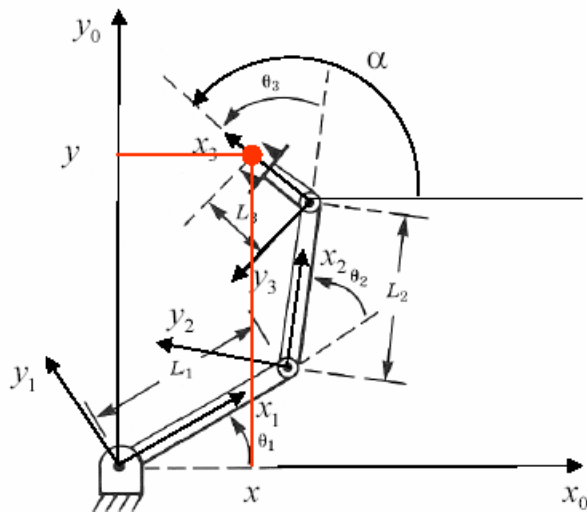
Calcular las relaciones que describen las siguientes igualdades

$$\dot{\underline{x}} = J(\underline{\theta}) \dot{\underline{\theta}}$$

$$\underline{\tau} = J(\underline{\theta})^T \underline{F}$$

# Matriz Jacobiana

Ejemplo: Jacobiana de un robot Plano de 3GDL



Parametros  
del efector  
final  $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \alpha \end{bmatrix}$

Cinemática Directa

$${}^0P_{3org,x} = x = L_1 c_1 + L_2 c_{12} + L_3 c_{123}$$

$${}^0P_{3org,y} = y = L_1 s_1 + L_2 s_{12} + L_3 s_{123}$$

$${}^0P_{3org,\alpha} = \alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

# Matriz Jacobiana

Ejemplo: Jacobiana de un robot Plano de 3GDL

$${}^0P_{3org,x} = x = L_1c_1 + L_2c_{12} + L_3c_{123}$$

$${}^0P_{3org,y} = y = L_1s_1 + L_2s_{12} + L_3s_{123}$$

$${}^0P_{3org,\alpha} = \alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$



$$\frac{d}{dt}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -L_1s_1\dot{\theta}_1 - L_2s_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) - L_3s_{123}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ &= -(L_1s_1 + L_2s_{12} + L_3s_{123})\dot{\theta}_1 - (L_2s_{12} + L_3s_{123})\dot{\theta}_2 - (L_3s_{123})\dot{\theta}_3 \\ \dot{y} &= L_1c_1\dot{\theta}_1 + L_2c_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + L_3c_{123}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \\ &= (L_1c_1 + L_2c_{12} + L_3c_{123})\dot{\theta}_1 + (L_2c_{12} + L_3c_{123})\dot{\theta}_2 + (L_3c_{123})\dot{\theta}_3 \\ \dot{\alpha} &= \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3\end{aligned}$$

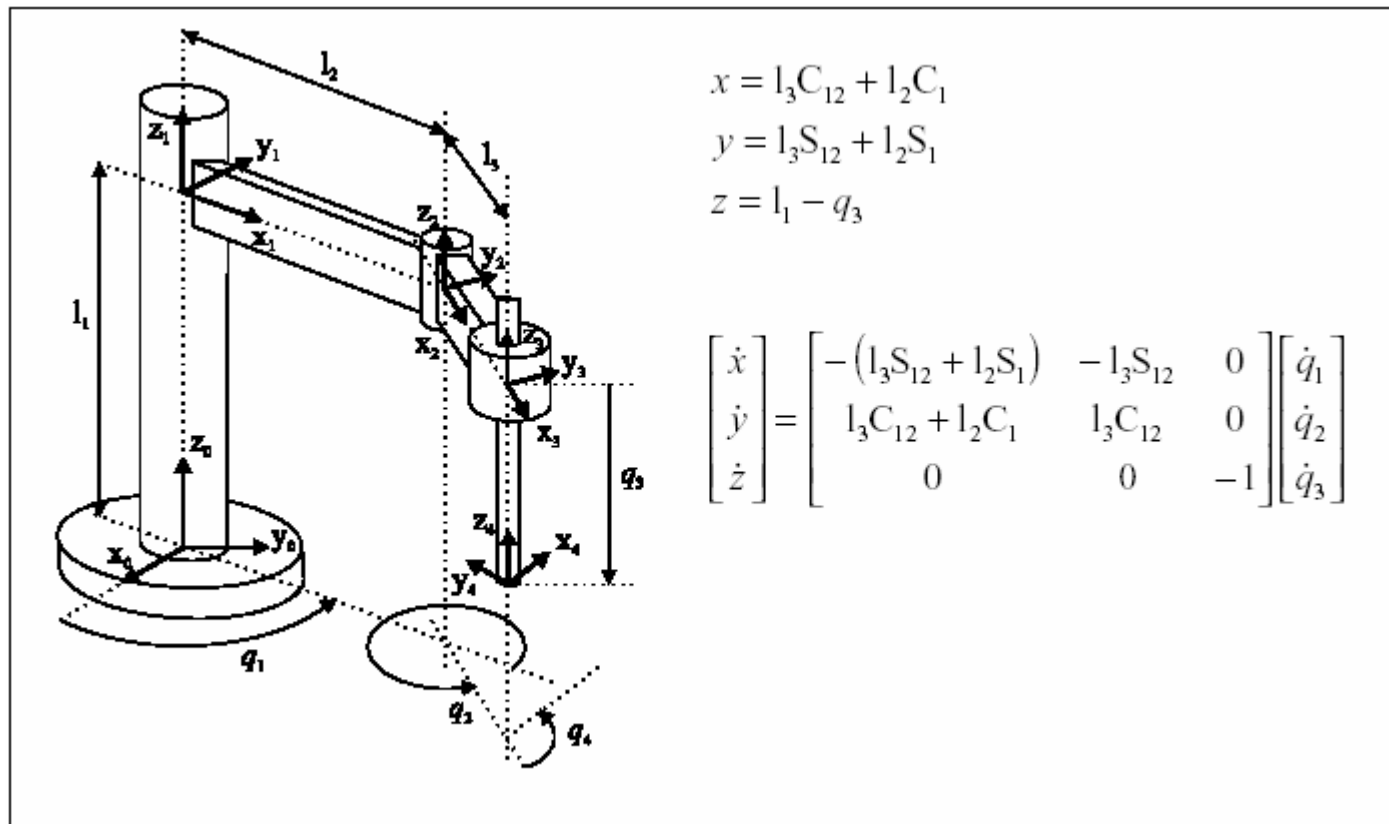
# Matriz Jacobiana

En forma matricial tenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} - L_3 s_{123} & -L_2 s_{12} - L_3 s_{123} & -L_3 s_{123} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} + L_3 c_{123} & L_2 c_{12} + L_3 c_{123} & L_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

# Matriz Jacobiana

Jacobiana de un robot SCARA





# Matriz Jacobiana Inversa

- Inversión simbólica de la matriz jacobiana
  - Gran complejidad (matriz 6x6)
- Evaluación numérica de **J** e inversión numérica
  - Necesidad de recómputo continuo
  - En ocasiones **J** no es cuadrada ➡ matriz pseudoinversa
  - En ocasiones  $|\mathbf{J}| = 0$
- A partir del modelo cinemático inverso

$$\begin{array}{l}
 q_1 = f_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \\
 \vdots \\
 q_n = f_n(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)
 \end{array}
 \quad
 \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}
 \quad
 \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \gamma} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \gamma} \end{bmatrix}$$

# Matriz Jacobiana Inversa: Configuraciones Singulares

- Aquellas en las que  $|\mathbf{J}| = 0$  (Jacobiano nulo)
- Incremento infinitesimal coordenadas cartesianas implica incremento infinito coordenadas articulares
- Implica pérdida de algún grado de libertad
- Tipos
  - Singularidades en los límites del espacio de trabajo del robot
  - Singularidades en el interior del espacio de trabajo del robot
- Requieren su estudio y eliminación

