ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՒ ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՖԱԿՈՒԼՏԵՏ

ԴԻՍԿՐԵՏ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՒ ՏԵՍԱԿԱՆ ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ԱՄԲԻՈՆ

«ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱ ԵՎ ՀԱՄԱԿԱՐԳՉԱՅԻՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ» ԿՐԹԱԿԱՆ ԾՐԱԳԻՐ

ԱՄԻՐԲԵԿՅԱՆ ԷԴԳԱՐ ՋՈՒՄԻԿԻ

ԱՎԱՐՏԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔ

ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՒԵՐԻ ՀԱՄԱԴՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ԿՈՄԲԻՆԱՏՈՐԱՅԻՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄ

«Ինֆորմատիկա և կիրառական մաթեմատիկա» մասնագիտությամբ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի բակալավրի որակավորման աստիճանի հայցման համար

ԵՐԵՎԱՆ 2021

Ուսանող՝ ________________________

Ստորագրություն

____

ազգանուն, անուն

Ղեկավար՝ ________________________

Ստորագրություն

____

Գիտ. աստիճան, կոչում, ազգանուն, անուն

«Թույլատրել պաշտպանության»

Ամբիոնի Վարիչ՝ ________________________

Ստորագրություն

____

Գիտ. աստիճան, կոչում, ազգանուն, անուն

«—08—»——06——2021թ.

«—08—»——06——2021թ.

ՀԱՄԱՌՈՏԱԳԻՐ

<u>Քառակուսային ձևերի համադրույթների կոմբինատորային կառուցում</u>

<u>Комбинаторное построение композиций квадратичных форм</u>

<u>Combinatoric construction of compositions of the quadratic forms</u>

Քառակուսային ձևերի համադրույթների կոմբինատորային կառուցում

Աշխատանքում բացատրվում է գծային հանրահաշիվների, քառակուսային ձևերի ու դրանց համադրույթների տեսական մասերը որը ծառայեցվում է աշխատանքի բուն թեմայի ներկայացմանը՝ այն է Համադրույթների գործնականում հարմար Կոմբինատոր Կառուցման եղանակի ուսումնասիրությանը: Կազմվում է վերջինիս մեքենայական ծրագիրը:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Մաթեմատիկայի, մասնավորապես հանրահաշվի և մաթեմատիկական անալիզի զարգացմանը էապես նպաստել է թվի հասկացության շարունակական ընդհանրացումները:

1848 թվականին Ռ. Համիլտոնը հայտնագործեց քվատերիոնների (քառյակների) հանրահաշիվը, իսկ մի փոքր ավելի ուշ Ա. Քեյլին հայտնագործեց օկտոնիոնների (ությակների) հանրահաշիվը: Թեև դրանք իրենց հատկություններով որոշակիորեն զիջում են իրական և կոմպլեքս թվերին (քվատերիոնների բազմապատկումը տեղափոխական չէր, իսկ օկտոնիոնների բազմապատկումը նաև զուգորդական չէր), դրանք ունեցան որոշ կիրառություններ մաթեմատիկայում և ֆիզիկայում: Այդ պահից սկսած հիպերկոմպլեքս թվերի համակարգերի կառուցման խնդիրը բաժանվեց երկու ուղղության՝ **բաժանումով գծային հանրահաշիվների** և **նորմավորված գծային հանրահաշիվների** ուսումնասիրությանը [1]: Քառակուսային ձևերի համադրույթի հասկացությունը ծագել է R^n էվկլիդյան տարածություններում նորմավորված գծային արտադրյալներ կառուցելու խնդրից: Նախ Ա. Հուրվիցը ապացուցեց [1], որ նորմավորված հանրահաշվի չափականությունը կարող է լինել միայն և միայն 1,2,4 կամ 8: Այնուհետև Յ. Ռադոնը ընդհանրացնելով նորմավորված հանրահաշվի հասկացությունը, ապացուցեց որ $R^n \times R^r \to R^n$ երկգծային նորմավորված արտադրյալներ գոյություն ունեն միայն և միայն այն դեպքերում, երբ $r \leq \rho(n)$, որտեղ $\rho(n)$-ը այսպես կոչված Ռադոն-Հուրվիցի թիվն է:

Առաջանում է հարց. եթե $r \leq \rho(n)$, ապա ինչպես ուղղակիորեն՝ բացահայտ տեսքով կառուցել վերոնշյալ տեսքի նորմավորված արտադրյալներ: Այդպիսի մի եղանակ առաջարկվել է [2] հոդվածում, որտեղ նորմավորված արտադրյալները կառուցվում են կոմբինատոր բանաձևերով:

Ավարտական աշխատանքը նվիրված է այդ կոմբինատորային եղանակի ուսումնասիրությանը և կազմված է **հինգ բաժիններից**:

Աշխատանքի **առաջին բաժնում** դիտարկված է գծային հանրահաշվի հասկացությունը, շոշափվում են թեմաներ նրանց տեսակների ու հատկությունների մասին խոսվում է գծային հաստատունների համակարգերի մասին:

Երկրորդ բաժնում անդրադարձ է կատարվում նորմավորված գծային հանրահաշիվներին, սահմանվում են քառակուսային ձևերի համադրույթները ուսումնասիրվում է դրանց գոյության դեպքերը և հիմնավորումը, համադրույթների թույլատրելիությունը:

Երրորդ բաժնում ներկայացված է քառակուսային ձևերի համադրությունները: Բաժնի առաջին ենթաբաժնում խոսվում է համադրույթի հասկացության մասին և ձևակերպվում են խնդրի նպատակները և հիմնարար թեորեմները, սահմանվում են երկգծային ձևերը: Երկրորդ ենթաբաժնում ներկայացված է քառակուսային ձևերի համադրույթների ընդհանրացումը հիմնվելով նախորդ ենթաբաժնի ուսումնասիրության վրա, վերաձևակերպվում են թեորեմների ընդհանրացված դեպքերը:

Չորրորդ բաժնում դիտարկում ենք քառակուսային ձևերի կառուցման գործնականում ամենահարմար՝ կոմբինատորային եղանակը հիմնված տեղափոխությունների և նշանների ֆունկցիաների վրա, որոնք համապատասխանաբար ներկայացվում են բաժնի առաջին և երկրորդ ենթաբաժիններում:

Հինգերորդ բաժնում իմպլեմենտացվում է համադրությունների կառուցման կոմբինատորային եղանակի հաշվողական ծրագրային համակարգը C++ ծրագրավորման լեզվով: Ցուցադրվում է ալգորիթմի աշխատանքը հաշվողական մեքենայում:

1. ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

V գծային տարածությունը F դաշտի վրա կոչվում է գծային հանրահաշիվ, եթե սահմանված է $V \times V \to V$ բազմապատկման գործողություն, այսինքն ցանկացած $(a,b) \in V \times V$ զույգի համար $(a,b) \to c \in V$ համապատասխանություն (նշանակվում է $c = a \cdot b$), որը բավարարում է հետևյալ երկու պայմաններին՝

1. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\,,\;\; c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$
2. $(ka) \cdot b = a \cdot (kb) = k \cdot (a \cdot b)$

Ցանկացած $a, b, c \in V$ տարրերի և $k \in F$ տարրերի դեպքում:

Գծային հանրահաշվի չափականություն կոչվում է V-ի **չափականությունը**: Մենք սահմանափակվելու ենք այն դեպքով, երբ F-ը իրական թվերի R դաշտն է: Նկատենք, որ յուրաքանչյուր գծային հանրահաշիվ օղակ է և գծային հանրահաշվի տեսությունը օղակների տեսության մաս է կազմում:
V գծային հանարահաշվի ենթահանրահաշիվ կոչվում է $W \subset V$ գծային ենթատարածությունը, V-ից W-ի վրա մակածված բազմապատկման գործողությունով (ենթադրվում է, որ W-ն փակ է այդ գործողության նկատմամբ):

Գծային հանրահաշիվը կոչվում է

1. **Զուգորդական** հանրահաշիվ, եթե՝
$$a(bc) = (ab)c, \qquad \forall\, a, b, c \in V$$
2. **Կոմուտատիվ** հանրահաշիվ, եթե՝
$$a \cdot b = b \cdot a, \qquad \forall a, b \in V$$
3. **Միավորով** հանրահաշիվ , եթե գոյություն ունի $e \in V$ տարր, որ
$$e \cdot a = a \cdot e = a, \qquad \forall a \in V$$
տարրի դեպքում
4. **Առանց 0-ի բաժանարարների** հանրահաշիվ, եթե $a \cdot b = 0$ այն և միայն այն դեպքում երբ կամ $a = 0$ կամ $b = 0$
5. **Բաժանումով** հանրահաշիվ , եթե
$$a \cdot x = b, \qquad x \cdot a = b, \qquad a \neq 0$$
հավասարումներից յուրաքանչյուրն ունի միակ լուծում:

Օրինակներ՝

- Իրական թվերի R դաշտը 1 չափականության գծային հանրահաշիվ է, որը բավարարում է 1-5րդ պայմաններին
- Կոմպլեքս թվերի C դաշտը կարելի է դիտարկել որպես 2 չափականության իրական գծային հանրահաշիվ, որը նույնպես բավարարում է բոլոր 1-5րդ պայմաններին
- $n \times n$ չափսերի իրական տարրերով բոլոր մատրիցների բազմությունը n^2 չափականության գծային հանրահաշիվ է մատրիցների սովորական բազմապատկումով, որը բավարարում է միայն 1-ին և 3-րդ պայմաններին։
- Մի փոփոխականի $R[x]$ բազմանդամների օղակը անվերջ չափականության գծային հանրահաշիվ է, որը բավարարում է 1-4րդ պայմաններին բայց չի բավարարում 5-րդ պայմանին

Այժմ քննարկենք հետևյալ հարցը.

Ինչպե՞ս սահմանել բազմապատկման գործողությունը գծային տարածությունում, որպեսզի այն վերածվի գծային հանրահաշվի։

Դիտարկենք $\dim V < \infty$ դեպքը։

Դիցուք ունենք $(V, \ \cdot)$ գծային հանրահաշիվ և $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$ բազիս։

Դիտարկենք $e_i \cdot e_j$ արտադրյալների վերլուծությունները ըստ բազիսի՝

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} P_{ij}^k e_k , \qquad P_{ij}^k \in R, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Գործակիցների $\{P_{ij}^k\}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n$ համախմբությունը կոչվում է տվյալ բազիսի նկատմամբ գծային հանրահաշվի **կառուցվածքային հաստատունների համակարգ**։

Նկատենք, որ բազմապատկումը հանրահաշվում լիովին որոշվում է կառուցվածքային հաստատունների համակարգով՝

եթե

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i , \quad b = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$$

ապա

$$a\cdot b=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j\right)=\sum\nolimits_{i,j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\left(e_i e_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\beta_j\left(\sum_{k=1}^{n}P_{ij}^{k}e_k\right)=$$

$$=\sum\nolimits_{k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\beta_j P_{ij}^{k}\right)e_k$$

Այսպիսով գծային տարածությունում արտադրյալ սահմանելու համար բավական է տալ n^3 հատ թվերից կազմված կառուցվածքային հաստատունների որևէ $\{P_{ij}^{k}\}$ համակարգ: Ընդ որում սկզբունքորեն P_{ij}^{k} թվերը կարող են լինել կամայական: Որպեսզի ստացված գծային հանրահաշիվը բավարարի 1-5րդ պայմաններից որևէ մեկին, անհրաժեշտ է P_{ij}^{k} թվերի վրա դնել համապատասխան սահմանափակում-պահանջներ:

Օրինակ, պահանջենք, որ e_1-ը լինի հանրահաշվի միավոր տարր: Դրա համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$e_1\cdot e_i=e_i\cdot e_1=e_i,\qquad i=1,\dots,n$$

Ունենք՝

$$e_1\cdot e_i=\sum\nolimits_{k=1}^{n}P_{1i}^{k}e_k=e_i\Leftrightarrow P_{1i}^{k}=\begin{cases}1, \text{երբ } k=i\\ 0, \text{երբ } k\neq i\end{cases}$$

$$e_i\cdot e_1=\sum\nolimits_{k=1}^{n}P_{i1}^{k}e_k=e_i\Leftrightarrow P_{i1}^{k}=\begin{cases}1, \text{երբ } k=i\\ 0, \text{երբ } k\neq i\end{cases}$$

Այսպիսով, e_1-ը կլինի հանրահաշվի միավորը այն և միայն այն դեպքում, երբ $P_{1i}^{i}=P_{i1}^{i}=1$, և $P_{1i}^{k}=P_{i1}^{k}=0$ երբ $k\neq i$:

Երկու $(V,\ \cdot)$ և $(\bar{V},\ \circ)$ գծային հանրահաշիվներ կոչվում են իզոմորֆ, եթե գոյություն ունի նրանց գծային տարածությունների $\varphi\colon V\to\bar{V}$ այնպիսի իզոմորֆիզմ, որ $\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\circ\varphi(b),\ \ \forall a,b\in V$ տարրերի դեպքում:

1: Երկու գծային հանրահաշիվներ իզոմորֆ են այն միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունեն $e_1,\dots,e_n\in V$ և $\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n\in\bar{V}$ բազիսներ, որոնց նկատմամբ նրանք ունեն բազմապատկման միևնույն $e_i \cdot e_j$ և $\bar{e}_i \circ \bar{e}_j$ աղյուսակները, այսինքն կառուցվածքային միևնույն հաստատունները՝ $P_{ij}^k = \bar{P}_{ij}^k, \quad i,j,k = 1, \dots, n$:

2. ՆՈՐՄԱՎՈՐՎԱԾ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐ

Դիցուք ունենք $(V,\cdot)$ գծային հանրահաշիվ, որն ինչ-որ $e_1, \dots, e_n$ բազիսում տրված է կառուցվածքային հաստատունների $\{P_{ij}^k\}$ համակարգով: Եթե $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i\,,\; y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, ապա

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n P_{ij}^k x_i y_j \right) e_k = \sum_{k=1}^n Z_k(x,y) e_k$$

Որտեղ $z_1(x,y), \dots, z_n(x,y)$ գործակիցները երկգծային ձևեր են $x_1, \dots, x_n,\; y_1, \dots, y_n$ փոփոխականներից՝ $z_k = \sum_{i,j=1}^n P_{ij}^k x_i y_j$:

Այսուհետև կհամարենք որ Vգծային տարածությունը Էվկլիդյան տարածություն է, այսինքն նրանում սահմանված է սկալյար արտադրյալ $< x, y > = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ բանաձևով և վեկտորների երկարությունները $|x| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,,\; x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ բանաձևով:

Սահմանում: $(V,\cdot)$ գծային հանրահաշիվը կոչվում է նորմավորված գծային հանրահաշիվ, եթե $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,\; \forall x, y \in V$ դեպքում:

Օրթոնորմավորված տվյալ $e_1, \dots, e_n$ բազիսում $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ պայմանը համարժեք է $|x|^2 \cdot |y|^2 = |x \cdot y|^2$ պայմանին, կամ որ նույնն է

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = z_1^2(x,y) + z_2^2(x,y) + \cdots + z_n^2(x,y) \quad (1)$$

պայմանին:

Սահմանում: Ասում են, որ $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ քառակուսային ձևը թույլատրում է համադրույթ (կոմպոզիցիա), եթե գոյություն ունեն այնպիսի $z_1, z_2, \dots, z_n;\;\; z_i = z_i(x_1, \dots, x_n;\; y_1, \dots, y_n)$ երկգծային ձևեր $x_1, \dots, x_n;\; y_1, \dots, y_n$ փոփոխականներից, որ տեղի ունի (1) նույնությունը:

Այսպիսով, եթե գոյություն ունի n չափականության նորմավորված գծային հանրահաշիվ, ապա $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + + \cdots + x_n^2$ քառակուսային ձևը թույլատրում է համադրույթ: Հակառակը նույնպես ճիշտ է. ամեն մի (1) համադրույթ որոշում է n չափականության նորմավորված հանրահաշիվ: Իրոք, սահմանելով $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ վեկտորների սկալյար արտադրյալ $< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ բանաձևով և այդ վեկտորների արտադրյալ $x \cdot y = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ բանաձևով կստանանք նորմավորված գծային հանրահաշիվ: Այսպիսով տեղի ունի հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 3: n չափականության նորմավորված գծային հանրահաշիվ գոյություն ունի այն և միայն այն դեպքում, երբ $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ քառակուսային ձևը թույլատրում է համադրույթ:

Այսպիսով էվկլիդյան տարածություններում նորմավորված հանրահաշիվներ կառուցելու խնդիրը համարժեք է (1) տեսքի նույնություններ գտնելու խնդրին: Սրա հետ կապված նախ առաջանում է հարց. ո՞ր բնական n-երի դեպքում է $x_1^2 + x_2^2 + + \dots + x_n^2$ քառակուսային ձևը թույլատրում համադրույթ:

3. ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՒԵՐԻ ՀԱՄԱԴՐՈՒՅԹՆԵՐ

3.1 ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՒԵՐԻ ՀԱՄԱԴՐՈՒՅԹԻ ՀԱՍԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Դիցուք ունենք $n \times n$ չափսերի $A = (a_{ij})$ մատրից, a_{ij}-ով նշանակենք A-ի i-րդ տողի և j-րդ սյան հատման տեղում գտնվող տարրը (թիվը):

Դիտարկենք $x_1, x_2, \dots, x_n;\ y_1, y_2, \dots, y_n$ անկախ փոփոխականներ և կազմենք $\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ արտահայտությունը: Այն կոչվում է երկգծային ձև $x_1, x_2, \dots, x_n;\ y_1, y_2, \dots, y_n$ փոփոխականներից a_{ij} գործակիցներով:

1898 թվականին գերմանացի մաթեմատիկոս Ա. Հուրվիցը հաջողությամբ լուծեց հետևյալ խնդիրը. ո՞ր բնական n-երի դեպքում գոյություն ունեն n հատ այնպիսի $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ երկգծային ձևեր $x_1, x_2, \dots, x_n;\ y_1, y_2, \dots, y_n$ փոփոխականներից որ տեղի ունի

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ . \ . \ . \ + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ . \ . \ . \ + y_n^2) = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \ . \ . \ . \ + \varphi_n^2) \qquad (1)$$

նույնություն:

Խնդրի լուծումը ենթադրում էր պատասխանել հետևյալ հարցերին:

1. Գտնել այն բոլոր բնական n-երը, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում գոյություն ունի գոնե մեկ (1) տեսքի նույնություն:
2. Գտնված ամեն մի n-ի համար նկարագրել բոլոր (1) տեսքի նույնությունները :

Եթե որևէ n-ի դեպքում գոյություն ունի (1) տեսքի նույնություն, ապա ընդունված է ասել, որ $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ . \ . \ . \ + x_n^2$ քառակուսային ձևը թույլատրում է համադրույթ: Այսպիսով վերոհիշյալ առաջին խնդիրը կարելի է վերաձևակերպել այսպես. ո՞ր n-երի դեպքում է որ $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ . \ . \ . \ + x_n^2$ քառակուսային ձևը թույլատրում համադրույթ:

Հարցի պատասխանը տրվում է Հուրվիցի հետևյալ նշանավոր թեորեմում.

Թեորեմ (Ա. Հուրվիցի, 1898թ.): Դրական որոշյալ $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + . . . + x_n^2$ քառակուսային ձևը թույլատրում է համադրույթ միայն և միայն n=1,2,4 կամ 8 դեպքերում:

$n = 1$ դեպքում այդպիսի համադրույթի կառուցումը տրիվյալ է՝
$x^2 \cdot y^2 = (xy)^2$, որտեղ պահանջվող երկգծային ձևն է $\varphi = x \cdot y$:
$n = 2$ դեպքում ևս համադրույթը կառուցվում է հեշտությամբ՝

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \qquad (2)$$

Այսպիսով այս դեպքում $\varphi_1 = x_1y_1 - x_2y_2$, $\varphi_2 = x_1y_2 - x_2y_1$:
Նկատեք որ $x_1y_1 - x_2y_2$ և $x_1y_2 - x_2y_1$ արտահայտությունները մասնակցում են $x_1 + ix_2$ և $y_1 + iy_2$ կոմպլեքս թվերի բազմապատկման բանաձևում

$$(x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2) = (x_1y_1 - x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

Սա պատահականություն չէ: Հաջորդ՝ n=4 և n=8 դեպքերում նույնպես համադրույթների օրինակներ կառուցվեցին թվային մյուս համակարգերի, այսպես կոչված քվատերիոնների (քառյակների) և օկտանիոնների (ութնյակների) բազմապատկումների բանաձևերի օգնությամբ:
Այնուհետև Յ. Ռադոնը ընդհանրացրեց քառակուսային ձևի համադրույթի հասկացությունը, հիմնված երկգծային ձևի ընդհանրացման վրա:

3.2 ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՁԵՒԵՐԻ ՀԱՄԱԴՐՈՒՅԹԻ
Յ. ՌԱԴՈՆԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ

Սահմանում: Ասում են, որ ունենք քառակուսային ձևերի $[n, r, n]$ տիպի համադրույթ (կոմպոզիցիա), եթե գոյություն ունեն այնպիսի $z_m: R^n \times R^r \to R$ երկգծային ձևեր

$$z_m = z_m(x, y) = z_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_r), \qquad m = 1,2, \dots, n$$

որ ցանկացած $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ և $y = (y_1, y_2, \dots, y_r) \in R^r$ վեկտորների համար տեղի ունի

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_r^2) = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 \qquad (3)$$

նույնություն:

Մասնավոր $r = n$ դեպքում այս սահմանումը համընկնում է Ա. Հուրվիցի կոմղից ներմուծված քառակուսային ձևի համադրույթ հասկացության հետ:
Նկատենք որ $[n, r, n]$ տիպի համադրույթի գոյությունից հետևում է երկգծային այնպիսի $R^n \times R^r \to R^n$ արտադրյալի գոյությունը, որի դեպքում $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ ցանկացած $x \in R^n, y \in R^r$ վեկտորների համար: Իրոք, բավական է արտադարյալը սահմանել
$x \cdot y = z = (z_1, z_2, \dots, z_u)$ բանաձևով: Ավելացնենք, որ հակառակը նույնպես ճիշտ է: Ընդհանրացված համադրույթի դեպքում ևս առաջանում է երկու հարց.

1. Ո՞ր (n, r) թվազույգերի դեպքում գոյություն ունեն $[n, r, n]$ տիպի համադրույթներ
2. Տվյալ (n, r)-ի դեպքում ինչպես կառուցել (3) համադրույթ:

Ռանդոնը ցույց տվեց, որ (3) համադրույթի գոյությունը համարժեք է որոշակի հատկություններով օժտված $n \times n$ չափսերի $A_1, A_2, \dots, A_r$ մատրիցների գոյությանը:

Դիցուք ունենք $[n, r, n]$ տիպի (3) համադրույթ: ներկայացնենք z_m երկգծային ձևը $z_m = \sum_{j=1}^{n} a_{jm} x_j$, $m = 1,2, \dots, n$ տեսքով, որտեղ $a_{jm} = a_{jm}(y)$ գծային ձևեր են $y_1, y_2, \dots, y_r$ փոփոխականներից:

Դիտարկենք $n \times n$ չափսերի $A = (a_{ij}(y))$ մատրիցը, որի $a_{ij}(y)$ տարրերը վերոհիշյալ գծային ձևերն են:

Տեղադրենք (3)-ի մեջ z_m-երի արժեքները և հավասարեցնենք միմյանց y_j^2 միանդամի գործակիցները աջ և ձախ մասերում: Այդ նպատակով կամայական $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$-ի դեպքում վերցնելով (3)-ում $x_j = 1, x_1 = \dots = x_{j-1} = x_{j+1} = \dots = x_n = 0$ ստանում ենք

$$\sum_{m=1}^{n} a_{jm}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_r^2\,, \quad j = 1,2,\dots,n \qquad (4)$$

Այնուհետև (3)-ի աջ մասում հավասարեցնենք 0-ի $y_i \cdot y_j$, $i \neq j$ միանդամների գործակիցները: Այդ նպատակով կամայական $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$-ի դեպքում վերցնելով (3)-ում $x_i = x_j = 1$ և $x_k = 0$ մնացած $k \neq i$, $k \neq j$ դեպքերում ստանում ենք

$$\sum_{m=1}^{n} a_{im}(y) \cdot a_{jm}(y) = 0, \quad i, j = 1,2,\dots,n, \quad i \neq j \qquad (5)$$

Ստացված (4) և (5) հավասարությունները համարժեք են հետևյալ մատրիցային հավասարությանը

$$A \cdot A^T = (y_1^2 + y_2^2 + \cdots y_r^2) \cdot E_n \qquad (6)$$

Որտեղ A^T-ն A մատրիցի շրջվածն է, իսկ E_n-ը՝ $n \times n$ չափսերի միավոր մատրիցն է:

Այժմ ներկայացնենք A մատրիցի յուրաքանչյուր $a_{ij}(y)$ տարր $a_{ij}(y) = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k y_k$ տեսքով, որտեղ արդեն a_{ij}^k գործակիցները թվեր են:

Արդյունքում A-ն կընդունի հետևյալ տեսքը

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^1 y_1 + a_{11}^2 y_2 + \cdots a_{11}^r y_r & a_{12}^1 y_1 + a_{12}^2 y_2 + \cdots + a_{12}^r y_r & \dots & a_{1n}^1 y_1 + a_{1n}^2 y_2 + \cdots a_{1n}^r y_r \\ a_{21}^1 y_1 + a_{21}^2 y_2 + \cdots a_{21}^r y_r & a_{22}^1 y_1 + a_{22}^2 y_2 + \cdots + a_{22}^r y_r & \dots & a_{2n}^1 y_1 + a_{2n}^2 y_2 + \cdots a_{2n}^r y_r \\ a_{n1}^1 y_1 + a_{n1}^2 y_2 + \cdots a_{n1}^r y_r & a_{n2}^1 y_1 + a_{n2}^2 y_2 + \cdots + a_{n2}^r y_r & \dots & a_{nn}^1 y_1 + a_{nn}^2 y_2 + \cdots a_{nn}^r y_r \end{pmatrix}$$

Այժմ A-ն կարող է ներկայացվել որպես մատրիցների

$$A = y_1 A_1 + y_2 A_2 + \cdots + y_r A_r \qquad (7)$$

գծային զուգակցություն որտեղ $A_k = \left(a_{ij}^k\right),\ k = 1,2,\dots,r \quad n \times n$ չափսերի թվային մատրից է:

Տեղադրելով A-ի (7) արտահայտությունը (6) -ի մեջ կստանանք

$$(y_1A_1 + y_2A_2 + \cdots + y_rA_r) \cdot (y_1A_1^T + y_2A_2^T + \cdots + y_rA_r^T) == (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2) \cdot E_n$$

Հավասարեցնելով միմյանց y_i^2 անդամի գործակիցները աջ և ձախ մասերում և հավասարեցնելով 0-ի $y_i, y_j \quad i \neq j$ միանդամների գործակիցները, կստանանք

$$A_i \cdot A_i^T = E_n,\ \ i = 1,2,\dots,r;$$

$$A_i \cdot A_j^T + A_j \cdot A_i^T = 0,\ \ i \neq j,\ \ \ i,j = 1,2,\dots,r \qquad (8)$$

Այսպիսով ապացուցվեց հետևյալը:

Թեորեմ: $[n,r,n]$ տիպի համադրույթների գոյությունը համարժեք է $n \times n$ չափսերի այնպիսի $A_1, A_2, \dots, A_r$ մատրիցների գոյությունը, որոնք բավարարում են (8) պայմաններին:

Ստացված (8) հավասարումները կոչվում են Ռանդոն-Հուրվիցի մատրիցային հավասարումներ:

Վերը ձևակերպված երկու հարցերից առաջինի պատասխանը տալիս է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ: $[n,r,n]$ տիպի համադրույթներ գոյություն ունեն այն և միայն այն դեպքում, երբ $0 \leq r \leq \rho(n)$:

Այստեղ $\rho(n)$-ը այսպես կոչված Ռադոն-Հուրվիցի թիվն է: Այն սահմանվում է այսպես. Ամեն մի բնական n թիվ կարելի է ներկայացնել $n = (2a+1) \cdot 2^b$ տեսքով:
Ներկայացնելով b-ն $b = 4c + d$ տեսքով, որտեղ $3 \geq d \geq 0$
դիտարկենք $\rho(n) = 2^d + 8c$ թիվը, որն էլ կոչվում է Ռադոն-Հուրվիցի թիվ:
Նկատենք, որ միշտ $\rho(n) \leq n$: Ընդ որում $\rho(n) = n$ միայն և միայն $n = 1,2,4$ *կամ* 8 դեպքերում, որոնց համապատասխանում են $[n,n,n]$ տիպի չորս նշանավոր համադրույթները:
Ստորև բերվում է $\rho(n)$ արժեքները որոշ n-երի դեպքում

n	1	2	3	4	5	6	7	8	12	16	32	64
$\rho(n)$	1	2	1	4	1	2	1	8	4	9	10	12

Թեորեմի հեղինակային ապացույցը նման է $[n, n, n]$ տիպի համադրույթների համար Հուրվիցի ապացույցին և դուրս չի գալիս մատրիցների տեսության շրջանակներից: Գոյություն ունի այդ թեորեմի ապացույց հիմնված վերջավոր խմբերի տեսության վրա: Համադրույթների կառուցման այդ եղանակներն ունեն ավելի շատ տեսական նշանակություն և այդքան էլ հարմար չեն գործնական կիրառության տեսանկյունից: Հաջորդիվ կքննարկենք $[n, r, n]$ տիպի համադրույթների կառուցման ուղղակի՝ այսպես կոչված **կոմբինատոր կառուցման եղանակ**:

4. ՀԱՄԱԴՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԿՈՄԲԻՆԱՏՈՐ ԵՂԱՆԱԿԸ

Համադրույթների կառուցման կոմբինատոր եղանակը [2] առաջարկում է քառակուսային ձևերի կառուցման ուղղակի եղանակ հիմնված երկու ամբողջարժեք ֆունկցիաների վրա, որոնք կոչվում են համապատասխանաբար՝ **տեղափոխությունների** և **նշանների** ֆունկցիաներ:

Նախ ամբողջ, ոչ բացասական թվերի $Z = \{0,1,\dots\}$ բազմության վրա սահմանվում է մի երկտեղ գործողություն, որը նշանակվում է $*$-ով: Այդ նպատակով յուրաքանչյուր $a \in Z$ թիվ ներկայացվում է հաշվանքի 2 հիմքով համակարգում՝

$$a = \sum_i (a_i) 2^j, \text{ որտեղ } (a)_i = 0 \text{ կամ } 1$$

Ամեն մի $a, b \in Z$ թվերի համար սահմանվում է $a * b \in Z$ թիվը հետևյալ բանաձևերով՝

$$0 * 1 = 1 * 0 = 1, \quad 0 * 0 = 1 * 1 = 0, \quad a * b = \sum_i (a * b)_i 2^i, \quad (a * b)_i = (a)_i * b_i$$

Այսպիսով $a * b$ թվի i-րդ կարգային թվանշանը a և b թվերի i-րդ կարգային թվանշանների գումարն է ըստ 2 մոդուլի:

Մասնավորապես $7 \geq a, b \geq 0$ դեպքերում $*$-ը նկարագրվում է հետևյալ աղյուսակով

$a * b$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

Նշենք $*$ գործողության հետևյալ ակնհայտ հատկությունները.

$$a * b = b * a, \qquad a * 0 = 0, \qquad (a * b) * c = a * (b * c);$$
$$\text{եթե } a * b = c, \text{ ապա } a = b * c$$
$$\text{եթե } a * c = b * c, \text{ ապա } a = b$$

4.1 ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ $P: Z \times Z \to Z$ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ

Դիտարկենք որևէ $(k, a) \in Z \times Z$ թվազույգ, ներկայացնենք k թիվը $k = 8m + l$ տեսքով, որտեղ $7 \geq l \geq 0$: Սահմանենք

$$P(k, a) = \begin{cases} l * a, \text{երբ } m = 0 \\ 2^{4m-1} \cdot (2l + 1) * a, \text{երբ } m > 0 \end{cases} \qquad (9)$$

Ամեն մի սևեռված $k \geq 0$ թվի համար դիտարկենք $P_k: Z \to Z$,

$P_k(a) = P(k, a),\ a \in Z$ արտապատկերումը: Հեշտ է տեսնել, որ $P_k -$ ն փոխմիարժեք է, ուստի Z բազմության տեղափոխություն է:

Ընդ որում $P_{k_1} \circ P_{k_2} = P_{k_2} \circ P_{k_1}$ ցանկացած $k_1, k_2 \geq 0$ դեպքում, իսկ $P_k^2 = P_k \circ P_k = P_0$ տեղափոխությունը Z-ի նույնական արտապատկերումն է ցանկացած $k \geq 0$ դեպքում:

Դիցուք n-ը բնական թիվ է, դիտարկենք $Z_n \subset Z,\ Z_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ ենթաբազմությունը: Ապացուցվում է [2], որ $\rho(n) \geq k \geq 0$ պայմանին բավարարող ցանկացած k-ի դեպքում P_k-ի սահմանափակումը Z_n-ի վրա հանդիսանում է Z_n բազմության տեղափոխություն: Նկատենք, որ ասվածը ճիշտ չէ երբ $k > \rho(n)$: Այսինքն $k \leq \rho(n)$ պայմանը անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի P_k-ի սահմանափակումը Z_n-ի վրա ընդունի արժեքներ նորից Z_n-ում:

Օրինակ: $n = 11$ դեպքում ունենք $\rho(11) = 3$, $Z_{11} = \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$:

Ընդ որում՝

ա) $k = 4$ դեպքում ունենք $P_4(a) = 4 \times a$ և $P_4(8) = 12 \notin Z_{11}$

բ) $k = 10$ դեպքում ունենք $P_{10}(a) = 40 \times a$ և $P_{10}(0) = 40 \notin Z_{11}$

Այս օրինակում Z_{11}-ի տեղափոխություններն են միայն P_0, P_1, P_2, P_3-ը:

4.2 ՆՇԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ

Նշանների ֆունկցիա ասելով հասկանում ենք $S: Z \times Z \to \{-1; 1\}$ արտապատկերում, որը պետք է բավարարի որոշակի պայմանի:

Սկզբում սահմանվում են $S(k,a)$ արժեքները, որտեղ $7 \geq k, a \geq 0$:

Այդ արժեքները կազմում են 8×8 չափսերի մատրից, որի k-րդ տողի և a-րդ սյան հատման տեղում գրված $S(k,a)$ տարրը $+1$ է կամ -1, ընդ որում պետք է բավարարվեն հետևյալ պայմանները

$$S(0,a) = 1;$$
$$S(k, k*a) + S(k,a) = 0, \qquad \text{երբ } k > 0$$
$$S(k_1,a) \cdot S(k_2,a) + S(k_1, k_2 * a) \cdot S(k_2, k_1 * a) = 0, \qquad \text{երբ } k_1, k_2 > 0; \;\; k_1 \neq k_2$$

ցանկացած $7 \geq a \geq 0$ դեպքում:

Որպես այդպիսի մատրից կարող ենք վերցնել [1] օրինակ հետևյալ $\tilde{S} = S(k,a)$ մատրիցը, որը գոյանում է օկտոնիոնների բազիսային $i_0 = 1, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7$ տարրերի $i_k \cdot i_a = S(k,a) i_{k*a}$ բազմապատկման աղյուսակից:

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Այսուհետև սահմանվում են մնացած $S(x,y)$ արժեքները: Այդ նպատակով ներմուծված են երկու օժանդակ ֆունկցիաներ:

I) Ցանկացած $a \geq 0$ և $m \geq 0$ թվերի համար սահմանվում է հետևյալ թիվը՝

$$a^{[m]} = (a)_{4m} + 2 \cdot (a)_{4m+1} + 4 \cdot (a)_{4m+2} \qquad (10)$$

Այն կարելի է դիտել որպես եռանիշ թիվ 2 հիմքով հաշվանքի համակարգում կազմված a թվի $4m, 4m+1, 4m+2$ կարգային թվանշաններով: Պարզ է, որ $7 \geq a^{[m]} \geq 0$:

Օրինակ: Դիցուք $a = 43$: Ունենք $a = 2^5 + 2^3 + 2^1 + 1$, այսինքն $43_2 = 101011$, որտեղից $(a)_0 = 1, (a)_1 = 1, (a)_2 = 0, (a)_3 = 1, (a)_4 = 0, (a)_5 = 1, (a)_i = 0$, երբ $i \geq 6$: Ուստի (10) բանաձևով ստանում ենք

$$a^{[0]} = (a)_0 + 2 \cdot (a)_1 + 4 \cdot (a)_2 = 3$$
$$a^{[1]} = (a)_4 + 2 \cdot (a)_5 + 4 \cdot (a)_6 = 2$$

$$a^{[3]} = (a)_{12} + 2 \cdot (a)_{13} + 4 \cdot (a)_{14} = 0$$

$$a^{[m]} = 0, \textit{երբ } m \geq 1$$

Այսպիսով ունենք ֆունկցիա $a^{[m]}: Z \times Z \to \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, որը ամեն մի $(a, m) \in Z \times Z$ զույգի համապատասխանեցնում է $(a)_{4m} + 2 \cdot (a)_{4m+1} + 4 \cdot (a)_{4m+2} \in Z_7$ թիվը:

II) Ցանկացած $a \geq 0$ և $m \geq 0$ թվերի համար սահմանվում է $T_m(a) = 1$ *կամ* -1 թիվը հետևյալ բանաձևով՝

$$T_m(a) = \begin{cases} 1, \textit{երբ} \sum\limits_{i \geq m+1} (a)_{4i-1} \textit{ թիվը զույգ է} \\ -1, \textit{երբ} \sum\limits_{i \geq m+1} (a)_{4i-1} \textit{ թիվը կենտ է} \end{cases}$$

Կամ որ նույնն է

$$T_m(a) = (-1)^{\sum_{i \geq m+1} (a)_{4i-1}} \qquad (11)$$

Օրինակ: Դիցուք $a = 1257 = 2^{10} + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 1$: Ունենք $(a)_{10} = (a)_7 = (a)_6 = (a)_5 = (a)_3 = (a)_0 = 1$ *և* $(a)_k = 0$ k-ի մնացած բոլոր արժեքների դեպքում: Այժմ (11) բանաձևով կստանանք.

$$\textit{երբ } m = 0, \quad T_0(a) = (-1)^{(a)_3 + (a)_7} = 1$$
$$\textit{երբ } m = 1, \quad T_1(a) = (-1)^{(a)_7} = -1$$

$$երբ\ m \geq 2, \quad T_m(a) = (-1)^0 = 1$$

Այսպիսով ունենք $T: Z \times Z \to \{-1; 1\}$ ֆունկցիա, որն ամեն մի

$(a, m) \in Z \times Z$ թվազույգի համապատասխանեցում է $T_m(a) = \pm 1$ թիվ ըստ (11) բանաձևի:

Այժմ պատրաստ ենք սահմանելու նշանների $S: Z \times Z \to \{-1; 1\}$ ֆունկցիան ամբողջությամբ:

Այսուհետև գրառման պարզության նկատառումով $S(x, y)$ արժեքը կնշանակենք $S_x(y)$ *տեսքով*:

Սահմանում: Յանկացած $(k, a) \in Z \times Z$ թվազույգի համար, որտեղ $k = 8m + l$, $7 \geq l \geq 0$, S ֆունկցիայի $S_k(a)$ արժեքը սահմանվում է հետևյալ բանաձևերով.

$$S_0(a) = 1$$

$$S_k(a) = T_{m-1}(a), \quad երբ\ m > 0, \quad l = 0 \qquad (12)$$

$$S_k(a) = T_m(a) \cdot S_l\left(a^{[m]}\right), \qquad երբ\ m \geq 0, l > 0$$

ցանկացած $a \geq 0$ թվի դեպքում:

Դիտողություն: S ֆունկցիայի սահմանումը կոռեկտ է: Իրոք, երբ ունենք $7 \geq a \geq 0$, ունենք $T_m(a) = 1$ ցանկացած $m \geq 0$ դեպքում:

Հետևաբար, երբ $m = 0$ և $7 \geq a \geq 0$, ապա $S_k(a)$-ի քիչ առաջ սահմանված արժեքը համընկնում է $\tilde{S}$ մատրիցի k-րդ տողի և a-րդ սյան հատման տեղում գտնվող տարրի հետ:

Թեորեմ: Վերը սահմանված տեղափոխությունների՝ P և նշանների՝ S ֆունկցիաները բավարարում են հետևյալ երկու պայմաններին.

$$S_k(a) + S_k\left(P_k(a)\right) = 0, \qquad երբ\ k > 0 \qquad (13)$$

$$S_{k_1}(a) \cdot S_{k_2}(a) + S_{k_1}\left(P_{k_2}(a)\right) \cdot S_{k_2}\left(P_{k_1}(a)\right) = 0, \qquad k_1, k_2 > 0\ և\ k_1 \neq k_2 \qquad (14)$$

ցանկացած $a \geq 0$ թվի դեպքում:

Հեշտ է տեսնել որ (13) և (14) պայմանները միասին համարժեք են հետևյալ պայմանին՝

$$S_{k_1}(a) \cdot S_{k_2}(a) + S_{k_1}\left(P_{k_1}{}^{\circ}P_{k_2}(a)\right) \cdot S_{k_2}\left(P_{k_1}{}^{\circ}P_{k_2}(a)\right) = 0 \qquad (15)$$

որտեղ $k_1 > k_2 \geq 0, \;\; a \geq 0$

Այժմ ձևակերպենք և ապացուցենք հիմնական արդյունքը:

Թեորեմ: Յանկացած (r,n) զույգի համար, որը բավարարում է

$\rho(n) \geq r \geq 0$ պայմանին, հետևյալ $z_i: R^{n+1} \times \; R^{r+1} \to R^{n+1}$ երկգծային ձևերը սահմանված

$$z_i = z_i(x,y) = \sum_{k=0}^{r} S_k(i) x_{P_k(i)} y_k, \;\; i = 0,1,\dots,n \qquad (16)$$

բանաձևով, որոշում են $(n+1, r+1, n+1)$ տիպի $(x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_r^2) = z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_n^2$
համադրույթ:

Ապացուցում: Քանի որ $S_k(i) = \pm 1$ ուստի

$$\sum_{i=0}^{n} z_i^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{r} S_k(i) x_{P_k(i)} y_k \right)^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{r} x_{P_k(i)}^2 \, y_k^2 \right) \;\; + 2 \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{r \geq k_1 > k_2 \geq 0} S_{k_1}(i) \cdot S_{k_2}(i) \cdot x_{P_{k_1}(i)} \cdot x_{P_{k_2}(i)} y_{k_1} y_{k_2} \right)$$

Քանի որ P_{k_i}-ն $\;Z_n = \{0,1,\dots,n\}$ բազմության տեղափոխություն է հետևաբար

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{r} x_{P_k(i)}^2 y_k^2 \right) = \sum_{k=0}^{r} \left(\sum_{i=0}^{n} x_{P_k(i)}^2 \right) y_k^2 = \sum_{k=0}^{r} \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2 \right) y_k^2 =$$

$$= (x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_r^2)$$

Նշանակենք

$$R(n,r) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{r \geq k_1 > k_2 \geq 0} S_{k_1}(i) \cdot S_{k_2}(i) x_{P_{k_1}(i)} \cdot x_{P_{k_2}(i)} y_{k_1} y_{k_2} \right) \qquad (17)$$

և ցույց տանք որ $R(n,r) = 0$ նույնաբար:

Ունենք որ $P_{k_1}{}^{\circ}P_{k_2}: Z_n \to Z_n$ համադրույթները նույնպես Z_n բազմության տեղափոխություններ են: Հետևաբար $R(n,r)$-ը չի փոխվի եթե նրանում կատարենք $i \to P_{k_1}{}^{\circ}P_{k_2}(i)$ փոխարինում: Կստանանք

$$R(n,r) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{r\geq k_1>k_2\geq 0} S_{k_1}\left(P_{k_1}{}^\circ P_{k_2}(i)\right) \cdot S_{k_2}\left(P_{k_1}{}^\circ P_{k_2}(i)\right) \cdot x_{P_{k_1}\left(P_{k_1}{}^\circ P_{k_2}(i)\right)} \cdot x_{P_{k_2}\left(P_{k_1}{}^\circ P_{k_2}(i)\right)} y_{k_1} y_{k_2}\right) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{r\geq k_1>k_2\geq 0} S_{k_1}\left(P_{k_1}{}^\circ P_{k_2}(i)\right) \cdot S_{k_2}\left(P_{k_1}{}^\circ P_{k_2}(i)\right) \cdot x_{P_{k_2}(i)} \cdot x_{P_{k_1}(i)} y_{k_1} y_{k_2}\right) \qquad (18)$$

Այժմ (17)-ից և (18)-ից ստանում ենք

$$2R(n,r) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{r\geq k_1>k_2\geq 0} S_{k_1}(i) \cdot S_{k_2}(i) + S_{k_1}\left(P_{k_1}{}^\circ P_{k_2}(i)\right) \cdot S_{k_2}\left(P_{k_1}{}^\circ P_{k_2}(i)\right) \cdot x_{P_{k_1}(i)} \cdot x_{P_{k_2}(i)} y_{k_1} y_{k_2}\right) = 0$$

շնորհիվ (15)-ի:

Նշանակում է $R(n,r) = 0$ և ուրեմն

$$(x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_r^2) = z_0^2 + z_1^2 + \cdots + z_n^2 \qquad (19)$$

Հետևանք թեորեմից: Եթե n-ը զույգ թիվ է, ապա $\rho(n) = 0$, հետևաբար $r = 0$: Իսկ (16) երկգծային ձևերը ընդունում են $z_i = x_i y_0$ տեսք: Այս դեպքում (19) համադրույթը ընդունում է

$$(x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_u^2) y_0^2 = (x_0 y_0)^2 + (x_1 y_0)^2 + \cdots + (x_n y_0)^2$$

տրիվյալ տեսքը:

Այսպիսով քառակուսային ձևերի ոչ տրիվյալ համադրույթներ գոյանում են միայն կենտ n-երի դեպքում:

5. ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ԾՐԱԳԻՐԸ

Սկզբի համար ստեղծենք main.h վերնագրով գլխաֆայլ որի մեջ կհայտարարենք անհրաժեշտ տվյալների կառուցվածքը և ծրագրային ֆունկցիաները:

main.h

```
#include <string>
#include <vector>
using namespace std;

class CombConstrOfQuadFormComposition
{
public:
	CombConstrOfQuadFormComposition(int n_num, int r_num);
	vector<string> CombinatorConstruction();
	static int			CalcRadonHurwitzNumber(int m);
private:
	int		n;
	int		r;
	int		SignFunction(int k, int a);
	int		TranspozitionFunction(int k, int a);
	int		CalcAuxiliaryNum_Am(int a, unsigned int m);
	int		CalculateAuxiliarySign_Tm(int a, int m);
};
```

Ներմուծեցինք ստանդարտ գրադարանի տողերի՝ <string> և զանգվածների՝ <vector> գլխաֆայլերը որից օգտվում ենք main.h-ի մեջ, հայտարարեցինք CombConstrOfQuadFormComposition տիպ, որը պարունակում է կոնստրուկտոր՝ CombConstrOfQuadFormComposition, համադրույթների կոմբինատոր կառուցման ֆունկցիա՝ CombinatorConstruction, Ռադոն Հուրվիցի թվի հաշվիչ՝ CalcRadonHurwitzNumber, նշանների ֆունկցիա՝ SignFunction, տեղափոխությունների ֆունկցիա TranspozitionFunction, $a^{[m]}$ թիվը հաշվող CalcAuxiliaryNum_Am ֆունկցիա և $T_m(a)$ CalculateAuxiliarySign_Tm ֆունկցիան:

Անցնենք վերոնշյալ ֆունկցիաների իմպլեմենտացմանը main.cpp ֆայլում:

main.cpp

```
#include <bitset>

#include <cmath>

#include <iostream>

#include "main.h"


CombConstrOfQuadFormComposition::CombConstrOfQuadFormComposition
(int n_num, int r_num)

{

	n = n_num - 1;

	r = r_num - 1;

}
```

Ներմուծում ենք ստանդարտ գրադարանի բինար արժեքների փոխարկիչ, մաթեմաթիկական ֆունկցիաների, մուտքային/ելքային հոսքերի գրադարաններ, համապատասխանաբար՝ <bitset>, <cmath>, <iostream> և մեր “main.h” գլխաֆայլը: CombConstrOfQuadFormComposition կոնստրուկտորում անդամ փոփոխականների մեջ պահում ենք (n, r) թվազույգը:

Ստորև ներկայացված է Ռադոն Հուրվիցի թվի հաշվիչ ֆունկցիան որը կօգտագործենք մի քանի քայլ հետո:

```
int CombConstrOfQuadFormComposition::CalcRadonHurwitzNumber(int n)
{
	int RadonHurwitzNum = 0;
	// կենտ n թվերի համար Ռադոն-Հուրվիցի թիվը հավասար է 1-ի
	if (n % 2 == 1)
		RadonHurwitzNum = 1;
	else
	{
		// n-ը n = 2^b * (2a + 1) տեսքով նկարագրելու համար սահմանենք
		int b, a;
		// b-ն b = 4c + d && 0 <= d <= 3 տեսքով նկարագրելու համար սահմանենք
		int c, d;

		// 1.ա) b-ն գտնելու համար պետք է գտնենք n-ի ամենամեծ 2-ի
		//աստիճան բաժանարարը
		//մենք չենք օգտվի հերթականությամբ տարբերակները փորձելու
		//մեթոդը այլ կօգտվենք բիտային հնարքից
		//եթե դիտարկենք n թիվը երկուական տեսքով ապա կտեսնենք որ
		//մեզ պետք է գտնել այն թիվը որը ստացվում է
		//n[2-ական]-ի միայն ամենաաջ 1 բիթը պահպանելով և մյուս բոլոր
		//բիտերը 0-ացնելով (օր. 5=101 ամենամեծ 2-ի էքսպոնենտ)
		//բաժանարարը 2^0=1=001, 48=110000 ամենամեծ 2-ի էքսպոնենտ
		բաժանարարը 2^4=16=010000 և այլն): Կկիրառենք հետևյալ ալգորիթմը:
		//գտնենք (n-1)-ը, ~ բիտային Ժխտում օպերատորով շրջենք
		//ստացված (n-1)-ի բիթերը, այնուհետև n և (n-1)-ի միջև
		//կիրառենք բիտային Եւ օպերացիան և կստանանք n թվի ամենամեծ
		//2-ի էքպոնենտ բաժանարարը և կորոշենք թե դա 2-ի որ աստիճանն է:
		int grtstDivsrOf2Exponent = n & (~(n - 1));
		b = log2(grtstDivsrOf2Exponent);
```

```
		//բ). ա) քայլից հետո a- ի գտնելը տրիվիալ է
		a = ((n / grtstDivsrOf2Exponent) - 1) / 2;

		// 2. b-ի միջոցով գտնենք c և d
		if (b < 4)
		{
			c = 0;
			d = b;
		}
		else
		{
			d = b % 4;
			c = b / 4;
		}

		// ստացված թվերով և RandonHurwitzNum(n) = 2^d + 8c բանաձևով
		//գտնենք ՌանդոնՀուրվիցի թիվը
		RadonHurwitzNum = static_cast<int>(pow(2, d)) + (8 * c);
	}
	return RadonHurwitzNum;
}
```

Ռեալիզացնենք Տեղափոխությունների ֆունկցիայի հաշվարկը է որը կվերադարձնի P թիվ։

```
int CombConstrOfQuadFormComposition::TranspozitionFunction(int k, int a)
{
	string binary_k_str = bitset<32>(k).to_string();
	string binary_a_str = bitset<32>(a).to_string();
```

```
        unsigned long long int binary_k = stoull(binary_k_str);
        unsigned long long int binary_a = stoull (binary_a_str);

        unsigned long long int maxBinNum = (binary_k > binary_a) ? binary_k : binary_a;

        int P = 0;
        int it = 0;

        while (maxBinNum != 0)
        {
        // Բաժանել ստացված երկուական թիվը երկուական 2-ի (2[երկուական] = 10)
                maxBinNum /= 10;
                if (binary_k % 10 + binary_a % 10 == 1)
                        P += static_cast<int>(pow(2, it));
                binary_k = (binary_k - (binary_k % 10)) / 10;
                binary_a = (binary_a - (binary_a % 10)) / 10;
                ++it;
        }
        return P;
}
```

Հաջորդիվ կիրականացնենք a^m և $T_m(a)$ արժեքները արտածող ծրագրային ֆունկցիաները։

```
int CombConstrOfQuadFormComposition::CalcAuxiliaryNum_Am(int a, unsigned int m)
{
        // 2-ական a-ն տողից դարձնել թիվ որպեսզի ավելորդ 0-ները վերանան
        string binary_a_str = to_string(stoull(bitset<32>(a).to_string()));
        vector<int> reverse_bin_a_digits;
        for (string::const_reverse_iterator crit = binary_a_str.rbegin(); crit != 
binary_a_str.rend(); ++crit)
```

```
        {
            int a_digit = stoi(string(1, *crit));
            reverse_bin_a_digits.push_back(a_digit);
        }

        // գտնենք a(m)-ը հետևյալ բանաձևով a(m) = a[4m] + 2*a[4m+1] + 4*a[4m+2],
            m = 0, 1, ..., reverse_bin_a_digits.size()
        int am = 0;
        unsigned int idx = 4 * m;
        int idx_coefficent = 1;
        while (idx_coefficent < 5)
        {
            if (idx < reverse_bin_a_digits.size())
                am += idx_coefficent * reverse_bin_a_digits[idx];
            idx_coefficent *= 2;
            ++idx;
        }
        return am;
    }

    int CombConstrOfQuadFormComposition::CalculateAuxiliarySign_Tm(int a, int m)
    {
        string binary_a_str = to_string(stoull(bitset<32>(a).to_string()));
        vector<int> reverse_bin_a_digits;
        for (string::const_reverse_iterator crit = binary_a_str.rbegin();
            crit != binary_a_str.rend(); ++crit)
        {
            int a_digit = stoi(string(1, *crit));
            reverse_bin_a_digits.push_back(a_digit);
        }
```

```
        int sum = 0;
        int T = 1;
        for (int i = m + 1; 4 * i - 1 < reverse_bin_a_digits.size(); i += 4)
        {
                sum += reverse_bin_a_digits[4 * i - 1];
        }

        if (sum % 2 != 0)
        {
                T = -1;
        }
        return T;
}
```

Քանի որ արդեն ունենք Նշանների ֆունկցիայի համար անհրաժեշտ բոլոր օժանդակ ֆունկցիաները սահմանենք Նշանների ֆունկցիան:

```
int CombConstrOfQuadFormComposition::SignFunction(int k, int a)
{
        vector<vector<int>> signMatrix =
        {
                {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
                {1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1},
                {1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1},
                {1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1},
                {1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1},
                {1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1},
                {1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, -1},
                {1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1}
```

```
    };
    int S = 1;
    int m = k / 8;
    int l = k % 8;

    if (k == 0)
    {
        S = 1;
    }
    else if (m > 0 && l == 0)
    {
        S = CalculateAuxiliarySign_Tm(a, m - 1);
    }
    else if (m >= 0 && l > 0 && l < signMatrix.size())
    {
        S = CalculateAuxiliarySign_Tm(a, m) *
            signMatrix[l][CalcAuxiliaryNum_Am(a, m)];
    }
    return S;
}
```

Սահմանենք մեր Կոմբինատոր կառուցման ամփոփիչ ֆունկցիան, որը օգտվելով վերոնշյալ՝ նշանների և տեղափոխությունների ֆունկցիաներից կվերադարձնի կոմբինատոր կառուցված քառակուսային ձևերի համադրույթների զանգված: Այն իր հերթին կկանչենք ծրագրի գլխավոր՝ main ֆունկցիայում վերջնական օգտագործողի կողմից տրված տվյալների հետ աշխատելու համար:

```
vector<string> CombConstrOfQuadFormComposition::CombinatorConstruction()
{
	vector<string> quadCompositions;
	// i-ի 0-ից n արժեքների համար
	for (int i = 0; i <= n; ++i)
	{
		string tmpQuadComposition = "";
		// k-ի 0-ից r արժեքների համար
		for (int k = 0; k <= r; ++k)
		{
			int s = SignFunction(k, i);
			string s_str = "";
			int p = TranspozitionFunction(k, i);
			if (s == 1)
			{
				if (k != 0)
					s_str = " + ";
				else
					s_str = "";
			}
			else if (s == -1)
				s_str = " - ";
			else
				s_str = to_string(s);

			if (k == 0)
				tmpQuadComposition += "z[" + to_string(i) + "] (x,y) = ";

			tmpQuadComposition += s_str + "x[" + to_string(p) + "]" +
				+ "y[" + to_string(k) + "]";
```

```
		}
		quadCompositions.push_back(tmpQuadComposition);
	}
	return quadCompositions;
}
```

MainExecution ֆունկցիայի մեջ կստանանք օգտագործողի կողմից տրված (n, r) թվազույգը կստուգենք n-ի և r-ի մուտքագրված արժեքների ստույգությունը ըստ Ռադոն-Հուրվիցի թվի և այլ անհրաժեքշտ չափորոշիչների կարտածվի համադրույթների տողային ներկայացումը որպես պատասխան: Ծրագրում ցանկացած ոչ ստույգություն հանդիպելիս այն կվերադարձնի անվավեր արժեք հակառակ դեպքում երբ բոլոր պահանջները պահպանված են հաջողությամբ կավարտվի ծրագրի աշխատանքը:

Main ֆունկցիայի մեջ ցիկլի մեջ կկանչենք MainExecution-ը օգտագործողին հնարավորություն տալով վերագործարկելու կամ ավարտելու ծրագիրը տարբեր արդյունքներ ստանալուց հետո:

```
int MainExecution()
{
	cout << "Enter non-negative non-zero n number from Z{1,2,...} set" << endl;
	string n_str;
	cout << "n: ";
	cin >> n_str;

	if (!CombConstrOfQuadFormComposition::IsNumeric(n_str))
	{
		cout << "The entered value for n is not numeric. Please enter only numeric characters" << endl;
		return -2;
	}
```

```
	int n = stoi(n_str);

	if (n <= 0)
	{
		cout << "The entered number n does not meet the above requirements" << 
endl;
		return -1;
	}
	int RadHurwNum = 
CombConstrOfQuadFormComposition::CalcRadonHurwitzNumber(n);
	cout << "Enter non-negative r number from Z{0, 1, ..., RadonHurwitz(n)} set " << " 
which is <= than " << " Radon-Hurwitz number for n (which is equal to " << RadHurwNum 
<< ")" << endl;
	string r_str;
	cout << "r: ";
	cin >> r_str;

	if (!CombConstrOfQuadFormComposition::IsNumeric(r_str))
	{
		cout << "The entered value for r is not numeric. Please enter only numeric 
characters" << endl;
		return -2;
	}

	int r = stoi(r_str);

	if (r > RadHurwNum)
	{
		cout << "The entered number r does not meet the above requirements" << endl;
		return -1;
	}
```

```
        CombConstrOfQuadFormComposition combConstructor =
        CombConstrOfQuadFormComposition(n, r);

        vector<string> quadCompositions = combConstructor.CombinatorConstruction();

        cout << "(n = " << n << ", r = " << r << ")," << " combinatorially built z[i] : R^(n + 1) *
R^(n + 1) -> R^(n + 1) type quadratic form compositions for 0 <= r <= RH(n) satisfying (n, r)
number couple \n" << endl;

        for (vector<string>::const_iterator cit = quadCompositions.begin(); cit !=
quadCompositions.end(); ++cit)

        {

                string quadComp = *cit;

                cout << quadComp << "\n" << endl;

        }

        return 0;

}


int main(int argc, char const* argv[])

{

        int retVal = 1;

        bool continueExecution = false;

        string isUserContinue = "n";

        do

        {

                retVal = MainExecution();

                cout << "Do you want to continue? (enter y for yes, n for no): ";

                cin >> isUserContinue;

                cout << "\n";


                if (isUserContinue == "y")

                        continueExecution = true;

                else

                        continueExecution = false;
```

```
	} while (continueExecution);

	return 0;
}
```

Ծրագիրը իրականացված է C++ 11 ստանդարտի չափանիշներով և կազմվում է Windows 10 օպերացիոն համակարգի շրջանակում: Ծրագիրը վերջնական կառուցվում է Microsoft Visual Studio 2019 և դրան առնթեր MSVC կոմպիլյատորի միջոցով:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. И. Л. Кантор, А. С. Солодовников, «Гиперкомплексные числа», издание «Наука», 1973 г.
2. А. А. Огникян, «Комбинаторное построение касательных векторных полей на сферах», Мат. Заметки, том 83, 2008 г.