Compilación de Soluciones de Concursos Nacionales

Ari

2020

Índice

1. Enunciados de la I OMM 1987 **8**

2. Enunciados de la II OMM 1988 **9**

3. Enunciados de la III OMM 1989 **10**

4. Enunciados de la IV OMM 1990 **11**

5. Enunciados de la V OMM 1991 **12**

6. Enunciados de la VI OMM 1992 **13**

7. Enunciados de la VII OMM 1993 **14**

8. Enunciados de la VIII OMM 1994 **15**

9. Enunciados de la IX OMM 1995 **16**

10.Enunciados de la X OMM 1996 **17**

11.Enunciados de la XI OMM 1997 **19**

12.Enunciados de la XII OMM 1998 **20**

13.Enunciados de la XIII OMMM 1999 **21**

14.Enunciados de la XIV OMM 2000 **22**

15.Enunciados de la XV OMM 2001 **23**

16.Enunciados de la XVI OMM 2002 **24**

17.Enunciados de la XVII OMM 2003 **25**

18.Enunciados de la XVIII OMM 2004 **26**

19.Enunciados de la XIX OMM 2005 **27**

20.Enunciados de la XX OMM 2006 **28**

21.Enunciados de la XXI OMM 2007 **29**

22. Enunciados de la XXII OMM 2008 **30**

23. Enunciados de la XXIII OMM 2009 **31**

24. Enunciados de la XXIV OMM 2010 **32**

25. Enunciados de la XXV OMM 2011 **33**

26. Enunciados de la XXVI OMM 2012 **34**

27. Enunciados de la XXVII OMM 2013 **36**

28. Enunciados de la XXVIII OMM 2014 **37**

29. Enunciados de la XXIX OMM 2015 **38**

30. Enunciados de la XXX OMM 2016 **40**

31. Enunciados de la XXXI OMM 2017 **41**

32. Enunciados de la XXXII OMM 2018 **42**

33. Enunciados de la XXXIII OMM 2019 **43**

34. Soluciones de la I OMM 1987 **44**
- 34.1. Problema 1 44
- 34.2. Problema 2 44
- 34.3. Problema 3 44
- 34.4. Problema 4 45
- 34.5. Problema 5 45
- 34.6. Problema 6 45
- 34.7. Problema 7 46
- 34.8. Problema 8 46

35. Soluciones de la II OMM 1988 **47**
- 35.1. Problema 1 47
- 35.2. Problema 2 47
- 35.3. Problema 3 47
- 35.4. Problema 4 48
- 35.5. Problema 5 49
- 35.6. Problema 6 49
- 35.7. Problema 7 49
- 35.8. Problema 8 50

36. Soluciones de la III OMM 1989 **51**
- 36.1. Problema 1 51
- 36.2. Problema 2 51
- 36.3. Problema 3 52
- 36.4. Problema 4 52
- 36.5. Problema 5 53
- 36.6. Problema 6 53

37. Soluciones de la IV OMM 1990 **55**
- 37.1. Problema 1 55

37.2. Problema 2 55
37.3. Problema 3 56
37.4. Problema 4 57
37.5. Problema 5 58
37.6. Problema 6 58

38. Soluciones de la V OMM 1991 **59**
38.1. Problema 1 59
38.2. Problema 2 59
38.3. Problema 3 59
38.4. Problema 4 59
38.5. Problema 5 60
38.6. Problema 6 61

39. Soluciones de la VI OMM 1992 **62**
39.1. Problema 1 62
39.2. Problema 2 62
39.3. Problema 3 62
39.4. Problema 4 63
39.5. Problema 5 63
39.6. Problema 6 64

40. Soluciones de la VII OMM 1993 **66**
40.1. Problema 1 66
40.2. Problema 2 66
40.3. Problema 3 67
40.4. Problema 4 67
40.5. Problema 5 68
40.6. Problema 6 68

41. Soluciones de la VIII OMM 1994 **70**
41.1. Problema 1 70
41.2. Problema 2 70
41.3. Problema 3 71
41.4. Problema 4 72
41.5. Problema 5 72
41.6. Problema 6 73

42. Soluciones de la IX OMM 1995 **74**
42.1. Problema 1 74
42.2. Problema 2 74
42.3. Problema 3 75
42.4. Problema 4 75
42.5. Problema 5 76
42.6. Problema 6 76

43. Soluciones de la X OMM 1996 **78**
43.1. Problema 1 78
43.2. Problema 2 78
43.3. Problema 3 79
43.4. Problema 4 79
43.5. Problema 5 80

43.6. Problema 6 81

44. Soluciones de la XI OMM 1997 **82**
44.1. Problema 1 82
44.2. Problema 2 82
44.3. Problema 3 82
44.4. Problema 4 83
44.5. Problema 5 83
44.6. Problema 6 83

45. Soluciones de la XII OMM 1998 **85**
45.1. Problema 1 85
45.2. Problema 2 85
45.3. Problema 3 85
45.4. Problema 4 86
45.5. Problema 5 86
45.6. Problema 6 87

46. Soluciones de la XIII OMM 1999 **89**
46.1. Problema 1 89
46.2. Problema 2 89
46.3. Problema 3 89
46.4. Problema 4 90
46.5. Problema 5 90
46.6. Problema 6 91

47. Soluciones de la XIV OMM 2000 **92**
47.1. Problema 1 92
47.2. Problema 2 92
47.3. Problema 3 93
47.4. Problema 4 94
47.5. Problema 5 94
47.6. Problema 6 95

48. Soluciones de la XV OMM 2001 **96**
48.1. Problema 1 96
48.2. Problema 2 96
48.3. Problema 3 97
48.4. Problema 4 97
48.5. Problema 5 98
48.6. Problema 6 98

49. Soluciones de la XVI OMM 2002 **100**
49.1. Problema 1 100
49.2. Problema 2 100
49.3. Problema 3 100
49.4. Problema 4 101
49.5. Problema 5 102
49.6. Problema 6 103

50. Soluciones de la XVII OMM 2003 **104**
50.1. Problema 1 104
50.2. Problema 2 104

50.3. Problema 3 . . . 104
50.4. Problema 4 . . . 105
50.5. Problema 5 . . . 105
50.6. Problema 6 . . . 105

51. Soluciones de la XVIII OMM 2004 **107**
51.1. Problema 1 . . . 107
51.2. Problema 2 . . . 107
51.3. Problema 3 . . . 108
51.4. Problema 4 . . . 108
51.5. Problema 5 . . . 109
51.6. Problema 6 . . . 110

52. Soluciones de la XIX OMM 2005 **112**
52.1. Problema 1 . . . 112
52.2. Problema 2 . . . 112
52.3. Problema 3 . . . 113
52.4. Problema 4 . . . 113
52.5. Problema 5 . . . 114
52.6. Problema 6 . . . 114

53. Soluciones de la XX OMM 2006 **116**
53.1. Problema 1 . . . 116
53.2. Problema 2 . . . 116
53.3. Problema 3 . . . 116
53.4. Problema 4 . . . 117
53.5. Problema 5 . . . 118
53.6. Problema 6 . . . 118

54. Soluciones de la XXI OMM 2007 **119**
54.1. Problema 1 . . . 119
54.2. Problema 2 . . . 119
54.3. Problema 3 . . . 120
54.4. Problema 4 . . . 120
54.5. Problema 5 . . . 120
54.6. Problema 6 . . . 121

55. Soluciones de la XXII OMM 2008 **122**
55.1. Problema 1 . . . 122
55.2. Problema 2 . . . 122
55.3. Problema 3 . . . 123
55.4. Problema 4 . . . 123
55.5. Problema 5 . . . 124
55.6. Problema 6 . . . 124

56. Soluciones de la XXIII OMM 2009 **126**
56.1. Problema 1 . . . 126
56.2. Problema 2 . . . 126
56.3. Problema 3 . . . 127
56.4. Problema 4 . . . 127
56.5. Problema 5 . . . 127
56.6. Problema 6 . . . 128

57. Soluciones de la XXIV OMM 2010 **129**
57.1. Problema 1 129
57.2. Problema 2 129
57.3. Problema 3 130
57.4. Problema 4 130
57.5. Problema 5 131
57.6. Problema 6 131

58. Soluciones de la XXV OMM 2011 **133**
58.1. Problema 1 133
58.2. Problema 2 133
58.3. Problema 3 133
58.4. Problema 4 135
58.5. Problema 5 135
58.6. Problema 6 136

59. Soluciones de la XXVI OMM 2012 **138**
59.1. Problema 1 138
59.2. Problema 2 138
59.3. Problema 3 139
59.4. Problema 4 139
59.5. Problema 5 140
59.6. Problema 6 141

60. Soluciones de la XXVII OMM 2013 **142**
60.1. Problema 1 142
60.2. Problema 2 142
60.3. Problema 3 143
60.4. Problema 4 143
60.5. Problema 5 143
60.6. Problema 6 144

61. Soluciones de la XXVIII OMM 2014 **146**
61.1. Problema 1 146
61.2. Problema 2 146
61.3. Problema 3 147
61.4. Problema 4 148
61.5. Problema 5 148
61.6. Problema 6 149

62. Soluciones de la XXIX OMM 2015 **152**
62.1. Problema 1 152
62.2. Problema 2 152
62.3. Problema 3 153
62.4. Problema 4 154
62.5. Problema 5 155
62.6. Problema 6 155

63. Soluciones de la XXX OMM 2016 **157**
63.1. Problema 1 157
63.2. Problema 2 158
63.3. Problema 3 158

63.4. Problema 4 158
63.5. Problema 5 159
63.6. Problema 6 160

64. Soluciones de la XXXI OMM 2017 **162**
64.1. Problema 1 162
64.2. Problema 2 162
64.3. Problema 3 163
64.4. Problema 4 163
64.5. Problema 5 164
64.6. Problema 6 164

65. Soluciones de la XXXII OMM 2018 **166**
65.1. Problema 1 166
65.2. Problema 2 166
65.3. Problema 3 167
65.4. Problema 4 168
65.5. Problema 5 168
65.6. Problema 6 170

66. Soluciones de la XXXIII OMM 2019 **172**
66.1. Problema 1 172
66.2. Problema 2 172
66.3. Problema 3 173
66.4. Problema 4 173
66.5. Problema 5 174
66.6. Problema 6 174

1. Enunciados de la I OMM 1987

1. Demuestre que si dos fracciones son irreducibles (simplificadas) y su suma es un entero, entonces ambas fracciones tienen el mismo denominador.

2. ¿Cuántos enteros positivos dividen a 20! ($20! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 20$)?

3. Considere dos rectas l y l' y un punto fijo P que diste lo mismo de l que de l'. ¿Qué lugar geométrico describen los puntos M que son proyección de P sobre AC, donde A está en l, B está en l', y el ángulo APB es recto?

4. Calcule el producto de todos los enteros positivos menores que 100, y que tengan exactamente tres divisores positivos. Compruebe que dicho número es un cuadrado perfecto.

5. Considere un triángulo rectángulo ABC donde la hipotenusa es BC. M es un punto en BC y P y Q son las proyecciones de M en AB y AC, respectivamente. Pruebe que para ninguno de tales puntos M son iguales las áreas del triángulo BPM, del triángulo MQC y el rectángulo $AQMP$ (las tres al mismo tiempo).

6. Demuestre que para cualquier entero positivo n, el número $(n^3-n)(5^{8n+4}+3^{4n+2})$ es múltiplo de 3804.

7. Demuestre que si n es un entero positivo, entonces
$$\frac{n^2+n-1}{n^2+2n}$$
es una fracción irreducible (simplificada).

8.
   a) Tres rectas en el espacio l, m, n concurren en el punto S y un plano perpendicular a m corta a l, m y n en A, B y C, respectivamente. Suponga que los ángulos ASB y BSC son de 45° y que el ángulo ABC es recto. Calcule el ángulo ASC.
   b) Si un plano perpendicular a l corta a l, m y n en P, Q y R, respectivamente y si $SP = 1$, calcule los lados del triángulo PQR.

Soluciones en la página 44

2. Enunciados de la II OMM 1988

1. ¿De cuántas formas se pueden acomodar en línea recta siete pelotas blancas y cinco negras, de tal manera que no estén dos pelotas negras juntas?

2. Si a y b son enteros positivos, pruebe que 19 divide a $11a + 2b$ si y solo si 19 divide a $18a + 5b$.

3. Considere dos circunferencias tangentes exteriormente y de radios distintos. Sus tangentes comunes forman un triángulo. Calcule el área de dicho triángulo en términos de los radios de las circunferencias.

4. ¿Cuántas maneras hay de escoger ocho enteros $a_1, a_2, \ldots, a_8$ no necesariamente distintos, tales que $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_8 \leq 8$?

5. Si a y b son dos enteros positivos primos relativos y n es un entero, pruebe que el máximo común divisor de $a^2 + b^2 - nab$ y $a + b$ divide a $n + 2$.

6. Considere dos puntos fijos B y C de una circunferencia $\mathcal{C}$. Encuentre el lugar geométrico de las intersecciones de las bisectrices de los triángulos ABC, cuando A es un punto que recorre $\mathcal{C}$.

7. Si A y B son subconjuntos ajenos del conjunto $\{1, 2, \ldots, m-1, m\}$ y la suma de los elementos de A es igual a la sume de los elementos de B, pruebe que el número de elementos de A y también de B es menor que $\frac{m}{\sqrt{2}}$.

8. Calcule el volumen del octaedro que circunscribe a una esfera de radio 1.

Soluciones en la página 47

3. Enunciados de la III OMM 1989

1. Considere un triángulo ABC en el que la longitud AB es igual a 5, las medianas por A y por B son perpendiculares entre sí y el área es 18. Halle las longitudes de los lados BC y AC.

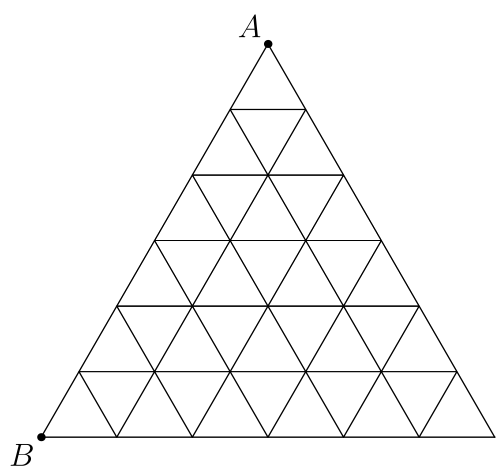
2. Encuentre dos enteros positivos a y b tales que, b^2 sea múltiplo de a, a^3 sea múltiplo de b^2, b^4 sea múltiplo de a^3, a^5 sea múltiplo de b^4, pero b^6 no sea múltiplo de a^5.

3. Pruebe que no existe un entero positivo de 1989 cifras que tenga al menos tres de ellas iguales a 5 y tal que la suma de todas sus cifras sea igual al producto de las mismas.

4. Encuentre el entero positivo más pequeño n tal que si su expansión decimal es $n = a_m a_{m-1} \dots a_2 a_1 a_0$ y si r es el número cuya expansión decimal es $r = a_1 a_0 a_m a_{m-1} \dots a_2 0$, entonces r es el doble de n.

5. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos círculos tangentes de radio 1 dentro de un círculo $\mathcal{C}$ de radio 2. Sea $\mathcal{C}_\ni$ un círculo dentro de $\mathcal{C}$ tangente a cada uno de los círculos $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Sea $\mathcal{C}_4$ un círculo dentro de $\mathcal{C}$ tangente a $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_3$. Demuestre que los centros de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ son los vértices de un rectángulo

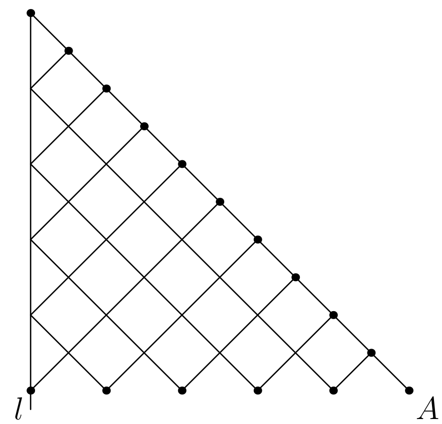
6. Siguiendo las líneas de la figura, ¿cuántos caminos hay para ir del punto A al punto B que no pasen dos veces por el mismo punto y que solo avancen hacia abajo y hacia los lados pero no hacia arriba?



Soluciones en la página 51

4. Enunciados de la IV OMM 1990

1. Encuentre el total de caminos que hay del punto A a la línea l en la red de la figura, si en un camino solo está permitido ir hacia la izquierda.



2. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en B y sea H el punto de intersección del lado AC y la altura por B. Llamemos r, r_1 y r_2 a los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC, ABH y HBC, respectivamente. Encuentre una igualdad que relacione a r, r_1 y r_2.

3. Pruebe que $n^{n-1} - 1$ es divisible entre $(n-1)^2$ para todo entero $n \geq 2$.

4. Considere las 27 fichas de dominó que quedan quitando la blanca-blanca. Tomando en cuenta los puntos que hay en una ficha, a cada ficha le corresponde un número racional menor o igual que uno. ¿Cuál es la suma de todos estos números?

5. Si $P_1, P_2, \ldots, P_{19}$ son 19 puntos del plano con coordenadas enteras tales que cada tres de ellos son no colineales, demuestre que hay tres de ellos con la propiedad de que su baricentro (punto de intersección de las medianas de un triángulo), también tiene coordenadas enteras.

6. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en C. Sea l cualquier línea que pase por B y que corte al lado AC en un punto E. Sea F el punto medio de EC, G el punto medio de CB y H el pie de la altura de C, en AB, en el triángulo ABC. Si I denota el circuncentro del triángulo AEH (punto de intersección de las mediatrices de los lados), pruebe que los triángulos IGF y ABC son semejantes.

Soluciones en la página 55

5. Enunciados de la V OMM 1991

1. Calcule la suma de todas las fracciones positivas irreducibles (simplificadas) menores que uno cuyo denominador es 1991.

2. Una compañía de n soldados es tal que

   (1) n es un número capicúa (es decir, se lee de la misma manera al derecho y al revés, por ejemplo 12321 o 523325),

   (2) Si los soldados se forman

      (I) de 3 en 3, quedan 2 soldados en la última fila,

      (II) de 4 en 4, quedan 3 soldados en la última fila y,

      (III) de 5 en 5, quedan 5 soldados en la última fila.

   (a) ¿Cuál es el mínimo número n tal que satisface (1) y (2)?

   (b) Demuestre que hay una infinidad de números n que satisfacen (1) y (2).

3. Se tienen cuatro ccanicas de radio uno colocadas en el espacio de tal manera que cada una de ellas es tangente a las otras 3. ¿Cuál es el radio de la menor esfera que contiene a las canicas?

4. Considere un cuadrilátero convexo $ABCD$ en el que las diagonales AC y BD se cortan formando un ángulo recto. Sean M, N, R y S los puntos medios de los segmentos AB, BC, CD y AD, respectivamente. Sean W, X, Y y Z las proyecciones de los puntos M, N, R y S sobre las rectas DC, AD, AB y BC, respectivamente. Pruebe que todos los puntos M, N, R, S, W, X, Y y Z están sobre una misma circunferencia.

5. La suma de los cuadrados de dos números puede ser un cuadrado perfecto, por ejemplo $3^2 + 4^2 = 5^2$.

   (a) Pruebe que la suma de los cuadrados de m enteros consecutivos no puede ser un cuadrado para $m = 3$ y 6.

   (b) Encuentre un ejemplo de 11 números positivos consecutivos cuya suma de cuadrados sea un cuadrado perfecto.

6. En un polígono de n lados ($n \geq 4$) se considera una familia T de triángulos formados con los vértices del polígono con la propiedad de que cada dos triángulos de la familia cumplen una de las siguientes dos condiciones:

   (a) no tienen vértices en común,

   (b) tienen 2 vértices en común.

   Demuestra que T tiene a lo más n triángulos.

Soluciones en la página 59

6. Enunciados de la VI OMM 1992

1. Un tetraedro $OPQR$ es tal que los ángulos POQ, POR y QOR son rectos. Muestre que si X, Y, Z son los puntos medios de PQ, QR y RP, entonces el tetraedro $OXYZ$ tiene sus cuatro caras iguales.

2. Sea p un número primo, diga cuántas cuartetas distintas (a, b, c, d) existen, con a, b, c y d enteros y $0 \leq a, b, c, d \leq p - 1$, tales que $ad - bc$ sea múltiplo de p.

3. Considere siete puntos dentro o sobre un hexágono regular y pruebe que tres de ellos forman un triángulo cuya área es menor o igual que $\frac{1}{6}$ del área del hexágono.

4. Muestre que 100 divide a $1^1 + 11^{11} + 111^{111} + \cdots + 1111111111^{1111111111}$.

5. Sean x, y, z números reales positivos tales que $x + y + z = 3$. Si $S = \sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3} + \sqrt{2z+3}$, pruebe que $6 < S \leq 3\sqrt{5}$.

6. Sea $ABCD$ un rectángulo. Sean I el punto medio de CD y M la intersección de BI con la diagonal AC.
   (a) Pruebe que DM pasa por el punto medio de BC.
   (b) Sea E un punto exterior al rectángulo tal que ABE sea un triángulo isósceles y rectángulo en E. Además, suponga que $BC = BE = a$. Pruebe que ME es bisectriz del ángulo AMB.
   (c) Calcule el área del cuadrilátero $AEBM$ en función de a.

Soluciones en la página 62

7. Enunciados de la VII OMM 1993

1. Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Se construyen exteriormente a este triángulo los triángulos rectángulos isósceles AEC y ADB con hipotenusas AC y AB, respectivamente. Sea O el punto medio de BC y sean E' y D' los puntos de intersección de OE y OD con DB y EC, respectivamente. Calcula el área del cuadrilátero $DED'E'$ en función de los lados del triángulo ABC.

2. Encuentre los números del 100 al 999 tales que la suma de los cubos de sus dígitos sea igual al número.

3. Dentro de un pentágono de área 1993 se encuentran 995 puntos. Considere esos puntos junto con los vértices del pentágono. Muestre que de todos los triángulos que se pueden formar con los 100 puntos anteriores, hay al menos uno de área menor o igual a uno.

4. Para cada número entero $n \geq 0$, se define:

   (i) $f(n, 0) = 1$ y $f(n, n) = 1$,

   (ii) $f(n, k) = f(n-1, k-1) + f(n-1, k)$, para $0 < k < n$.

   ¿Cuántos cálculos se tienen que hacer para encontrar $f(3991, 1993)$, sin contar aquellos de la forma $f(n, 0)$ y $f(n, n)$?

5. Por un punto O de una circunferencia, se tienen tres cuerdas que sirven como diámetros de tres circunferencias. Además del punto común O, las circunferencias se intersectan por parejas en otros tres puntos. Demuestra que tales puntos son colineales.

6. Sean $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) + 1$ y p un número impar. Pruebe que existe un entero n tal que p divide a $f(n)$ si y solo si existe un entero m tal que p divide a $m^2 - 5$.

Soluciones en la página 66

8. Enunciados de la VIII OMM 1994

1. La colección infinita de números $1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, \ldots$ se ha formado de la siguiente manera: Se coloca primero el primer impar (1), luego los siguientes dos pares $(2, 4)$, después los siguientes tres impares $(5, 7, 9)$, luego los cuatro pares siguientes al último impar que se colocó y así sucesivamente. Encuentre el término de la secuencia más cercano a 1994.

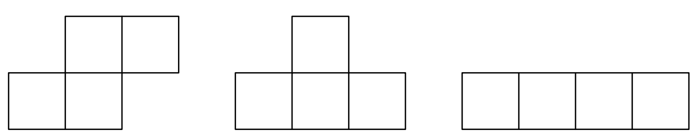
2. Los doce números de un reloj se desprendieron y al colocarlos nuevamente se cometieron algunos errores. Demuestre que en la nueva colocación hay un número que al sumarle los dos números que quedaron a sus lados se obtiene un resultado mayor o igual a 21.

3. Considere un paralelogramo $ABCD$ (con AB paralela a CD y BC paralela a DA), sobre la prolongación del lado AB encuentre un punto E, de manera que $BE = BC$ (y con B entre A y E). Por E, trace una perpendicular a la linea AB, esta se encontrará en un punto F con la línea que pasa por C y es perpendicular a la diagonal BD. Muestre que AF divide en dos ángulos iguales al ángulo DAB.

4. Un matemático caprichoso escribe un libro que tiene páginas de la 2 a la 400 y que debe ser leído de la siguiente manera: Primero deberán leerse todas las páginas cuyo número no sea primo relativo con 400 (por suerte, estas se leen en orden normal, de menor a mayor). Una vez leídas estas, se toma el último número de las que no se han leído (en este caso 399) y entonces se leen todas las páginas cuyo número no sea primo relativo con él y que no se hayan leído antes. Este proceso (tomar el último número de las que no se han leído y leer las páginas cuyo número no sea primo relativo con él y que no se hayan leído antes) continúa hasta terminar de leer el libro. ¿Cuál es el número de la última página que se debe leer?

5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo (cada uno de sus ángulos es menor que $180°$) y considere los pies de las alturas de los cuatro triángulos que se pueden formar con los vértices A, B, C y D. Demuestre que no importa que cuadrilátero convexo se tome, alguno de estos 12 punntos se encuentra sobre un lado del cuadrilátero.

6. Sea C una cuadrícula de 10×10. Considere piezas de las siguientes formas:



b c a

donde en estas piezas, cada cuadrado es de 1×1. Demuestre que:

(I) C no se puede cubrir completamente con 25 piezas de la forma (a),

(II) C no se puede cubrir completamente con 25 piezas de la forma (b),

(III) C no se puede cubrir completamente con 25 piezas de la forma (c).

Soluciones en la página 70

9. Enunciados de la IX OMM 1995

1. En una Olimpiada de Matemáticas los concursantes están ocupando todos los asientos de un salón rectangular donde los asientos están alineados en filas y columnas de tal manera que hay más de dos filas y en cada fila hay más de dos asientos. Al inicio del examen un profesor les sugiere que se deseen suerte dándose la mano; cada uno de los concursantes estrecha la mano de los concursantes que están junto a él (adelante, atrás, a los lados y en diagonal) y solo a estos. Alguien observa que se dieron 1020 apretones de manos. ¿Cuántos concursantes hay?

2. Considere 6 puntos en el plano con la propiedad de que 8 de las distancias entre ellos son iguales a 1. Muestre que al menos tres de los puntos forman un triángulo equilátero de lado 1.

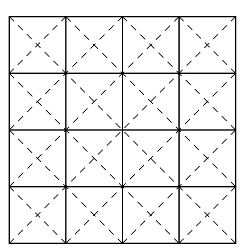
3. Sean A, B, C y D vértices consecutivos de un heptágono regular, sean AL y AM las tangentes desde A a la circunferencia de centro C y radio CB. Sea N la intersección de AC y BD. Demuestre que los puntos L, M y N son colineales.

4. (a) Encuentre un subconjunto B del conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 40\}$, de manera que B tenga 26 elementos y que ningún producto de dos elementos de B sea un cuadrado perfecto.

   (b) Demuestre que no se puede obtener un subconjunto de A de 27 elementos con la característica mencionada en (a).

5. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo de manera que los triángulos ABC, BCD, CDE, DEA y EAB son todos de igual área. Demuestre que $\frac{1}{4}$área$(ABCDE) <$ área$(ABC) < \frac{1}{3}$área$(ABCDE)$.

6. Sobre los cuadrados de una cuadrícula de 4 por 4 se colocan símbolos 0 y 1; estos símbolos se cambian, uno por el otro, de acuerdo a las siguientes operaciones: la operación (a) cambia todos los símbolos de un renglón, la operación (b) cambia todos los símbolos de una columna, la operación (c) cambia todos los símbolos de una diagonal (líneas punteadas en la figura). Determine cuáles son los arreglos de los que se puede partir para que con un número finito de operaciones se pueda llegar a un arreglo de puros símbolos 0.



Soluciones en la página 74

10. Enunciados de la X OMM 1996

1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero y sean P y Q los puntos de trisección de la diagonal BD (es decir, P y Q son puntos del segmento BD para los cuales las longitudes BP, PQ y QD son todas iguales). Sea E la intersección de la recta que pasa por A y P con el segmento BC y sea F la intersección de la recta que pasa por A y Q con el segmento DC. Demuestre lo siguiente:

   (i) Si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces E y F son los respectivos puntos medios de los segmentos BC y CD.

   (ii) Si E y F son los respectivos puntos medios de los segmentos BC y CD, entonces $ABCD$ es un paralelogramo.

2. Bordeando una mesa circular hay dibujadas 64 casillas y en cada una hay una ficha. Las fichas y las casillas están numeradas del 1 al 64 en orden consecutivo (cada ficha está en la casilla con el mismo número). En la parte central de la mesa hay 1996 focos apagados. Cada minuto todas las fichas se desplazan simultáneamente, en forma circular (en el mismo sentido de la numeración), como sigue: la ficha #1 se desplaza una casilla, la ficha #2 se desplaza dos casillas, la ficha #3 se desplaza tres casillas, etcétera, pudiendo varias fichas ocupar la misma posición. Cada vez que una ficha comparte casilla con la ficha #1, se prende uno de los focos (se prenden tantos focos como fichas están compartiendo la posición de la ficha #1 en ese momento). ¿En dónde estará la ficha #1 en el primer momento en que ya todos los focos estén prendidos?

3. Demuestre que no es posible cubrir la cuadrícula de 6 cm. $\times$ 6 cm. con 18 rectángulos de 2 cm. $\times$ 1 cm. de tal manera que cada una de las rectas de longitud 6 cm. que forman la cuadrícula y que están en el interior de la misma pase por el centro de uno de los rectángulos. Demuestre también que sí es posible cubrir una cuadrícula de 6 cm. $\times$ 5 cm. con 15 rectángulos de 2 cm. $\times$ 1 cm. de tal manera que cada una de las rectas de 5 cm. o 6 cm. que forman la cuadrícula y que están en el interior de la misma pase por el centro de por lo menos uno de los rectángulos.

4. ¿Para qué enteros $n \geq 2$ se pueden acomodar los números del 1 al 16 en los cuadros de una cuadrícula de 4×4 (un número en cada cuadro, sin repetir los números) de tal manera que las 8 sumas de los números que quedan en cada fila y en cada columna sean múltiplos de n, y que estos 8 múltiplos sean todos distintos entre sí?

5. En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del 1 al n^2 en el orden habitual, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, como ejemplo se ilustra el caso $n = 3$:

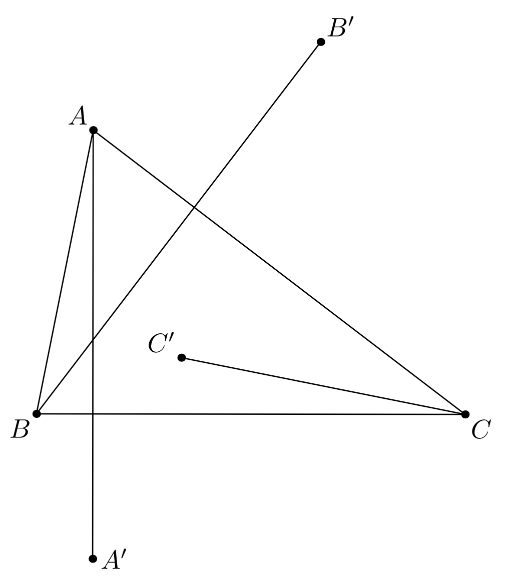
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Llamemos camino en la cuadrícula a una sucesión de pasos de un cuadro a otro desde el cuadro 1 hasta el n^2, de tal manera que en cada paso el movimiento sea hacia la derecha o hacia abajo. Si C es un camino, denotamos por $L(C)$ a la suma de los números por los que pasa el camino C.

(i) Sea M la mayor $L(C)$ que se puede obtener de entre todos los caminos C en una cuadrícula fija de tamaño $n \times n$ y sea m la menor $L(C)$ (también de entre todos los caminos C en una cuadrícula fija de tamaño $n \times n$). Pruebe que $M - m$ es un cubo perfecto.

(ii) Pruebe que en ninguna cuadrícula hay un camino tal que $L(C) = 1996$.

6. En la figura se muestra un triángulo acutángulo ABC en el que la longitud de AB es menor que la de BC y la de BC es menor que la de AC. Los puntos A', B' y C' son tales que AA' es perpendicular a BC, y la longitud de AA' es igual a la de BC; BB' es perpendicular a AC, y la longitud de BB' es igual a la de AC; CC' es perpendicular a AB, y la longitud de CC' es igual a la de AB. Además el ángulo $AC'B$ es igual a $90°$. Demuestre que A', B' y C' son colineales.



Soluciones en la página 78

11. Enunciados de la XI OMM 1997

1. Encuentre todos los números primos positivos p tales que $8p^4 - 3003$ también sea un primo positivo.

2. En un triángulo ABC, sean P y P' puntos sobre el segmento BC, Q en el segmento CA y R sobre el AB de forma que: $\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP'}{P'B}$. Sea G el centroide del triángulo ABC y sea K el punto de intersección de las rectas AP' y RQ. Demuestre que los puntos P, G y K son colineales.

3. En una cuadrícula de 4×4 se van a colocar números enteros del 1 al 16 (uno en cada casilla).
   (I) Pruebe que es posible colocarlos de manera que los números que aparecen en cuadrados que comparten un lado tengan una diferencia menor o igual que 4.
   (II) Pruebe que no es posible colocarlos de tal manera que los números que aparecen en cuadros que comparten un lado tengan una diferencia menor o igual a 3.

4. Dados 3 puntos no alineados en el espacio. Al único plano que los contiene le llamamos plano determinado por los puntos. ¿Cuál es el mínimo número de planos determinados por 6 puntos en el espacio si no hay 3 alineados y no están los 6 en un mismo plano?

5. Sean P, Q y R puntos sobre los lados de un triángulo ABC con P en el segmento BC, Q en el segmento AC y R en el segmento BA, de tal manera que si A' es la intersección de BQ con CR, B' es la intersección de AP con CR, y C' es la intersección de AP con BQ, entonces $AB' = B'C'$, $BC' = C'A'$ y $C'A' = A'B'$. Calcule el cociente del área del triángulo PQR entre el área del triángulo ABC.

6. Pruebe que el número 1 se puede escribir de una infinidad de maneras distintas en la forma $\frac{1}{5} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$, donde $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros positivos y $5 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Soluciones en la página 82

12. Enunciados de la XII OMM 1998

1. Un número es suertudo si al sumar los cuadrados de sus cifras y repetir esta operación suficientes veces obtenemos el número 1. Por ejemplo, 1900 es suertudo, ya que $1900 \to 82 \to 62 \to 100 \to 1$. Encuentre una infinidad de parejas de enteros consecutivos, donde ambos números sean suertudos.

2. Dos rayos l y m parten de un mismo punto formando un ángulo α, sea P un punto en l. Para cada circunferencia C tangente a l en P que corte a m en puntos Q y R, sea T el punto donde la bisectriz del ángulo QPR corta a C. Describe la figura geométrica que forman los puntos T, justifique su respuesta.

3. Cada uno de los lados y las diagonales de un octágono regular se pintan de rojo o de negro. Demuestre que hay al menos siete triángulos cuyos vértices son vértices del octágono y sus tres lados son del mismo color.

4. Encuentre todos los enteros que se escriben como $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{9}{a_9}$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_9$ son dígitos distintos de cero que pueden repetirse.

5. Sean B y C dos puntos de una circunferencia, AB y AC las tangentes desde A. Sea Q un punto del segmento AC y P la intersección de BQ con la circunferencia. La paralela a AB por Q corta a BC en J. Demuestre que PJ es paralelo a AC si y sólo si $BC^2 = AC \cdot CQ$.

6. Un plano en el espacio es equidistante a un conjunto de puntos si la distancia de cada punto al plano es la misma. ¿Cuál es el mayor número de planos equidistantes a 5 puntos de los cuales no hay 4 en un mismo plano?

Soluciones en la página 85

13. Enunciados de la XIII OMMM 1999

1. Sobre una mesa hay 1999 fichas que son rojas de un lado y negras del otro (no se especifica cuál de sus dos caras está hacia arriba). Dos personas juegan alternadamente. Cada persona en su turno hace una de las siguientes cosas:

   (I) Retira un número cualquiera de fichas, con la condición de que todas las fichas retiradas tengan el mismo color hacia arriba.

   (II) Voltea un número cualquiera de fichas, con la condición de que todas las fichas tengan el mismo color hacia arriba.

   Gana el que toma la última ficha. ¿Cuál jugador puede asegurar que ganará, el primero en jugar o el segundo=

2. Demuestre que no existen 1999 primos en progresión aritmética, todos ellos menores que 12345.

3. Considere un punto P en el interior del triángulo ABC. Sean D, E y F los puntos medios de AP, BP y CP, respectivamente y L, M y N los puntos de intersección de BF con CE, AF con CD y AE con BD.

   (I) Muestre que el área del hexágono $DNELFM$ es igual a una tercera parte del área del triángulo ABC.

   (II) Muestre que DL, EM y FN concurren.

4. En una cuadrícula de 8×8 se han escogido arbitrariamente 10 cuadraditos y se han marcado los centros de estos. El lado de cada cuadradito mide 1. Demuestre que existen al menos dos puntos marcados que están separados por una distancia menor o igual que $\sqrt{2}$, o que existe al menos un punto marcado que se encuentra a una distancia de $\frac{1}{2}$ de una orilla de la cuadrícula.

5. $ABCD$ es un trapecio con AB paralelo a CD. Las bisectrices exteriores de los ángulos B y C se intersectan en P. Las bisectrices exteriores de los ángulos A y D se intersectan en Q. Demuestre que la longitud de PQ es igual a la mitad del perímetro del trapecio $ABCD$.

6. Un polígono se dice que es ortogonal si todos sus lados tienen longitudes enteras y cada dos lados consecutivos son perpendiculares. Demuestre que si un polígono ortogonal puede cubrirse con rectángulos de 2×1 (sin que estos se traslapen), entonces al menos uno de sus lados tiene longitud par.

Soluciones en la página 89

14. Enunciados de la XIV OMM 2000

1. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ circunferencias tales que $\mathcal{A}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{B}$ en P, $\mathcal{B}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{C}$ en Q, $\mathcal{C}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{D}$ en R y $\mathcal{D}$ es tangente exteriormente a $\mathcal{A}$ en S. Suponga que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ no se intersectan, ni tampoco $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$.

   (i) Pruebe que los puntos P, Q, R y S están todos sobre una circunferencia.

   (ii) Suponga además que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ tienen radio 2, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ tienen radio 3 y la distancia entre los centros de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ es 6. Determine el área del cuadrilátero $PQRS$.

2. Se construye un triángulo como el de la figura, pero empezando que los números del 1 al 2000. Cada número del triángulo (excepto los del primer renglón) es al suma de los dos números arriba de él. ¿Cuál es el número que ocupa el vértice inferior del triángulo?

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 \\
 & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \\
 & & 8 & & 12 & & 16 & & \\
 & & & 20 & & 28 & & & \\
 & & & & 48 & & & &
\end{array}$$

3. Dado un conjunto de enteros positivos A, construimos el conjunto A' poniendo todos los elementos de A y todos los enteros positivos que se pueden obtener de la siguiente manera: se escogen algunos elementos de A, sin repetir y a cada uno de esos números se le pone el signo $+$ o el signo $-$; luego se suman esos números con signo y el resultado, si es positivo, se pone en A'. Por ejemplo, si $A = \{2, 8, 13, 20\}$, entonces algunos elementos de A' son 8 y 14 (pues 8 es elemento de A y $14 = 20 + 2 - 8$). A partir de A' construimos A'' de la misma manea que A' se construye a partir de A. Encuentre el mínimo número de elementos que necesita tener A si queremos que A'' contenga a todos los enteros del 1 al 40 (inclusive).

4. Para enteros positivos a y b, no múltiplos de 5, se construye una lista de números como sigue: el primer número es 5 y, a partir del segundo número, cada número se obtiene multiplicando el número que le precede (en la lista) por a y sumándole b. Por ejemplo, si $a = 2$ y $b = 4$, entonces los primeros tres números en la lista serían 5, 14 y 32 (pues $14 = 5 \cdot 2 + 4$ y $32 = 14 \cdot 2 + 4$). ¿Cuál es la máxima cantidad de primos que se pueden obtener antes de obtener el primer número no primo?

5. Se tiene un tablero de $n \times n$ pintado como tablero de ajedrez. Está permitido efectuar la siguiente operación en el tablero: escoger un rectángulo en la cuadrícula tal que las longitudes de sus lados sean ambas pares o ambas impares, pero que no sean las dos iguales a 1 al mismo tiempo, e invertir los colores de los cuadraditos de ese rectángulo (es decir, los cuadraditos del rectángulo que eran negros se convierten en blancos y los que eran blancos se convierten en negros). Encuentre para qué números n es posible lograr que todos los cuadraditos queden de un mismo color, después de haber efectuado la operación el número de veces que sea necesario. (Nota: las dimensiones de los rectángulos que se escogen pueden ir cambiando.)

6. Sea ABC un triángulo en el que el ángulo B es obtuso y en el que un punto H sobre AC tiene la propiedad de que $AH = BH$ y BH es perpendicular a BC. Sean D y E los puntos medios de AB y BC, respectivamente. Por H se traza una paralela a AB que corta a DE en F. Pruebe que los ángulos BCF y ACD son iguales.

Soluciones en la página 92

15. Enunciados de la XV OMM 2001

1. Encuentra todos los números de 7 dígitos que son múltiplos de 3 y 7, y cada uno de cuyos dígitos es 3 o 7.

2. Se tienen algunas pelotas de colores (son por lo menos tres colores), y por lo menos tres cajas. Las pelotas se ponen en las cajas de manera que no quede vacía ninguna caja y que no haya tres pelotas de colores distintos que estén en tres cajas distintas. Prueba que hay una caja tal que todas las pelotas que están fuera de ella son del mismo color.

3. En un cuadrilátero $ABCD$, inscrito en una circunferencia, llamemos P al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y sea M el punto medio de CD. La circunferencia que pasa por P y que es tangente a CD en M corta a BD y a AC en los puntos Q y R, respectivamente. Se toma un punto S sobre el segmentos BD de tal manera que $BS = DQ$. Por S se traza una paralela a AB que corta a AC en un punto T. Pruebe que $AT = RC$.

4. Dados dos enteros positivos n y a se forma una lista de 2001 números como sigue: el primer número es a; a partir del segundo, cada número es el residuo que se obtiene al dividir el cuadrado del anterior entre n. A los números de la lista se les ponen los signos $+$ y $-$, alternadamente, empezando con $+$. Los números con signo, así obtenidos, se suman y a esa suma se le llama *suma final para n y a*. ¿Para qué enteros $n \geq 5$ existe alguna a tal que $2 \leq a \leq \frac{n}{2}$ y la suma final para n y a es positiva?

5. Sea ABC un triángulo tal que $AB < AC$ y el ángulo BAC es el doble del ángulo BCA. Sobre el lado AC se toma un punto D tal que $CD = AB$. Por el punto B se traza una recta l paralela a AC. La bisectriz exterior del ángulo en A intersecta a l en el punto M, y la paralela a AB por el punto C intersecta a l en el punto N. Pruebe que $MD = ND$.

6. Un coleccionista de monedas raras tiene monedas de denominaciones $1, 2, \ldots, n$ (tiene muchas monedas de cada denominación). Desea poner algunas de sus monedas en 5 cajas de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

   (a) En cada caja hay a lo más una moneda de cada denominación.

   (b) Todas las cajas tienen el mismo número de monedas y la misma cantidad de dinero.

   (c) Para cualesquiera dos cajas sucede que entre las dos tienen por lo menos una moneda de cada denominación.

   (d) No existe una denominación tal que todas las cajas tengan una moneda de esa denominación.

   ¿Para qué valores de n el coleccionista puede hacer lo que se propone?

Soluciones en la página 96

16. Enunciados de la XVI OMM 2002

1. En una cuadrícula de 32×32 se escriben los números del 1 al 1024 de izquierda a derecha, con los números del 1 al 2 en el ptimer renglón, los del 33 al 64 en el segundo, etc. La cuadrícula se divide en cuatro cuadrículas de 16×16 que se cambian de lugar entre ellas como sigue:

   $$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline d & c \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|}\hline d & a \\ \hline c & b \\ \hline \end{array}$$

   Después, cada cuadrícula de 16×16 se divide en cuatro cuadrículas de 8×8 que se cambian de lugar del mismo modo; a su vez cada una de esas se divide y así sucesivamente hasta llegar a cuadrículas de 2×2 que se dividen en cuadros de 1×1, los cuales se cambian de lugar del mismo modo. Al terminar estas operaciones, ¿qué números quedan en la diagonal que va de la esquina superior izquierda a la inferior derecha en la cuadrícula de 32×32?

2. Sean $ABCD$ un paralelogramo y $\mathcal{K}$ la circunferencia circunscrita al triángulo ABD. Sean E y F las intersecciones de $\mathcal{K}$ con los lados (o sus prolongaciones) BC y CD, respectivamente (E distinto de B y F distinto de D). Demuestra que el circuncentro del triángulo CEF está sobre $\mathcal{K}$

3. Sea n un entero positivo. ¿Tiene n^2 más divisores positivos de la forma $4k+1$ o de la forma $4k-1$?

4. Una ficha de dominó tiene dos números (no necesariamente diferentes) entre 0 y 6. Las fichas se pueden voltear, es decir, $\boxed{4 \mid 5}$ es la misma ficha que $\boxed{5 \mid 4}$. Se quiere formar una hilera de fichas de dominó distintas de manera que en cada momento de la construcción de la hilera, la suma de todos los números de las fichas puestas hasta ese momento sea impar. Las fichas se pueden agregar de la manera usual a ambos extremos de la hilera, es decir, de manera que en cualesquiera dos fichas consecutivas aparezca el mismo número en los extremos que se juntan. Por ejemplo, se podría hacer la hilera $\boxed{1 \mid 3}\boxed{3 \mid 4}\boxed{4 \mid 4}$, en la que se colocó primero la dicha del centro y luego la de la izquierda. Después de poner la primera ficha, la suma de todos los números es 7; después de poner la segunda, 11; después de la tercera, 19.

   ¿Cuál es la mayor cantidad de fichas que se pueden colocar en una hilera?

   ¿Cuántas hileras de esa longitud máxima se pueden construir?

5. Tres enteros distintos forman una terna *compatible* si alguno de ellos, digamos n, cumple que cada uno de los otros dos es, o bien divisor, o bien múltiplo de n. Para cada terna compatible de números entre 1 y 2002 se calcula la suma de los tres snúmeros de la terna. ¿Cuál es la mayor suma obtenida? ¿cuáles son las ternas en las que se obtiene la suma máxima?

6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con AD paralelo a BC, los ángulos en A y B rectos y tal que el ángulo CMD es recto, donde M es el punto medio de AB. Sean K el pie de la perpendicular a CD que pasa por M, P el punto de intersección de AK con BD y Q el punto de intersección de BK con AC. Demuestra que el ángulo AKB es recto y que:

   $$\frac{KP}{PA} + \frac{KQ}{QB} = 1.$$

Soluciones en la página 100

17. Enunciados de la XVII OMM 2003

1. Dado un número k de dos o más cifras, se forma otro entero m insertando un cero entre la cifra de las unidades y las decenas de k. Encuentra todos los números k para los cuales m resulta ser un múltiplo de k.

2. Sean A, B y C tres puntos colineales con B entre A y C. Sea $\mathcal{Y}$ una circunferencia tangente a AC en B, y sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ las circunferencias de diámetros AB y BC, respectivamente. Sea P el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$; sea Q el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$. Supín que la recta PQ corta a $\mathcal{X}$ en un punto R distinto de P, y que esa misma recta PQ corta a $\mathcal{Z}$ en un punto S distinto de Q. Demuestra que concurren AR, CS y la tangente común a $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ por B.

3. En una fiesta hay el mismo número n de muchachos que de muchachas. Supón que a cada muchacha le gustan a muchachos y que a cada muchacho le gustan b muchachas. ¿Para qué valores de a y b es correcto afirmar que forzosamente hay un muchacho y una muchacha que se gustan mutuamente?

4. Sea $ABCD$ un trapecio con AB paralelo a DC. Se toman puntos P y Q sobre AB y CD respectivamente, tales que $\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC}$. Sea M la intersección de AQ con DP y sea N la intersección de PC con QB. Pruebe que la longitud de MN depende sólo de las longitudes de AB y DC, y calcula su valor.

5. Se escriben en tarjetas todas las parejas de enteros (a, b) con $1 \leq a < b \leq 2003$. Dos personas juegan con las tarjetas como sigue: cada jugador en su turno elige (a, b) (que se retira del juego) y escribe el producto $a \cdot b$ en un pizarrón (ambos jugadores usan el mismo pizarrón). Pierde el jugador que ocasione que el máximo común divisor de los números escritos hasta ese momento sea 1. ¿Quién tiene estrategia ganadora? (Es decir, ¿cuál de los dos jugadores puede inventar un método con el cual asegura su triunfo?).

6. Dado un entero n un *cambio sensato* consiste en sustituir n por $2n + 1$ ó $3n + 2$. Dos enteros positivos a y b se llaman *compatibles* si existe un entero que se puede obtener haciendo uno o más cambios sensatos, tanto a partir de a, como a partir de b. Encuentra todos los enteros positivos compatibles con 2003 menores que 2003.

Soluciones en la página 104

18. Enunciados de la XVIII OMM 2004

1. Encuentra todos los números primos p, q y r con $p < q < r$, que cumplan con $25pq + r = 2004$ y que $pqr + 1$ sea un cuadrado perfecto.

2. ¿Cuál es la mayor cantidad de enteros positivos que se pueden encontrar de manera que cualesquiera dos de ellos a y b (con $a \neq b$) cumplan que,

$$|a - b| \geq \frac{ab}{100}?$$

3. Sean Z y Y los puntos de tangencia del incírculo del triángulo ABC con los lados AB y CA, respectivamente. La paralela a YZ por el punto medio M del lado BC, corta a CA en N. Sea L el punto sobre CA tal que $NL = AB$ (y L del mismo lado de N que A). La recta ML corta a AB en K. Muestra que $KA = NC$.

4. Al final de un torneo de fútbol en el que cada par de equipos jugaron entre sí exactamente una vez y donde no hubo empates, se observó que para cualesquiera tres equipos A, B y C, si A le ganó a B y B le ganó a C entonces A le ganó a C.

   Cada equipo calculó la diferencia (positiva) entre el número de partidos que ganó y el número de partidos que perdió. La suma de todas estas diferencias resultó ser 5000. ¿Cuántos equipos participaron en el torneo? Encuentra todas las respuestas posibles.

5. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos circunferencias tales que el centro O de $\mathcal{B}$ esté sobre $\mathcal{A}$. Sean C y D los dos puntos de intersección de las circunferencias. Se toman un punto A sobre $\mathcal{A}$ y un punto B sobre $\mathcal{B}$ tales que AC es tangente a $\mathcal{B}$ en C y BC es tangente a $\mathcal{A}$ en el mismo punto C. El segmento AB corta de nuevo a $\mathcal{B}$ en E y ese mismo segmento corta de nuevo a $\mathcal{A}$ en F. La recta CE vuelve a cortar a $\mathcal{A}$ en G y la recta CF corta a la recta GD en H. Prueba que el punto de intersección de GO y EH es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo DEF.

6. ¿Cuál es el mayor número posible de cambios de dirección en un recorrido sobre las líneas de una cuadrícula de 2004×2004 casillas, si el recorrido no pasa dos veces por el mismo lugar?

Soluciones en la página 107

19. Enunciados de la XIX OMM 2005

1. Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, y sea P un punto cualquiera sobre el segmento BC ($P \neq B$ y $P \neq C$). Supón que la circunferencia circunscrita al triángulo BPO corta al segmento AC en R ($R \neq A$ y $R \neq B$) y que la circunferencia circunscrita al triángulo COP corta al segmento CA en el punto Q ($Q \neq C$ y $Q \neq A$).

   (I) Considera el triángulo PQR; muestra que es semejante al triángulo ABC y que su ortocentro es O.

   (II) Muestra que las circunferencias circunscritas a los triángulos BPO, COP y PQR son todas del mismo tamaño.

2. Dadas varias cuadrículas del mismo tamaño con números escritos en sus casillas, su *suma* se efectúa casilla a casilla, por ejemplo:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 2 \\ \hline 6 & 5 \\ \hline\end{array}$$

   Dado un entero positivo N, diremos que una cuadrícula es N-*balanceada* si tiene números enteros escritos en sus casillas y si la diferencia entre los números escritos en cualesquieras dos casillas que comparten un lado menor o igual que N.

   (I) Muestra que toda cuadrícula $2n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de 2 cuadrículas n-balanceadas.

   (II) Muestra que toda cuadrícula $3n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de 3 cuadrículas n-balanceadas.

3. Determina todas las parejas (a, b) de enteros distintos de cero para las cuales es posible encontrar un entero positivo x primo relativo con b y un entero cualquiera y, tales que en la siguiente lista hay una infinidad de números enteros:

$$\frac{a+xy}{b}, \frac{a+xy^2}{b^2}, \frac{a+xy^3}{b^3}, \ldots, \frac{a+xy^n}{b^n}, \ldots$$

4. Decimos que una lista de números $a_1, a_2, \ldots, a_m$ contiene una *terna aritmética* a_i, a_j, a_k si $i < j < k$ y $2a_j = a_i + a_k$. Por ejemplo, $8, 1, 5, 2, 7$ tiene una terna aritmética (8, 5 y 7) pero $8, 1, 2, 5, 7$ no.

   Sea n un entero positivo. Muestra que los números $1, 2, \ldots, n$ se pueden reordenar en una lista que no contenga ternas aritméticas.

5. Se N un entero mayor que 1. En cierta baraja de N^3 cartas, cada carta está pintada de uno de N colores distintos, tiene dibujada una de N posibles figuras y tiene escrito un número entero del 1 al N (no hay dos cartas idénticas). Una colección de cartas de la baraja se llama *completa* si tiene cartas de todos los colores, o si entre todas sus cartas aparecen todas las figuras o todos los números.

   ¿Cuántas colecciones no completas tienen la propiedad de que, al añadir cualquier otra carta de la baraja, ya se vuelven completas?

6. Sea ABC un triángulo y AD la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, con D sobre BC. Sea E un punto sobre el segmento BC tal que $BD = EC$. Por E traza l la recta paralela a AD y considera un punto P sobre l y dentro del triángulo. Sea G el punto donde la recta BP corta al lado AC y sea F el punto donde la recta CP corta al lado AB. Muestra que $BF = CG$.

Soluciones en la página 112

20. Enunciados de la XX OMM 2006

1. Sea ab un número de dos dígitos. Un entero n es *pariente* de ab si:

   - el dígito de las unidades de n también es b
   - los otros dígitos de n son distintos de ceros y suman a.

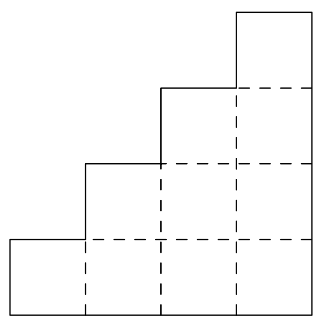
   Por ejemplo, los parientes de 31 son 31, 121, 211 y 1111.

   Encuentra todos los números de dos dígitos que dividen a todos sus parientes.

2. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A, tal que $AB < AC$. Sea M el punto medio de BC y D la intersección de AC con la perpendicular a BC que pasa por M. Sea E la intersección de la paralela a AC que pasa por M con la perpendicular a BD que pasa por B. Demuestra que los triángulos AEM y MCA son semejantes si y solo si $\angle ABC = 60°$.

3. Sea n un número entero mayor que 1. ¿De cuántas formas se pueden acomodar todos los números $1, 2, 3, \ldots, 2n$ en las casillas de una cuadrícula de $2 \times n$, uno en cada casilla, de manera que cualesquiera dos números consecutivos se encuentren en casillas que comparten un lado en la cuadrícula?

4. ¿Para qué enteros n puede cubrirse una escalera como la de la figura (pero con n escalones en vez de 4) con n cuadrados de lados enteros, no necesariamente del mismo tamaño, sin que estos se encimen y sin que sobresalgan del borde de la figura?



5. Sea ABC un triángulo acutángulo y AD, BE y CF sus alturas. La circunferencia con diámetro AD corta a los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sean P y Q los puntos es el punto medio de PD.

6. Sea n la suma de los dígitos de un entero positivo A. Decimos que A es *surtido* si cada uno de los enteros $1, 2, \ldots, n$ es suma de dígitos de A.

   a) Demuestra que si $1, 2, \ldots, 8$ son sumas de dígitos de un entero A entonces A es surtido.

   b) Si $1, 2, \ldots, 7$ son sumas de dígitos de un entero A. ¿Es A necesariamente surtido?

Soluciones en la página 116

21. Enunciados de la XXI OMM 2007

1. Encuentra todos los enteros positivos N con la siguiente propiedad: entre todos los divisores positivos de N hay 10 números consecutivos pero no 11.

2. Dado un triángulo equilátero ABC, encuentra todos los puntos P del plano donde se halla ABC que cumplan $\angle APB = \angle BPC$.

3. Sean a, b, c números reales positivos que satisfacen $a+b+c=1$, muestra que

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\leq 2$$

4. Para un entero positivo n se definen n_1 como la suma de los dígitos de n, n_2 como la suma de los dígitos de n_1, y n_3 como la suma de los dígitos de n_2. Por ejemplo, para $n=199$, $n_1=199_1=19$, $n_2=199_2=10$ y $n_3=199_3=1$. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (m,n) tales que

$$\begin{aligned} m+n &= 2007, \\ m_3+n_3 &= 2007_3. \end{aligned}$$

5. En cada cuadrado de una cuadrícula de 6×6 hay una luciérnaga apagada o encendida. Una movida es escoger tres cuadrados consecutivos ya sean los tres verticales o los tres horizontales, y cambiar de estado a las tres luciérnagas que se encuentran en dichos cuadrados. Cambiar de estado a una luciérnaga significa que si está apagada se enciende y viceversa.

   Muestra que si inicialmente hay una luciérnaga encendida y las demás apagadas, no es posible hacer una serie de movidas tales que al final todas las luciérnagas estén apagadas.

6. Sea ABC un triángulo tal que $AB>AC>BC$. Sea D un punto sobre el lado AB de tal manera que $CD=BC$, y sea M el punto medio del lado AC. Muestra que $BD=AC$ si y sólo si $\angle BAC=2\angle ABM$.

Soluciones en la página 119

22. Enunciados de la XXII OMM 2008

1. Sean $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k = n$ los divisores del entero positivo n. Encuentra todos los números n tales que $n = d_2^2 + d_3^3$.

2. Considera una circunferencia Γ, un punto A fuera de Γ y las tangentes AB, AC a Γ desde A, con B y C los puntos de tangencia. Sea P un punto sobre el segmento AB, distinto de A y de B. Considera el punto Q sobre el segmento AC tal que PQ es tangente a Γ, y a los puntos R y S que están sobre las rectas AB y AC, respectivamente, de manera que RS es paralela a PQ y tangente a Γ. Muestra que el producto de las áreas de los triángulos APQ y ARS no depende de la elección del punto P.

3. Considera un tablero de ajedrez. Los números del 1 al 64 se escriben en las casillas del tablero como en la figura:

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

   Se disponen de suficientes caballos de ajedrez para colocarlos en las casillas del tablero de manera que no se ataquen entre sí. Calcula la suma de los números de las casillas donde están colocados los caballos. ¿Cuál es la suma máxima que puedes obtener? **Nota.** Dos caballos se atacan entre sí, cuando se encuentran en 2 esquinas opuestas de un rectángulo de 2×3 o de 3×2.

4. Un rey decide realizar un juego para premiar a uno de sus caballeros, para ello, acomoda a los n caballeros en una mesa redonda y hace que digan los nnúmeros 1, 2, 3 y repitan de nuevo 1, 2, 3 y así sucesivamente (lo dicen en el sentido de las manecillas del reloj y cada persona dice un número). Las personas que dicen 2 ó 3 son retiradas inmediatamente y el juego continúa hasta que queda un sólo caballero, *el ganador*. Se numeran las personas del 1 al n conforme al primer turno.

   Encuentra todos los valores de n de tal manera que el ganador sea el caballero 2008.

5. En los vértices de un cubo están escritos 8 enteros positivos distintos y en cada una de las aristas del cubo está escrito el máximo común divisor de los números que están en los 2 vértices que forman a la arista. Sean A la suma de los números escritos en las aristas y V la suma de los números escritos en los vértices.

   a) Muestra que $\frac{2}{3}A \leq V$.

   b) ¿Es posible que $A = V$?

6. Las bisectrices internas de los ángulos A, B y C de un triángulo ABC concurren en I y cortan al circuncírculo de ABC en L, M y N, respectivamente. La circunferencia de diámetro IL, corta al lado BC, en D y E; la circunferencia de diámetro IM corta al lado CA en F y G; la circunferencia de diámetro IN corta al lado AB en H y J. Muestra que D, E, F, G, H, J están sobre una misma circunferencia.

Soluciones en la página 122

23. Enunciados de la XXIII OMM 2009

1. Sea ABC un triángulo y AD la altura sobre el lado BC. Tomando a D como centro y a AD como radio, se traza una circunferencia que corta a la recta AB en P, y corta a la recta AC en Q. Muestra que el triángulo AQP es semejante al triángulo ABC.

2. En cajas marcadas con los números $0, 1, 2, \ldots$ se van a colocar todos los enteros positivos de acuerdo con las siguientes reglas:

   - Si p es un número primo, este se coloca en la caja con el número 1.
   - Si el número a se coloca en la caja con el número m_a y b se coloca en la caja con el número m_b, entonces el producto de a y b, es decir ab, se coloca en la caja con el número $am_b + bm_a$.

   Encuentra todos los enteros positivos n que cuando se coloquen queden en la caja con el número n.

3. Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Muestra que

$$\frac{a^3}{a^3+2} + \frac{b^3}{b^3+2} + \frac{c^3}{c^3+2} \text{ y que } \frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \leq 1.$$

4. Sea $n > 1$ un entero impar y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales distintos. Sea M el mayor de estos números y sea m el menor de ellos. Muestra que es posible escoger los signos en la expresión $s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ de manera que

$$m < s < M.$$

5. Considera un triángulo ABC y un punto M sobre el lado BC. Sea P la intersección de las perpendiculares a AB por M y a BC por B, y sea Q la intersección de las perpendiculares a AC por M y a BC por C. Muestra que PQ es perpendicular a AM si y solo si M es el punto medio de BC.

6. En una firesta con n personas, se sabe que de entre cualesquiera 4 personas, hay 3 de las 4 que se conocen entre sí o hay 3 que no se conocen entre sí. Muestra que las n personas se puedes separar en dos salones de manera que un salón todos se conocen entre sí y en el otro no hay dos personas que se conozcan entre sí.

   Nota. Conocerse se considera una relación mutua.

Soluciones en la página 126

24. Enunciados de la XXIV OMM 2010

1. Encuentra todas las ternas de números naturales (a, b, c) que cumplan la ecuación $abc = a + b + c + 1$.

2. En cada casilla de un tablero de $n \times n$ hay un foco. Inicialmente todos los focos están apagados. En un paso, se permite cambiar el estado de todos los focos en una fila o de todos los focos en una columna (los focos prendidos se apagan y los focos apagados se prenden).

   Muestra que si después de cierta cantidad de pasos hay uno o más focos prendidos entonces en ese momento hay al menos n focos prendidos.

3. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias tangentes exteriormente en un punto A. Se traza una recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en B y secante a $\mathcal{C}_2$ en C y D; luego se prolonga el segmento AB hasta intersecar a $\mathcal{C}_2$ en un punto E. Sea F el punto medio del arco CD sobre $\mathcal{C}_2$ que no contiene a E y sea H la intersección de BF con $\mathcal{C}_2$. Muestra que CD, AF y EH concurren.

4. Sea n un entero positivo. En una cuadrícula de $n \times 4$, cada renglón es igual a

   $$\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$$

   Un *cambio* es tomar tres casillas

   a) consecutivas en el mismo renglón y

   b) con dígitos distintos escritos en ellas

   y cambiar los tres dígitos de estas casillas de la siguiente manera

   $$0 \to 1, \quad 1 \to 2, \quad 2 \to 0.$$

   Por ejemplo, un renglón $\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$ puede cambiarse al renglón $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}$ pero no al renglón $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$ pues $0, 1$ y 0 no son distintos entre sí.

   Los cambios se pueden aplicar cuantas veces se quiera, aún a renglones ya cambiados. Muestra que para $n < 12$ no es posible hacer un número finito de cambios de forma que la suma de los números en cada una de las cuatro columnas sea la misma.

5. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$, M el punto medio de BC y H el ortocentro de ABC. La circunferencia que pasa por B, H y C corta a la mediana AM en N. Muestra que $\angle ANH = 90°$.

6. Sean p, q, r números primos positivos distintos. Muestra que si pqr divide a

   $$(pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1$$

   entonces $(pqr)^3$ divide a

   $$3((pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1).$$

Soluciones en la página 129

25. Enunciados de la XXV OMM 2011

1. Se tienen 25 focos distribuidos de la siguiente manera: los primeros 24 se disponen en una circunferencia colocando un foco en cada uno de los vértices de un 24-ágono regular, y el foco restante se coloca en el centro de dicha circunferencia.

   Se permite aplicar cualquiera de las siguientes dos operaciones:

   - Tomar dos vértices sobre la circunferencia tales que hay una cantidad impar de vértices en los arcos que definen, y cambiar el estado de los focos de estos dos vértices, así como del foco del centro.
   - Tomar tres vértices sobre la circunferencia que formen un triángulo equilátero, y cambiar el estado de los focos en estos tres vértices, así como del foco del centro.

   Muestra que partiendo de cualquier configuración inicial de focos encendidos y apagados, siempre es posible llegar a una configuración en la que todos los focos están encendidos.

2. Sea ABC un triángulo acutángulo con vértices sobre una circunferencia Γ. Sea l la recta tangente a Γ en A. Sean D y E los puntos de intersección de la recta l y del segmento AC con la circunferencia de centro B y radio BA, respectivamente. Muestra que DE pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

   Nota: El ortocentro de un triángulo es el punto donde concurren las tres alturas del triángulo.

3. Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Encuentra todas las soluciones $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de números reales que satisfacen el siguiente sistema de n ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 - 1 &= a_2 \\ a_2^2 + a_2 - 1 &= a_3 \\ \vdots \qquad & \vdots\ \vdots \\ a_{n-1}^2 + a_{n-1} - 1 &= a_n \\ a_n^2 + a_n - 1 &= a_1. \end{aligned}$$

4. Encuentra el menor entero positivo tal que al escribirlo en notación decimal usa exactamente dos dígitos distintos y que es divisible entre los números del 1 al 9.

   Nota: un ejemplo de un número que al escribirlo en notación decimal utiliza exactamente dos dígitos distintos es 1121211222.

5. Considera un tablero de $(2^n - 1) \times (2^n + 1)$ casillas que se quiere dividir en rectángulos de tal forma que los lados de los rectángulos sean paralelos a los lados del tablero, de tal forma que el área (cantidad de casillas) de cada rectángulo sea una potencia de 2. Encuentra la menor cantidad de rectángulos en las que se puede dividir el tablero.

6. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias de radios diferentes que se cortan en los puntos A y B. Consideremos un punto C sobre la recta AB de modo que B queda entre A y C. Sean P y Q puntos sobre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, tales que CP es tangente a $\mathcal{C}_1$, CQ es tangente a $\mathcal{C}_2$, P no está dentro de $\mathcal{C}_2$ y Q no está dentro de $\mathcal{C}_1$. La recta PQ corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ en R y a $\mathcal{C}_2$ en S, ambos puntos distintos de B. Supongamos que CR corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ en X y CS corta de nuevo a $\mathcal{C}_2$ en Y. Sea Z un punto sobre la recta XY. Muestra que SZ es paralela a QX si y solo si PZ es paralela a RX.

Soluciones en la página 133

26. Enunciados de la XXVI OMM 2012

1. Sean $\mathcal{C}_1$ una circunferencia con centro O, P un punto sobre ella y ℓ la recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en P. Considera un punto Q sobre ℓ, distinto de P, y sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia que pasa por O, P y Q. El segmento OQ intersecta a $\mathcal{C}_1$ en S y la recta PS intersecta a $\mathcal{C}_2$ en un punto R distinto de P. Si r_1 y r_2 son las longitudes de los radios de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, muestra que

$$\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}.$$

2. Sea $n \geq 4$ un número par. Considera una cuadrícula de $n \times n$. Dos celdas (cuadraditos de 1×1) son *vecinas* si comparten un lado, si están en extremos opuestos de un mismo renglón o si están en extremos opuestos de una misma columna. De esta forma, toda celda en la cuadrícula tiene exactamente cuatro celdas vecinas.

   En cada celda está escrito un número del **1** al **4** de acuerdo con las siguientes reglas:

   - Si en una celda está escrito un **2** entonces en dos o más celdas vecinas está escrito un **1**.
   - Si en una celda está escrito un **3** entonces en tres o más celdas vecinas está escrito un **1**.
   - Si en una celda está escrito un **4** entonces en las cuatro celdas vecinas está escrito un **1**.

   Entre los acomodos que cumplan las condiciones anteriores, ¿cual es el máximo número que se puede obtener sumando los números escritos en todas las celdas?

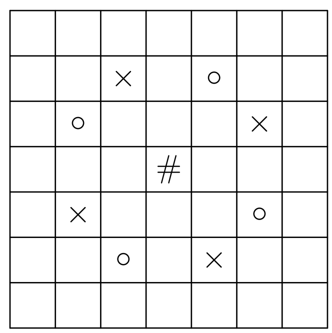
3. Muestra que entre cualesquiera 14 números enteros consecutivos siempre hay 6 números tales que cualesquiera dos de ellos son primos relativos.

4. A cada entero positivo se le aplica el siguiente proceso: al número se le resta la suma de sus dígitos, y el resultado se divide entre 9. Por ejemplo, el proceso aplicado al 938 es 102, ya que $\frac{(938-(9+3+8))}{9} = 102$. Aplicando dos veces el proceso a 938 se llega a 11, aplicado tres veces se llega a 1, y aplicado cuatro veces se llega al 0.

   Cuando a un entero positivo n se le aplica el proceso una o varias veces, se termina en 0. Al número al que se llega antes de llegar al cero, lo llamamos la *casa* de n. ¿Cuántos números menores que 26000 tienen la misma casa que el 2012?

5. Algunas ranas, unas de ellas rojas y otras verdes, se van a mover en un tablero de 11×11, de acuerdo a las siguientes reglas. Si una rana está ubicada, digamos, en la casilla marcada con # en la siguiente figura, entonces

   - Si es roja, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\times$.
   - Si es verde, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\circ$.



   Diremos que dos ranas (de cualquier color) *se pueden encontrar en una casilla* si ambas pueden llegar hasta ella saltando una o más veces, no necesariamente con el mismo número de saltos.

   (a) Muestra que si ponemos 6 ranas (de cualquier color), entonces hay al menos 2 que se pueden encontrar.

   (b) ¿Para qué valores de k es posible poner una rana roja y una rana verde de manera que haya exactamente k casillas en las que estas ranas se puedan encontrar?

6. Considera un triángulo acutángulo ABC con circuncírculo $\mathcal{C}$. Sean H el ortocentro del triángulo ABC y M el punto medio de BC. Las rectas AH, BH y CH cortan por segunda vez a $\mathcal{C}$ en D, E y F, respectivamente; y la recta MH corta a $\mathcal{C}$ en J de manera que H queda entre M y J. Sean K y L los incentros de los triángulos DEJ y DFJ, respectivamente. Muestra que KL es paralela a BC.

Soluciones en la página 138

27. Enunciados de la XXVII OMM 2013

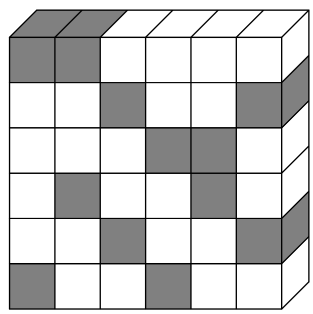
1. Se escriben los números primos en orden, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$.

   Encuentra todas las parejas de números enteros positivos a y b con $a - b \geq 2$, tales que $p_a - p_b$ divide al número entero $2(a - b)$.

2. Sea $ABCD$ un paralelogramo con ángulo obtuso en A. Sea P un punto sobre el segmento BD de manera que la circunferencia con centro P y que pasa por A, corte a la recta AD en A y Y, y corte a la recta AB en A y X. La recta AP intersecta a BC en Q y a CD en R, respectivamente. Muestra que $\angle XPY = \angle XQY = \angle XRY$.

3. ¿Cuál es la mayor cantidad de elementos que puedes tomar del conjunto de números enteros $\{1, 2, \ldots, 2013\}$, de tal manera que entre ellos no haya tres distintos, digamos a, b, c, tales que a sea divisor o múltiplo de $b - c$?

4. Un cubo de $n \times n \times n$ está construido con cubitos de $1 \times 1 \times 1$, algunos negros y otros blancos, de manera que en cada uno de los subprismas de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times n$ y de $1 \times 1 \times n$ hay exactamente dos cubitos negros y entre ellos hay un número par (posiblemente 0) de cubitos blancos intermedios. Por ejemplo, en la siguiente ilustración, se muestra una posible rebanada del cubo de $6 \times 6 \times 6$ (formada por 6 subprismas de $1 \times 6 \times 1$).



   Muestra que es posible sustituir la mitad de los cubitos negros por cubitos blancos para que en cada subprisma de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ haya exactamente un cubito negro.

5. Una pareja de enteros positivos es *especial* si es de la forma $(n, n-1)$ o de la forma $(n-1, n)$ con n un entero positivo. Muestra que una pareja (n, m) de enteros positivos que no es especial, se puede representar como suma de dos o más parejas especiales diferentes si y sólo si los enteros n y m satisfacen la desigualdad $n + m \geq (n - m)^2$.

6. Sea $A_1A_2 \ldots A_8$ un octágono convexo, es decir un octágono donde todos sus ángulos internos son menores que $180°$. Además los lados del octágono tienen la misma longitud y cada par de lados opuestos son paralelos. Para cada $i = 1, \ldots, 8$, definamos el punto B_i como la intersección del segmento A_iA_{i+4} con el segmento $A_{i-1}A_{i+1}$, donde $A_{j+8} = A_j$ i $B_{j+8} = B_j$, para todo número entero j.

   Muestra que para algún número i, de entre los números $1, 2, 3$ y 4, se cumple que

$$\frac{|A_iA_{i+4}|}{|B_iB_{i+4}|} \leq \frac{3}{2}.$$

Soluciones en la página 142

28. Enunciados de la XXVIII OMM 2014

1. Cada uno de los números del 1 al 4027 se ha coloreado de verde o de rojo. Cambiar el color de un número es pasarlo a verde si era rojo, y pasarlo a rojo si era verde.

   Diremos que dos enteros positivos m y n son cuates si alguno de los números $\frac{m}{n}$ o $\frac{n}{m}$ es un número primo. Un *paso* consiste en elegir dos números que sean cuates y cambiar el color de cada uno de los números.

2. Un entero positivo a *se reduce* a un entero positivo b, si al dividir a entre su dígito de las unidades se obtiene b. Por ejemplo, 2015 se reduce a $\frac{2015}{5} = 403$.

   Encuentra todos los enteros positivos que, mediante algunas reducciones, llegan al número 1. Por ejemplo, el número 12 es uno de tales enteros pues 12 se reduce a 6 y 6 se reduce a 1.

3. Sean Γ_1 una circunferencia y P un punto fuera de Γ_1. Las tangentes desde P a Γ_1 tocan a la circunferencia en los puntos A y B. Considera M el punto medio del segmento PA y Γ_2 la circunferencia que pasa por los puntos P, A y B. La recta BM intersecta de nuevo a Γ_2 en el punto C, la recta CA intersecta de nuevo a Γ_1 en el punto D, el segmento DB intersecta de nuevo a Γ_2 en el punto E y la recta PE intersecta a Γ_1 en el punto F (con E entre P y F).

   Muestra que las rectas AF, BP y CE concurren.

4. Sea $ABCD$ un rectángulo con diagonales AC y BD. Sean E el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle CAD$ con el segmento CD, F el punto sobre el segmento CD tal que E es el punto medio de DF y G el punto sobre la recta BC tal que $BG = AC$ (con C entre B y G).

   Muestra que la circunferencia que pasa por D, F y G es tangente a BG.

5. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a + b + c = 3$. Muestra que

$$\frac{a^2}{a + \sqrt[3]{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt[3]{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt[3]{ab}} \geq \frac{3}{2},$$

   y determina para qué números a, b y c se alcanza la igualdad.

6. Para cada entero positivo n, sea $d(n)$ la cantidad de divisores positivos de n. Por ejemplo, los divisores positivos de 6 son 1, 2, 3 y 6, por lo que $d(6) = 4$.

   Encuentra todos los enteros positivos n tales que

$$n + d(n) = d(n)^2.$$

Soluciones en la página 146

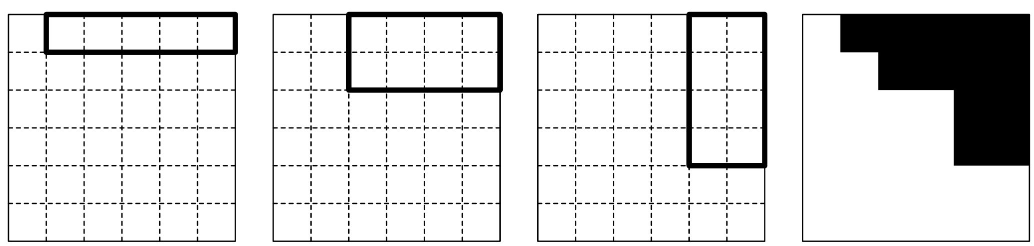
29. Enunciados de la XXIX OMM 2015

1. Sea ABC un triángulo y sea H su ortocentro. Sea PQ un segmento que pasa por H con P en AB, Q en AC y tal que $\angle PHB = \angle CHQ$. Finalmente en el circuncírculo del triángulo ABC, considera M el punto medio del arco BC que no contiene a A. Muestra que $MP = MQ$.

2. Sea n un entero positivo y k un entero entre 1 y n. Se tiene un tablero de $n \times n$ color blanco. Se hace el siguiente proceso. Se dibujan k rectángulos con lados de longitud entera, con lados paralelos a los del tablero y tales que su esquina superior derecha coincide con la del tablero. Luego, estos k rectángulos se rellenan de negro. Esto deja una figura blanca en el tablero.

   ¿Cuántas figuras blancas diferentes podemos obtener, que no se puedan obtener haciendo el proceso con menos de k rectángulos?

   Nota: A continuación se muestra un ejemplo para un tablero de 6×6*. Se dibujan* 3 *rectángulos, uno de* 1×5*, uno de* 2×4 *y uno de* 4×2*, para obtener la figura blanca indicada en el tablero de la derecha.*



3. Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ el conjunto de los números enteros positivos. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función, la cual asigna a cada número entero positivo, un número entero positivo. Supón que f satisface las siguientes dos condiciones:

   a) $f(1) = 1$.

   b) Para todos a, b enteros positivos se cumple que

   $$f(a + b + ab) = a + b + f(ab).$$

   Encuentra el valor de $f(2015)$.

4. Sea n un entero positivo. María escribe en un pizarrón las n^3 ternas que se pueden formar tomando tres enteros, no necesariamente distintos, entre 1 y n, incluyéndolos. Después, para cada una de las ternas, María determina el mayor (o los mayores, en caso de que haya más de uno) y borra los demás. Por ejemplo, en la terna $(1, 3, 4)$ borrará los números 1 y 3, mientras que en la terna $(1, 2, 2)$ borrará sólo el número 1.

   Muestra que, al terminar este proceso, la cantidad de números que quedan escritos en el pizarrón no puede ser igual al cuadrado de un número entero.

5. Sea I el incentro de un triángulo acutángulo ABC. La recta AI corta por segunda vez al circuncírculo del triángulo BIC en E. Sean D el pie de la altura desde A sobre BC y J la reflexión de I con respecto a BC. Muestra que los puntos D, J y E son colineales.

6. Sea n un entero positivo y sean $d_1, d_2, \ldots, d_k$ todos sus divisores positivos ordenados de menor a mayor. Considera el número

$$f(n) = (-1)^{d_1} d_1 + (-1)^{d_2} d_2 + \cdots + (-1)^{d_k} d_k.$$

   Por ejemplo, los divisores positivos de 10 son 1, 2, 5 y 10, así que

$$f(10) = (-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^5 \cdot 5 + (-1)^{10} \cdot 10 = 6.$$

   Supón que $f(n)$ es una potencia de 2. Muestra que si m es un entero mayor que 1, entonces m^2 no divide a n.

Soluciones en la página 152

30. Enunciados de la XXX OMM 2016

1. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias tangentes externamente en S tales que el radio de $\mathcal{C}_2$ es el triple del radio de $\mathcal{C}_1$. Sea l una recta que es tangente a $\mathcal{C}_1$ en P y tangente a $\mathcal{C}_2$ en Q, con P y Q distintos de S. Sea T el punto en $\mathcal{C}_2$ tal que TQ es diámetro de $\mathcal{C}_2$ y sea R la intersección de la bisectriz de $\angle SQT$ con el segmento ST. Demuestra que $QR = RT$.

2. Una pareja de enteros positivos m, n es *guerrera* si existen enteros positivos a, b, c, d con $m = ab$, $n = cd$ y $a + b = c + d$. Por ejemplo la pareja $8, 9$ es guerrera pues $8 = 4 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$ y $4 + 2 = 3 + 3$. Se colorean los enteros positivos de la siguiente manera:

   - Empezamos coloreando el 3 y el 5.
   - Después, si algún entero positivo no está coloreado y este tiene una pareja guerrera que ya está coloreado, entonces lo coloreamos.

   Encuentra todos los enteros positivos que eventualmente se colorean.

3. Encuentra el menor número real x que cumpla todas las siguientes desigualdades:

   $$\lfloor x \rfloor < \lfloor x^2 \rfloor < \lfloor x^3 \rfloor < \ldots < \lfloor x^n \rfloor < \lfloor x^{n+1} \rfloor < \ldots$$

   Nota: $\lfloor x \rfloor$ es el mayor número entero menor o igual que x, es decir, es el único número entero que cumple que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

4. Decimos que un número entero no-negativo n *contiene* a otro número entero no-negativo m, si los dígitos de su expansión (o desarrollo) decimal aparecen en forma consecutiva en la expansión (o desarrollo) decimal de n. Por ejemplo, 2016 contiene a 2, 0, 1, 6, 20, 16, 201 y 2016. Determina el mayor número entero n que no contiene a ningún múltiplo de 7.

5. En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del 1 al n^2 en orden, por renglones, de manera que en el primer renglón aparecen los números del 1 al n, en el segundo los números de $n + 1$ a $2n$, y así sucesivamente. Una operación permitida en la cuadrícula consiste en escoger cualesquiera dos cuadraditos que compartan un lado y sumar (o restar) el mismo número entero a los dos numeros que aparecen en esos cuadraditos. Por ejemplo, aquí abajo se muestran dos operaciones sucesivas permitidas en una cuadrícula de 4×4: primero restando 7 a los cuadraditos sombreados y luego sumando 5 a los sombreados.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$\rightarrow$

1	2	3	4
5	6	0	8
9	10	4	12
13	14	15	16

$\rightarrow$

1	7	8	4
5	6	0	8
9	10	4	12
13	14	15	16

   Determina para qué valores de n es posible lograr que todos los cuadraditos tengan escrito el número 0 después de repetir la operación tantas veces como sea necesario y, en los casos en que sea posible, determina el mínimo número de operaciones necesarias.

6. Sean $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, l_1 la recta paralela a BC que pasa por A y l_2 la recta paralela a AD que pasa por B. La recta DC corta a l_1 y l_2 en los puntos E y F, respectivamente. La recta perpendicular a l_1 que pasa por A corta a BC en P y la recta perpendicular a l_2 por B corta a AD en Q. Sean Γ_1 y Γ_2 las circunferencias que pasan por los vértices de los triángulos ADE y BFC, respectivamente. Demuestra que Γ_1 y Γ_2 son tangentes si y sólo si DP es perpendicular a CQ.

Soluciones en la página 157

31. Enunciados de la XXXI OMM 2017

1. En un tablero de ajedrez de 2017×2017, se han colocado en la primera columna 2017 caballos de ajedrez, uno en cada casilla de la columna. Una tirada consiste en elegir dos caballos distintos y de manera simultanea moverlos como se mueven los caballos de ajedrez. Encuentra todos los posibles valores enteros de k con $1 \leq k \leq 2017$, para los cuales es posible llegar a través de varias tiradas, a que todos los caballos estén en la columna k, uno en cada casilla.

   Nota. Un caballo se mueve de una casilla X a otra Y, solamente si X y Y son las esquinas opuestas de un rectángulo de 3×2 o de 2×3.

2. Un conjunto de n números enteros positivos distintos es *equilibrado*, si el promedio de cualesquiera k números del conjunto es un número entero, para toda $1 \leq k \leq n$. Encuentra la mayor suma que pueden tener los elementos de un conjunto equilibrado, con todos sus elementos menores o iguales que 2017.

3. Sea ABC un triángulo acutángulo cuyo ortocentro es el punto H. La circunferencia que pasa por los puntos B, H y C vuelve a intersectar a las rectas AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Sean P y Q los puntos de intersección de HB y HC con el segmento DE, respectivamente. Se consideran los puntos X e Y (distintos de A) que están sobre las rectas AP y AQ respectivamente, de manera que los puntos X, A, H y B están sobre un círculo y los puntos Y, A, H y C están sobre un círculo. Muestra que las rectas XY y BC son paralelas.

4. Un subconjunto B de $\{1, 2, \ldots, 2017\}$, tiene la propiedad T si:

   Cada tres números de B son las longitudes de los lados de un triángulo (de área positiva).

   Determina la mayor cantidad de números que puede tener un conjunto B que tenga la propiedad T.

5. Sobre una circunferencia Γ se encuentran los puntos A, B, N, C, D y M colocados en el sentido de las manecillas del reloj de manera que M y N son los puntos medios de los arcos DA y BC (recorridos en el sentido de las manecillas del reloj). Sea P la intersección de los segmentos AC y BD; y sea Q un punto sobre MC de manera que las rectas PQ y MN son perpendiculares. Sobre el segmento MC se considera un punto R de manera que $QB = RC$. Muestra que AC pasa por el punto medio del segmento QR.

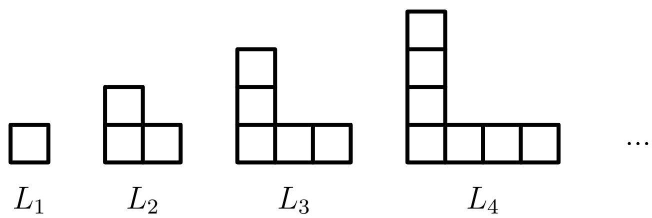
6. Sean $n \geq 2$ y $m \geq 2$ enteros positivos. Se tienen m urnas dispuestas en fila. Los jugadores A y B juegan por turnos, comenzando por A, de la siguiente manera. En cada turno, A elige dos urnas y coloca un voto en cada una dellas. Posteriormente, B elige una urna, y elimina todos los votos de ella. A gana si logra que haya una urna con n votos después de algún turno de B. Determina para cada n el mínimo valor de m para el cual A puede garantizar ganar, sin importar los movimientos que haga B.

Soluciones en la página 162

32. Enunciados de la XXXII OMM 2018

1. Sean A y B dos puntos en una recta ℓ, M el punto medio del segmento AB y X un punto del segmento AB, diferente de M. Sea Ω una semicircunferencia de diámetro AB. Considera un punto P sobre Ω y considera Γ la circunferencia tangente a AB que pasa por P y por X. Sea Q la otra intersección de Γ con Ω. La bisectriz del ángulo $\angle PXQ$ intersecta a Γ en un punto R. Sea Y un punto en ℓ, tal que RY es perpendicular a ℓ. Muestra que $MX > XY$.

2. Para cada entero positivo m, la figura L_m se forma traslapando dos rectángulos, uno de $m \times 1$ y uno de $1 \times m$ de manera que coincida un cuadrito extremo del primero con un cuadrito extremo del segundo, como se muestra en la siguiente imagen.



Usando algunas figuras $L_{m_1}, L_{m_2}, \ldots, L_{m_k}$, se cubre completamente una cuadrícula de $n \times n$, colocándolas de manera que sus bordes estén sobre las lineas de la cuadrícula. De entre todas las posibles formas de cubrir la cuadrícula, con distintos valores para los m_i y para k, determina el mínimo valor posible de $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$.

Nota: Para cubrir la cuadrícula las figuras pueden reflejarse, rotarse, traslaparse o salirse de la cuadrícula.

3. Una sucesión $a_2, a_3, \ldots, a_n$ de enteros positivos se dice *campechana*, si para cada i tal que $2 \leq i \leq n$, se tiene que exactamente a_i elementos de la sucesión son primos relativos con i. Decimos que el *tamaño* de la sucesión es $n - 1$. Sea $m = p_1 p_2 \cdots p_k$ donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son números primos distintos y $k \geq 2$. Demuestra que existen al menos dos sucesiones campechanas de tamaño m.

4. Sea $n \geq 2$ un número entero. Para cualquier sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de enteros positivos tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, considera las sumas $S_i = 1 + 2 + \cdots + a_i$, para $1 \leq i \leq k$. Determina, en términos de n, el máximo valor posible del producto $S_1 S_2 \cdots S_k$.

5. Sea $n \geq 5$ un número entero y considera un n-ágono regular. Originalmente, Nacho se encuentra en un vértice del n-ágono, en el cual pondrá una bandera. Él comenzar+a a moverse entre los vértices del n-ágono, siempre en el sentido de las manecillas del reloj. Primero se moverá una posición y colocará otra bandera, luego, se moverá dos posiciones y colocará otra bandera, etcétera, hasta que en el último movimiento se moverá $n - 1$ posiciones y colocará una bandera, de manera que colocará n banderas en total. ¿Para qué valores de n, Nacho colocará una bandera en cada uno de los n vértices?

6. Sea ABC un triángulo acutángulo y Ω la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C. La bisectriz del ángulo en B corta a Ω en M y la bisectriz del ángulo en C corta a Ω en N. Sea I el punto de intersección de las bisectrices anteriores. Considera M' y N' las reflexiones de M y N con respecto a CA y AB respectivamente. Muestra que el centro de la circunferencia que pasa por los puntos I, M' y N' está en la altura del triángulo ABC que pasa por A.

Soluciones en la página 166

33. Enunciados de la XXXIII OMM 2019

1. Un número entero $m \geq 1$ es *mexica* si es de la forma $n^{d(n)}$, donde n es un entero positivo y $d(n)$ es la cantidad de enteros positivos que dividen a n. Encuentra todos los números mexicas menores que 2019.

   Nota. Los divisores de n incluyen a 1 y a n; por ejemplo $d(12) = 6$, ya que $1, 2, 3, 4, 6$ y 12 son todos los divisores positivos de 12.

2. Sean H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC y M el punto medio de AH. La recta BH corta a AC en D. Considera un punto E de manera que BC sea mediatriz del segmento DE. Los segmentos CM y AE se cortan en F. Muestra que BF es perpendicular a CM.

3. Sea $n \geq 2$ un número entero. Considera $2n$ puntos alrededor de una circunferencia. Cada vértice ha sido etiquetado con un entero del 1 al n, inclusive, y cada uno de estos enteros ha sido usado exactamente 2 veces. Isabel divide los puntos en n parejas, y traza los n segmentos entre dichas parejas, con la condición de que estos no se intersecan. Luego, a cada segmento le asigna el número mayor entre las dos etiquetas en sus extremos.

   a) Muestra que, sin importar cómo se hayan etiquetado los puntos, Isabel puede escoger las parejas de tal forma que se usen exactamente $\lceil n/2 \rceil$ números para etiquetar a los segmentos.

   b) ¿Pueden etiquetarse los puntos de tal forma que, sin importar cómo Isabel divida los puntos en parejas, siempre se usen extactamente $\lceil n/2 \rceil$ números para etiquetar los segmentos?

   Nota. Para cada número real x, $\lceil x \rceil$ denota el menor entero mayor o igual que x. Por ejemplo, $\lceil 3{,}6 \rceil = 4$ y $\lceil 2 \rceil = 2$.

4. Una lista de enteros positivos es *buena* si el elemento máximo de la lista aparece exactamente una vez. Una sublista es una lista formada por varios elementos consecutivos de la lista. Por ejemplo, en la lista $10, 34, 34, 22, 30, 22$, la sublista $22, 30, 22$ es buena, mientras que la sublista $10, 34, 34, 22$ no es buena. Una lista es *muy buena* si todas sus sublistas son buenas.

   Encuentra el menor entero positivo k tal que es posible crear una lista muy buena con 2019 elementos, en la cual se usen exactamente k valores distintos.

5. Sean $a > b$ dos números enteros positivos, primos relativos entre sí. En un camino recto, en el cual está marcado cada centímetro n, para todo entero n, un saltamontes hará algunos saltos comenzando en la marca de 0 cm y siguiendo las siguentes reglas:

   - Cuando cierto minuto sea múltiplo de a y no múltiplo de b, saltará a centímetros hacia adelante.
   - Cuando cierto minuto sea múltiplo de b y no múltiplo de a, saltará b centímetros hacia atrás.
   - Cuando cierto minuto sea múltiplo de a y múltiplo de b, saltará $a - b$ centímetros hacia adelante.
   - Cuando un minuto no es múltiplo de a ni de b, el saltamontes no se mueve del lugar en el que está.

   Determina todas las marcas a las que puede llegar el saltamontes.

6. Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 45°$ con ortocentro H, circuncentro O y circuncírculo Γ. Sea P un punto de Γ tal que el circuncírculo del triángulo PHB es tangente a BC en B. Sean X y Y los circuncentros de los triángulos PHB y PHC, respectivamente. Sean O_1 y O_2 los circuncentros de los triángulos PXO y PYO, respectivamente. Muestra que O_1 y O_2 son puntos de las rectas AB y AC, respectivamente.

Soluciones en la página 172

34. Soluciones de la I OMM 1987

Enunciados en la página 8

34.1. Problema 1

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ las fracciones con $(a, b) = (c, d) = 1$ y digamos que suman $k \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = k \implies ad + bc = kbd$$

Luego $b \mid ad$, y como $(a, b) = 1$ tenemos $b \mid d$. Análogamente $d \mid b$, y entonces $b = d$.

34.2. Problema 2

Basta calcular los exponentes de los primos que dividen a 20!, que sabemos que solo son $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$. Hay muchas formas de hacer esto, calculando directamente, usando la fórmula de Legendre, etc. Pero podemos hacer un poco de overkill y usar la fórmula

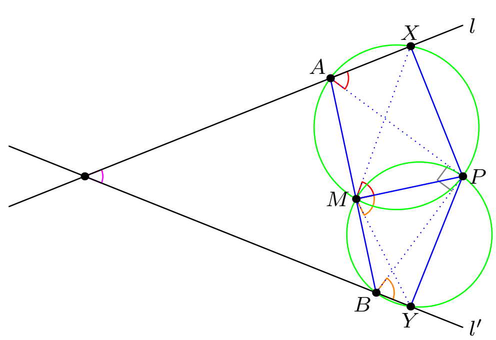
$$\nu_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p - 1}$$

Donde s_p representa la suma de los dígitos en base p. Con esto encontramos

- $\nu_2(n) = \frac{20-s_2(10100_2)}{1} = 18$.
- $\nu_3(n) = \frac{20-s_3(202_3)}{2} = 8$.
- $\nu_5(n) = \frac{20-s_5(40_5)}{4} = 4$.
- $\nu_7(n) = \frac{20-s_7(26_7)}{6} = 2$.
- $\nu_{11}(n) = \frac{20-s_{11}(19_{11})}{10} = 1$.
- $\nu_{13}(n) = \frac{20-s_{13}(17_{13})}{12} = 1$.
- $\nu_{17}(n) = \frac{20-s_{17}(13_{17})}{16} = 1$.
- $\nu_{19}(n) = \frac{20-s_{19}(11_{19})}{18} = 1$.

Finalmente la respuesta es $19 \times 9 \times 5 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 41040$.

34.3. Problema 3



Sean X y Y las proyecciones de P a l y l' respectivamente. Notemos que $AXPM$ y $BYPM$ son cíclicos a tener dos ángulos rectos, y por lo tanto.

$$\measuredangle XMY = \measuredangle XMP + \measuredangle PMY = \measuredangle XAP + \measuredangle PBY = \measuredangle(l, AP) + \measuredangle(BP, l')$$

Tenemos $\measuredangle(l, AP) + \measuredangle(AP, BP) + \measuredangle(BP, l') + \measuredangle(l', l) = 0$, y $\measuredangle(AP, BP) = 90°$. Por lo tanto

$$\measuredangle XMY = -\measuredangle(AP, BP) - \measuredangle(l', l) = 90° - \measuredangle(l', l)$$

Este ángulo es independiente de la elección de A y B, por lo que el lugar geométrico es una circunferencia con cuerda XY.

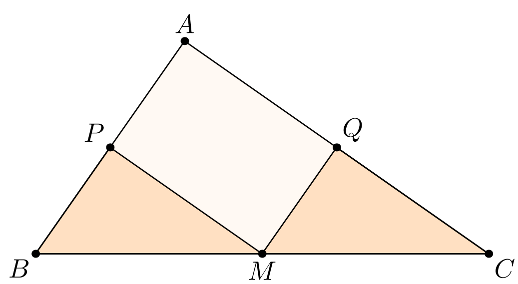
34.4. Problema 4

Dado $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ la factorización en primos de n tenemos $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$, entonces $\tau(n) = 3$ si y solo si $k = 1$ y $\alpha_1 = 2$, pues 3 es primo. Concluímos que los números buscados son de la forma $n = p^2$, con p primo. Para tener $n \leq 100$ tenemos $p \leq 7$, y por lo tanto el producto es

$$2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^2 = 4410$$

Que evidentemente es un cuadrado perfecto.

34.5. Problema 5



Como PM y QM son respectivamente paralelas a AC y AB, los triángulos BPM, BAC y MQC son todos semejantes entre sí. Si BPM y MQC tienen la misma área entonces deben ser congruentes, lo que implica que M, P, Q son los puntos medios de BC, AB y AC respectivamente. De aquí podemos ver que los triángulos APQ, PBM, QMC y MQP son todos congruentes, por lo que $[APMQ] = 2[BPM]$, y las tres áreas no pueden ser iguales.

34.6. Problema 6

La expresión en el problema se puede escribir como

$$n(n-1)(n+1)(625 \cdot (625)^{2n} + 9 \cdot (81)^n)$$

Veamos que $3804 = 2^2 \times 3 \times 317$, por lo que basta ver que 2^3, 3 y 317 dividen a este producto. Veamos que el último factor siempre es par, y entre n y $n-1$ siempre hay algún par, por lo que el producto siempre es múltiplo de 4. Entre $n-1$, n y $n+1$ siempre hay un múltiplo de 3, por lo que el producto es múltiplo de 3. Finalmente veamos que el último factor cumple

$$625 \cdot (625)^{2n} + 9 \cdot (81)^n \equiv -9 \cdot (-9)^{2n} + 9 \cdot (81)^n \equiv 9 \cdot (81)^n - 9 \cdot (81)^n = 0 \pmod{317}$$

Por lo que el producto siempre es múltiplo de 317.

34.7. Problema 7

Sea p un primo que divide a $n^2 + 2n = n(n+2)$. Si $p \mid n$ entonces $p \mid n(n+1) = n^2 + n$ y $p \nmid n^2 + n - 1$. Si $p \mid n+2$ entonces $p \mid (n+2)(n-1) = n^2 + n - 2$ y $p \nmid n^2 + n - 1$. Concluímos que $n^2 + 2n$ y $n^2 + n - 1$ no pueden tener factores primos en común, por lo que la fracción es irreducible.

34.8. Problema 8

Veamos que SAB es isósceles con $SB = BA$ pues $\angle SAB = 180° - 90° - 45° = 45°$, ya que $\angle SBA = 90°$. Análogamente $SB = BC$, entonces $BA = BC$, y como $\angle ABC = 90°$ concluímos que los triángulos SBA, ABC y CBS son todos congruentes, por lo que $SA = AC = CS$, el triángulo ASC es equilátero y $\angle ASC = 90°$.

Para la segunda parte observemos que $\triangle PSQ$ es isósceles con $PS = PQ$ pues $\angle SPQ = 90°, \angle PSQ = 45°$. Entonces $PQ = 1$, y además por Pitágoras tenemos $QS = \sqrt{2}$. Ahora en $\triangle SPR$ tenemos $\angle SPR = 90°$ y $\angle PSR = 60°$, por lo que $PR = \sqrt{3}$ y $SR = 2$. Finalmente como $\angle QSR = 45°$, $QS = \sqrt{2}$ y $SR = 2 = QS\sqrt{2}$ concluímos que SQR es un triángulo rectángulo isósceles, entonces $QR = \sqrt{2}$. En conclusión los lados son 1, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

35. Soluciones de la II OMM 1988

Enunciados en la página 9

35.1. Problema 1

Denotemos por a_i al número de pelotas blancas que están después de la i-ésima negra (y antes de la $(i+1)$-ésima si $i < 5$), y por a_0 al número de pelotas blancas antes de la primera negra, entonces el problema equivale a encontrar el número de tuplas $(a_0, \ldots, a_5)$ de enteros no negativos tales que $a_i \geq 1$ para $1 \leq i \leq 4$ y $a_0 + \cdots + a_5 = 7$. Sustituyendo a_i por $a_i - 1$ para $1 \leq i \leq 4$, esto es igual al número de tuplas $(b_0, \ldots, b_5)$ de enteros no negativos tales que

$$b_0 + \cdots + b_5 = 3$$

Esto se puede resolver con separadores, pero para este caso tan pequeño podemos también hacerlo manualmente. Si el único valor positivo es 3 hay 6 opciones. Si los valores positivos son 2 y 1 hay $6 \times 5 = 30$ opciones. Finalmente si los valores positivos son tres unos hay $\binom{6}{3} = 20$ opciones, por lo que el total es $6 + 30 + 20 = 56$. Esto coincide con la respuesta $\binom{8}{3} = 56$ que obtenemos con separadores.

35.2. Problema 2

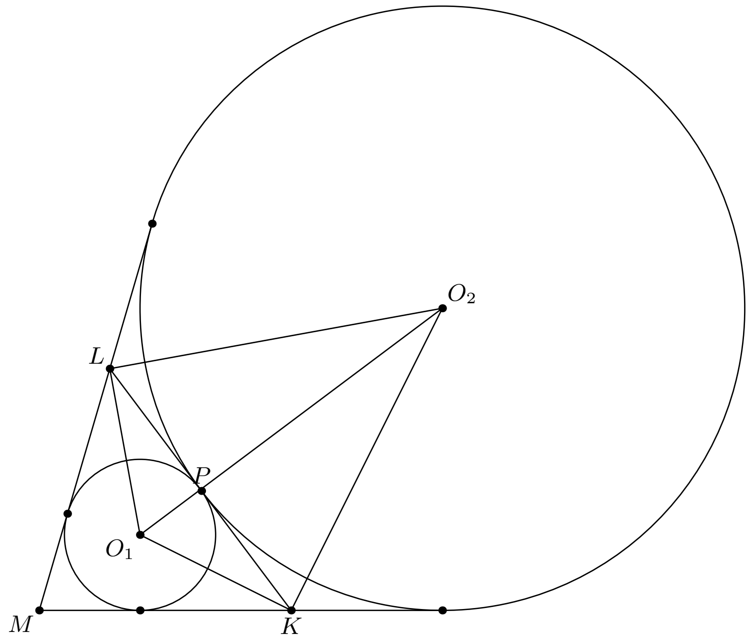
Observemos que

$$7(11a + 2b) + (18a + 5b) = 95a + 19b = 19(5a + b)$$

Y entonces $19 \mid 7(11a + 2b) + (18a + 5b)$. Si $19 \mid 11a + 2b$ entonces $19 \mid 7(11a + 2b)$ y entonces $19 \mid 18a + 5b$. Reciprocamente si $19 \mid 18a + 5b$ entonces $19 \mid 7(11a + 2b)$ y como $(19, 7) = 1$ concluímos que $19 \mid 11a + 2b$.

35.3. Problema 3

Sean Γ_1, Γ_2 los círculos, de centros O_1, O_2 y $r_1 < r_2$ sus respectivos radios. Sea P el punto de tangencia de Γ_1 y Γ_2, K y L las intersecciones de la tangente común en P con las tangentes comunes exteriores, y M el punto de intersección de las tangentes comunes exteriores.



Notemos que Γ_1 y Γ_2 son respectivamente el incírculo y el excírculo opuesto a M en $\triangle MKL$ respectivamente. Sea $a = KL$ y s el semiperímetro de MKL, entonces

$$[MKL] = r_1 s = r_2(s - a)$$

Despejando s obtenemos

$$s = \frac{ar_2}{r_2 - r_1}$$

De modo que $[MKL] = r_1 s = \frac{ar_1r_2}{r_2-r_1}$. Para finalizar basta encontrar a. Sabemos que O_1KO_2L es cíclico, pues O_1 y O_2 son respectivamente incentro y excentro de KLM, por lo que $\angle O_1LO_2 = \angle O_1KO_2 = 90°$. Entonces por potencia desde P

$$\frac{a^2}{4} = PL \cdot PK = PO_1 \cdot PO_2 = r_1r_2$$

De modo que $a = 2\sqrt{r_1r_2}$ y el resultado es

$$[MKL] = \frac{2r_1r_2\sqrt{r_1r_2}}{r_2 - r_1}$$

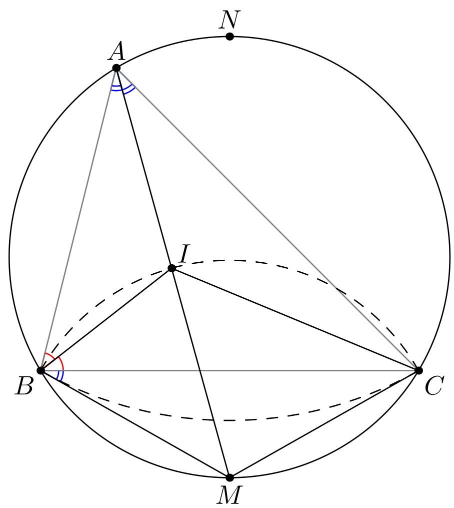
35.4. Problema 4

Sea $b_i = i + a_i$, entonces $b_1, \ldots, b_8$ son enteros positivos tales que $2 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_8 \leq 16$. Recíprocamente si (b_i) es cualquier 8-tupla de enteros entonces definir $a_i = b_i - i$ nos da la única 8-tupla (a_i) que produce (b_i) bajo esta transformación. Entonces el resultado es igual al número de 8-tuplas (b_i), pero cada una de estas corresponde simplemente a elegir 8 números distintos de entre $2, 3, 4, \ldots, 16$, pues entonces basta asignar b_1 al más pequeño, b_2 al segundo, y así sucesivamente. Hay $\binom{15}{8}$ formas de hacer esto, que es la respuesta que queremos.

35.5. Problema 5

Notemos que $(a+b)^2-(a^2+b^2-nab)=(n+2)ab$, por lo que $d=\gcd(a+b,a^2+b^2-nab)$ divide a $(n+2)ab$. Afirmamos que d es primo relativo con a. De lo contrario, si p es un primo que divide a a y a d entonces p divide a $a+b$, y p divide a b, contradiciendo que $(a,b)=1$. Entonces $(a,d)=1$ y análogamente $(b,d)=1$. Como $d \mid (n+2)ab$ concluímos que $d \mid n+2$.

35.6. Problema 6



Sea I el incentro de ABC y M el punto medio del arco BC que no contiene a A en $\mathcal{C}$. Entonces

$$\angle IBM=\angle IBC+\angle CBM=\angle ABI+\angle MAC=\angle ABI+\angle BAM=\angle ABI+\angle BAI=\angle BIM$$

Entonces $MB=MI$, y análogamente $MC=MI$, por lo que I yace en la circunferencia de centro M y radio $MB=MC$. Recíprocamente si I es cualquier punto en ese círculo de distinto lado de la recta BC con M, entonces intersectando MI con $\mathcal{C}$ por segunda vez en A obtenemos un triángulo ABC con incentro I. Entonces este arco de $\odot(M,MB)$ está contenido en el lugar geométrico. Cuando A está del otro lado de BC el incentro de ABC está sobre un arco de $\odot(N,NB)$, donde N es el punto medio del otro arco BC. La unión de estos dos arcos es el lugar geométrico deseado.

35.7. Problema 7

Notemos que la suma de cada subconjunto debe ser a lo más la mitad de la suma de $1,2,\ldots,m$, de lo contrario es imposible que las dos sumas sean iguales pues los subconjuntos deben ser ajenos. Si A tiene k elementos entonces su suma es al menos $1+2+\cdots+k$. Deducimos entonces que

$$\begin{aligned}
1+2+\cdots+k \leq \frac{1+2+\cdots+m}{2} &\iff \\
\frac{k(k+1)}{2} \leq \frac{m(m+1)}{4} &\iff \\
2k^2+2k \leq m^2+m &
\end{aligned}$$

Si $k \geq \frac{m}{\sqrt{2}}$ entonces $2k^2 \geq m^2$ y $2k > m$, entonces $2k^2+2k > m^2+m$, contradicción. Concluímos que $k < \frac{m}{\sqrt{2}}$, como queríamos.

35.8. Problema 8

Sin pérdida de generalidad sea $(0,0,0)$ el centro de la esfera y sean $(\pm k,0,0)$, $(0,\pm k,0)$ y $(0,0,\pm k)$ los vértices del octaedro para algún real k. La distancia de $(0,0,0)$ al plano $x+y+z+k=0$ es igual a

$$\frac{1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 0+k}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{k}{\sqrt{3}}$$

Esta distancia corresponde a un radio de la esfera, pues una de las caras del octaedro está contenida en este plano. Entonces esta distancia debe ser 1 y $k=\sqrt{3}$. El volúmen de la pirámide formada por $(0,0,0)$, $(k,0,0)$, $(0,k,0)$ y $(0,0,k)$ es entonces

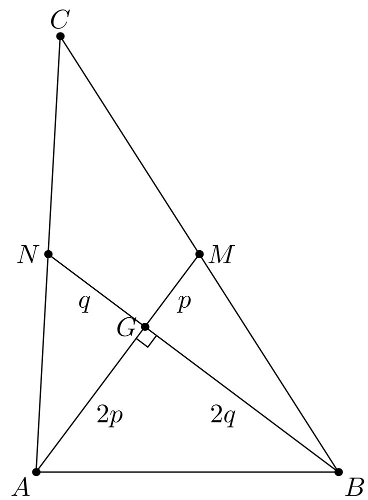
$$\frac{k^3}{3}=\frac{(\sqrt{3})^3}{3}=\sqrt{3}$$

Y como el octaedro está formado por 8 pirámides congruentes a ésta, su volumen es $8\sqrt{3}$.

36. Soluciones de la III OMM 1989

Enunciados en la página 10

36.1. Problema 1



Sean M y N los puntos medios de BC y AC respectivamente, y G la intersección de AM y BN. Sean $GM = p$ y $GN = q$. Como G es el gravicentro de ABC tenemos $AG = 2p$ y $BG = 2q$. Como $AM \perp BN$ y $AB = 5$ por el Teorema de Pitágoras tenemos

$$25 = AB^2 = AG^2 + GB^2 = 4p^2 + 4q^2 \implies p^2 + q^2 = \frac{25}{4}$$

Ahora veamos que $[ANMB] = \frac{3}{4}[ABC] = \frac{27}{2}$ pues CMN es semejante a CAB en razón 1 a 2 y por lo tanto tiene la cuarta parte de su área. Expandiendo en términos de las áreas de los triángulos rectángulos con vértice G tenemos

$$\frac{27}{2} = [ANMB] = [AGB] + [BGM] + [MPN] + [NGA] = 2pq + pq + \frac{pq}{2} + pq = \frac{9}{2}pq \implies pq = 3$$

Ahora tenemos $\frac{25}{4} = p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = (p+q)^2 - 6$, de modo que $(p+q)^2 = \frac{49}{4}$ y $p + q = \frac{7}{2}$. Esto junto con $pq = 3$ determina p y q salvo intercambiarlos pues sustituir $q = \frac{3}{p}$ nos da una ecuación cuadrática en p. Podemos entonces verificar que p y q son 2 y $\frac{3}{2}$ en algún órden. Supongamos sin perder generalidad que $p = \frac{3}{2}$ y $q = 2$. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos

$$AN = \sqrt{q^2 + 4p^2} = \sqrt{13}$$
$$BM = \sqrt{p^2 + 4q^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 16} = \frac{\sqrt{73}}{2}$$

Como N y M son puntos medios de AC y BC concluímos que los lados AC y BC son, en algún orden, $2\sqrt{13}$ y $\sqrt{73}$.

36.2. Problema 2

$a = 2^5, b = 2^4$.

36.3. Problema 3

Supongamos que existe tal número, entonces sus dígitos $d_1, d_2, \dots, d_{1989}$ satisfacen $0 \leq d_i \leq 9$ y

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_{1989} = d_1 d_2 \dots d_{1989}$$

Y $d_i = 5$ para al menos tres valores de i. Notemos que $d_i \neq 0$ para todo i, pues la suma es distinta de cero y entonces el producto también. Notemos además que la suma es a lo más $9 \times 1989 < 2^{15}$. Esto implica que a lo más puede haber 14 mayores que 1, de lo contrario el producto es mayor que la suma. Entonces obtenemos la nueva cota

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_{1989} \leq (1989 - 14) + 14 \times 9 = 2101$$

Y por otro lado $d_1 + d_2 + \cdots + d_{1989} \geq 1986 + 3 \times 5 = 2001$, pues hay al menos tres dígitos iguales a 5 y los demás son al menos 1. Como $125 \mid d_1 d_2 \dots d_{1989}$, 125 también divide a la suma, pero esto es imposible, pues entre 2001 y 2101 no hay ningún múltiplo de 125.

36.4. Problema 4

Sean $A = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_2}$ y $B = \overline{a_1 a_0}$. Por hipótesis tenemos $n = 100A + B$ y

$$200A + 2B = 2n = r = 10^m B + 10A \implies$$
$$A = \frac{(10^m - 2)B}{190}$$

Como A tiene exactamente $m - 1$ dígitos debemos tener $10^{m-1} > A \geq 10^{m-2}$. La primera desigualdad requiere que $B < 20$, de lo contrario

$$A = \frac{(10^m - 2)B}{190} \geq \frac{2(10^m - 2)}{19} > 10^{m-1}$$

Ahora veamos que $5 \mid 190 \mid (10^m - 2)B$, y como $5 \nmid 10^m - 2$ se sigue que $5 \mid B$. Deducimos que B es $5, 10$ o 15, pero si $B = 5$ entonces r empezaría con 0, contradiciendo que $\overline{a_1 a_0 a_m \dots a_2 0}$ es su representación decimal. Entonces B es 10 o 15.

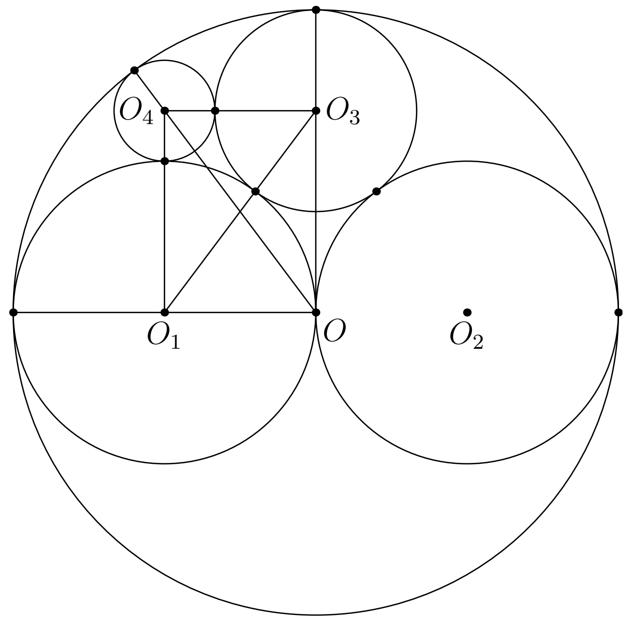
Ahora veamos que $19 \mid 190 \mid (10^m - 2)B$, pero 19 no divide a 10 o 15, y entonces $19 \mid 10^m - 2$. Con un poco de cuidado podemos verificar que el menor m que cumple esto es 17. Como B es al menos 10 concluímos que

$$A \geq \frac{(10^{17} - 2) \cdot 10}{190}$$

Y como este último número efectivamente es entero, éste es el menor valor posible de A. Concluímos que el menor valor posible de n es

$$100A + B = \frac{100(10^{17} - 2)}{19} + 10 = 526315789473684210$$

36.5. Problema 5



Sean O_i y r_i el centro y radio de $\mathcal{C}_i$ respectivamente, O el centro de $\mathcal{C}$ y r el radio de $\mathcal{C}$. Por simetría O_3 está en la mediatriz de O_1O_2, y por lo tanto $\angle O_3OO_1 = 90°$. Por el teorema de Pitágoras en el triángulo O_3OO_1 tenemos

$$\begin{aligned} (1+r_3)^2 = O_1O_3^2 = OO_3^2 + OO_1^2 = (2-r_3)^2 + 1^2 \\ \iff r_3^2 + 2r_3 + 1 = r_3^2 - 4r_3 + 4 + 1 \\ \iff 6r_3 = 4 \iff r_3 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

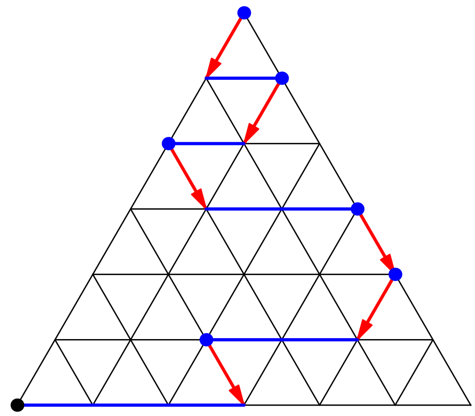
Ahora sea O_4' el punto tal que $OO_3O_4'O_1$ es un rectángulo. Entonces

$$\begin{aligned} O_4'O_1 = OO_3 = \frac{4}{3} = r_1 + \frac{1}{3} \\ O_3O_4' = OO_1 = 1 = r_3 + \frac{1}{3} \\ OO_4' = O_1O_3 = \frac{5}{3} = r - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

De esto deducimos que el círculo de centro O_4 y radio $\frac{1}{3}$ es tangente a $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}$, por lo que coincide con $\mathcal{C}_4$ y O_4 coincide con O_4', por lo que $OO_1O_4O_3$ es un rectángulo, como queríamos.

36.6. Problema 6

Para cada linea horizontal de la figura, excepto la de hasta abajo, elegimos un punto sobre esa linea (en la primera linea siempre elegimos A). Para cada uno de estos puntos, elegimos una dirección $\swarrow$ o $\searrow$ - es claro que hay $6! \times 2^6$ formas de hacer estas elecciones. Afirmamos que estas se biyectan con todos los caminos deseados, con lo cual terminamos. En efecto, haremos que para cada fila el punto marcado sea el último punto que visitamos sobre esta fila, y la dirección que elegimos en este punto nos indica la direccion en la que nos movemos a la siguiente fila. Es claro que cada camino corresponde entonces a una única elección de puntos y direcciones, y viceversa.

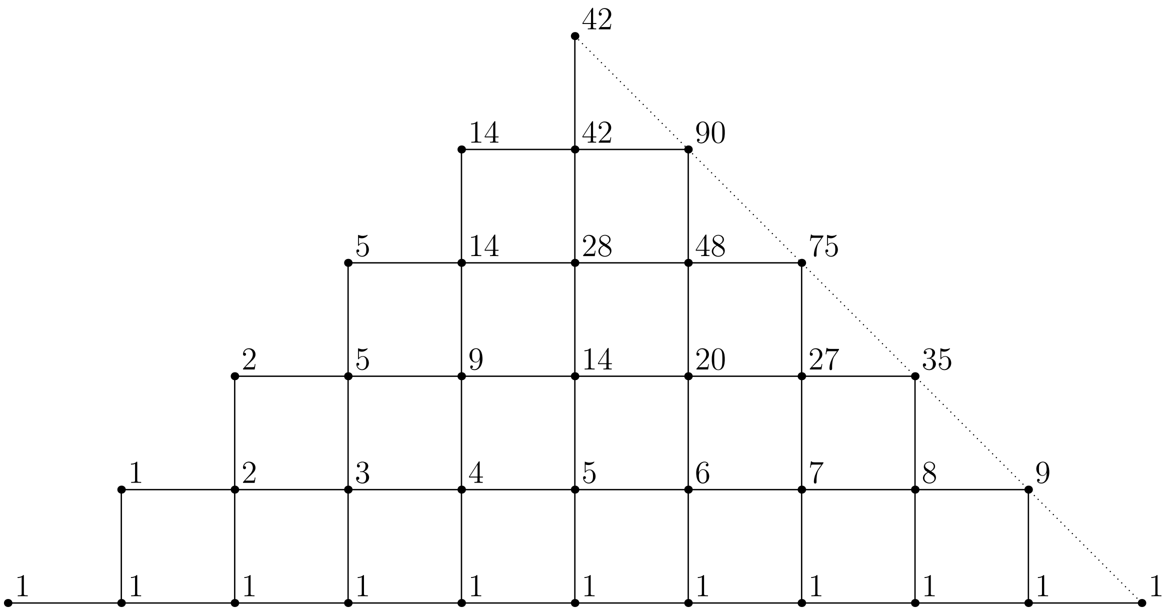


37. Soluciones de la IV OMM 1990

Enunciados en la página 11

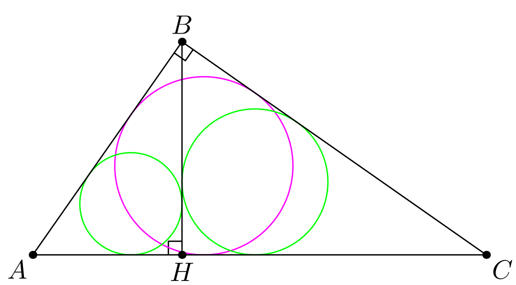
37.1. Problema 1

Rotando, tenemos el siguiente diagrama:



En cada punto, el número a su lado indica el número de caminos válidos que llegan a él. Este se calcula sumando los números a su izquierda y abajo de él, si estos existen, pues siempre debemos llegar de una de estas direcciones. El resultado total es $1 + 9 + 35 + 75 + 90 + 42 = 252$.

37.2. Problema 2



Veamos que los triángulos AHB y ABC son semejantes pues comparten el ángulo $\angle A$ y $\angle ABC = \angle AHB = 90°$. Entonces

$$\frac{r_1}{r} = \frac{AB}{AC} \implies \frac{r_1^2}{r^2} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Análogramente $\frac{r_2^2}{r^2} = \frac{BC^2}{AC^2}$, y entonces

$$\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{r_1^2}{r^2} + \frac{r_2^2}{r^2} = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = 1$$

Donde la última igualdad se sigue del Teorema de Pitágoras. Concluímos que $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.

37.3. Problema 3

El problema se resuelve fácilmente utilizando el lema conocido como *Lifting the Exponent*, que enunciamos y demostramos a continuación.

Lema (Lifting the Exponent). Sea p un número primo. Denotamos por $\nu_p(n)$ al máximo entero k tal que p^k divide a n. Sean x, y enteros y n un entero positivo, entonces:

1. Si p es impar, $p \nmid x$, $p \nmid y$ y $p \mid x - y$ entonces

$$\nu_p(x^n - y^n) = \nu_p(x - y) + \nu_p(n)$$

2. Si x, y son impares y $4 \mid x - y$ entonces

$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y) + \nu_2(n)$$

3. Si n es par y x, y son impares entonces

$$\nu_2(x^n - y^n) = \nu_2(x - y) + \nu_2(x + y) + \nu_2(n) - 1$$

Demostración: Para esto requeriremos primero un resultado auxiliar.

Sublema: Si p es un primo, x, y, n son enteros con n positivo, y $p \mid x - y$, entonces $p \mid \frac{x^n - y^n}{x - y}$ si y solo si $p \mid n$. Más aún si p es impar entonces

$$\nu_p\left(\frac{x^p - y^p}{x - y}\right) = 1$$

Subdemostración: Observemos que, como $x \equiv y \pmod{p}$:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1} \equiv nx^{n-1} \pmod{p}$$

Como $p \nmid x$ el resultado se sigue. Para la segunda parte, como $x \equiv y \pmod{p}$ existe un k tal que $y = x + kp$. Entonces para $0 \leq m \leq p - 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
x^{p-1-m}y^m &\equiv x^{p-1-m}(x + pk)^m \\
&\equiv x^{p-1-m}\left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(pk)^i x^{m-i}\right) \\
&\equiv x^{p-1-m}\left(\sum_{i=0}^{1}\binom{m}{i}(pk)^i x^{m-i}\right) \\
&= x^{p-1-m}\left(x^m + mpkx^{m-1}\right) = x^{p-1} + mpkx^{p-2} \pmod{p^2}
\end{aligned}$$

Sumando para cada m obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{x^p-y^p}{x-y} &\equiv px^{p-1}+pk(0+1+\cdots+p-1)x^{p-2}\\ &\equiv px^{p-1}+pk\left(\frac{p(p-1)}{2}\right)x^{p-2}\equiv px^{p-1}\not\equiv 0 \pmod{p^2}\end{aligned}$$

Lo cual junto con el paso anterior nos dice que $\nu_p\left(\frac{x^p-y^p}{x-y}\right)=1$.

Ahora, para probar el lema para p impar, sea $n=p^ab$ donde $p\nmid b$, entonces

$$\nu_p(x^{p^ab}-y^{p^ab})=\nu_p(x^{p^{a-1}b}-y^{p^{a-1}b})+1=\nu_p(x^{p^{a-2}b}-y^{p^{a-2}b})+2=\cdots=\nu_p(x^b-y^b)+a$$

Donde utilizamos la segunda parte del sublema a veces. Para finalizar, utilizando la primera parte del sublema tenemos $\nu_p(x^b-y^b)=\nu_p(x-y)$. Entonces

$$\nu_p(x^n-y^n)=\nu_p(x^{p^ab}-y^{p^ab})=\nu_p(x^b-y^b)+a=\nu_p(x-y)+\nu_p(n)$$

Para la segunda parte sea $n=2^ab$, entonces

$$x^n-y^n=\left(x^{2^{a-1}b}+y^{2^{a-1}n}\right)\left(x^{2^{a-2}b}+y^{2^{a-2}b}\right)\cdots\left(x^b+y^b\right)\left(x^b-y^b\right)$$

Como $x\equiv y \pmod 4$ tenemos que $x^m\equiv y^m\equiv 1 \pmod 4$ para todo entero par m, entonces los primeros $a-1$ factores tienen exactamente un factor 2 cada uno. Similarmente tenemos $x^b\equiv y^b \pmod 4$ y $x^b+y^b\equiv 2x^b\equiv 2 \pmod 4$. Todo lo anterior nos dice que

$$\nu_2(x^n-y^n)=a+\nu_2(x^b-y^b)$$

Y nuevamente tenemos $\nu_2(n)=a,\nu_2(x^b-y^b)=\nu_2(x-y)$. Finalmente, para la tercera parte sea $n=2m$. Notemos que $4\mid x^2-y^2$ para cualesquiera x,y impares y entonces

$$\nu_2(x^n-y^n)=\nu_2(x^{2m}-y^{2m})=\nu_2((x^2)^m-(y^2)^m)=\nu_2(x^2-y^2)+\nu_2(m)$$

Por la segunda parte de LTE. Ahora basta con ver que $\nu_2(x^2-y^2)=\nu_2(x+y)+\nu_2(x-y)$ y que $\nu_2(m)=\nu_2(n)-1$.

Volviendo al problema, basta probar que $2\nu_p(n-1)\leq\nu_p(n^{n-1}-1)$ para todo primo p. Esto es evidente si $p\nmid n-1$. En caso contrario, si p es impar por Lifting the Exponent tenemos $\nu_p(n^{n-1}-1)=\nu_p(n-1)+\nu_p(n-1)=2\nu_p(n-1)$, por lo cual esto es cierto. Si $p=2$ entonces $\nu_2(n^{n-1}-1)=\nu_2(n-1)+\nu_2(n+1)+\nu_2(n-1)-1=2\nu_2(n-1)+\nu_2(n+1)-1$. Como $\nu_2(n+1)\geq 1$ para todo n impar esto es al menos $2\nu_2(n-1)$.

37.4. Problema 4

En resumen, buscamos calcular

$$\sum_{1\leq p\leq q\leq 6}\frac{p}{q}$$

Pues las fichas con un lado blanco no contribuyen a la suma. Esto se puede escribir como

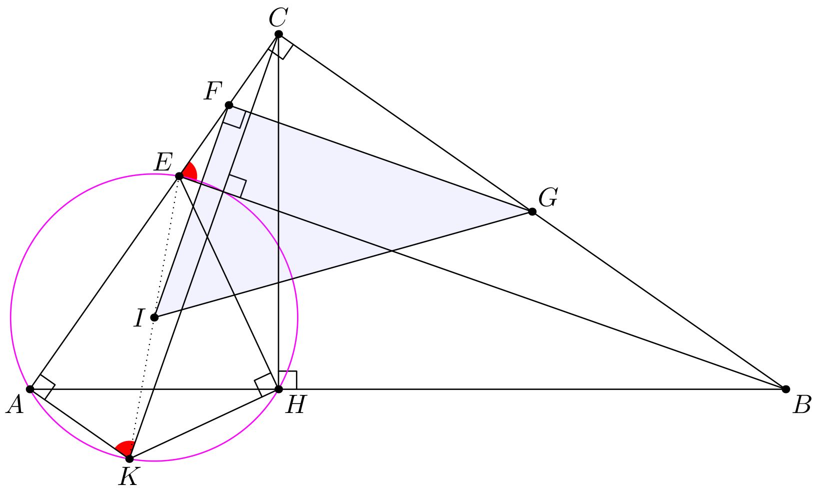
$$\sum_{q=1}^{6}\sum_{p=1}^{q}\frac{p}{q}=\sum_{q=1}^{6}\frac{\frac{q(q+1)}{2}}{q}=\sum_{q=1}^{6}\frac{q+1}{2}=\sum_{q=1}^{7}\frac{q}{2}-1=\frac{\frac{7\cdot 8}{2}}{2}-1=13$$

37.5. Problema 5

Para cada punto (x, y), consideremos el punto $(x \bmod 3, y \bmod 3)$. Hay 9 parejas de residuos $\pmod 3$, entonces por casillas hay $\lceil \frac{19}{9} \rceil = 3$ puntos que van a dar a la misma pareja. Considerando estos tres puntos obtenemos el gravicentro deseado, pues la suma de las coordenadas x es múltiplo de 3 y la suma de las coordenandas y también, y el gravicentro está dado por

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

37.6. Problema 6



Sea ℓ la recta paralela a BC por A, K_1 la intersección de la perpendicular a BE por C con ℓ y K_2 la intersección de la perpendicular a HE por H con ℓ. Afirmamos que $K_1 = K_2$.

Veamos que la secuencia de transformaciones $E \mapsto BE \mapsto \infty_{BE} \mapsto \infty_{\perp BE} \mapsto C\infty_{\perp BE} \mapsto K_1$ es proyectiva pues $\infty_\ell \mapsto \infty_{\perp \ell}$ es proyectiva y las demás transformaciones son proyecciones, entonces son proyectivas. Similarmente la secuencia $E \mapsto HE \mapsto HK_2 \mapsto K_2$ es proyectiva pues la segunda transformación es una rotación de $90°$ respecto a H. Para ver que estas dos transformaciones coinciden basta ver que coinciden para tres elecciones de E. Si $E = A$ entonces claramente K_1 y K_2 son la intersección de CH con ℓ. Si $E = C$ ambos puntos son claramente iguales a A. Si $E = \infty_{AC}$ entonces ambos puntos son ∞_{BC}. Concluímos que $K_1 = K_2$, llamemos K a ambos puntos.

Ahora veamos que K es diametralmente opuesto a E en (AEH), entonces I es punto medio de EK y IF es paralela a CK, que es perpendicular a BE, entonces $\angle IFG = 90°$. Veamos además que $\angle CKA = \angle CEB$ pues CE y CB son perpendiculares a AK y AC, entonces $\triangle CBK \sim \triangle CAK$. Por lo tanto

$$\frac{FI}{FG}=\frac{2FI}{2FG}=\frac{CK}{BE}=\frac{CA}{CB}$$

Como $\angle IFG = \angle ACB = 90°$ concluímos que ACB y IFG son semejantes.

38. Soluciones de la V OMM 1991

Enunciados en la página 12

38.1. Problema 1

Consideremos cualquier número $1 \leq k < 1991$ que es primo relativo con 1991. Entonces $1991 - k$ también es primo relativo con 1991, y la suma de las dos fracciones irreducibles correspondientes es 1. Considerando todas estas parejas vemos que el resultado es $\frac{\phi(1991)}{2}$. Como $1991 = 11 \times 181$ concluímos $\phi(1991) = 10 \times 180 = 1800$. La respuesta es entonces 900.

38.2. Problema 2

La segunda condición nos dice que $n \equiv 2 \pmod{3}$, $n \equiv 3 \pmod{4}$ y $n \equiv 0 \pmod{5}$. Es fácil verificar que esto sucede si y solo si $n \equiv 35 \pmod{60}$. En particular $n \equiv 5 \pmod{10}$. Es claro que $n = 5$ no funciona, y si n tiene dos dígitos debe ser 55, que tampoco funciona. Entonces n tiene al menos tres dígitos. Las primeras opciones son 505 y 515, y la primera no funciona pero la segunda sí, por lo que el menor n posible es 515.

Para ver que hay una infinidad, notemos que

$$n = 5111\ldots15$$

Funciona siempre que la cantidad de 1s sea 1 mód 3. Esto se puede verificar considerando las congruencias módulo $3, 4$ y 5 por separado.

38.3. Problema 3

Primero calculamos la razón entre el circunradio y el lado de un tetraedro regular. Como todos los tetraedros regulares son semejantes basta calcular esta razón para un tetraedro regular específico. Suponemos que el tetraedro está encajado en $\mathbb{R}^4$, con vértices $(4, 0, 0, 0)$, $(0, 4, 0, 0)$, $(0, 0, 4, 0)$ y $(0, 0, 0, 4)$. Por simetría el centro del tetraedro es $(1, 1, 1, 1)$. La distancia de este punto a cualquiera de los vértices es $\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 2\sqrt{3}$, y la distancia entre dos vértices es $\sqrt{4^2 + 4^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. De este modo la razón entre el circunradio y el lado es

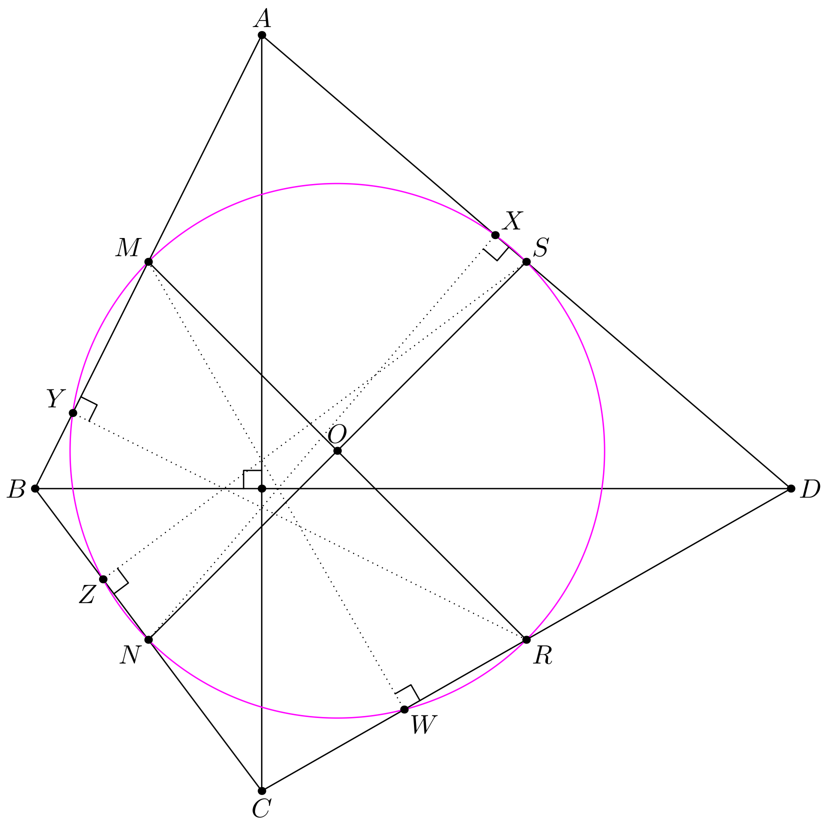
$$\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Volviendo al problema original, los centros de las esferas forman un tetraedro regular de lado 2. Este tiene entonces circunradio $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Por simetría la esfera más pequeña que contiene a las otras cuatro debe ser tangente a ellas, y como el radio de la esfera tangente a las otras 4 es exactamente 1 más que el circunradio del tetraedro (pues el radio es la distancia del centro al punto de tangencia), concluímos que el radio es

$$\frac{\sqrt{6} + 2}{2}$$

38.4. Problema 4

Observemos que MN y MS son respectivamente paralelas a las diagonales AC y BD, pues los triángulos BMN y BAC son semejantes, y lo mismo con los triángulos AMS y ABD. Como $BD \perp AC$, concluímos que $\angle NMS = 90°$. De manera análoga los demás ángulos interno del cuadrilátero son rectos, por lo que $NMSR$ es un rectángulo, y sus diagonales MR y NS se intersecan en un punto O que satisface $OM = ON = OR = OS = \rho$.



Observemos ahora que como $\angle MWR = 90°$, el circuncírculo de $\triangle MWR$ tiene diámetro MR, y por lo tanto su centro es O. Concluímos que $OW = OR = OM = \rho$. De manera análoga demostramos que las medidas de OX, OY y OZ son ρ, por lo que los ocho puntos yacen en la circunferencia de centro O y radio ρ.

38.5. Problema 5

Observemos que entre cualesquiera tres enteros consecutivos hay uno de cada congruencia módulo 3. Módulo 3, la suma de sus cuadrados es

$$0^2 + 1^2 + 2^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

El cual no puede ser un cuadrado, ya que todos los cuadrados son congruentes con 0 o 1 módulo 3. De manera similar, entre cualesquiera 6 números consecutivos, debe haber tres pares y tres impares. Los cuadrados de los pares son congruentes con 0 (mód 4), mientras que los cuadrados de los impares son congruentes con 1 (mód 4). La suma de estos seis números es entonces 3 (mód 4), y nuevamente no puede ser un cuadrado, pues los cuadrados son 0 o 1 módulo 4.

Para la última parte, digamos que los números consecutivos son $m, m+1, \ldots, m+10$ para un entero positivo m. La suma de sus cuadrados es

$$11m^2 + (2 + 4 + \cdots + 20)m + (1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2) = 11m^2 + 110m + \frac{10(11)(21)}{6} = 11(m^2 + 10m + 35)$$

Entonces $m^2 + 10m + 35$ debe ser de la forma $11k^2$, y en particular debe ser un múltiplo de 11. Podemos verificar con algo de cuidado que esto sucede cuando m es 5 o 7 módulo 11. Sustituyamos $m = 11n - 4$ con n entero postivo, entonces

$$m^2 + 10m + 46 = (11n - 4)^2 + 10(11n - 4) + 46 = 11(11n^2 + 2n + 1)$$

De modo que $11n^2 + 2n + 1$ debe ser un cuadrado perfecto. Para $n = 2$ esto es igual a 7^2. Esto nos da $m = 18$, que corresponde a que

$$18^2 + 19^2 + \cdots + 28^2$$

Es un cuadrado perfecto. Podemos verificar que es de hecho igual a 77^2.

38.6. Problema 6

Supongamos que hay al menos $n + 1$ triángulos, entonces estos contienen en total al menos $3n + 3$ vértices. Por el principio de casillas hay un vértice, digamos a, que está contenido en al menos 4 triángulos. Sea abc uno de estos triángulos. Afirmamos que todos los triángulos que contienen a a contienen también a b o todos contienen también a c. De lo contrario existen triángulos abd y ace para algunos vértices d y e. Como estos deben compartir dos vértices, tenemos $d = e$. Ahora cualquier otro triángulo que contiene a a debe contener a exactamente un vértice de cada una de las parejas $(b, c), (b, d), (d, c)$, lo cual es imposible.

Entonces todos los triángulos que contienen a a contienen a algún otro vértice b. Entonces hay al menos 4 triángulos que contienen a b, y por lo tanto todos los triángulos que contienen a b deben contener a a. Digamos que hay $k \geq 4$ triángulos que contienen a a y b y sean $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sus vértices distintos de a y b. Cualquier otro triángulo no puede contener a c_i, pues entonces debería contener a a o a b, pero si contiene a uno contiene al otro. Entonces los triángulos restantes, que son al menos $n + 1 - k$, contienen únicamente a los $n - k - 2$ vértices que no son a, b o c_i para algún i. Si $k \geq n - 5$ esto es claramente imposible, pues hay a lo más un triángulo más y entonces hay a lo más $k + 1 \leq n$ triángulos. De lo contrario tenemos $n - k - 2$ vértices que forman al menos $n + 1 - k > n - k - 1$ triángulos, y podemos proceder por inducción fuerte. El caso base $n = 4$ es evidente pues solo hay 4 triángulos posibles.

39. Soluciones de la VI OMM 1992

Enunciados en la página 13

39.1. Problema 1

Como POQ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en O, el punto medio X de PQ satisface $OX = \frac{PQ}{2}$. Análogamente $OY = \frac{QR}{2}$ y $OZ = \frac{RP}{2}$. Ahora, como X, Y y Z son respectivos puntos medios de los segmentos PQ, QR y RP, las longitudes de XY, YZ y ZX son $\frac{PR}{2}$, $\frac{PQ}{2}$ y $\frac{QR}{2}$ respectivamente. Con un poco de cuidado, podemos verificar de las relaciones antes obtenido que todas las caras de $OXYZ$ tienen lados iguales a $\frac{PQ}{2}$, $\frac{QR}{2}$ y $\frac{RP}{2}$ en algún orden, por lo que todas son congruentes.

39.2. Problema 2

Esto es equivalente a encontrar el número de matrices en $M_2(\mathbb{Z}_p)$ que no son invertibles. Esto sucede si y solo si existe una combinación lineal no trivial de sus filas que se anula. Como solo hay dos filas esto equivale a que la segunda fila sea combinación lineal de la primera.

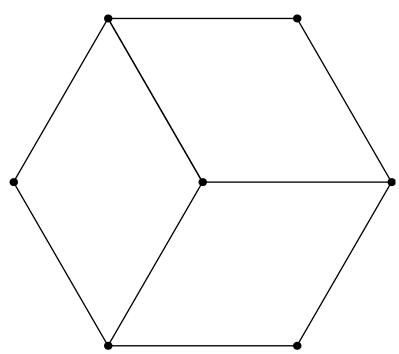
Si la primera fila es $(0,0)$, cualquier elección para la segunda fila genera una matriz no invertible. Esto nos da p^2 cuartetas, pues cualquier forma de elegir c y d es válida. En cualquier otro caso, hay exactamente p opciones para elegir la segunda fila de manera que sea combinación lineal de la primera. Esto nos da otras $(p^2-1)p = p^3 - p$ cuartetas, pues hay p^2-1 formas de elegir la primera fila, y p de elegir la segunda. Sumando obtenemos un total de $p^3 + p^2 - p$ cuartetas.

39.3. Problema 3

Nota: Este problema aparece igual que el Problema 3 de 1991 en `www.ommenlinea.org`, pero buscando parece que el siguiente problema es el correcto:

Considere siete puntos dentro o sobre un hexágono regular y pruebe que tres de ellos forman un triángulo cuya área es menor o igual que $\frac{1}{6}$ del área del hexágono.

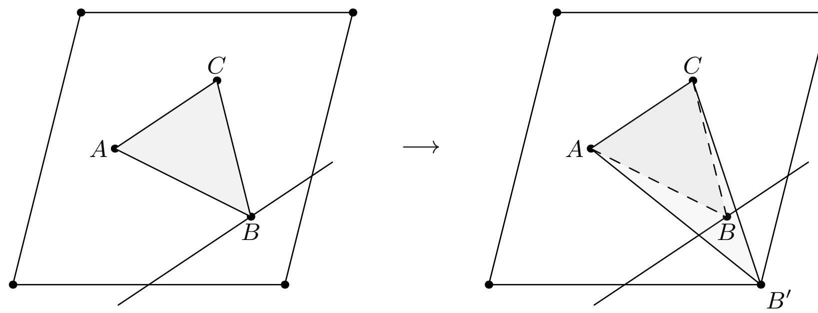
Consideremos los tres paralelogramos que se obtienen uniendo el centro del hexágono con tres vértices no consecutivos de éste.



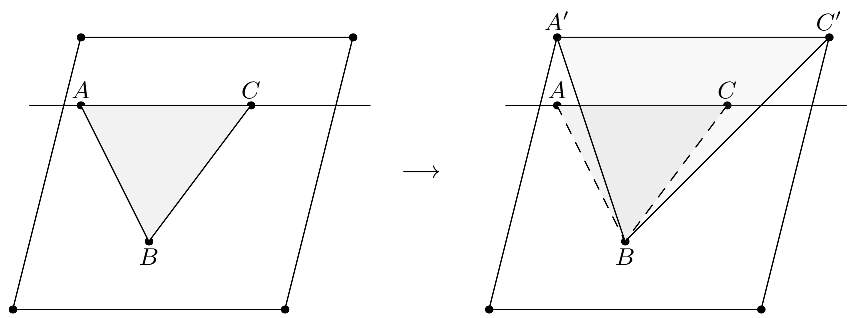
Por el Principio de Casillas alguno de ellos contiene tres de los puntos. Además, cada paralelogramo tiene $\frac{1}{3}$ del área del hexágono. Para finalizar probamos que cualquier triángulo ABC contenido en un paralelogramo tiene a lo más la mitad del área del paralelogramo, con lo cual terminamos tomando tres puntos que estén en el mismo paralelogramo.

Para esto, veamos que si un triángulo contenido en un paralelogramo tiene área máxima, entonces al menos dos de sus vértices coinciden con vértices del paralelogramo. De lo contrario, digamos que B y C no coinciden con vértices del paralelogramo. Si AC no es paralela a un lado del paralelogramo entonces la paralela a AC

por B deja un vértice del paralelogramo en distinto lado que A y C, y sustituir B por este vértice aumenta el área



Si AC es paralela a un lado del paralelogramo, entonces su prolongación deja un lado del paralelogramo paralelo a AC de distinto lado a BC, y podemos sustituir A y C por estos vértices para obtener un área mayor.



Finalmente si dos puntos coinciden con vértices del paralelogramo es fácil comprobar el resultado. La igualdad se alcanza cuando dos vértices del triángulo son vértices consecutivos del paralelogramo y el otro está sobre el lado opuesto.

39.4. Problema 4

Basta ver que la suma es divisible entre 4 y entre 25. Módulo 4, como $a^2 \equiv 1 \pmod 4$ para todo a impar la suma se reduce a

$$1 + 11 + 111 + \cdots + 1111111111 \equiv 1 + 9 \cdot 11 = 100 \equiv 0 \pmod 4$$

Módulo 25, como $\phi(25) = 20$ para todo a no múltiplo de 5 por el Teorema de Euler tenemos $a^n \equiv a^{n \bmod 20}$ (mód 25). La suma es entonces congruente con

$$1 + 9 \cdot 11^{11} \pmod{25}$$

Módulo 25 calculamos entonces $11^2 \equiv_{25} -4$, $11^4 \equiv_{25} -9$, $11^5 \equiv_{25} 1$, de modo que $11^{11} \equiv 11^5 \cdot 11^5 \cdot 11 \equiv 11$ (mód 25). La suma se reduce entonces a $1 + 9 \cdot 11 = 100$, que evidentemente es 0 módulo 25.

39.5. Problema 5

Para probar el lado derecho, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y+3}+\sqrt{2z+3}\right)^2 \le (1+1+1)((2x+3)+(2y+3)+(2z+3))$$
$$= 3(2(x+y+z)+9) = 3\cdot 15 = 45$$

Tomando raíz cuadrada obtenemos la desigualdad deseada. Para la otra dirección necesitaremos primero un lema.

Lema: Si $0 \le a \le b \le c \le d$ son reales con $a+d = b+c$ entonces

$$\sqrt{b}+\sqrt{c} \ge \sqrt{a}+\sqrt{d}$$

Demostración. Tenemos

$$(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 - (\sqrt{a}+\sqrt{d})^2 = b+c-a-d+\sqrt{bc}-\sqrt{ad} = \sqrt{bc}-\sqrt{ad}$$

Escribiendo $b = a+x$ tenemos $c = d-x$, entonces $bc = (a+x)(d-x) = ad + x(d-a-x)$. Como $a \le b \le c$ tenemos $0 \le x \le \frac{d-a}{2}$, por lo que

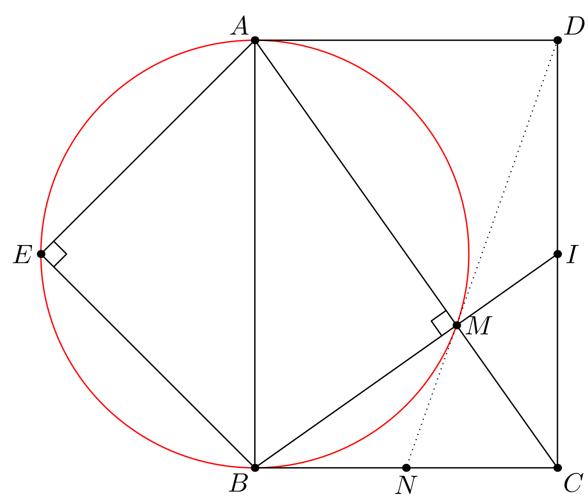
$$bc - ad = x(d-a-x) \ge 0 \implies \sqrt{bc}-\sqrt{ad} \ge 0$$

Lo cual demuestra el Lema.

Para finalizar, aplicando el Lema dos veces tenemos

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y+3}+\sqrt{2z+3} \ge \sqrt{3}+\sqrt{2(x+y)+3}+\sqrt{2z+3} \ge \sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{2(x+y+z)+3}$$
$$= \sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{9} = 3+2\sqrt{3} > 6$$

39.6. Problema 6



(a) Notemos primero que los triángulos ABM y CMI son semejantes pues AB y CI son paralelas, entonces

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{CI} = 2$$

Sea N la intersección de DM y BC, entonces como BC es paralela a AD tenemos

$$\frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MC} = 2$$

Entonces $BC = AD = 2CN$, y N es punto medio de BC.

(b) Por Pitágoras en el triángulo AEB tenemos $AB = a\sqrt{2}$. Por Pitágoras en el triángulo ABC obtenemos ahora $AC = a\sqrt{3}$. Como $AM = 2MC$ obtenemos

$$AM = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \text{ y } MC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Podemos comprobar que $AB^2 - BC^2 = AM^2 - MC^2 = a^2$, entonces por el Lema de Perpendicularidad, BM es perpendicular a AC. Entonces $\angle AMB = \angle AEB = 90°$, y $AMBC$ es cíclico. Como $AE = EB$, concluímos que E es el punto medio del arco AB que no contiene a M en este círculo, y por lo tanto ME es bisectriz de $\angle AMB$.

(c) El área de AEB es $\frac{a^2}{2}$. Calculemos el área de AMB. Para esto necesitamos la altura MB, que es igual a

$$\sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{4a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

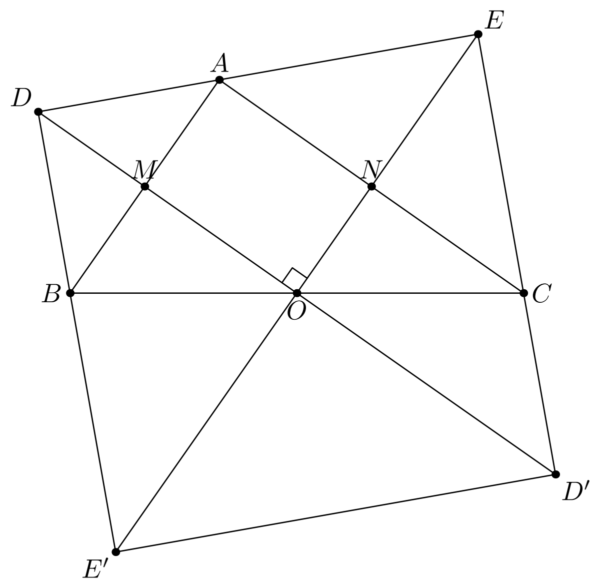
Entonces el área de AMB es $\frac{AM \cdot MB}{2} = \frac{2a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{6}}{18} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$. Por lo que el área total es

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{2}}{3} = \frac{3a^2 + 2a^2\sqrt{2}}{6} = \left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{6}\right) a^2$$

40. Soluciones de la VII OMM 1993

Enunciados en la página 14

40.1. Problema 1



Sean M y N los puntos medios de AB y AC respectivamente. Como $\triangle ABC$ es rectángulo con $\angle BAC = 90°$, sabemos que $OA = OB = OC$. Esto implica que O, M, D están todos en la mediatriz de AB, y por lo tanto son colineales. Análogamente O, N, E son colineales. Ahora veamos que $MD = \frac{AB}{2}$, pues $\triangle BDA$ es rectángulo con ángulo recto en D. Entonces

$$OD = OM + MD = \frac{AC}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2} = ON + NE = OE$$

Además $AMON$ es un rectángulo, y entonces DOE es un triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto en O. De esto deducimos que el cuadrilátero $DED'E'$ es de hecho un cuadrado, y por lo tanto

$$[DED'E'] = \frac{DD' \times EE'}{2} = \frac{DD'^2}{2} = \frac{(2OD)^2}{2} = \frac{(AB + AC)^2}{2}$$

40.2. Problema 2

Sea $\overline{abc}$ el número, entonces buscamos $a^3 + b^3 + c^3 = 100a + 10b + c$, que equivale a

$$(b^3 - 10b) + (a^3 - 100a) = c - c^3$$

Ahora hacemos la siguiente tabla:

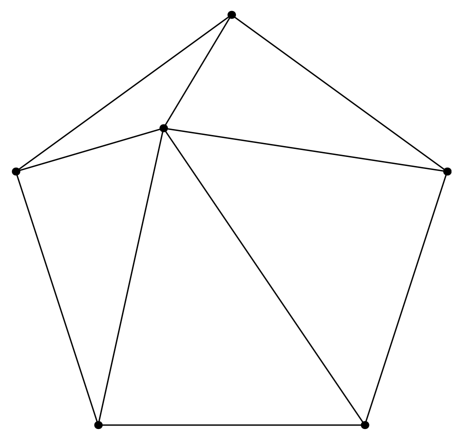
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x^3 - 100x$	0	-99	-192	-273	-336	-375	-384	-357	-288	-171
$x^3 - 10x$	0	-9	-12	-3	24	75	156	273	432	639
$x - x^3$	0	0	-6	-24	-60	-120	-210	-336	-504	-720

Notemos además que $100a + 10b + c \equiv c \equiv c^3 \pmod{2}$, entonces $2 \mid a^3 + b^3$ y a, b deben tener la misma paridad. Además $a \neq 0$. Con esto nos quedan solo 45 posibles casos para a, b, y para cada uno de estos podemos checar si hay un c correspondiente rápidamente usando la tabla. Con algo de cuidado verificamos que las respuestas son $407, 153, 370, 371$.

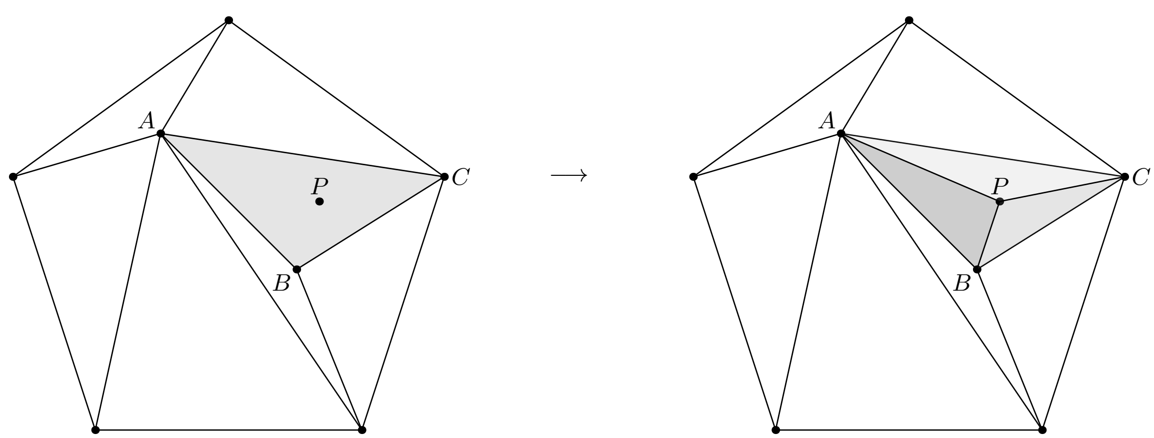
40.3. Problema 3

Si hay tres puntos colineales terminamos, pues el triángulo que forman tiene área cero. Supongamos entonces que no hay tres puntos diagonales. Dividiremos el interior del pentágono en 1993 triángulos disjuntos, entonces alguno debe tener área a lo más 1.

Comenzamos tomando cualquiera de los puntos, y formamos 5 triángulos uniéndolo con los vértices del pentágono.



Ahora consideramos los otros 994 puntos en orden. Digamos que estamos considerando el punto P. Este debe estar adentro de alguno de los triángulos que ya formamos, digamos ABC. Quitamos el triángulo ABC y lo sustituímos por los triángulos PAB, PBC y PCA. Esto aumenta en 2 el número de triángulos por cada punto, y entonces al final el número de triángulos es $5 + 994 \times 2 = 1993$.



40.4. Problema 4

Nota: Interpreto que el problema pide el número de operaciones de tipo 2 que se deben realizar.

Sea $g(n,k)$ el número de operaciones de tipo 2 que se realizan al calcular $f(n,k)$, entonces tenemos $g(n,n) = g(n,0) = 0$ y

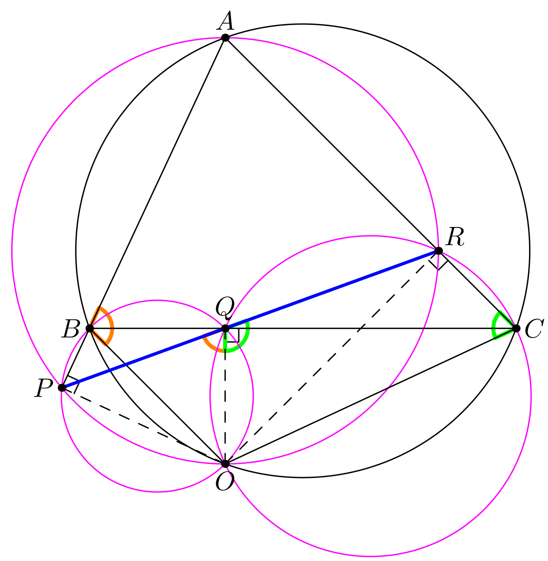
$$g(n,k) = 1 + g(n-1,k) + g(n-1,k-1)$$

Afirnamos que $g(n,k) = \binom{n}{k} - 1$. Esto claramente es cierto para $k = 0$ y $k = n$. Para los demás casos, podemos proceder por inducción sobre n: tenemos

$$\begin{aligned} g(n,k) &= 1 + g(n-1,k) + g(n-1,k-1) = 1 + \binom{n-1}{k} - 1 + \binom{n-1}{k-1} - 1 \\ &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} - 1 = \binom{n}{k} - 1 \end{aligned}$$

Donde en la última igualdad utilizamos la identidad de Pascal. Entonces la respuesta es $\binom{3991}{1993} - 1$.

40.5. Problema 5



Sean A, B y C los extremos de las cuerdas distintos de O. Entonces veamos que la intersección de los círculos (OA) y (OB) es la proyección de O sobre la recta AB, llamemosla P. Análogamente los otros dos puntos son las proyecciones de O sobre las rectas BC y CA, llamemosles Q y R. Entonces PQR es de hecho la recta de Simson de O respecto a ABC, demostremos que ésta existe:

Observemos que el cuadrilátero $OPBQ$ es cíclico, pues los ángulos OPB y OQB son rectos. Análogamente $OQRC$ es recto. Utilizando ángulos dirigidos módulo 180° tenemos

$$\measuredangle OQP = \measuredangle OBP = \measuredangle OBA = \measuredangle OCA = \measuredangle OCR = \measuredangle OQR$$

De donde deducimos que P, Q y R son colineales.

40.6. Problema 6

Comenzamos demostrando un Lema:

Lema: Sea p un número primo impar y a un entero no divisible entre p. Si a es un residuo cuadrático módulo p, entonces a es un residuo cuadrático módulo p^k para todo entero $k \geq 1$.

Demostración: Procedemos por inducción, donde el caso base $k = 1$ se nos da como hipótesis. Supongamos que existe un entero x tal que p^k divide a $x^2 - a$, y sea m cualquier entero positivo, entonces

$$\left(x + mp^k\right)^2 \equiv x^2 + 2mp^k + m^2p^{2k} \equiv x^2 + 2mp^k \pmod{p^{k+1}}$$

Como $x^2 \equiv a \pmod{p^{k+1}}$, tenemos que $x^2 \equiv a + rp^k \pmod{p^{k+1}}$ para algún entero r. Como p es impar existe un m tal que $2m \equiv -r \pmod{p^k}$, y eligiendo este m, el resultado anterior nos dice que $y = x + mp^k$ cumple que $p^{k+1} \mid y^2 - a$, lo cual concluye la inducción.

Volviendo al problema original, veamos que

$$\begin{aligned} x(x+1)(x+2)(x+3)+1 &= [x(x+3)]\left[(x+1)(x+2)\right] - 1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 \\ &= (x^2+3x+2)^2 - 1 + 1 = (x^2+3x+2)^2 \end{aligned}$$

Supongamos primero que p divide a esta expresión. Sea q un factor primo de p, el cual debe ser impar. Como $q \mid (x^2+3x+2)^2$, también divide a x^2+3x+2, y entonces divide a

$$4(x^2+3x+2) = 4x^2+12x+4 = (2x+3)^2 - 5$$

Entonces 5 es un residuo cuadrático módulo q, y por el lema es un residuo cuadrático módulo q^k para cualquier $k \geq 1$. Finalmente escribiendo

$$p = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdots q_r^{\alpha_r}$$

Vemos que para cada i existe un m_i tal que $m_i^2 \equiv 5 \pmod{q_i^{\alpha_i}}$. Entonces, por el Teorema Chino del Residuo existe un m tal que $m^2 \equiv 5 \pmod{p}$. Para el recíproco, si p divide a $m^2 - 5$ para algún m, entonces existe un x tal que $2x + 3 \equiv m \pmod{p}$. Entonces p divide a $(2x+3)^2 - 5 = 4(x^2+3x+2)$, por lo que divide a x^2+3x+2 y por lo tanto divide a $(x^2+3x+2)^2 = x(x+1)(x+2)(x+3)+1$.

41. Soluciones de la VIII OMM 1994

Enunciados en la página 15

41.1. Problema 1

Afirmamos que para todo n, el $(1+2+\cdots+n)$-ésimo número es n^2. Esto se puede comprobar por inducción, donde el caso base $n=1$ es inmediato. Para el paso inductivo veamos que el $(1+2+\cdots+n)$ es el último número del n-ésimo bloque de números de la misma paridad. Entonces, en los siguentes $n+1$ números de la sucesión, escribimos n^2+1, y los siguientes n números aumentan de 2 en 2, entonces el último es $n^2+1+2n=(n+1)^2$.

Para terminar, como $44^2 < 1994 \leq 45^2$, el 1994 está en un bloque de números impares consecutivos, y los más cercanos a él son 1993 y 1995.

41.2. Problema 2

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ los números en orden cíclico y sea $s_i = a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$, donde los índices se consideran módulo 12. Observemos entonces que

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{12} = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_{12}) = 3(1+2+\cdots+12) = 234$$

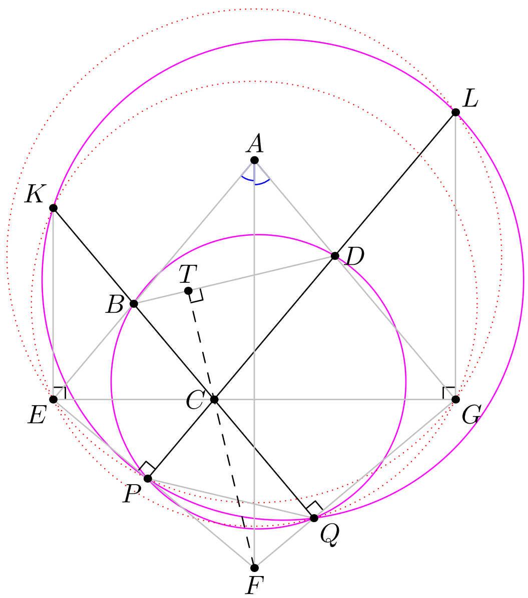
Si $s_i < 21$ para cada i entonces $s_i = 20$ para al menos seis valores de i. Veamos que no puede haber dos s_i consecutivos iguales, pues $s_{i+1} - s_i = a_{i+3} - a_i \neq 0$. Entonces debe haber exactamente seis s_i iguales a 6, y estos no pueden ser consecutivos.

Digamos sin perder generalidad que $s_1, s_3, s_5, s_7, s_9, s_{11}$ son iguales a 20. Como todos los demás s_i son menores o iguales que 19, de la suma vemos que de hecho todos son iguales a 19. De esto vemos que

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_4 + 1 &\implies a_4 = a_1 - 1 \\
a_2 + a_3 + a_4 = a_3 + a_4 + a_5 - 1 &\implies a_5 = a_2 + 1 \\
a_3 + a_4 + a_5 = a_4 + a_5 + a_6 + 1 &\implies a_6 = a_3 - 1 \\
a_4 + a_5 + a_6 = a_5 + a_6 + a_7 - 1 &\implies a_7 = a_4 + 1 = a_1
\end{aligned}$$

Esto es una contradicción a que los doce números sean distintos.

41.3. Problema 3



Sea G un punto en el rayo AD tal que $DC = DG$, con D entre A y G. Observemos que $\angle BCE = \frac{180^\circ - \angle EBC}{2} = \frac{180^\circ - \angle BCD}{2}$. Análogamente $\angle DCG$ tiene esta misma medida, por lo que

$$\angle BCE + \angle DCG + \angle BCD = 180^\circ - \angle BCD + \angle BCD = 180^\circ$$

Y E, C, G son colineales. Veamos además que

$$AE = AB + BE = AB + BC = CD + DA = GD + DA = AG$$

Y el triángulo AEG es isósceles. Sea F' el punto donde se cortan la perpendicular a AE por E y la perpendicular a AG por G. Por simetría F' está en la mediatriz de EG, que es la bisectriz de $\angle EAG$. Para concluir demostramos que $F'C \perp BD$, lo cual prueba que $F = F'$ y F' está en la bisectriz de $\angle BAD$.

Sea $P = CD \cap F'E, Q = BC \cap F'G$, y sean K y L las reflexiones de C respecto a los puntos B y D respectivamente. Observemos que $\angle CQG = 90^\circ$ pues $BC \parallel AD$ y $GF' \perp AD$. Además como $BC = BE = BK$ tenemos $\angle KEC = 90^\circ$. Como $\angle KEG = \angle KQG$ deducimos que $KEQG$ es cíclico, y

$$CK \cdot CQ = CE \cdot CG$$

Análogamente $CE \cdot CG = CP \cdot CL$, entonces $CK \cdot CQ = CP \cdot CL$, por lo que $KPQL$ es cíclico. Ahora veamos que BD es paralela a KL pues B y D son puntos medios de CK y CL respectivamente. Entonces

$$\angle CBD = \angle CKL = \angle CPQ$$

Y B, P, Q, D son concíclicos. Para finalizar sea T la intersección de $F'C$ con BD. Observemos que $CPFQ$ es cíclico pues tiene dos ángulos rectos, y entonces

$$\angle CBT + \angle TBC = \angle CBD + \angle F'CQ = \angle CPQ + \angle F'PQ = \angle F'PC = 90^\circ$$

Entonces $\angle CTB = 90^\circ$, y $F'C \perp BD$.

41.4. Problema 4

La respuesta es 37. Antes de demostrar esto, observemos lo que pasa en las primeras rondas del proceso:

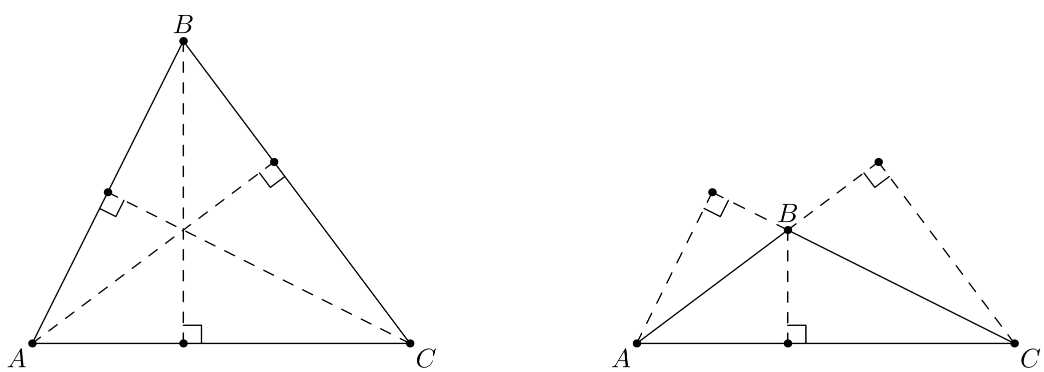
1. En la primera ronda, el mayor número que queda es 400, y leemos todos los múltiplos de 2 y 5.
2. En la segunda ronda, el mayor número que queda es 399, y leemos todos los múltiplos de 3, 7 y 19.
3. En la tercera ronda, el mayor número que queda es 397, y solo leemos esta página.
4. En la cuarta ronda, el mayor número que queda es 391, y leemos todos los múltiplos de 17 y 23.
5. En las siguientes tres rondas leemos únicamente las páginas 389, 383 y 379, que son todos primos.
6. En la octava ronda el mayor número que queda es 377, y leemos todos los múltiplos de 13 y 29.

Con esta información preliminar procedemos a la demostración. Primero veamos que existe un momento donde leímos todas las páginas mayores que 37, pero no la página 37. Veamos que 37 es primo, y entonces solo la leemos si en algún momento el número más grande que queda es múltiplo de 37. Este debe ser igual a $37m$ con $1 \leq m \leq 10$, pero ya comprobamos que en las primeras dos rondas se eliminan todos los múltiplos de $2, 3, 5$ y 7, por lo que el mayor múltiplo de 37 que queda es el mismo 37, y para llegar a él debemos eliminar todos los números mayores.

Ahora afirmamos que en este momento, 37 es el único número que queda, con lo cual terminamos. Para cada $n < 37$ sea p el menor divisor primo de n. Si $p \leq 20$ ya se eliminó a p, pues si no se habían eliminado los múltiplos de p al llegar a $p^2 < 400$, entonces se eliminan en este momento. Resta ver el caso donde p, y por lo tanto n, es $23, 29$ o 31. Ya vimos en nuestras observaciones preliminares que 23 y 29 se eliminan rápidamente, por lo que falta checar que 31 también.

Afirmamos que $31 \times 11 = 341$ no se puede eliminar antes de llegar a él. Como $31 \times 13 > 400$ y 31×12 se elimina en la primera ronda, este solo puede ser eliminado antes si en algún momento el número más grande es de la forma $11k$ con $k > 31$. Como $11 \times 37 > 400$, este k debe ser $32, 33, 34, 35$ o 36, pero ya vimos que todos estos números se eliminan en una de las primeras dos rondas pues son múltiplos de $3, 4$ o 5, por lo que nunca llegamos a ellos. Entonces en algún momento llegamos a 31×11, y eliminamos todos los múltiplos de 31.

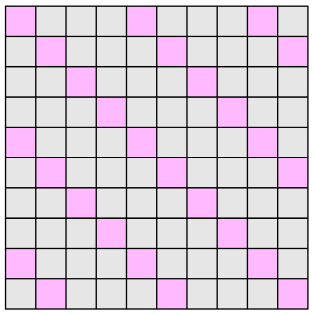
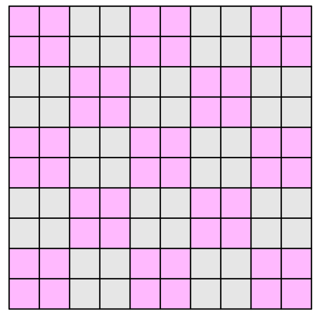
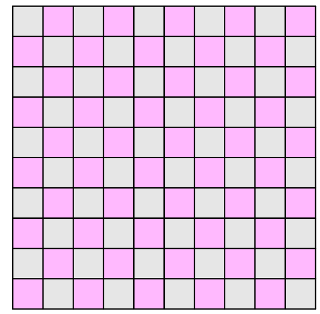
41.5. Problema 5



Veamos que el cuadrilátero $ABCD$ debe tener algún ángulo no obtuso. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\angle ABC \leq 90°$. Si los ángulos BAC y BCA son ambos no obtusos, terminamos, pues los pies de alturas desde A y C caen en BC y AB respectivamente. Si $\angle BAC > 90°$ entonces el pie de la altura desde A está en el segmento BC. Si $\angle BCA > 90°$ entonces el pie de la altura desde C está en el segmento AB. En cualquier caso alguno de los pies de las alturas del triángulo ABC está en un lado del cuadrilátero $ABCD$.

41.6. Problema 6

La estrategia para los tres incisos será presentar una coloración con cuadrados grises y rosas tal que cada ficha contenga a un número impar de cuadrados rosas, pero que el número total de cuadrados rosas sea par, entonces será imposible cubrir la cuadrícula con exactamente 25 fichas. Como los argumentos son todos iguales, nos limitamos a presentar las coloraciones.

(a)  (b)  (c) 

42. Soluciones de la IX OMM 1995

Enunciados en la página 16

42.1. Problema 1

Supongamos que hay n filas y que cada una contiene exactamente m asientos. Entonces podemos contar que hay

- $n(m-1)$ apretones de manos horizontales.
- $m(n-1)$ apretones de manos verticales.
- $(m-1)(n-1)$ apretones de manos diagonales para cada dirección diagonal ($\swarrow$, $\searrow$).

Entonces el número total de apretones de manos es $2(m-1)(n-1)+n(m-1)+m(n-1) = 4mn-3m-3n+2$. Igualando a 1020 tenemos

$$\begin{aligned}
4mn - 3m - 3n + 2 = 1020 &\iff \\
16mn - 12m - 12n + 8 = 4080 &\iff \\
(4m-3)(4n-3) - 1 = 4080 &\iff \\
(4m-3)(4n-3) = 4081 &= 7 \times 11 \times 53
\end{aligned}$$

Como $4m-3$ y $4n-3$ son 1 mód 4 y ambos son mayores que 1, la única opción es que sean 77 y 53 en algún orden. Entonces m y n son 14 y 20 en algún orden, y el número de concursantes es $14 \times 20 = 280$.

42.2. Problema 2

Hacemos una gráfica con los puntos como vértices donde dos son adyacentes si su distancia es 1. Por hipótesis la gráfica tiene al menos 8 aristas. Además, necesitaremos el siguiente hecho geométrico: Cualesquiera dos vértices a, b tienen a lo más dos vecinos en común. Esto pasa ya que cualquier vecino común está en la intersección de la mediatriz de ab con la circunferencia de centro a y radio 1, y hay a lo más dos puntos de intersección. Sabiendo esto nos enfocamos puramente en porbar que la gráfica contiene un triángulo. Consideremos un vértice de grado máximo, digamos a.

- Si $\deg(a) = 5$

  Entre los demás vértices hay al menos una arista, y tomando los vértices unidos por ésta arista junto con a obtenemos el triángulo deseado.

- Si $\deg(a) = 4$

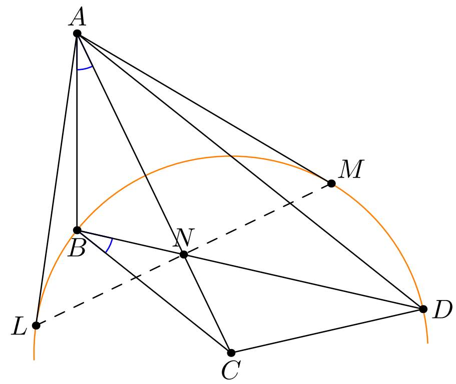
  Digamos que sus vecinos son b, c, d, e y el vértice restante es f. Entonces f no es adyacente a a, y es adyacente a a lo más 2 de los vértices b, c, d, e. Entonces debe haber una arista que conecte dos de los vértices b, c, d, e, y estos dos vértices junto con a forman el triángulo deseado.

- Si $\deg(a) = 3$

  Digamos que sus vecinos son b, c, d y los otros dos vértices son e, f. Si hay una arista que conecte dos de b, c, d, terminamos. Supongamos entonces que no. Notemos que e, f no son adyacentes a a y que cada uno es adyacente a a lo más dos vértices de entre b, c, d. Entonces para tener al menos 8 aristas necesariamente e y f deben ser adyacentes, y cada uno debe ser adyacente a dos de los vértices b, c, d. Pero entonces e y f comparten un vecino de entre los vértices b, c, d, y tomar éste junto con e y f nos da el triángulo deseado.

Finalmente veamos que $\deg(a) \leq 2$ es imposible, pues entonces habría a lo más 6 aristas en la gráfica.

42.3. Problema 3



Notemos que LM es la polar de A respecto al círculo con centro C y radio CB, por lo que corta a AC en el inverso de A respecto a este círculo. Para finalizar basta entonces ver que $CB^2 = CN \cdot CA$, que equivale a $\angle CAB = \angle CBN$. Pero esto es cierto ya que $\angle CBN = \angle CBD$ y los triángulos ABC y BCD son congruentes por ser A, B, C, D vértices consecutivos de un heptágono regular.

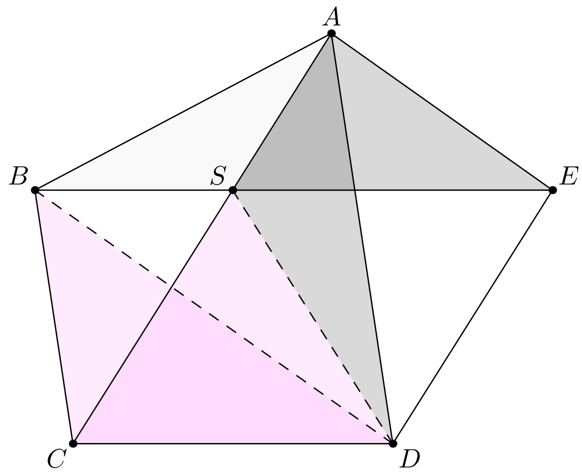
42.4. Problema 4

Consideremos los conjuntos

$$\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$$
$$\{2, 8, 18, 32\}$$
$$\{3, 12, 27\}$$
$$\{5, 20\}$$
$$\{6, 24\}$$
$$\{7, 28\}$$
$$\{10, 40\}$$

Para cualesquiera dos números en el mismo conjunto, su producto es un cuadrado perfecto, por lo que se puede elegir a lo más un número de cada conjunto. Fuera de estos conjuntos hay 19 números entre 1 y 40 inclusive, por lo que hay a lo más $19 + 7 = 26$ números en un conjunto que no contenga productos cuadrados perfectos. Recíprocamente si elegimos un número de cada uno de estos conjuntos, y los 19 números restantes, obtenemos un conjunto válido con 26 elementos, pues dos números tienen producto cuadrado perfecto si y solo si sus máximos divisores libres de cuadrados son iguales, y nuestros conjuntos justamente parten a los números según el valor de este divisor.

42.5. Problema 5



Sea S la intersección de AC y BE. Notemos que como $[BCD] = [CDE]$ y B, E están del mismo lado de CD, la recta BE debe ser paralela a CD. Análogamente tenemos paralelismos entre otras 4 parejas de un lado y una diagonal. Ahora veamos que

$$[ABCDE] = [ABC] + [ACD] + [ADE] = 2[ABC] + [ACD]$$

El problema se reduce entonces a ver que $[ABC] < [ACD] < 2[ABC]$. Para la primera veamos que

$$[ACD] = [ASD] + [CSD] > [CSD] = [BCD] = [ABC]$$

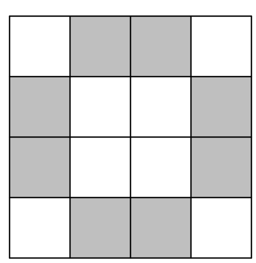
Donde $[CSD] = [BCD]$ pues BS es paralela a CD. Y para la segunda

$$[ACD] = [ASD] + [CSD] = [ASE] + [BCD] < [ABE] + [BCD] = 2[ABC]$$

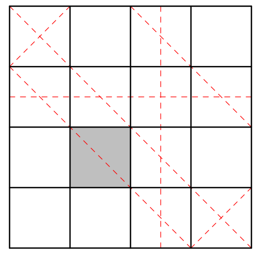
Donde $[ASD] = [ASE]$ pues AS es paralela a DE.

42.6. Problema 6

Primero veamos que es posible cambiar el estado de cualquier casilla sin afectar las otras, salvo las casillas marcadas en el siguiente dibujo:

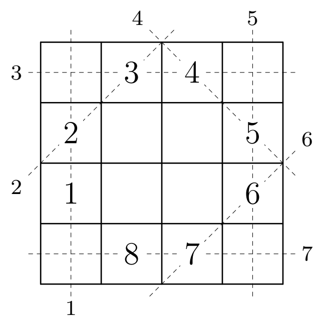


Para las casillas en las esquinas esto es fácil, pues podemos voltear la diagonal que solo contiene a esta esquina. Para las otras casillas, volteamos las lineas marcadas:



Es fácil verificar que todas las casillas están en una cantidad par de lineas marcadas, excepto la gris, por lo que únicamente esta casilla cambia su estado.

Por otro lado, cada linea contiene un número par de casillas de entre las 8 marcadas inicialmente, por lo que la paridad de su suma se mantiene constante, y debe ser par inicialmente. Recíprocamente si la suma de estas casillas es par es posible hacer que todas sean 0:



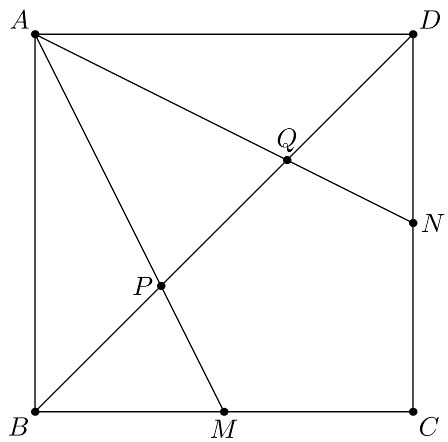
Para $k = 1, 2, \ldots, 7$ en orden nos fijamos en la casilla marcada con k, y si contiene 1 volteamos la linea marcada con k. La paridad constante nos garantiza que al final la casilla que contiene 8 también termina teniendo 0. Finalmente ya que todas estas casillas contienen 0 volteamos cada una de las casillas restantes que lo requieran con las operaciones antes descritas.

43. Soluciones de la X OMM 1996

Enunciados en la página 17

43.1. Problema 1

Aplicando una transformación afín adecuada podemos reducir el problema al caso donde BCD es un triángulo rectángulo isósceles con $\angle C = 90°$. Sean M y N los respectivos puntos medios de BC y CD y $A' = MP \cap NQ$, entonces E, F son respectivos puntos medios de BC y CD si y solo si $A = A'$, por lo que basta probar que $A'BCD$ es un paralelogramo.



Sean $B = (0, 1), C = (1, 1), D = (1, 0)$. Entonces $M = (\frac{1}{2}, 1)$, $N = (1, \frac{1}{2})$, $P = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y $Q = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Entonces MP pasa por el origen pues

$$\overrightarrow{OM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OP}$$

Análogamente NQ pasa por el origen, entonces $A' = (0, 0)$ y por lo tanto $A'BCD$ es un cuadrado, y en particular es un paralelogramo.

43.2. Problema 2

Notemos que en el minuto t (donde consideramos que el momento inicial es el minuto 1) la ficha i está en la casilla ti mód 64. Por lo tanto las fichas i, j están en la misma posición en el minuto t si y solo si

$$ti \equiv tj \pmod{64} \iff t(i-j) \equiv 0 \pmod{64} \iff \frac{64}{(64,t)} \text{ divide a } i-j$$

Por lo que para $i = 1$ hay exactamente $(64, t) - 1$ valores de j con esta propiedad. En particular cada 64 pasos consecutivos encienden el mismo número de focos, que es igual a

$$32((64,1)-1)+16((64,2)-1)+8((64,4)-1)+4((64,8)-1)+2((64,16)-1)+((64,32)-1)+((64,64)-1)$$

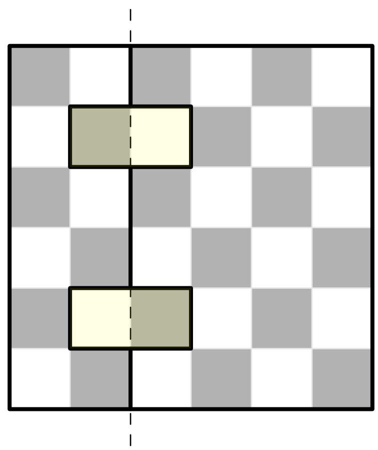
Que es igual a $32 \times 0 + 16 \times 1 + 8 \times 3 + 4 \times 7 + 2 \times 15 + 1 \times 31 + 1 \times 63 = 192$. Luego de 10 bloques de 64 t's consecutivos hemos encendido 1920 focos y nos faltan 76. Ahora podemos comprobar que en los siguientes 31 movimientos encendemos

$$8 \times 1 + 4 \times 3 + 2 \times 7 + 1 \times 15 = 49$$

focos. En el siguiente movimiento llegamos a la casilla 32 y encendemos $(64, 32) - 1 = 31$ focos, con lo cual completamos los 76. Por lo tanto la ficha 1 termina en la casilla 32.

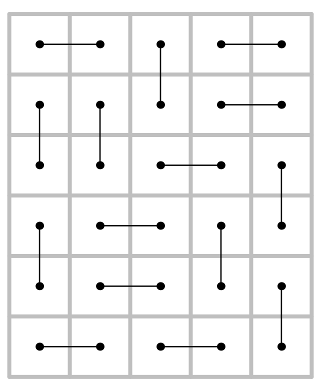
43.3. Problema 3

Supongamos que tal recubrimiento es posible. Notemos que para cada dominó que colocamos en la cuadrícula hay exactamente una linea de la cuadrícula que pasa por él. Ahora, para cada linea de la cuadrícula consideremos los dos polígonos que se obtienen si quitamos todos los dominós cuyo interior interseca a esta línea, y partimos la figura restante por esta linea.



Cada uno de los polígonos resultantes se puede llenar con dominós, y por lo tanto, si pintamos el tablero completo como ajedrez, contiene el mismo número de casillas blancas y negras. Como cualquier linea parte el tablero original en dos rectángulos con el mismo número de casillas blancas y negras, deducimos que cada linea debe pasar por el interior de un número par de dominós. Pero como hay solo 18 dominós y 10 lineas, debe haber alguna linea que no pase por el interior de ningún dominó.

Para ver que esto sí es posible en un tablero de 6×5 tenemos el siguiente acomodo:



43.4. Problema 4

Supongamos que se cumple la condición para cierto n. Entonces la suma de todas las filas y columnas es al menos $n + 2n + \cdots + 8n = 36n$, y debe ser igual a dos veces la suma de todo el tablero que es $2(1 + \cdots + 16) = 16 \cdot 17$. Deducimos de esto que $n \leq 7$. Más aún, como n divide a la suma de las cuatro filas, debe dividir a la suma de todos los números del tablero que es $8 \cdot 17$. Concluímos que $n = 2$ o $n = 4$. Para finalizar damos el siguiente acomodo:

6	8	14	12
3	7	11	15
2	4	10	16
1	5	9	13

Este funciona tanto para $n = 2$ como para $n = 4$.

43.5. Problema 5

Consideremos las $2n - 1$ antidiagonales del tablero, es decir las $2n - 1$ diagonales con dirección $\swarrow$.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Notemos que cualquier camino válido contiene exactamente una casilla de antidiagonal. De aquí vemos que el camino que baja $n-1$ veces y luego va a la derecha $n-1$ veces tiene la suma máxima, y el que va a la derecha $n-1$ veces y luego baja $n-1$ veces tiene la suma mínima. Esto pasa ya que estos caminos contienen respectivamente el número máximo y el número mínimo de cada antidiagonal. Concluímos que

$$m = 1+2+\cdots+n+n+2n+\cdots+n^2-n = \frac{n(n+1)}{2} + n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - n = \frac{n(n+1)^2}{2} - n = \frac{n^3+2n^2-n}{2}$$

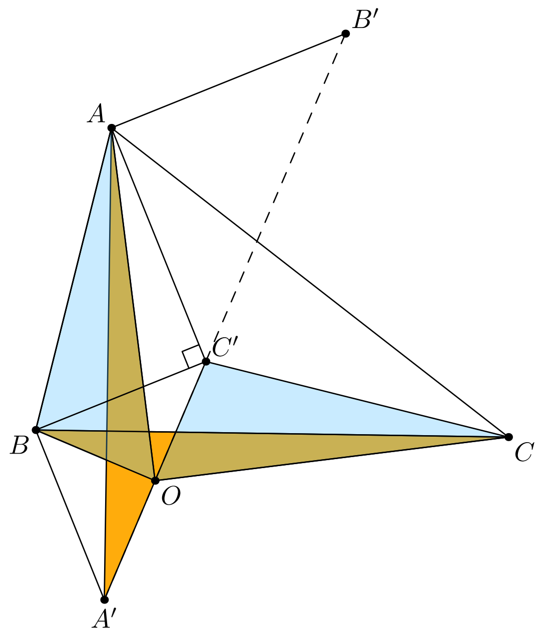
$$\begin{aligned} M &= 1 + (n+1) + \cdots + (n(n-1)+1) + ((n(n-1)) + 1 + \cdots + n^2) - (n(n-1)+1) \\ &= n + n(0+1+\cdots+n-1) + n(n(n-1)) + (1+\cdots+n) - (n(n-1)+1) \\ &= n + n\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + n^3 - n^2 + \frac{n(n+1)}{2} - n^2 + n - 1 \\ &= \frac{n^3+n}{2} + n^3 - 2n^2 + 2n - 1 \end{aligned}$$

Deducimos que $M - m = n^3 - 2n^2 + 2n - 1 + \frac{-2n^2+2n}{2} = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = (n-1)^3$. Para la segunda parte notemos que si un camino cumpliera dicha condición tendríamos $m \leq 1996 \leq M$. Es fácil comprobar que esto implica $12 \leq m \leq 15$. Ahora notemos que en cada antidiagonal todos los números son congruentes módulo $n-1$, por lo que todas las sumas de caminos son congruentes módulo $n-1$. Entonces debemos tener

$$1996 \equiv m = \frac{n^3+2n^2-n}{2} \equiv \frac{1+2-1}{2} = 1 \pmod{n-1}$$

Entonces si para cierto n hay un camino con suma 1996 entonces $n-1$ debe dividir a 1995. Pero es fácil comprobar que $11, 12, 13, 14$ no dividen a 1995, por lo que ninguno de los n antes obtenidos es posible.

43.6. Problema 6



Sea O el centro de la similitud que lleva el segmento CC' al segmento AB. Como $CC' = AB$ y $CC' \perp AB$ esta similitud es de hecho una rotación de $90°$. Análogamente la similitud que lleva CB a AA' es una rotación de $90°$. Como estas rotaciones mandan C al mismo punto, deben coincidir, por lo que $\angle C'OB = \angle BOA' = 90°$ y A', O, C' son colineales, con lo cual deducimos que $\angle A'C'B = \angle OC'B = 45°$. Análogamente $\angle B'C'A = 45°$. Como $\angle AC'B' + \angle AC'B + \angle BC'A' = 45° + 90° + 45° = 180°$ concluímos que A', B' y C' son colineales.

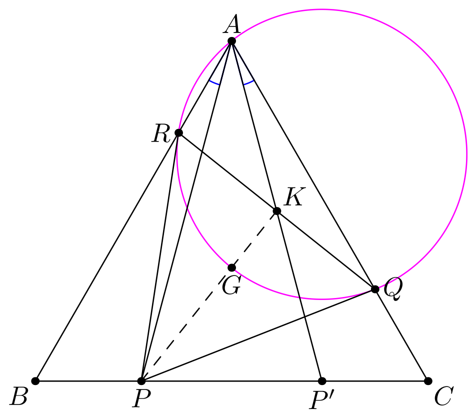
44. Soluciones de la XI OMM 1997

Enunciados en la página 19

44.1. Problema 1

Si $p = 5$ obtenemos $8p^4 - 3003 = 1997$, que es primo. Si $p \neq 5$ entonces como $8p^4 - 3003 \equiv 3p^4 - 3 \equiv 0 \pmod 5$ debemos tener $8p^4 - 3003 = 5$, pero esto es imposible.

44.2. Problema 2



Aplicando una transformación afín adecuada podemos suponer que ABC es equilátero. Entonces por simetría PQR también es equilátero y G es gravicentro de PQR. Como $\angle RAQ = \angle PQR = \angle PRQ = 60°$, las rectas PR y PQ son tangentes al circuncírculo de AQR, y AP es simediana de $\triangle ARQ$. Como AP y AP' son isogonales (pues $\triangle ABP \cong \triangle ACP'$) concluímos que AP' es mediana de $\triangle AQR$, y K es punto medio de QR, por lo que evidentemente está en la recta PG al ser G gravicentro de PQR.

44.3. Problema 3

Para la primera parte tenemos el siguiente acomodo

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

Para la segunda parte, demostraremos que en general si se colocan los números $1, 2, \ldots, n^2$ en un tablero de $n \times n$ con $n \geq 2$ hay dos números adyacentes cuya diferencia es al menos n (este es de hecho el problema 4 de la IMO Shortlist de 1988).

Para cada linea (fila o columna) consideremos el elemento máximo en ésta. Tomamos la linea cuyo elemento máximo es mínimo. Sin pérdida de generalidad digamos que es una fila, y que su elemento máximo es m. Entonces cualquier columna (excepto posiblemente la que contiene a m) contiene un elemento mayor que m y uno menor que m. Por lo tanto cada columna contiene dos casillas adyacentes tal que una contiene un número mayor o igual que m, y la otra un número menor que m. Además existe alguna casilla adyacente a la que contiene a m en la misma fila, y ésta contiene un número mayor que m.

Resumiendo el párrafo anterior, encontramos n parejas de casillas adyacentes tales que una contiene un número menor o igual que m y la otra contiene un número mayor que m. Además todas las casillas que contienen números menores o iguales que m son distintas pues están columnas distintas. El número más pequeño en estas parejas es a lo más $m - n + 1$, y es adyacente a una casilla con un número mayor o igual que $m + 1$. Estas dos casillas son las deseadas.

44.4. Problema 4

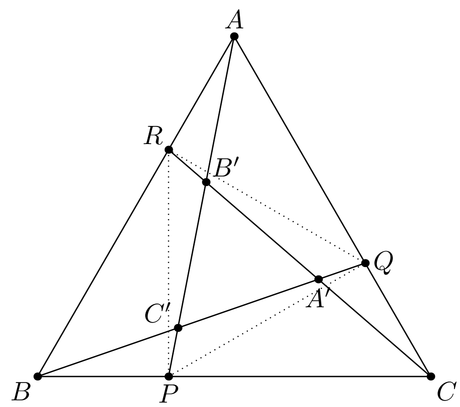
Consideremos un plano $\mathcal{P}$ que contenga la máxima cantidad posible de puntos de entre los 6.

Si $\mathcal{P}$ contiene 5 puntos entonces hay exactamente $\binom{5}{2} + 1 = 11$ planos: P y los formados eligiendo dos puntos de P y el sexto punto.

Si $\mathcal{P}$ contiene 4 puntos sean estos A, B, C, D y los otros dos E, F. Entre los planos determinados por X, Y, E y X, Y, F donde $X, Y \in \mathcal{P}$ hay $12 - k$ planos, donde k es el número de parejas de puntos $X, Y \in \mathcal{P}$ tales que X, Y, E, F son coplanares. No puede haber dos de estas parejas con un punto en común, pues entonces habría 5 puntos coplanares. Entonces $k \leq 2$, y agregando el plano $\mathcal{P}$ obtenemos al menos 11 planos.

Finalmente si $\mathcal{P}$ contiene 3 puntos entonces no hay 4 puntos coplanares y se determinan exactamente $\binom{6}{2} = 20$ planos. En conclusión el mínimo número posible de planos es 11.

44.5. Problema 5



Aplicando una transformación afín adecuada podemos suponer que $A'B'C'$ es equilátero, entonces ABC también es equilátero por simetría. Sea X el punto tal que $AA'CX$ es un paralelogramo, que está en $A'B'$ pues $AB' = B'C'$. Entonces

$$\frac{AR}{RB} = \frac{AX}{A'B} = \frac{A'C'}{A'B} = \frac{1}{2}$$

Análogamente $\frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{1}{2}$. Para finalizar veamos que

$$QR^2 = AR^2 + RQ^2 - 2AR \cdot RQ \cos 60^\circ = \left(\frac{AB}{3}\right)^2 + \left(\frac{2AB}{3}\right)^2 - \frac{AB}{3} \cdot \frac{2AB}{3} = \frac{AB^2}{3}$$

Por ley de Cosenos en $\triangle ARQ$, y entonces $\frac{[PQR]}{[ABC]} = \frac{QR^2}{AB^2} = \frac{1}{3}$.

44.6. Problema 6

Notemos que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

Por lo que basta encontrar una solución, luego reemplazar el número M más grande por $M+1$ y $M(M+1)$ nos da una nueva solución. Para hacer esto usaremos esta misma identidad junto con la identidad

$$\frac{1}{2k} = \frac{1}{3k} + \frac{1}{6k}$$

Veamos entonces que

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{156}$$

Para obtener una segunda representación de $\frac{2}{5}$ utilizamos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} &= \frac{1}{7} + \frac{1}{42}\\
\frac{1}{12} &= \frac{1}{18} + \frac{1}{36}\\
\frac{1}{13} &= \frac{1}{14} + \frac{1}{182}\\
\frac{1}{15} &= \frac{1}{16} + \frac{1}{240}\\
\frac{1}{156} &= \frac{1}{234} + \frac{1}{468}
\end{aligned}$$

Combinando todo y sumando ambas representaciones tenemos

$$1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{42} + \frac{1}{156} + \frac{1}{182} + \frac{1}{234} + \frac{1}{240} + \frac{1}{468}$$

45. Soluciones de la XII OMM 1998

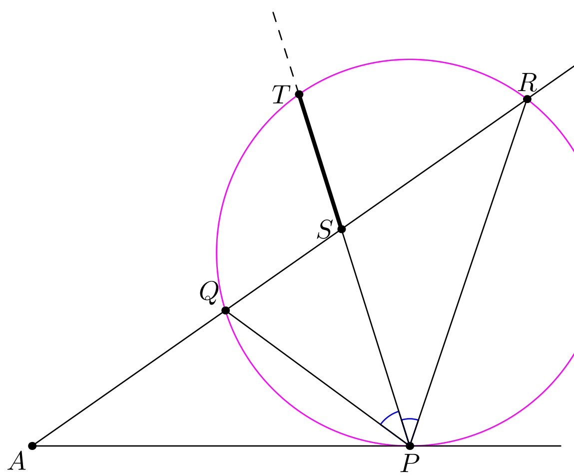
Enunciados en la página 20

45.1. Problema 1

Denotemos por $s(n)$ la suma de los cuadrados de los dígitos de n. Afirmamos que los números $3 \cdot 10^k + 1$ y $3 \cdot 10^k + 2$ son suertudos para todo k. En efecto

$$s(s(3 \cdot 10^k + 1)) = s(10) = 1$$
$$s(s(s(3 \cdot 10^k + 2))) = s(s(13)) = s(10) = 1$$

45.2. Problema 2



Sea A el punto común de l y m y sea S un punto sobre m tal que $AP = AS$. Como AP es tangente a (PQR), la circunferencia de centro A y radio AP es la P-circunferencia de Apolonio del triángulo PQR, y por lo tanto S, que está en su intersección con el segmento QR, debe ser el pie de la bisectriz de $\angle QPR$. Concluímos que P, S, T son colineales independientemente de la elección de Q y R, y es fácil que cualquier punto en la prolongación de la recta PS más allá de S es un posible T (tomamos O la intersección de la mediatriz de PT con la perpendicular a l por P y trazamos la circunferencia de centro O, radio OP), por lo que el lugar geométrico es justamente esta prolongación.

45.3. Problema 3

Sea Λ el número de parejas de aristas (lados o diagonales) del mismo color que tienen un vértice en común. Sea T el número de triángulos monocromáticos, de modo que hay $\binom{8}{3} - T = 56 - T$ triángulos no monocromáticos. Notemos que en cada triángulo monocromático existen 3 parejas de aristas con un vértice en común, mientras que en cada triángulo no monocromático hay exactamente una. Por lo tanto

$$\Lambda = 3T + (56 - T) = 56 + 2T$$

Para finalizar demostramos que $\Lambda \geq 72$, lo cual de hecho prueba que $T \geq 8$. Para ésto, consideremos el vértice común de dos aristas que forman una pareja que contribuye a Λ, y estimemos cuantas puede haber. Si en este vértice inciden k aristas blancas (y por lo tanto $7 - k$ negras) entonces este vértice contribuye

$$\binom{k}{2} + \binom{7-k}{2}$$

Parejas a Λ. Es fácil verificar que este número se minimiza cuando $k = 3$ o $k = 4$, y en este caso obtenemos 9 parejas. Por lo tanto los 8 vértices contribuyen en total al menos $9 \times 8 = 72$ parejas, que es justo lo que queríamos.

45.4. Problema 4

Observemos primero que

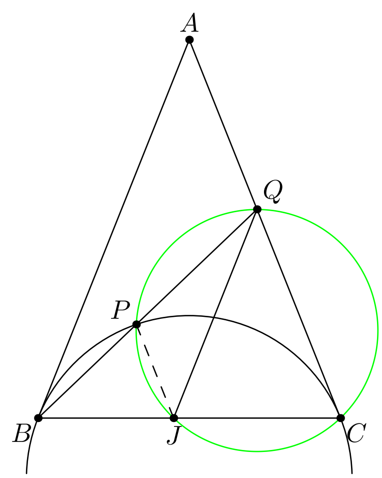
$$5 = \frac{1+2+\cdots+9}{9} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \cdots + \frac{9}{a_9} \leq 1+2+\cdots+9 = 45$$

Veamos que de hecho todos los números entre 5 y 45 son resultados posibles. Primero resolvemos el problema manualmente para $5, 6, 7, 8$

$$\begin{aligned}
5 &= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9} + \frac{6}{9} + \frac{7}{9} + \frac{8}{9} + \frac{9}{9} \\
6 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{2} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9} + \frac{6}{9} + \frac{7}{9} + \frac{8}{9} + \frac{9}{9} \\
7 &= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9} + \frac{6}{9} + \frac{7}{9} + \frac{8}{9} + \frac{9}{3} \\
8 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{2} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9} + \frac{6}{9} + \frac{7}{9} + \frac{8}{9} + \frac{9}{3}
\end{aligned}$$

Ahora para los números entre 9 y 45 notemos que podemos alcanzar cualquier suma de la forma $b_1 + \cdots + b_9$ donde $b_i \in \{1, i\}$ para cada i, pues podemos escoger $a_i = 1$ y $a_i = i$. Es fácil verificar que cualquier número entre 9 y 45 se puede escribir en esta forma, con lo cual terminamos.

45.5. Problema 5



Primero notemos que

$$\angle QPC = 180° - \angle BPC = \angle PBC + \angle PCB = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = \angle ABC = \angle QJC$$

Donde $\angle PBC + \angle PBC = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2}$ se da pues $\angle PBC = \angle PCA, \angle PCB = \angle PBA$. Entonces $PJCQ$ siempre es cíclico. Entonces

$$PJ \parallel QC \iff \angle PQC = \angle QCJ \iff \angle QBC = 180^\circ - 2\angle BCQ \iff \angle QBC = \angle BAC$$

Esta última condición se da si y solo si el circuncírculo de AQB es tangente a BC, que por potencia desde C pasa si y solo si $CB^2 = CQ \cdot CA$.

45.6. Problema 6

La respuesta es 4. Para ver que ésta se alcanza tomemos los puntos $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y $(1,-1,1)$. Es fácil entonces ver que los planos $x = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$, $x + y = \frac{1}{2}$ y $y + z = \frac{1}{2}$ son todos equidistantes de estos puntos.

Ahora demostramos que no es posible tener 5 planos equidistantes. Comenzamos con ciertas observaciones preliminares. Consideremos cualquier plano $\mathcal{P}$ equidistante a los cinco puntos. Entonces en cada semiespacio determinado por $\mathcal{P}$, los puntos del conjunto en este semiespacio deben estar sobre un mismo plano paralelo a $\mathcal{P}$. Como no hay 4 puntos coplanares, deducimos que cualquier plano equidistante debe dejar 3 puntos de un lado y 2 del otro. Recíprocamente supongamos que partimos los 5 puntos en dos conjuntos, uno de 2 puntos y otro de 3, y existe un plano paralelo al determinado por el conjunto de 3 que contiene a los otros dos puntos, entonces existe un plano equidistante a los 5 puntos que es paralelo al determinado por los 3 puntos.

Ahora denotamos por $PQ|RST$ a una partición de los puntos en conjuntos $\{P, Q\}$ y $\{R, S, T\}$, y decimos que es equidistante si determina un plano equidistante a P, Q, R, S, T como describimos anteriormente. Entonces notemos que

- Q yace sobre el plano por P paralelo a RST.
- T yace sobre el plano que contiene a RS y a una recta paralela a PQ.

Habiendo verificado estos hechos preliminares procedemos a la demostración de que no puede haber 5 planos equidistantes. Aplicando una transformación afín adecuada podemos suponer que cuatro de los puntos son $A = (0,0,0), B = (1,0,0), C = (0,1,0)$ y $D = (0,0,1)$. Usando nuestros preliminares anteriores deducimos que

$$\begin{aligned}
AB\,|CDE &\iff E \in \{y + z = 1\} & AC\,|BDE &\iff E \in \{x + z = 1\} \\
AD\,|BCE &\iff E \in \{x + y = 1\} & BC\,|ADE &\iff E \in \{x + y = 0\} \\
BD\,|ACE &\iff E \in \{x + z = 0\} & CD\,|ABE &\iff E \in \{y + z = 0\} \\
AE\,|BCD &\iff E \in \{x + y + z = 0\} & BE\,|ACD &\iff E \in \{x = 1\} \\
CE\,|ABD &\iff E \in \{y = 1\} & DE\,|ABC &\iff E \in \{z = 1\}
\end{aligned}$$

Ahora si hay al menos 5 planos equidistantes entonces E pertenece a al menos 5 de estos conjuntos. Entonces pertenece a (al menos) tres de los primeros 6 o a (al menos) tres de los últimos 4. En el segundo caso verificamos facilmente que $E \in \{(1,1,-2), (1,-2,1), (-2,1,1), (1,1,1)\}$ y ninguno de estos puntos está en un cuarto plano.

En el otro caso, veamos que $x + y = y + z = z + x = 1$ da el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ que solo está en tres planos. En otro caso podemos suponer por simetría que $x + y = 0$. Si $y + z = 0$ entonces $x = z$, y según si el tercer plano es $z + x = 0$ o $z + x = 1$ obtenemos $(0,0,0)$, que es inválido pues es igual a A o $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, que no está en un cuarto plano. Si $y + z = 1$ entonces $z + x = 1$, el otro caso es simétrico a uno anterior. Obtenemos el punto $(0,0,1)$ que es inválido pues es igual a B.

Habiendo verificado todos los casos concluímos que no puede haber 5 planos equidistantes.

46. Soluciones de la XIII OMM 1999

Enunciados en la página 21

46.1. Problema 1

El primer jugador tiene una estrategia ganadora. Digamos que en su turno hay a fichas de un color y b del otro, con $a > b$. Si $b = 0$ remueve todas las fichas y gana. De lo contrario elimina $a - b$ fichas del color con más fichas. En cada turno el segundo jugador recibe una configuración con la misma cantidad de fichas de cada color. Por lo tanto no puede ganar, y después de su turno debe haber una cantidad par de fichas de cada color.

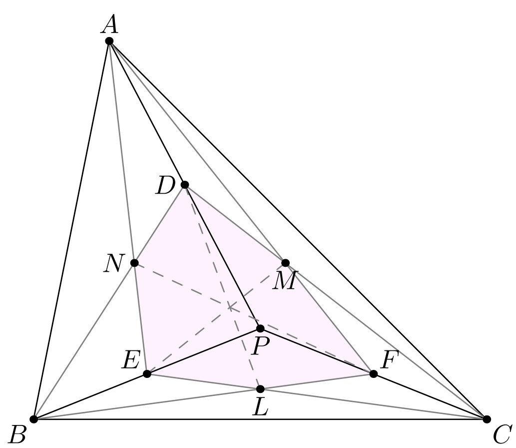
46.2. Problema 2

Supongamos que tenemos una progresión aritmética con 1999 primos y sea d la diferencia común de la progresión. Afirmamos que $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \mid d$. Como este número es mayor que 12345 obtenemos una contradicción. Sea $p \leq 13$ un primo, y digamos que la progresión es $(a + kd)$ con $0 \leq k \leq 1998$. Si $p \nmid d$ entonces entre los números

$$a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (2p - 1)d$$

Hay al menos dos múltiplos de p pues $(p, d) = 1$, pero no pueden ser ambos primos, contradicción.

46.3. Problema 3



Comezamos con un lema

Lema. Sea ABC un triángulo, M y N los puntos medios de AB y AC respectivamente. BN y CM se cortan en G. Entonces $[ANGM] = \frac{1}{3}[ABC]$.

Demostración. Es claro que G es el gravicentro de ABC y entonces $\frac{CG}{GM} = \frac{BG}{GN} = 2$. Deducimos que BGC y NGM son semejantes en razón 2 a 1. Además ABC y AMN son semejantes en razón 2 a 1, y entonces

$$[ANGM] = [ANM] + [NGM] = \frac{[ABC]}{4} + \frac{[BGC]}{4} = \frac{[ABC]}{4} + \frac{[ABC]}{12} = \frac{[ABC]}{3}$$

Para la primera parte aplicamos el Lema tres veces:

$$[DNELFM] = [DNEP] + [ELFP] + [FMDP] = \frac{[APB]}{3} + \frac{[BPC]}{3} + \frac{[CPA]}{3} = \frac{[ABC]}{3}$$

Para la segunda parte empleamos vectores, con el origen en cualquier punto del plano de ABC. Tenemos

$$\vec{D} = \frac{\vec{A} + \vec{P}}{2}$$
$$\vec{L} = \frac{\vec{P} + \vec{B} + \vec{C}}{3}$$

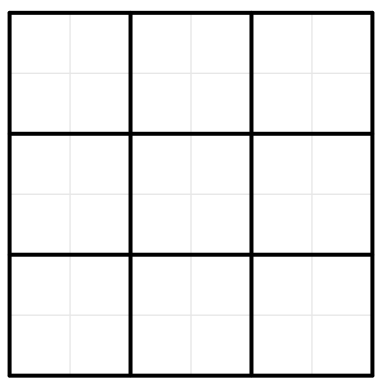
Entonces

$$\frac{2}{5}\vec{D} + \frac{3}{5}\vec{L} = \frac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + 2\vec{P}}{5}$$

Y este punto está en DL. Por simetría está también en ME y FN.

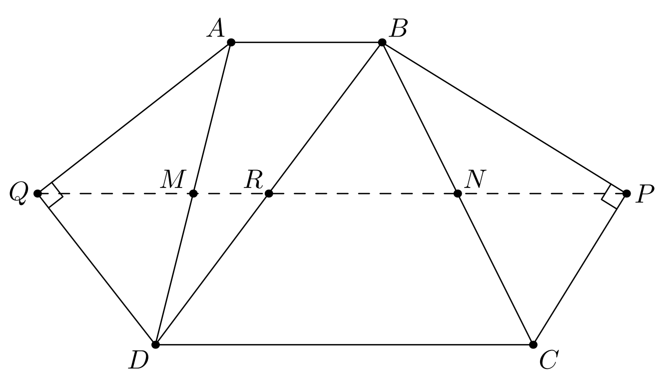
46.4. Problema 4

Si se elige el centro de alguna casilla fuera del cuadrado central de 6×6 entonces ésta está a distancia $\frac{1}{2}$ de la orilla y terminamos. Supongamos entonces que todos están en este cuadrado. Podemos dividir éste en subcuadrículas de 2×2:



Por Casillas hay dos puntos marcados en la misma subcuadrícula, y éstos tienen distancia a lo más $\sqrt{2}$.

46.5. Problema 5



Sean M y N los puntos medios de AD y BC respectivamente. Como $AB \parallel CD$ y AQ, QD son bisectrices externas de $\angle A$ y $\angle D$ respectivamente tenemos

$$\angle QAD + \angle QDA = \frac{180° - \angle A}{2} + \frac{180° - \angle D}{2} = 180° - \frac{\angle A + \angle D}{2} = 180° - 90° = 90°$$

Entonces M es circuncentro de AQD y $MQ = MA = \frac{AD}{2}$. Análogamente $NP = \frac{BC}{2}$. Para finalizar probamos que Q, M, N, P son colineales y que $MN = \frac{AB+CD}{2}$. Tenemos

$$\angle QMD = 2\angle QAD = 180° - \angle A$$

Entonces $QM \parallel AB$. Sea R el punto medio de BD, entonces $MR \parallel AB$, $RN \parallel CD$ y $NP \parallel AB$. Entonces Q, M, R, N son todos colineales en una paralela a AB y

$$MN = RM + RN = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2}$$

46.6. Problema 6

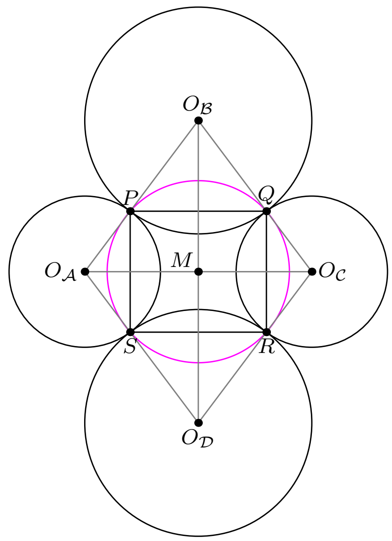
Consideremos un polígono ortogonal cuyos lados son todos impares. Coloreamos las casillas en el interior del polígono de ajedrez, de modo que cada casilla blanca es adyancente a puras casillas negras y vice versa. Cada dominó debe contener una casilla de cada color, por lo que terminamos si demostramos que hay una cantidad distinta de casillas de cada color.

Sea $P_{\mathcal{N}}$ la suma de los perímetros de las casillas negras y $P_{\mathcal{B}}$ la misma suma para las casillas blancas. Si $P_{\mathcal{N}} - P_{\mathcal{B}} \neq 0$ terminamos, pues no podrá haber la misma cantidad de casillas de cada color. Veamos ahora qué pasa con esta diferencia. Cualquier segmento unitario en el interior del polígono contribuye 1 a $P_{\mathcal{N}}$ y 1 a $P_{\mathcal{B}}$ pues las dos casillas que lo contienen son de distinto color. Entonces la diferencia para todo el polígono es igual a la diferencia para la frontera. Pero usando que todos los lados son impares es fácil comprobar que existe un color, digamos negro, tal que todo lado del polígono toca más casillas negras que blancas. Entonces $P_{\mathcal{N}} - P_{\mathcal{B}} > 0$ y el polígono no puede ser cubierto con dominós.

47. Soluciones de la XIV OMM 2000

Enunciados en la página 22

47.1. Problema 1



Sean $O_{\mathcal{A}}, O_{\mathcal{B}}, O_{\mathcal{C}}$ y $O_{\mathcal{D}}$ los centros correspondientes. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ los ángulos internos del cuadrilátero $O_{\mathcal{A}}O_{\mathcal{B}}O_{\mathcal{C}}O_{\mathcal{D}}$ en ese mismo órden. Entonces tenemos

$$\angle SPQ = 180^\circ - \angle SPO_{\mathcal{A}} - \angle QPO_{\mathcal{B}} = 180^\circ - \frac{180-\alpha}{2} - \frac{180-\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Análogamente $\angle QRS = \frac{\gamma+\delta}{2}$. Como $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^\circ$ concluímos que $\angle SPQ + \angle SRQ = 180^\circ$ y $PQRS$ es cíclico.

Para la segunda parte, notemos que $PQRS$ es un rectángulo, y entonces su área es $PS \cdot PQ$. Además $O_{\mathcal{A}}O_{\mathcal{B}}O_{\mathcal{C}}O_{\mathcal{D}}$ es un rombo, por lo que los triángulos $O_{\mathcal{A}}PS$ y $O_{\mathcal{A}}O_{\mathcal{B}}O_{\mathcal{D}}$ son semejantes, por lo que deducimos que $PS = \frac{2}{5}O_{\mathcal{B}}O_{\mathcal{D}}$. Similarmente $PQ = \frac{3}{5}O_{\mathcal{A}}O_{\mathcal{C}}$. Para calcular estos segmentos, sea M la intersección de $O_{\mathcal{B}}O_{\mathcal{D}}$ y $O_{\mathcal{A}}O_{\mathcal{C}}$. Entonces $O_{\mathcal{A}}M = 3$, y como $\angle O_{\mathcal{B}}MO_{\mathcal{A}} = 90^\circ$ y $O_{\mathcal{A}}O_{\mathcal{B}} = 5$ tenemos por Pitágoras que $O_{\mathcal{B}}M = 4$. Entonces $O_{\mathcal{B}}O_{\mathcal{D}} = 8$, por lo que el área es

$$\frac{2}{5} \cdot 8 \cdot \frac{3}{5} \cdot 6 = \frac{288}{25}$$

47.2. Problema 2

Afirmamos que en general si los números en la fila de arriba son $a_0, a_1, \ldots, a_n$ entonces el número en la última fila es

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i$$

Esto lo probamos por inducción sobre n donde el caso base $n = 0$ es trivial. Ahora, si tenemos números $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ entonces los dos números en la penúltima fila se obtienen de un triángulo con números iniciales $a_0, a_1, \ldots, a_n$, y uno con números iniciales $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Sumando ambos obtenemos

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_{i+1}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i+\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}a_i=a_0+a_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a_i+\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i}a_i$$

$$=a_0+a_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right)=a_0+a_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a_i$$

Aquí usamos que $\binom{n+1}{0}=\binom{n+1}{n+1}=1$ y la identidad de Pascal. Esto completa la inducción. Ahora buscamos evaluar

$$\sum_{i=0}^{1999}\binom{1999}{i}(i+1)$$

Para esto recordemos que $\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i}$, entonces

$$\binom{1999}{i}(i+1)+\binom{1999}{1999-i}(1999-i+1)=((i+1)+(1999-i+1))\binom{1999}{i}=2001\binom{1999}{i}$$

De este modo la suma se reduce a

$$2001\left(\sum_{i=0}^{999}\binom{1999}{i}\right)=2001\cdot\frac{\sum_{i=0}^{1999}\binom{1999}{i}}{2}=2001\cdot\frac{2^{1999}}{2}=2001\cdot 2^{1998}$$

Donde usamos nuevamente que $\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i}$, y que $\binom{n}{0}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$.

47.3. Problema 3

La respuesta es 3. Comenzaremos probando que 2 elementos no son suficientes. Denotemos por $f(S)$ para un conjunto S al conjunto obtenido al aplicar la operación descrita en el problema.

Lema 1. $|f(S)|\leq\frac{3^{|S|}-1}{2}$

Demostración. Sea $n=|S|$ Notemos que hay exactamente 3^n-1 formas de elegir un subconjunto de S y un signo para cada elemento de S (esto corresponde a elegir un símbolo de $\{+,-,0\}$ para cada elemento, y no incluir los elementos para los que elijamos 0. El caso de puros 0s no cuenta). Además, si cierta suma es positiva, entonces la suma que se obtiene volteando todos los signos es negativos. Por lo tanto la cantidad de sumas positivas es igual a la cantidad de sumas negativas, y por lo tanto a lo más la mitad son positivas. □

Como $40=\frac{3^4-1}{2}$, concluímos que A' debe tener al menos 4 elementos. La observación principal es el siguiente lema, que refina esta observación:

Lema 2. Si S es un conjunto de n elementos tal que $\left\{1,2,\ldots,\frac{3^n-1}{2}\right\}\subseteq f(S)$, entonces $S=\{1,3,9,\ldots,3^{n-1}\}$.

Demostración. Por el Lema 1, concluímos que $f(S)=\left\{1,2,\ldots,\frac{3^n-1}{2}\right\}$. Sea $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ con $a_1<a_2<\ldots<a_n$. Como el máximo número que podemos obtener es $a_1+a_2+\cdots+a_n$, concluímos que éste es igual a $\frac{3^n-1}{2}$. Además por la demostración del Lema 1 concluímos que los números $-1,-2,\ldots,-\frac{3^n-1}{2}$ son también resultados del proceso descrito en el problema. Consideremos un proceso alternativo en el que para cada a_i elegimos un coeficiente $c_i\in\{0,1,2\}$ y consideramos todas las sumas

$$c_1a_1+c_2a_2+\ldots,c_na_n$$

Veamos que estas sumas corresponden a las mismas que el proceso original si restamos $a_1+a_2+\cdots+a_n = \frac{3^n-1}{2}$ (donde consideramos también la suma vacía, que nos da 0). Por lo tanto las sumas obtenidas en este proceso son exactamente $0, 1, \ldots, 3^n - 1$. Procedemos a demostrar por inducción que $a_i = 3^{i-1}$ para cada i. El caso $i = 1$ es cierto, pues la menor suma positiva posible es a_1, que debe ser igual a 1.

Supongamos ahora que $a_i = 3^{i-1}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Tomando la representación en base 3 de cualquier entero entre 0 y $3^k - 1$ inclusive, vemos que estos se pueden obtener utilizando solo a $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Como las 3^n sumas posibles son distintas, concluímos que $a_{k+1} \geq 3^k$, pues de lo contrario la suma a_{k+1} se repetiría. Sin embargo, si $a_{k+1} > 3^k$, sería imposible crear la suma 3^k, pues cualquier suma que involucre a alguno de $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ será mayor que 3^k, y cualquier suma que no los involucre será menor. Concluímos que $a_{k+1} = 3^k$, lo cual completa la inducción. $\square$

Finalmente podemos concluir el problema. Como $4 = \frac{3^2-1}{2}$ y A' tiene al menos 4 elementos, A debe tener al menos 2. En este caso, A' tendría exactamente 4 elementos, por lo que por el segundo Lema, este debe ser igual a $\{1, 3, 9, 27\}$. Pero esto es imposible, pues si $A = \{a, b\}$ con $a < b$ entonces las sumas positivas son exactamente $a, b - a, b, a + b$, y es fácil comprobar que estas no pueden ser iguales a $1, 3, 9$ y 27 en algún órden. Concluímos que $|A| \geq 3$.

Por otro lado, es fácil obtener una respuesta con $|A| = 3$. Elegimos $A = \{1, 3, 9\}$, de modo que $A' = \{1, 2, 3, \ldots, 13\}$. Es fácil entonces ver que A'' contiene todos los enteros entre 1 y 40 inclusive. (De hecho, nos basta con considerar sumas de elementos de A', sin usar signos negativos).

47.4. Problema 4

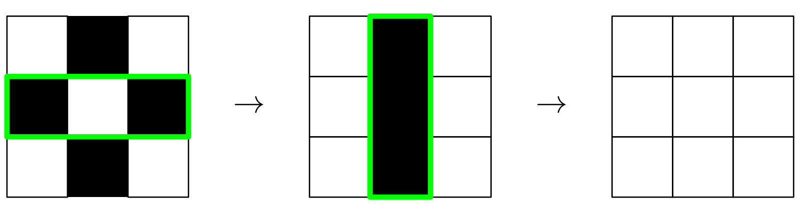
Observemos que todos los términos después del primero son mayores que 5, y por lo tanto si son primos, no pueden ser múltiplos de 5. Observemos la sucesión módulo 5, y veamos cuanto tiempo podemos evitar tener un número que sea $0 \pmod 5$. Tenemos

- Si $a \equiv 1 \pmod 5$: $0, b, 2b, 3b, 4b, 0, \ldots$ mód 5
- Si $a \equiv 2 \pmod 5$: $0, b, 3b, 2b, 0, \ldots$ mód 5
- Si $a \equiv 3 \pmod 5$: $0, b, 4b, 3b, 0, \ldots$ mód 5
- Si $a \equiv 4 \pmod 5$: $0, b, 0, \ldots$ mód 5

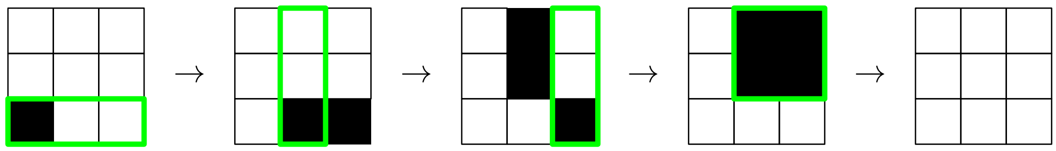
Concluímos que hay a lo más 5 términos primos antes del primer no-primo. Esto funciona tomando por ejemplo $a = 1, b = 6$, que nos da la sucesión $5, 11, 17, 23, 29, 35, \ldots$, y los primeros 5 términos son primos.

47.5. Problema 5

La respuesta es cualquier $n \neq 2$. Es claro que $n = 1$ funciona y que $n = 2$ no. Si $n = 3$ podemos aplicar la siguiente secuencia de operaciones:

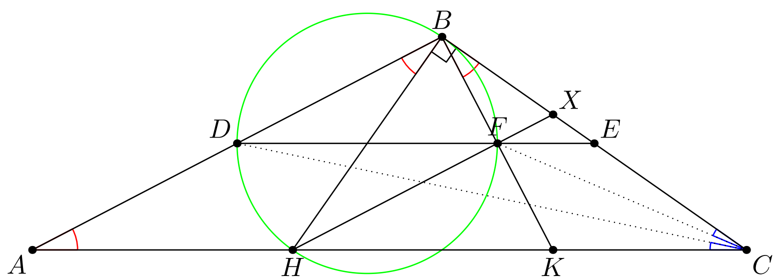


Analicemos ahora el caso $n \geq 4$. Veamos que de hecho es posible cambiar el estado de cualquier cuadrito, sin modificar el resto de la cuadrícula. Notemos que cualquier cuadrito es esquina de una subcuadrícula de 3×3. Sin pérdida de generalidad suponemos que es la esquina inferior izquierda. Ahora, aplicamos las siguientes operaciones:



Esto muestra que es posible voltear cualquier cuadrito, y por lo tanto podemos llegar a tener todos del mismo color haciendo esto repetidas veces.

47.6. Problema 6



Sea $X = HF \cap BC$ y $K = BF \cap AC$. Notemos que $DE \parallel BC$ pues D, E son puntos medios de BA, BC. Sea $\angle BAH = \alpha$, entonces con angulitos simples obtenemos que $\angle BDH, \angle BHF, \angle FHC, \angle BDE$ son todos α. Estos ángulos implican que $HDBF$ es cíclico, y como $DB \parallel HF$, es un trapecio isósceles. Además, como $HA = HB$ y D es punto medio de AB tenemos $\angle HDB = 90°$, por lo que $HDBF$ es un rectángulo y $HF = BD$. Usando esto y aplicando Tales dos veces tenemos

$$\frac{XF}{FH} = \frac{XF}{BD} = \frac{EF}{ED} = \frac{CK}{CA}$$

Ahora notemos que como $\angle ABK = \angle HBC = 90°$ tenemos $\angle KBC = \angle ABH = \alpha$. Se sigue que CB es tangente al circuncírculo de ABK, por lo que por potencia, $CB^2 = CK \cdot CA$. Se sigue que

$$\frac{XF}{FH} = \frac{CK}{KA} = \frac{CB^2}{CA^2} = \frac{CX^2}{CH^2}$$

Esto implica que CF es simediana de $\triangle CXH$. Como $XH \parallel AB$ y D es punto medio de AB, CD es mediana de $\triangle CXD$. Se sigue que $\angle HCD = \angle BCF$, como queríamos.

48. Soluciones de la XV OMM 2001

Enunciados en la página 23

48.1. Problema 1

Sea n un número como se describe en el enunciado, entonces podemos escribir $n = 3333333 + 4m$ donde m es un número formado por solo 0s y 1s. Podemos comprobar que $3333333 \equiv 0 \pmod{3}$ y $3333333 \equiv 3 \pmod{7}$, por lo cual debemos tener $m \equiv 0 \pmod{3}$ y $m \equiv 1 \pmod{7}$. La primera condición nos dice que m tiene una cantidad divisible entre entre 3 de $1s$, que debe ser 0, 3 o 6. Veamos además que

$$(1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6) \pmod{7} = (1, 3, 2, 6, 4, 5, 1)$$

Entonces una solución válida corresponde a escoger $0, 3$ o 6 números de la lista $1, 3, 2, 6, 4, 5, 1$ con suma 1 mód 7 — el número en sí lo obtendremos poniendo 1s en los dígitos de m correspondientes. Con un poco de cuidado podemos verificar que las elecciones válidas son

$$(1, 3, 4), (1, 2, 5), (1, 6, 1), (3, 4, 1), (2, 5, 1), (6, 4, 5)$$

Que corresponden a los números $3373377, 3733737, 7337337, 7373373, 7733733$ y 3777333.

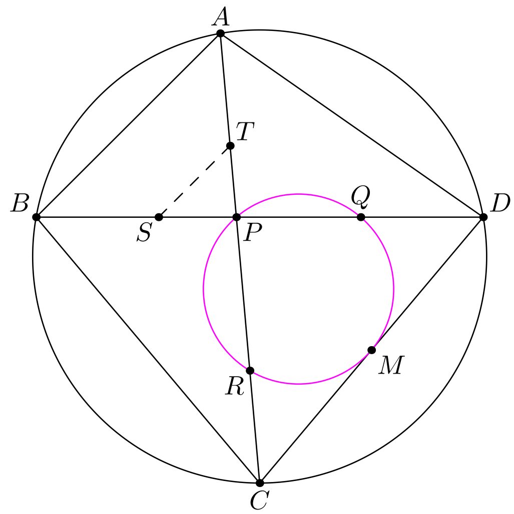
48.2. Problema 2

Sin pérdida de generalidad suponemos que hay a lo más una pelota de cada color en cada caja. Notemos que hay al menos una caja con 2 o más pelotas, pues de lo contrario cualesquiera tres pelotas de distinto color están cajas distintas.

Supongamos que hay al menos dos cajas con dos o más pelotas. Escojamos dos pelotas de distinto color, una de cada una de estas cajas, digamos de colores 1 (de la primera caja) y 2 (de la segunda). Por la condición, cualquier pelota en cualquier otra caja debe tener color 1 o 2. Tomemos una pelota de color 3, entonces esta debe estar en alguna de las dos cajas que fijamos, digamos sin pérdida de generalidad en la primera. Aplicando de nuevo el argumento eligiendo 3 de la primera caja y 2 de la segunda, concluímos que todas las pelotas fuera de estas cajas tienen color 2. (Pues tienen color 2 o 1, y color 2 o 3). Pero al tomar una pelota de color 2 de alguna de estas cajas, una pelota de color distinto a 2 de la segunda caja, y ya sea 1 o 3 de la primera caja (al menos una es distinta al color de la pelota de la segunda, tomamos esa), obtenemos una contradicción.

Entonces hay exactamente una caja con 2 o más pelotas, afirmamos que esta cumple lo deseado. Supongamos por contradicción que hay dos otras cajas con dos pelotas de colores distintos, digamos 1 y 2. Consideremos una pelota de color 3. Como todas las demás cajas tienen una sola pelota, esta está contenida en una caja distinta a las que contienen las pelotas de color 1 y 2, pero esto es una contradicción a la condición del problema.

48.3. Problema 3



Definimos mejor T como el punto en el segmento AC que cumple $AT = RC$, y probamos que $ST \parallel AB$. Por potencia de C y D a $(PQMR)$ tenemos

$$DQ \cdot DP = DM^2 = CM^2 = CR \cdot CP \implies \frac{DP}{CP} = \frac{CR}{DQ} = \frac{AT}{BS}$$

Pero como $ABCD$ es cíclico, los triángulos APB y DPC son semejantes, por lo que

$$\frac{AP}{BP} = \frac{DP}{CP} = \frac{AT}{BS}$$

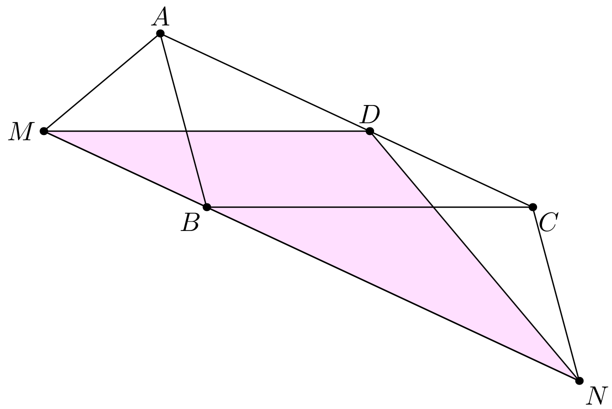
Lo cual implica que $ST \parallel AB$.

48.4. Problema 4

La respuesta es $n \geq 6$. Si $n \geq 8$, consideremos las sumas obtenidas para $a = 2$ y $a = 4$: los primeros 2000 términos de la lista para 4 corresponden con los últimos 2001 términos de la lista para 2, por lo cual la suma de ambas sumas finales es positiva (es la suma del primer término de la lista con 2 y el último de la lista con 4) — por lo tanto al menos una de ellas es positiva. Resta ver los casos $5 \leq n \leq 7$:

- $n = 5$. La única opción es $a = 2$, que da la lista $2, 4, 1, 1, 1, \ldots$ Su suma final es -1.
- $n = 6$. Elegimos $a = 3$, que da la lista $3, 3, 3, \ldots$ Su suma final es 3.
- $n = 7$. Elegimos $a = 3$, que da la lista $3, 2, 4, 2, 4, \ldots$, cuya suma final es $3 + 1000(4 - 2) > 0$.

48.5. Problema 5



Sea $\angle ACB = \alpha$, entonces $\angle BAC = 2\alpha$. Como $AC \parallel BN$ tenemos $\angle ABM = 2\alpha$, y como AM es bisectriz exterior tenemos $\angle BAM = 90 - \alpha$. Concluímos que $\angle BMA = 90 - \alpha$, y entonces $BM = AB = CD$. Como $BM \parallel CD$ concluímos que $BMDC$ es un paralelogramo, y $\angle BMD = \angle BCD = \alpha$.

Ahora veamos que $ABNC$ es un paralelogramo, y por lo tanto $CN = AB = CD$, y CND es isósceles. Luego

$$\angle CND = \frac{180^\circ - \angle DCN}{2} = \frac{180^\circ - \angle ACB - \angle BCN}{2} = \frac{180^\circ - \angle ACB - \angle ABC}{2} = \frac{\angle BAC}{2} = \alpha$$

Luego $\angle BND = \angle BNC - \alpha = \alpha = \angle BCD$. Se sigue que DMN es isósceles y $DM = DN$.

48.6. Problema 6

La respuesta es cualquier $n \geq 10$ que sea múltiplo de 5. Primero veamos que cada denominación está en exactamente 4 cajas: Por (d) no puede estar en 5, y si está en a lo más 3 tomar dos cajas que no la contengan da una contradicción a (c). Más aún, esta condición es de hecho equivalente a (c) y (d) juntas, por lo que podemos sustituír ámbas por esta condición. Ahora, de (b) obtenemos que hay $\frac{4n}{5}$ monedas en cada caja, y por lo tanto $5 \mid n$. Deducimos también de (a) que cada caja tiene suma

$$\frac{4(1+2+\cdots+n)}{5} = \frac{4 \cdot \frac{n(n+1)}{2}}{5} = \frac{2n(n+1)}{5}$$

Si $n = 5$ cada caja debe sumar 12, pero la caja que no contiene a 5 suma a lo más $1+2+3+4 < 12$, imposible. Damos ahora construcciones para $n = 10$ y $n = 15$. Para simplificar la descripción, en vez de decir cuales $\frac{4n}{5}$ monedas están en cada caja describimos las $\frac{n}{5}$ que no están. Las condiciones en términos de los complementos se traducen a que cada denominación esté en exactamente un complemento y que todos tengan la misma suma. Para $n = 10$ tenemos:

$$\{1,10\}, \{2,9\}, \{3,8\}, \{4,7\}, \{5,6\}$$

Y para $n = 15$:

$$\{6,8,10\}, \{11,12,1\}, \{13,9,2\}, \{14,7,3\}, \{15,5,4\}$$

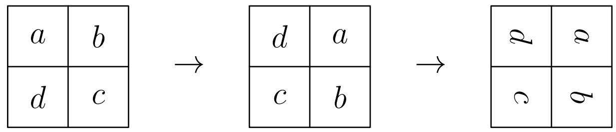
Finalmente, veamos que si hay una distribución válida para n entonces hay una para $n+10$. Simplemente hay que distribuir los elementos $n+1, n+2, \ldots, n+10$ entre los complementos de acuerdo a la construcción para $n = 10$. Esto preserva todas las condiciones, con lo cual hemos terminado el problema pues podemos construir $10, 20, 30, \ldots$ a partir de $n = 10$ y $15, 25, 35, \ldots$ a partir de $n = 15$.

49. Soluciones de la XVI OMM 2002

Enunciados en la página 24

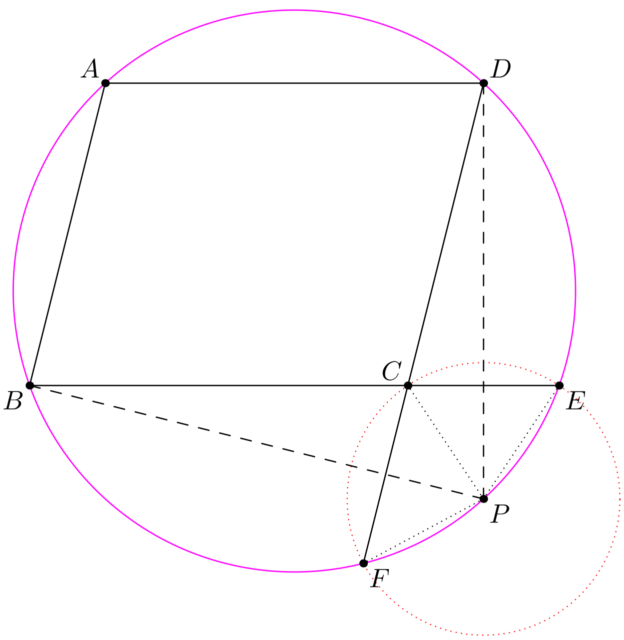
49.1. Problema 1

La observación es que la operación en cualquier cuadrícula de $2^n \times 2^n$ simplemente corresponde a rotar $90°$ en sentido horario la cuadrícula. Esto se puede ver con inducción usando el siguiente diagrama excelente:



De aquí es claro que los números en la diagonal principal al final son los números en la antidiagonal principal al inicio, que son $32, 63, 94, \ldots, 993$.

49.2. Problema 2



Sea P el punto medio del arco EF, entonces DP es bisectriz de $\angle CDE$. Como $ABED$ es cíclico y $ABCD$ es paralelogramo tenemos

$$\angle DCE = \angle ABC = 180° - \angle BAD = \angle DEC$$

Entonces DCE es isósceles, y DP es también mediatriz de CE. Análogamente BP es mediatriz de CF. Concluímos que P es el circuncentro de CEF, y efectivamente está en $\mathcal{K}$.

49.3. Problema 3

Sean $\tau_1(n)$ y $\tau_3(n)$ las cantidades de divisores de n congruentes con 1 y 3 mód 4 respectivamente. Afirmamos que $\tau_1(n^2) > \tau_3(n^2)$ siempre. Primero, notemos que si n' es el mayor divisor impar de n entonces

$$\tau_1(n) = \tau_1(n'), \tau_3(n) = \tau_3(n')$$

Pues todos los divisores impares de n dividen a n', y los pares no contribuyen a τ_1 o τ_3. Luego, basta probar el resultado para n impar. Escribamos la factorización canónica de n como

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_s^{\beta_s}$$

Donde los p_i son primos congruentes con 1 mód 4 y los q_i son primos congruentes con 3 mód 4. Un divisor cualquiera de n^2 tiene entonces la forma

$$p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_r^{a_r} \cdot q_1^{b_1} \cdot \dots \cdot q_s^{b_s}$$

Donde $0 \leq a_i \leq 2\alpha_i, 0 \leq b_i \leq 2\beta_i$. Este divisor contribuye a τ_3 si $b_1 + \cdots + b_s$ es impar, y a τ_1 si es par. Ahora veamos como asignarle a cada divisor congruente a $3 \bmod 4$ uno congruente a $1 \bmod 4$. Sea d un divisor congruente con 3 mód 4 y sea i el mínimo índice tal que $b_i \neq 2\beta_i$, el cual debe existir pues $b_1 + \cdots + b_s$ es impar. Si $b_i \neq 2\beta_i - 1$, sustituímos b_i por $b_i + 1$. De lo contrario, sustituímos b_i por 0.

Afirmamos que esta asignación es inyectiva: en efecto, si d es un divisor 1 mód 4 obtenido por este proceso entonces podemos recuperar el único divisor 3 mód 4 que lo genera tomando el primer índice i con $b_i \neq 2\beta_i$, y sustituyendo b_i por $b_i - 1$ si $b_i \neq 0$, o por $2\beta_i - 1$ si $b_i = 0$. Luego esta asignación es inyectiva, pero no es biyectiva pues n^2 es un divisor 1 mód 4 de n^2 que no se puede obtener por este proceso. Concluímos que $\tau_1(n^2) > \tau_3(n^2)$, como queríamos.

49.4. Problema 4

La longitud máxima es 16. Como usaremos esto en parte del conteo, damos primero un ejemplo de que esta longitud es posible:

[53][33][31][11][15][55][50][00][02][22][24][44][46][66][60][02]

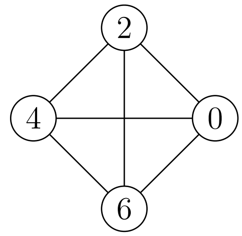
Notemos que en la hilera debe haber una única ficha con suma impar (la primera que se colocó). Esta tiene un extremo impar y uno par. Todas las demás fichas tienen ambos extremos pares o ambos impares. Notemos que las fichas impares solo se pueden colocar del "lado impar"de la primera ficha, mientras que las pares solo se pueden colocar del "lado par". Para cada elección de fichas de ambos "lados.existe una única ficha original que permite construir esta secuencia. Por lo tanto nos basta con econtrar el máximo, y el número de formas de alcanzar el máximo, para ámbos lados.

Lado impar.

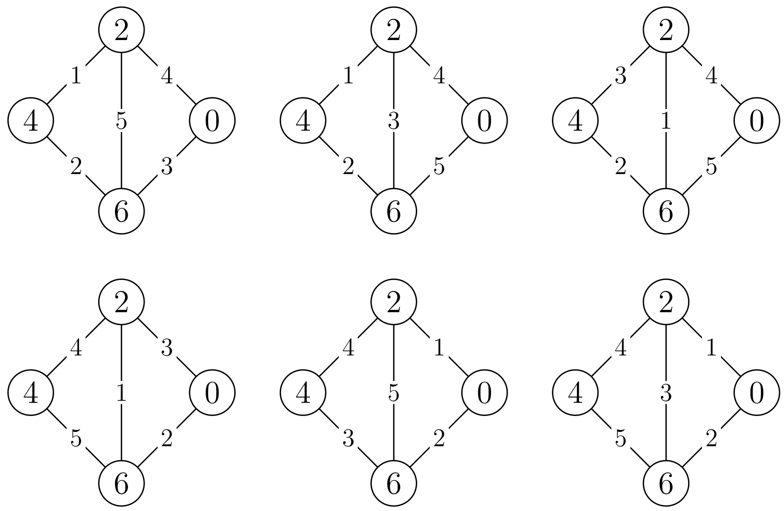
Las fichas son $[11], [15], [55], [53], [33], [13]$, y todas se pueden colocar en fila. Ignorando $[11], [33], [55]$, si fijamos un órden para $[13], [35], [51]$ existe una única forma de hacer que los extremos coincidan. Ahora, consideremos las tres fichas restantes, para los números que no están en los extremos de la hilera (e.g. $3, 5$ en la hilera [13][35][51]) hay una única posición posible para los dobles correspondientes. Para el restante hay dos posiciones posibles (al principio de la fila o al final de la fila). Luego el máximo es 6 y hay $3! \times 2 = 12$ maneras de alcanzarlo.

Lado par.

Las fichas son $[00], [22], [44], [66], [02], [04], [06], [24], [26], [46]$. Ignoremos las mulas de momento. El resto de la hilera se puede interpretar como un paseo en la siguiente gráfica:



Esta no es tiene un paseo euleriano, pues tiene 4 vértices de grado impar, pero al eliminar cualquier arista sí lo tiene. Por simetría, podemos suponer que se elimina la arista entre 0 y 4. Podemos comprobar fácilmente que hay exactamente 6 paseos eulerianos que empiezan en 2 en la gráfica resultante:



Análogamente hay 6 paseos eulerianos que empiezan en 6. Ahora veamos que las mulas [00] y [44] tienen exactamente una posición posible (entre las únicas dos apariciones de 0 y 4), mientras que las mulas [22] y [66] tienen dos posiciones posibles (en un extremo o entre dos apariciones consecutivas de 2 o 6). Luego hay $6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ hileras posibles si usamos todos los dominós excepto [04]. Por simetría esto es igual para cualquiera de los 6 dominós que quitemos, por lo que el número total de formas de usar 9 dominós es $6 \times 48 = 288$.

Finalmente el número máximo de fichas es $6+9+1 = 16$ (contando la primera ficha), y el número de formas de alcanzar el máximo es $12 \times 288 = 3456$.

49.5. Problema 5

La suma máxima es 4004. Como usaremos esta cota en parte de la solución, damos ahora un ejemplo que alcanza el máximo: $(2, 2000, 2002)$. Sean $a < b < c$ los números de una terna compatible. Tenemos tres opciones:

Caso 1: $a \mid b$ y $a \mid c$.

Sean $b = ar, c = as$ con $r < s$. Si $r + 1 < s$ entonces podemos sustituir a b por $(r + 1)a$ y aumentar la suma, entonces $r = s - 1$. Entonces la suma es $a + a(s - 1) + as = 2as$. Como $c = as \leq 2002$ esto es a lo más 4004, con igualdad si y solo si $as = 2002$.

Caso 2: $a \mid b$ y $b \mid c$.

Entonces $a \mid c$, y este caso está contenido en el anterior.

Caso 3: $a \mid c$ y $b \mid c$.

Como a y b son distintos y menores que c, tenemos $b \leq \frac{c}{2}$ y $a \leq \frac{c}{3}$. Se sigue que

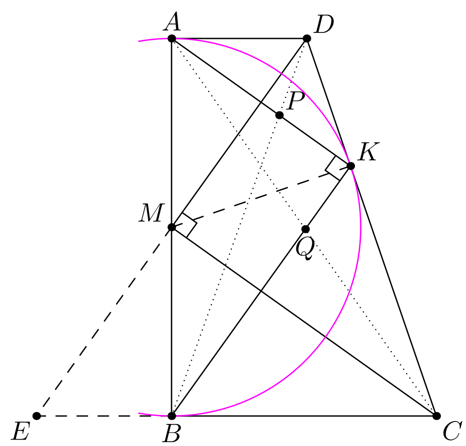
$$a + b + c \leq \frac{c}{3} + \frac{c}{2} + c = \frac{11c}{6} < 2c \leq 4004$$

Entonces en este caso no podemos alcanzar la suma máxima.

Luego la suma máxima es 4004 y se alcanza con las ternas $a, a(s-1), as$ donde $as = 2002$. Como los elementos deben ser distintos tenemos $s > 2$. Factorizando $2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$ obtenemos los divisores de 2002, y utilizando cada uno como s obtenemos las ternas

$$\{286, 1716, 2002\}, \{182, 1820, 2002\}, \{154, 1848, 2002\}, \{143, 1859, 2002\}, \{91, 1911, 2002\},$$
$$\{77, 1925, 2002\}, \{26, 1976, 2002\}, \{22, 1980, 2002\}, \{14, 1988, 2002\}, \{13, 1989, 2002\},$$
$$\{11, 1991, 2002\}, \{7, 1995, 2002\}, \{2, 2000, 2002\}, \{1, 2001, 2002\}$$

49.6. Problema 6



Sea $E = DM \cap BC$. Como $MB = MA$ y $AD \parallel BC$ tenemos $MD = ME$. Como $CM \perp MD$ se sigue que $CD = CE$. Ahora sea $\angle MDC = \alpha$, entonces $\angle MEC = \alpha$, y como $AD \parallel BC$, $\angle MDA = \alpha$. Se sigue que M está en la bisectriz de $\angle ADK$, por lo que $MB = MA = MK$. Luego M es el circuncentro de $\triangle AKB$, y está en AB, por lo que $\angle AKB = 90°$.

Ahora notemos que $\angle DAK = 90° - \angle MAK = 90° - \angle MDK = 90 - \alpha$, pues $AMKD$ es cíclico. Similarmente $\angle DKA = 90° - \alpha$. Además $\angle ABK = 90° - \angle BAK = 90° - \alpha$. Se sigue que DA y DK son tangentes al circuncírculo de ABK, por lo que BD es simediana de ABK y

$$\frac{KP}{PA} = \frac{KB^2}{BA^2}$$

Análogamente $\frac{KQ}{QB} = \frac{AK^2}{AB^2}$ y entonces

$$\frac{KP}{PA} + \frac{KQ}{QB} = \frac{KB^2}{BA^2} + \frac{AK^2}{AB^2} = \frac{AK^2 + KB^2}{AB^2} = 1$$

Donde la última igualdad se sigue del Teorema de Pitágoras.

50. Soluciones de la XVII OMM 2003

Enunciados en la página 25

50.1. Problema 1

Sea $k = 10a + b$ con $0 \leq b < 10$. Entonces $m = 100a + b$. Si $b = 0$ entonces $m = 10a$ y k cumple siempre. Supongamos ahora que $1 \leq b \leq 9$. Notemos que $10a + b \mid 100a + 10b$, por lo que si $10a + b \mid 100a + b$ entonces $10a + b \mid 9b$. Sea $9b = m(10a + b)$. Como $5(10a + b) \geq 50 + 5b > 9b$ (pues $b \leq 9$) tenemos $m \leq 4$. Ahora tenemos

$$a = \frac{(9 - m)b}{10m}$$

Si $m = 1$ tenemos $a = \frac{8b}{10}$, y como a es entero, $b = 5$. Entonces $a = 4$ y $k = 45$.

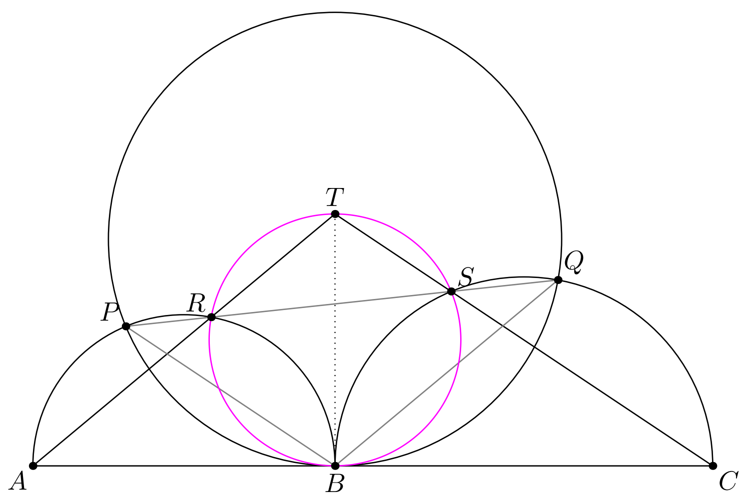
Si $m = 2$ entonces $a = \frac{7b}{20}$, entonces $20 \mid b$, pero esto es imposible.

Si $m = 3$ entonces $a = \frac{6b}{30} = \frac{b}{5}$. Como a es entero, $b = 5$, y $k = 15$.

Si $m = 4$ entonces $a = \frac{5b}{40} = \frac{b}{8}$, y como a es entero, $b = 8$. Obtenemos $k = 18$.

En conclusión las soluciones son $15, 18, 45$ y los múltiplos de 10.

50.2. Problema 2



Sea $T = AR \cap CS$. Notemos que $TRBS$ es cíclico pues tiene dos ángulos de 90°. Usando ángulos inscritos y semiinscritos repetidamente tenemos

$$\angle TBS = \angle TRS = \angle ARP = \angle ABP = \angle BQP = \angle BQS = \angle BCS$$

Concluímos que TB es tangente a $\mathcal{Z}$. Análogamente TB es tangente a $\mathcal{X}$.

50.3. Problema 3

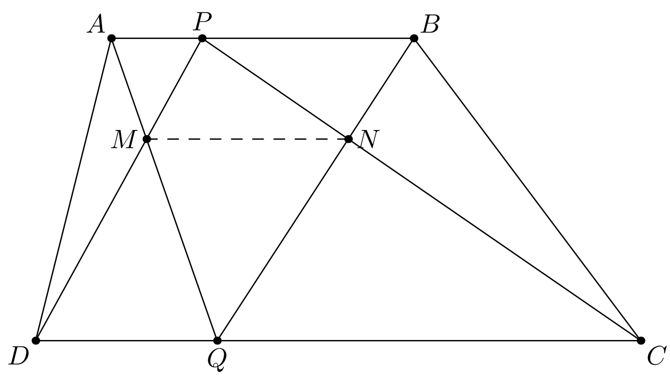
La condición se cumple si y solo si $a + b > n$. Primero veamos que es posible que no se cumpla si $a + b \leq n$. Nos basta ver que se cumple si $a + b = n$. Veamos que si

- A la niña i le gustan los niños $i, i+1, \ldots, i+a-1$ mód n
- Al niño i le gustan las niñas $i+1, i+2, \ldots, i+b$ mód n

Entonces no hay dos personas que se gusten entre sí. En efecto, si a la niña x le gusta el niño y entonces $y = x+t$ mód n con $0 \leq t \leq a-1$. Pero al niño y le gustan las niñas $x+t+s$ con $1 \leq s \leq b$, entre las cuales no se incluye x (pues $0 < t-s < a+b = n$).

Ahora, si $a+b > n$, escribamos un $\circ$ al lado de cada pareja (x, y) donde a la niña x le gusta el niño y, y un $\diamond$ al lado de cada pareja (x, y) donde al niño y le gusta la niña x. Escribimos en total $(a+b)n > n^2$ figuras, y hay n^2 parejas, por lo cual hay una pareja que tiene ambas figuras, y esta corresponde a la pareja buscada.

50.4. Problema 4



Recordemos que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{c+d}$ también es igual a esta misma razón. Entonces

$$\frac{AP}{DQ} = \frac{PB}{QC} = \frac{AP+PB}{DQ+QC} = \frac{AB}{CD}$$

Notemos que $\frac{QM}{MA} = \frac{DQ}{AP} = \frac{CQ}{BP} = \frac{CN}{NP}$, y entonces $MN \parallel AB$. Luego

$$\frac{AB}{MN} = \frac{AQ}{QM} = \frac{AM+QM}{QM} = 1 + \frac{AM}{QM} = 1 + \frac{AP}{QD} = 1 + \frac{AB}{CD} = \frac{AB+CD}{CD}$$

Concluímos que $MN = \frac{AB \cdot CD}{AB+CD}$.

50.5. Problema 5

El primer jugador siempre gana. Sea $p = 997$, que es primo. El primer jugador comienza tomando $(1, p)$. Ahora el gcd de los enteros escritos es p, y pierde el primer jugador que escriba un número no múltiplo de p. Como $3p > 2003$, las parejas que dan un producto múltiplo de p son $(1, 2p)$, junto con las 2002 parejas de la forma (x, p) o (p, x). Estas son en total una cantidad impar, por lo que el primer jugador siempre tendrá una respuesta al segundo.

50.6. Problema 6

Sean $f(n) = 2n+1, g(n) = 3n+2$. Notemos que

$$f(n) + 1 = 2(n+1)$$
$$g(n) + 1 = 3(n+1)$$

Por lo que si m se obtiene de n luego de algunos cambios sensatos entonces

$$m + 1 = 2^a 3^b (n + 1)$$

Sea $\mu(n)$ el mayor divisor de n que es coprimo con 6, entonces de esta observación conluímos que x y y son compatibles si y solo si $\mu(x+1) = \mu(y+1)$, pues los números compatibles con x son de la forma $2^a 3^b \mu(x+1) - 1$, y aplicando f y g adecuadamente podemos hacer a y b tan grandes como queramos, para hacerlos coincidir cuando $\mu(x+1) = \mu(y+1)$.

Veamos entonces que $\mu(2004) = 167$, de modo que los números compatibles con 2003 son los de la forma $2^a \cdot 3^b \cdot 167 - 1$. Para que estos sean menores que 2003 debemos tener $2^a 3^b < 12$. Luego los resultados son

$$167 - 1, 2 \cdot 167, 3 \cdot 167 - 1, 4 \cdot 167 - 1, 6 \cdot 167 - 1, 8 \cdot 167 - 1, 9 \cdot 167 - 1$$

51. Soluciones de la XVIII OMM 2004

Enunciados en la página 26

51.1. Problema 1

Sea $pqr + 1 = a^2$, de modo que $pqr = (a-1)(a+1)$. Tenemos varios casos según el valor de $a - 1$:

- $a - 1 = pr$, $a - 1 = qr$, o $a - 1 = pqr$

  Todos estos son imposibles pues contradicen que $p < q < r$.

- $a - 1 = 1$

  Entonces $pqr = 3$, imposible.

- $a - 1 = p$

  Entonces $p^2 < qr = p + 2$, imposible para todo $p \geq 2$.

- $a - 1 = q$

  Entonces $2q \leq pr = q + 2$ y $q \leq 2$, pero entonces $p < 2$, imposible.

- $a - 1 = pq$

  Como $pq + 2 = a + 1 = r = 2004 - 25pq$ tenemos $26pq = 2002$, y $pq = 77$. Forzosamente tenemos $p = 7$, $q = 11$, y entonces $r = 79$.

- $a - 1 = r$

  Como $pq = a + 1 = r + 2 = 2006 - 25pq$ tenemos $26pq = 2006$, pero $26 \nmid 2006$, por lo cual esto es imposible.

En conclusión la única terna es $(7, 11, 79)$.

51.2. Problema 2

Sean $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ los números en el conjunto. Si $a_{k-1} \geq 100$ entonces la condición es claramente falsa con a_{k-1} y a_k. Entonces $a_{k-1} < 100$ y la condición equivale a

$$a_j \geq \frac{100a_i}{100 - a_i} \text{ si } j > i$$

En particular $a_{r+1} \geq \lceil \frac{100a_r}{100-a_r} \rceil$.

Notemos que la función $\frac{x}{100-x}$ es creciente en $(0, 100)$, pues x es creciente y $100 - x$ es decreciente. Es claro que $a_i \geq i$ para todo i. Ahora aplicando repetidamente la condición obtenemos las siguientes cotas:

$$a_{11} \geq \lceil \frac{100a_{10}}{100 - a_{10}} \rceil \geq \lceil \frac{1000}{90} \rceil = 12$$

$$a_{12} \geq \lceil \frac{100a_{11}}{100 - a_{11}} \rceil \geq \lceil \frac{1200}{88} \rceil = 14$$

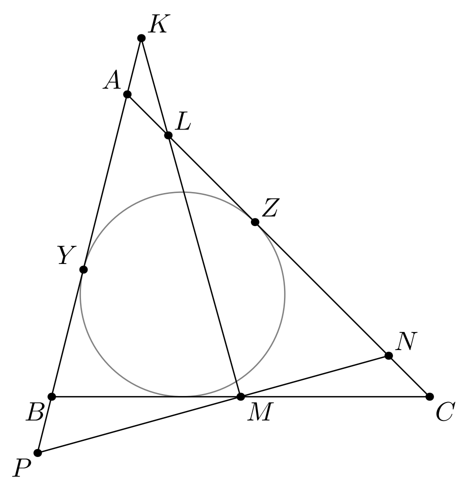
$$a_{13} \geq \lceil \frac{100a_{12}}{100 - a_{12}} \rceil \geq \lceil \frac{1400}{86} \rceil = 17$$

$$a_{14} \geq \lceil \frac{100a_{13}}{100 - a_{13}} \rceil \geq \lceil \frac{1700}{83} \rceil = 21$$

$$
\begin{aligned}
a_{15} &\geq \lceil \frac{100a_{14}}{100-a_{14}} \rceil \geq \lceil \frac{2100}{79} \rceil = 27 \\
a_{16} &\geq \lceil \frac{100a_{15}}{100-a_{15}} \rceil \geq \lceil \frac{2700}{73} \rceil = 37 \\
a_{17} &\geq \lceil \frac{100a_{16}}{100-a_{16}} \rceil \geq \lceil \frac{3700}{63} \rceil = 59 \\
a_{18} &\geq \lceil \frac{100a_{17}}{100-a_{17}} \rceil \geq \lceil \frac{5900}{41} \rceil = 144
\end{aligned}
$$

Como $a_{k-1} \leq 100$ concluímos que $k \leq 18$. Por otro lado el conjunto $\{1, 2, \ldots, 10, 12, 14, 17, 21, 27, 37, 59, 144\}$ cumple pues se cumplen las desigualdades entre términos consecutivos, y estas son las más fuertes pues $\frac{x}{100-x}$ es creciente.

51.3. Problema 3



Sea $P = MN \cap AB$. Por el Teorema de Menelao en ABC con M, N, P tenemos

$$
\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1 \implies \frac{AP}{AN} = \frac{PB}{CN}
$$

Pero NP es paralela a YZ, por lo que APN es semejante a AYZ, y en particular $AP = AN$ pues $AY = AZ$. Se sigue que $PB = CN$. Como $AB+BP = AP = AN = AL+LN$ y $AB = LN$ se sigue que $AL = PB = CN$.

Sea K' un punto tal que $AK' = CN$ y A está entre B y K. Afirmamos que K', L, M son colineales, con lo cual terminamos. Por el Teorema de Menelao esto pasa si y solo si

$$
\frac{AK'}{K'B} \cdot \frac{CL}{LA} = \frac{AK'}{K'B} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CL}{LA} = -1
$$

Pero $K'B = K'A + AB = CN + NL = CL$ y $AK' = CN = AL$, por lo cual esto es cierto.

51.4. Problema 4

Denotamos por $a \to b$ que un equipo a derrote a un equipo b. Supongamos que hay n jugadores, afirmamos que para cada $0 \leq i \leq n-1$ existe un equipo con exactamente $n-1$ victorias. Esto lo hacemos por inducción sobre n, donde el caso $n = 1$ es claro.

Consideremos al equipo a con menos victorias, afirmamos que perdió todos sus partidos. De lo contrario existe un equipo b tal que $a \to b$. Si c es cualquier equipo tal que $b \to c$, entonces por la condición tenemos $a \to c$. Luego, a venció a todos los equipos que b venció, y además venció a b, por lo que tiene estrictamente más victorias. Esto contradice la elección de a.

Entonces a no tiene ninguna victoria. Si eliminamos a a y aplicamos la hipótesis inductiva al torneo formado por los otros $n-1$ jugadores deducimos que tienen $0, 1, \ldots, n-2$ victorias entre ellos. Como cada uno de ellos venció a a, concluímos que tienen $1, 2, \ldots, n-1$ victorias. Esto completa la inducción.

Ahora, el equipo con i victorias calcula $i-(n-1-i) = 2i-(n-1)$ si $i \geq \frac{n-1}{2}$, y $(n-1-i)-i = (n-1)-2i$ de lo contrario. Tenemos ahora dos casos:

- Si $n = 2k$ es par Entonces la suma resultante es

  $$(2k-1)+(2k-3)+\cdots+1+1+\cdots+(2k-3)+(2k-1) = 2(1+\cdots+(2k-1)) = 2k^2$$

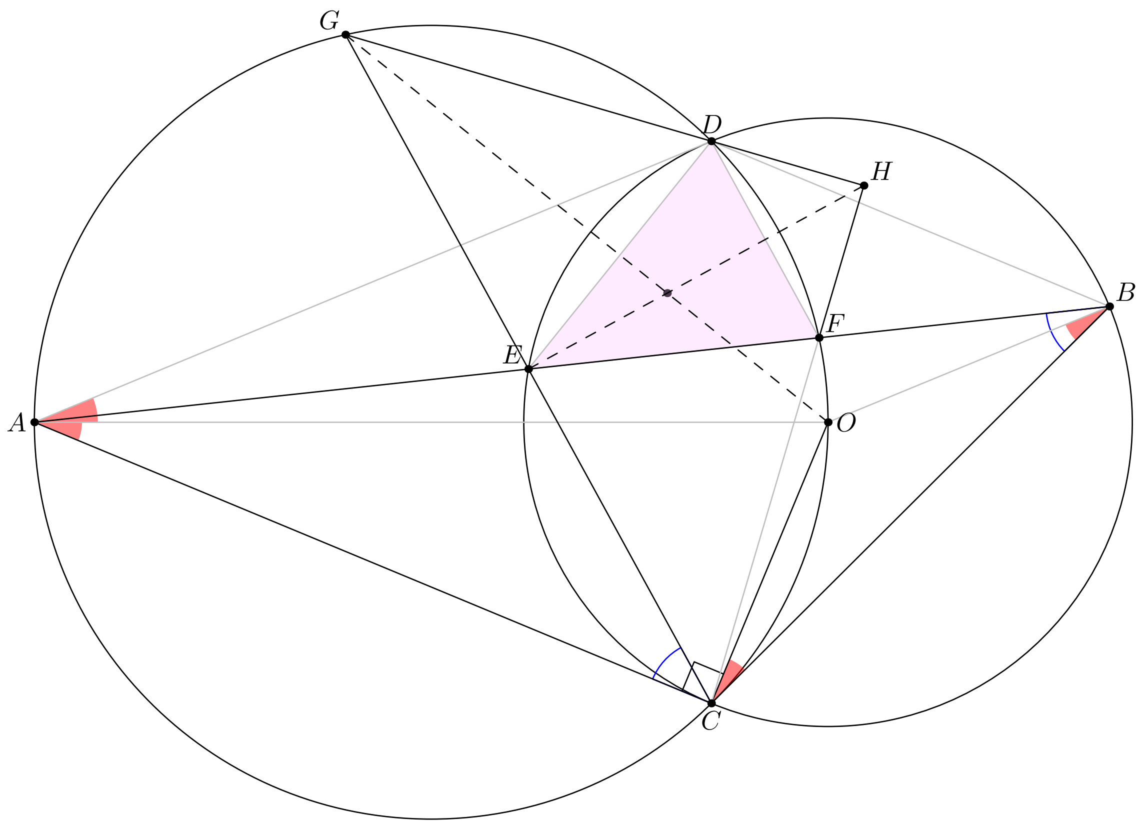
  Igualando a 5000 tenemos $k = 50$, y $n = 2k = 100$, que es una respuesta válida.

- Si $n = 2k+1$ es impar Entonces la suma es

  $$2k+(2k-2)+\cdots+2+0+2+\cdots+(2k-2)+2k = 2(2+4+\cdots+2k) = 2k(k+1)$$

  Es fácil comprobar que 2500 no es de la forma $k(k+1)$, por lo que no hay solución en este caso.

51.5. Problema 5



Afirmamos que OG y EH son de hecho las mediatrices de DE y DF respectivamente, lo cual es suficiente.

Sea $\angle CAO = \alpha$ y $\angle CBE = \beta$. Notemos primero que $OC \perp AC$, pues AC es tangente a $\mathcal{B}$. Se sigue que OA es un diámetro de $\mathcal{A}$, por lo que AO pasa por el centro de $\mathcal{A}$, y por lo tanto es la mediatriz de CD. Deducimos entonces que $\angle OAD = \alpha$.

Tenemos que $\angle CGD = 2\alpha$. Calculemos ahora $\angle GED$. Observamos que

$$\angle GED = 180^\circ - \angle CED = \angle CBD = \frac{\angle COD}{2} = \frac{180 - \angle CAD}{2} = 90^\circ - \alpha$$

Concluímos que también $\angle GDE = 90^\circ - \alpha$, y por lo tanto GDE es isósceles con $GE = GD$. Como O es el centro de $\mathcal{B}$ tenemos $OE = OD$, y entonces OG es la mediatriz de DE.

Ahora, observemos que $\angle ACE = \angle CBE = \beta$, y como $\angle OCA = 90^\circ$ tenemos $\angle OCE = 90^\circ - \angle ACE = 90^\circ - \beta$. Además como BC es tangente a $\mathcal{A}$ tenemos $\angle BCO = \angle CAO = \alpha$. De esto obtenemos

$$\angle CEB = 180^\circ - \angle CBE - \angle ECB = 180^\circ - \beta - (\alpha + 90^\circ - \beta) = 90^\circ - \alpha$$

Además tenemos $\angle EFC = \angle EFC = \angle ADC = 90 - \alpha$ pues ACD es isósceles. Entonces $\angle ECF = 2\alpha$. Como también $\angle AGD = 2\alpha$ concluímos que $FCGD$ es un trapecio isósceles, por lo que $HF = HD$.

Finalmente, tenemos $\angle DEF = 180^\circ - \angle CEF - \angle GED = 2\alpha$, y $\angle EFD = \angle AFD = \angle ACD = 90^\circ - \alpha$. Se sigue que también $\angle EDF = 90^\circ - \alpha$, y entonces $ED = EF$. Concluímos que EH es mediatriz de DF, con lo cual terminamos.

51.6. Problema 6

Supongamos sin pérdida de generalidad que el primer movimiento es vertical. Coloreamos las filas alternadamente de blanco y negro donde la esquina superior izquierda es blanca. Notemos que hay $1003 \cdot 2005$ puntos blancos y $1002 \cdot 2005$ puntos negros. Consideremos los colores $c_1, c_2, \ldots, c_n$ que recorremos en órden en la trayectoria, y notemos que hubo un cambio de dirección en el punto correspondiente a c_i si y solo si c_{i-1} y c_{i+1} tienen colores distintos.

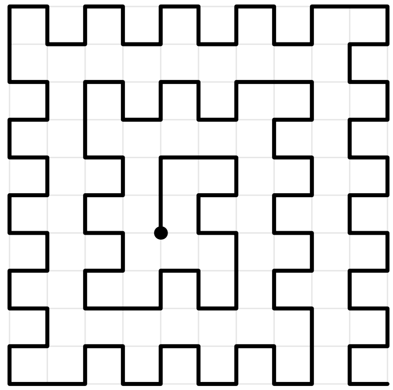
Consideramos entonces la sucesión $c_1, c_3, c_5, \ldots$ y la dividimos en bloques maximales de puntos del mismo color. El número de cambios de dirección en pasos pares es 1 menos que el número de bloques. Notemos que si hay B bloques de puntos blancos entonces hay a lo más

1. $2B + 1$ bloques, si el primer bloque es negro.
2. $2B$ bloques, si el primer bloque es blanco.

Similarmente podemos hacer esto para la sucesión $c_2, c_4, c_6, \ldots$. Supongamos que hay B_1 bloques blancos en la primera sucesión y B_2 en la segunda. Como el primer movimiento es vertical, exactamente uno de c_1 y c_2 es blanco, por lo que el número total de cambios de dirección está acotado por

$$2B_1 - 1 + 2B_2 - 1 + 1 = 2(B_1 + B_2) - 1$$

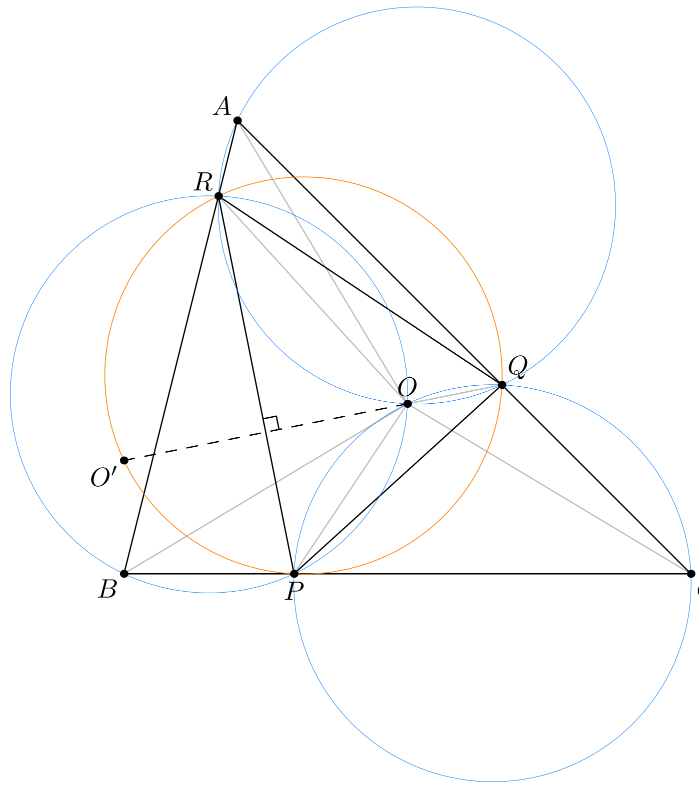
Finalmente, como cada bloque tiene al menos un punto blanco, esta última cantidad es a lo más $2(1002 \cdot 2005) - 1 = 2004 \cdot 2005 - 1$. Para finalizar, basta dar un acomodo con esta cantidad de cambios de dirección. Para esto hacemos algo análogo a la siguiente construcción para 10×10:



Es fácil ver con algo de cuidado que continuar esta construcción da un camino en un tablero de $n \times n$ con el máximo número posible de cambios de dirección para todo n par.

52. Soluciones de la XIX OMM 2005

52.1. Problema 1



Por el Teorema de Miquel, $AROQ$ es cíclico. Ahora notemos que

$$\angle PQR = \angle PQO + \angle RQO = \angle BAO + \angle PCO = \angle OBA + \angle OBC = \angle ABC$$

Análogamente $\angle QRP = \angle BCA$ y $\angle RPQ = \angle CAB$, luego $\triangle PQR \sim \triangle ABC$. Más aún, tenemos

$$\angle QRO = \angle QAO = \frac{180° - \angle AOC}{2} = \frac{180° - 2\angle ABC}{2} = 90° - \angle ABC$$

Como $\angle RQP = \angle ABC$ se sigue que $RO \perp PQ$. Análogamente obtenemos las otras perpendicularidades y O es ortocentro de ABC.

Para ver que los circunradios de OPR y PQR son iguales veamos que la reflexión O' de O respecto a PR está en (PQR) por lo que el circunradio de $(O'PR)$ es igual al circunradio de (PQR), y este es a su vez igual al de $(BPOR)$. Análogamente el circunradio de COP es igual al de PQR.

52.2. Problema 2

Llamemos a_{ij} a los elementos de la cuadrícula escritos en sus casillas (en ambos incisos).

Parte a.

Elegimos $b_{ij} = \lfloor \frac{a_{ij}}{2} \rfloor, c_{ij} = \lceil \frac{a_{ij}}{2} \rceil$. Entonces $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$. Probemos que las cuadrículas (b_{ij}) y (c_{ij}) son n-balanceadas. Para esto notemos que si $b \leq a + 2n$ entonces

$$\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor \leq \left\lfloor\frac{a+2n}{2}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{a}{2}\right\rfloor + n$$

$$\left\lceil\frac{b}{2}\right\rceil \leq \left\lceil\frac{a+2n}{2}\right\rceil = \left\lceil\frac{a}{2}\right\rceil + n$$

Pues piso y techo son crecientes. Se sigue de esto que las cuadrículas son n-balanceadas.

Parte b.

Elegimos $b_{ij} = \lfloor\frac{a_{ij}}{3}\rfloor, c_{ij} = \lceil\frac{a_{ij}}{3}\rceil, d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} - c_{ij}$. De manera análoga a la primera parte obtenemos que (b_{ij}) y (c_{ij}) son n-balanceadas. Ahora veamos que d_{ij} es $\lfloor\frac{a_{ij}}{3}\rfloor$ si a_{ij} es 0 o $1 \pmod 3$, y es $\lceil\frac{a_{ij}}{3}\rceil$ de lo contrario. Por lo tanto el único caso donde podríamos fallar es si entre dos elementos que comparten un lado uno es congruente con 2 módulo 3 y el otro no. Digamos entonces que estos son $3p+2$ y $3q+c$ con $c \in \{0,1\}$. Los d_{ij} correspondientes son $p+1$ y q. Si $q > p+1+n$ entonces

$$3q + c > 3(p+n+1) + c = 3p + 3n + c + 3 > 3p + 3n + 2$$

Y la cuadrícula no sería $3n$-balanceada. Si $p+1 > q+n$ entonces

$$3p + 2 \geq 3(q+n) + 2 = (3q+2) + 3n > (3q+c) + 3n$$

Y nuevamente obtenemos una contradicción. Entonces $q \leq p+1+n$ y $p+1+n \leq q$, por lo que la cuadrícula es n-balanceada.

52.3. Problema 3

La condición se cumple si y solo si $(a,b) = 1$. En este caso podemos tomar $x = a, y = -1$ (o $x = -a$ si $a < 0$), y para todo n impar (o par si $a < 0$) la fracción resultante es 0, que es un entero.

Ahora supongamos por contradicción que el resultado es cierto para algunos a, b tales que $(a,b) \neq 1$, y sea p un primo que divide a ambos. Como $p^n \mid a + xy^n$ para algún p, también $p \mid a + xy^n$, y como $p \mid a$, $p \mid xy^n$. Como $(b,x) = 1$ por hipótesis tenemos que $p \nmid x$, entonces $p \mid y^n$ y $p \mid y$.

Sea $m > \nu_p(a)$ tal que $\frac{a+xy^m}{b^m}$ es un entero, entonces $p^m \mid a + xy^m$. Como $p^m \nmid a$ deducimos que $p^m \nmid xy^m$, pero esto es una contradicción, pues $p \mid y$.

52.4. Problema 4

Procedemos por inducción fuerte, con el caso base obvio $n = 1$. Supongamos que $n \geq 2$. Sea $n^+ = \lceil\frac{n}{2}\rceil, n^- = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. Por hipótesis inductiva hay una permutación $(a_1, a_2, \ldots, a_{n^+})$ de $1, 2, \ldots, n^+$ sin ternas aritméticas y una permutación $(b_1, b_2, \ldots, b_{n^-})$ de $1, 2, \ldots, n^-$ sin ternas aritméticas. Afirmamos entonces que

$$(2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \ldots, 2a_{n^+} - 1, 2b_1, 2b_2, \ldots, 2b_{n^-})$$

Es l a permutación deseada para n. Primero veamos que es en efecto una permutación, esto es fácil pues todos los impares entre $1, 2, \ldots, n$ son de la forma $2a - 1$ con $1 \leq a \leq n^+$ y todos los pares son de la forma $2b$ con $1 \leq b \leq n^-$. Ahora veamos que no tiene ternas aritméticas. Supongamos por contradicción que los índices $i < j < k$ forman una terna aritmética. Si $k \leq n^+$ entonces

$$(2a_i - 1) + (2a_k - 1) = 2(2a_j - 1) \implies a_i + a_k = a_j$$

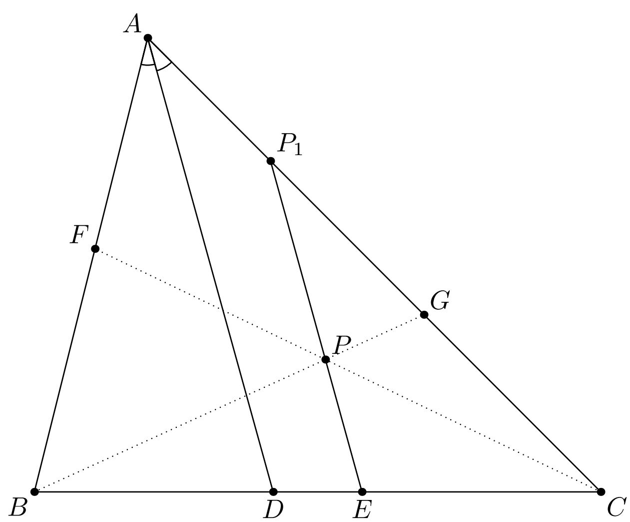
Contradiciendo que (a_i) no tenía ternas aritméticas. Similarmente obtenemos una contradicción si $i > n^+$. Entonces $i \leq n^+$ y $k > n^+$, por lo que a_i es impar y a_k es par. Se sigue que $a_i + a_k$ es impar, por lo que no puede ser igual a $2a_j$. Concluímos que esta permutación no tiene ternas aritméticas, lo cual concluye la inducción.

52.5. Problema 5

Notemos que en la colección deben estar representados exactamente $N - 1$ colores: Si hay N, la colección es completa, y si hay menos de $N - 1$ es posible agregar una carta con uno de los dos colores restantes, y que contenga una figura y un número que ya existen en la colección. Análogamente hay exactamente $N - 1$ figuras representadas, y $N - 1$ números.

Fijemos estas elecciones de $N - 1$ colores, números y figuras. Notemos que la colección debe contener a todas las cartas que contienen un número, un color y una figura de los elegidos, de lo contrario se puede agregar esta carta sin volver completa la colección. Por otro lado, una vez que tenemos estas cartas, cualquier otra carta debe contener un nuevo color, número o figura, por lo que estas son las colecciones deseadas. Hay exactamente N^3 formas de elegir los colores, números y figuras (basta elegir cuál no aparece en cada tipo), por lo que esta es la respuesta deseada.

52.6. Problema 6



Si $AB = AC$ el resultado es inmediato por simetría, entonces suponemos que $AB \neq AC$. Consideremos la composición de las siguientes transformaciones:

- Proyección de l a AC con centro B.
- Reflexión respecto a la bisectriz de $\angle ACB$.
- Reflexión respecto al punto medio de BC.
- Reflexión respecto a la bisectriz de $\angle ABC$.
- Proyección de AB a l con centro C.

Con la notación del problema esta transformación toma el punto F' en AB tal que $CG = BF'$ y manda P a $CF' \cap l$. Entonces buscamos probar que esta transformación es la identidad. Como cada una de las cinco transformaciones descritas es proyectiva, la transformación final también lo es, por lo que basta ver que tiene tres puntos fijos.

Si $P = E$ tenemos $E \mapsto C \mapsto C \mapsto B \mapsto B \mapsto E$, y E es punto fijo. Si $P \in AC$ entonces tenemos

$$\frac{CP}{CE} = \frac{CA}{CD} = \frac{AB}{BD}$$

Donde la última igualdad se sigue del Teorema de la Bisectriz. Pero $CE = BD$ y entonces $CP = AB$, por lo que la imagen de P bajo las primeras cuatro transformaciones es A, y P es punto fijo. Análogamente P es punto fijo si $P \in AB$, con lo cual terminamos.

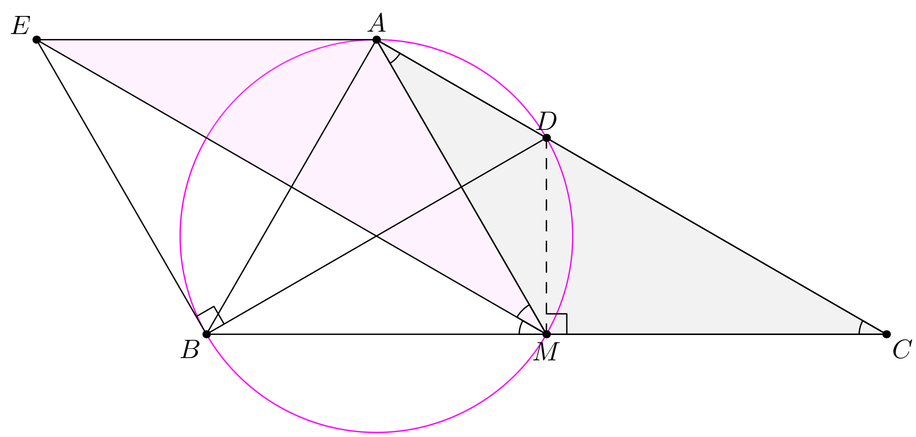
53. Soluciones de la XX OMM 2006

Enunciados en la página 28

53.1. Problema 1

Sea $n = 10a+b$. Si $a = 1$ entonces n es su único pariente, entonces la condición se cumple. Supongamos ahora que $a \geq 2$. Notemos que $\overline{1(a-1)b}$ es un pariente de n, entonces $10a+b \mid 100+10(a-1)+b \implies 10a+b \mid 90$. Los divisores positivos de 90 son $1, 2, 3, 5, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90$. De estos nos falta considerar $30, 45$ y 90. Veamos que todos cumplen. Primero, si $5 \mid n$ entonces todos los parientes de n son múltiplos de 5, pues tienen el mismo dígito de las unidades. Lo mismo pasa si $2 \mid n$. Además, como la suma de los dígitos se mantiene constante, si n es divisible entre 3 o 9 respectivamente, sus parientes lo son. Estas condiciones son suficientes para ver que $30, 45$ y 90 funcionan.

53.2. Problema 2



Sea $\angle ACB = \alpha$. Sabemos que M es el circuncentro de ABC, de lo cual obtenemos que MCA, MAB son isósceles. Se sigue que $\angle MAC = \alpha, \angle AMB = 2\alpha$. Como $ME \parallel AC$ se sigue que $\angle AME = \angle BME = \alpha$. Además, como $AC \perp AB$ tenemos $ME \perp AB$, y como $MA = MB$, ME es mediatriz de AB.

Ahora, MAC es un triángulo isósceles con dos ángulos de α, y $\angle AME = \alpha$, por lo que AEM y MCA son semejantes si y solo si $AE = AM$. Como $AE = EB$ y $AM = MB$ esto pasa si y solo si $AEBM$ es un rombo, si y solo si EB es paralela a AM, si y solo si BD es perpendicular a AM. Pero veamos que $ABMD$ es cíclico de diámetro BD, entonces esto pasa si y solo si $BA = BM$. Como $AM = MB$ esto pasa si y solo si es equilátero, si y solo si $\angle ABC = 60°$, como queríamos.

53.3. Problema 3

Equivalentemente queremos contar el número de caminos en un tablero de $2 \times n$ que pasan por todas las casillas, donde podemos ir de una casilla a otra que comparta un lado con ella. Primero contenmos cuantos inician en una esquina dada, afirmamos que hay exactamente n. Suponemos sin pérdida de generalidad que esta es la esquina inferior izquierda. Tenemos dos casos:

- Si el primer movimiento es a la derecha.

  Notemos que no podemos mover hacia arriba, pues esto divide el tablero en dos regiones disconexas. Repitiendo este argumento, debemos movernos hasta la esquina inferior derecha del tablero. De aquí claramente hay una única forma de completar el camino.

- Si el primer movimiento es hacia arriba.

El segundo movimiento debe ser forzosamente a la derecha. Ahora hemos pasado a un tablero de $2 \times (n-1)$ donde empezamos en una esquina, entonces inductivamente el número de caminos es $n-1$.

Luego inductivamente, hay n caminos. Ahora digamos que empezamos en una casilla que no es una esquina. Sin pérdida de generalidad digamos que ésta está en la fila de abajo, y digamos que hay k casillas a su izquierda, de modo que hay $n-1-k$ a su derecha.

Podemos ver fácilmente que hay exactamente dos tipos de caminos: Si comenzamos yendo a la izquierda, debemos movernos hasta la esquina inferior izquierda del tablero, subir, y luego regresar a la casilla que está arriba y a la derecha de la inicial. Una vez que llegamos a esta casilla estamos en una esquina de un tablero de $2 \times (n-k-1)$, por lo que hay $n-k-1$ maneras de completar el camino. Análogamente si comenzamos yendo a la derecha hay k caminos posibles. Es imposible completar un camino si empezamos yendo hacia arriba. Luego, hay exactamente $n-1$ caminos que empiezan en cualquier casilla que no es una esquina. Finalmente sumando tenemos

$$4n + 2(n-2)(n-1) = 2n^2 - 2n + 4$$

Caminos en total.

53.4. Problema 4

Digamos que un entero positivo n es *cubrible* si es posible cubrir una escalera con n escalones con cuadrados. Afirmamos que n es cubrible si y solo si $n = 2^m - 1$ para algún entero postivo m.

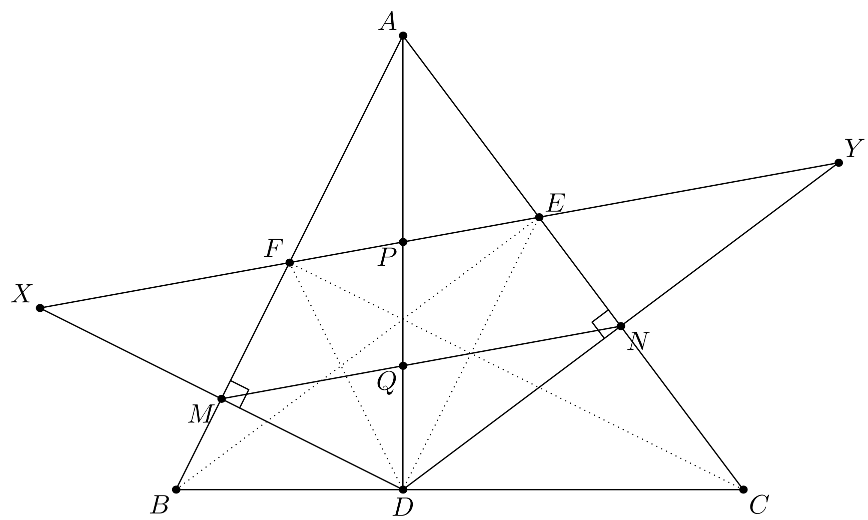
Primero, tomemos los n cuadritos en la diagonal, y notemos que no es posible cubrir dos de ellos con un mismo cuadrado. Por lo tanto cada cuadrado cubre a exactamente uno de ellos. Consideremos entonces el cuadrado que cubre a la esquina inferior derecha. Como este debe cubrir un cuadrito de la diagonal, vemos facilmente que n debe ser impar.

Cuando n es impar, existe un único cuadrito de la diagonal que puede ser cubierto por el cuadrado que cubre a la esquina. Si $n = 1$ terminamos. En otro caso podemos ver fácilmente que al quitar este cuadrado, nos quedan dos escaleras de tamaño $\frac{n-1}{2}$, por lo que n es cubrible si y solo si $\frac{n-1}{2}$ es cubrible. Equivalentemente m es cubrible si y solo si $2m+1$ es cubrible. Empezando con $m = 1$ deducimos que todos los números cubribles son

$$1, 3, 7, 15, \ldots$$

Que son justamente los que dijimos al inicio.

53.5. Problema 5



Sean X y Y las reflexiones de D respecto a AB y AC respectivamente, entonces

$$\angle AEF = \angle ABC = \angle DEC = \angle DEN = \angle NEY$$

Y por lo tanto Y está en EF. Análogamente X está en EF. Entonces, como M y N son puntos medios de DX y DY respectivmante, MN es paralela a EF. Concluímos que

$$\frac{DQ}{QP} = \frac{DN}{NY} = 1$$

53.6. Problema 6

Sea $m+1$ el menor número que no es suma de dígitos de A. Por hipótesis $m \geq 8$, afirmamos que $m = n$. Si $m < n$, sea d el menor dígito cuyas apariciones no están todas en la representación de m. Notemos que $d - 1 \leq m$, pues $m \geq 8$. Consideremos entonces la representación de $d-1$ como suma de dígitos. Esta sólo puede usar a $1, 2, \ldots, d-1$, y por lo tanto está contenida en la de m. Sustituyendo esta por un solo dígito d obtenemos una representación para $m+1$, contradicción.

Por otro lado, en el número $A = 1249$ los números $1, 2, \ldots, 7$ son sumas de dígitos de A, pero 8 no lo es.

54. Soluciones de la XXI OMM 2007

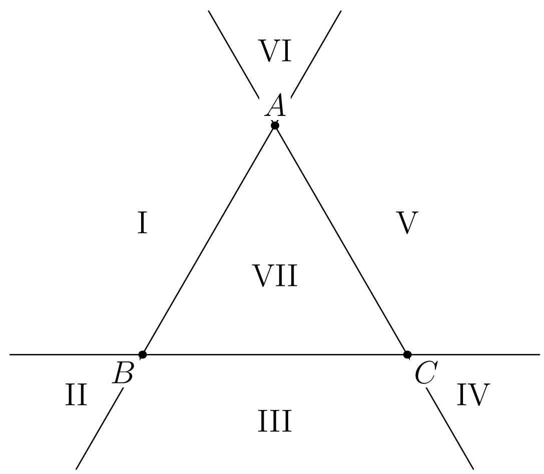
Enunciados en la página 29

54.1. Problema 1

Notemos que entre cualesquiera k números consecutivos, al menos uno es múltiplo de k. Por lo tanto n es múltiplo de $1, 2, \dots, 10$ y por lo tanto es múltiplo de $[1, 2, \dots, 10] = 2520$. Sea $n = 2520m$. Si $11 \mid m$ entonces $1, 2, \dots, 11$ dividen a m, contradicción. De lo contrario $1, 2, \dots, 10$ dividen a n, pero no puede haber 11 enteros consecutivos que dividen a n pues alguno sería múltiplo de 11, y n no es múltiplo de 11. Luego la respuesta es $n = 2520m$ donde $11 \nmid m$.

54.2. Problema 2

Denotemos de la siguiente manera a las regiones (abiertas) del plano determinadas por ABC:



Ahora tenemos varios casos:

- Si $P \in I$ o $P \in IV$

  Entonces $\angle APB > \angle BPC$.

- Si $P \in III$ o $P \in VI$

  Entonces $\angle BPC > \angle APB$.

- Si $P \in II \cup VII \cup V$

  Por Ley de Senos en los triángulos APB y BPC tenemos

  $$\frac{BP}{\sin \angle BAP} = \frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{BC}{\sin \angle BPC} = \frac{BP}{\sin \angle BCP}$$

  Concluímos que $\sin \angle BAP = \sin \angle BCP$, por lo que los ángulos $\angle BAP$ y $\angle BCP$ son iguales o suman $180°$. Si suman $180°$, entonces $ABCP$ es cíclico, y P está en el arco del circuncírculo de ABC entre A y C. Si $\angle BAP = \angle BCP$ entonces los triángulos ABP y BCP son congruentes, por lo que $AP = CP$ y P está en la mediatriz de AC.

- Si P está en BC o AB.

  Entonces uno de los ángulos $\angle APB$ y $\angle BPC$ es cero, y el otro es positivo.

- Si P está en AC.

  Si P está en el segmento AC y no en el punto medio, entonces la condición claramente no se cumple. Por otro lado, si P está en la recta AC excluyendo este segmento entonces sí se cumple la condición.

En conclusión el lugar geométrico buscado es la unión del arco menor AC del circuncírculo de ABC, la mediatriz de AC, y la recta AC sin contar el segmento AC.

54.3. Problema 3

Notemos que

$$a + bc = a(a + b + c) + bc = a^2 + ab + ac + bc = (a + b)(a + c)$$

Ahora por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(b+c)(b+a)} + \sqrt{(c+a)(c+b)}\right)^2 &\le ((a+b)+(b+c)+(c+a))((a+c)+(b+a)+(c+b)) \\ &= (2(a+b+c))^2 = 4\end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada de ambos lados obtenemos la desigualdad deseada.

54.4. Problema 4

Como m, n son enteros positivos y $m + n = 2007$, deducimos que $m \le 2006$. De aquí podemos comprobar que la suma de los dígitos de m es a lo más la de 1999, que es 28, es decir, $m_1 \le 28$. De aquí podemos comprobar que la suma de los dígitos de m_1 es a lo más 10, entonces $m_2 \le 10$. Finalmente, la suma de los dígitos de m_2 es a lo más 9, y $m_3 \le 9$. Como

$$m \equiv m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \pmod 9$$

Deducimos que m_3 es el residuo de $m \bmod 9$ (donde si $9 \mid m$ tomamos 9 en vez de 0). Como $2007_3 = 9$ deducimos que la condición se cumple para cualesquiera m, n que sumen 2007, pues este es múltiplo de 9, a menos que $m_3 = n_3 = 9$. Esto pasa cuando m es múltiplo de 9, pues entonces n también es múltiplo de 9. En conclusión, las parejas son las de la forma $(m, 2007 - m)$ donde $1 \le m \le 2006$ y $9 \nmid m$.

54.5. Problema 5

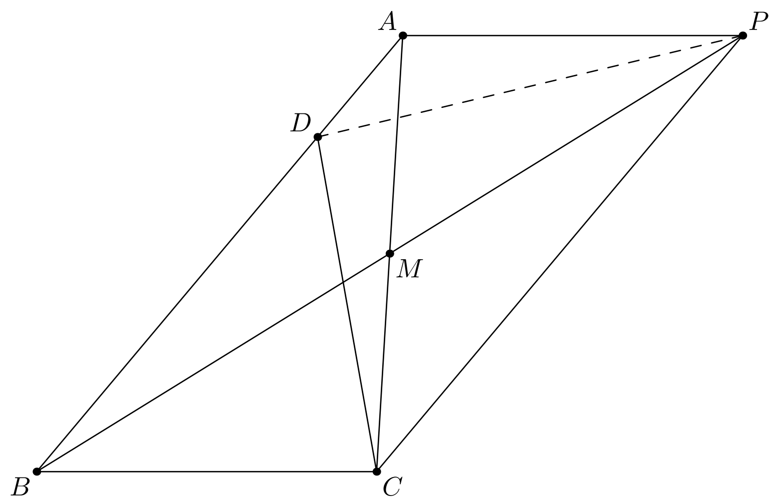
Elegimos una de las siguientes coloraciones, de tal modo que la luciernaga encendida quede en una casilla etiquetada $\diamond$

$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$
$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$
$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$
$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$
$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$
$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$

$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$
$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$
$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$
$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$
$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$
$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$	$\diamond$	$\heartsuit$	$\diamond$

Notemos que cada movimiento afecta exactamente dos casillas etiquetadas $\diamond$. Por lo tanto, si al incio la cantidad de luciernagas en casillas con $\diamond$ es impar, siempre lo será. Por lo tanto es imposible hacer que todas las luciernagas en casillas $\diamond$ estén apagadas. En particular, siempre hay al menos una luciernaga encendida.

54.6. Problema 6



Sea P la reflexión de B respecto a M, entonces $BCPA$ es un paralelogramo. Como $CD = BC = AP$, $ADCP$ es un trapecio isósceles, y $AC = DP$. Luego, $AC = BD$ si y solo si $BD = DP$, lo cual pasa si y solo si $\angle ADP = 2\angle ABM$. Pero como $\angle ADP = \angle DAC = \angle BAC$, pues $ADCP$ es un trapecio isósceles, concluímos que $BD = AC$ si y solo si $\angle BAC = 2\angle ABM$.

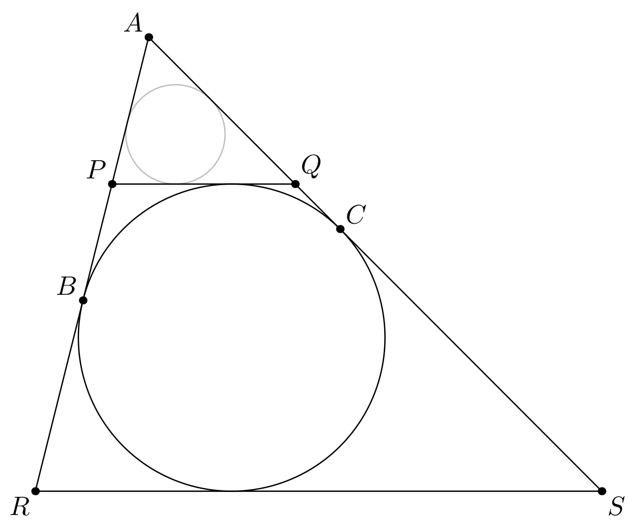
55. Soluciones de la XXII OMM 2008

Enunciados en la página 30

55.1. Problema 1

Sea p el menor divisor primo de n, entonces $d_2 = p$. Como $p \mid n$ y $p \mid d_2^2$ se sigue que $p \mid d_3^3$ y $p \mid d_3$. Sea $d_3 = pm$. Si $m \neq p$ entonces m es un divisor de n menor que d_3, contradición. Entonces $d_3 = p^2$ y $n = p^2 + p^6 = p^2(p^4 + 1)$. Si $p > 2$ entonces $p^4 + 1$ es par, por lo que $2 \mid n$, contradiciendo que p es el menor primo que divide a n. Entonces $p = 2$, y $n = 2^2 + 2^6 = 68$.

55.2. Problema 2



Para un triángulo XYZ arbitrario denotemos por $[XYZ], s(XYZ)$ y $r(XYZ)$ al área, semiperímetro e inradio de XYZ respectivamente, y recordemos que

$$[XYZ] = s(XYZ) \cdot r(XYZ)$$

Entonces tenemos

$$[APQ] \cdot [ARS] = s(APQ) \cdot r(APQ) \cdot s(ARS) \cdot r(ARS)$$

Ahora, como PQ es paralela a RS, los triángulos APQ y ARS son semejantes, y por lo tanto

$$\frac{r(APQ)}{r(ARS)} = \frac{s(APQ)}{s(ARS)} \implies r(APQ) \cdot s(ARS) = r(ARS) \cdot s(APQ)$$

Deducimos que el produco buscado es simplemente $(s(APQ) \cdot r(ARS))^2$. Pero $r(ARS)$ es el radio de Γ, pues Γ es incírculo de ARS, y $s(APQ) = AB$ pues Γ es el excírculo opuesto a A de APQ. Concluímos que

$$[APQ] \cdot [ARS] = (AB \cdot R)^2$$

Donde R es el radio de Γ, que es independiente de la elección de P.

55.3. Problema 3

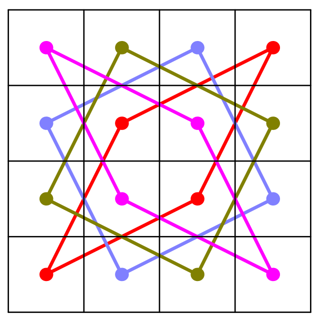
Podemos dividir el tablero en cuatro tableros de 4×4 de la siguiente forma, con $n = 1$, $n = 5$, $n = 33$ y $n = 37$:

n	$n+1$	$n+2$	$n+3$
$n+8$	$n+9$	$n+10$	$n+11$
$n+16$	$n+17$	$n+18$	$n+19$
$n+24$	$n+25$	$n+26$	$n+27$

Afirmamos que en cualquier cuadrícula de este estilo la suma máxima es $4(2n+27)$, lo cual nos da una cota superior para la suma en todo el tablero de

$$4(2+10+66+74+27+27+27+27) = 1040$$

Consideramos los siguientes cuatro caminos cerrados dentro de la cuadrícula:



Es claro que no podemos tomar dos casillas consecutivas del mismo camino, por lo que a lo más podemos tomar dos casillas en cada camino, y estas deben ser opuestas. Es fácil comprobar que cualesquiera dos casillas opuestas del mismo camino suman $2n + 27$, lo cual nos da la cota deseada.

Finalmente, exhibimos un ejemplo con suma 1040. Para esto, coloreamos el tablero como ajedrez y colocamos caballos en todas las casillas negras. Estos no se atacan, pues en cualquier subtablero de 2×3 o 3×2 las esquinas opuestas tienen colores distintos. Más aún, es fácil verificar que esta elección de casillas alcanza la igualdad en cada subtablero de 4×4, por lo que también la alcanza en el tablero completo.

55.4. Problema 4

Notemos que en los primeros 2007 turnos se eliminan $\frac{2\cdot 2007}{3} = 1338$ jugadores, por lo que el jugador 2008 gana al haber n jugadores si y solo si el jugador 1 gana al haber $n - 1338$ jugadores. Afirmamos ahora que el jugador 1 gana si y solo si $n = 3^m$ o $n = 2 \cdot 3^m$, lo cual concluye el problema.

Si $n \leq 3$ es obvio que el primer jugador gana. Si $n \geq 4$ entonces el primer jugador tiene (al menos) un segundo turno, por lo que debe decir 1 nuevamente. Esto solo puede pasar si el número total de jugadores es múltiplo de 3. Más aún, en el juego quedan ahora $\frac{n}{3}$ jugadores, por lo que el primer jugador gana en un juego con n jugadores si y solo si gana en un juego con $\frac{n}{3}$ jugadores. Esto lleva justamente a la caracterización ($n = 3^m$ o $n = 2 \cdot 3^m$) que mencionamos anteriormente.

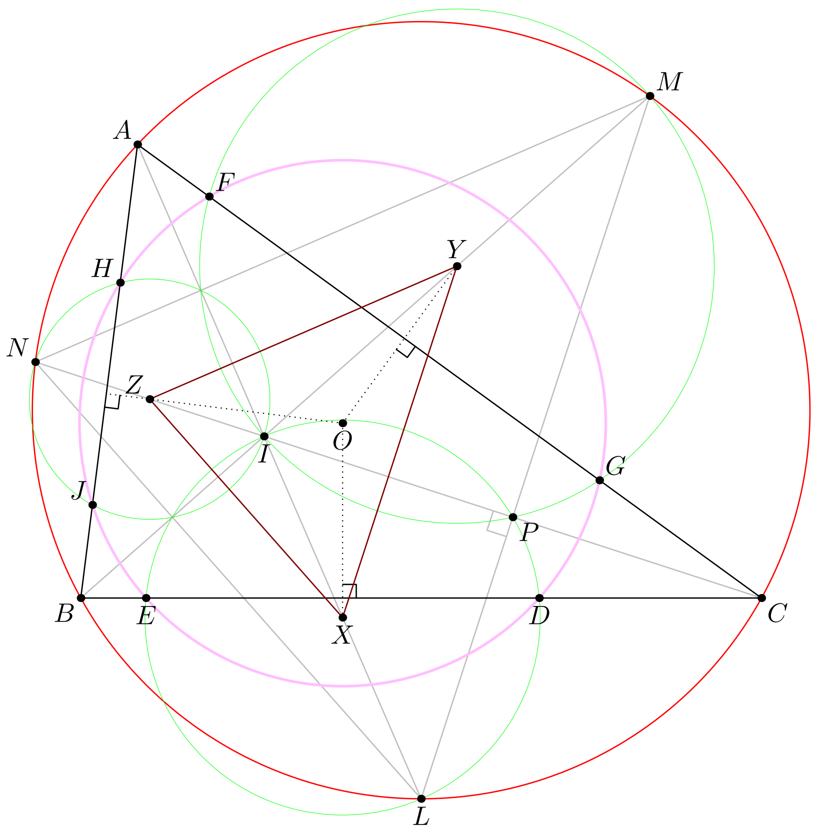
Finalmente, tenemos $n = 1338+3^m$ o $n = 1338+2\cdot 3^m$. Como debe haber al menos 2008 jugadores deducimos que $m \geq 6$.

55.5. Problema 5

Probaremos que de hecho $A \leq V$, lo cual simultaneamente resuelve el primer inciso y nos da información sobre el segundo. Supongamos que en dos extremos de una arista escribimos los enteros $a < b$ y sea $d = (a, b)$ el entero escrito en la arista. Como $d \mid a$, tenemos $a \geq d$. Más aún, como $a < b$ tenemos además que $b \geq 2d$, y por lo tanto $a + b \geq 3d$. Sumando sobre las 12 aristas obtenemos $3V \geq 3A$, y por lo tanto $A \leq V$.

Ahora veamos que no se puede dar la igualdad, lo cual concluye el inciso b. Es claro que en la desigualdad original la igualdad se da si y solo si $a = d$ y $b = 2d$, lo cual pasa si y solo si $b = 2a$. Entonces la igualdad $A = V$ se da si y solo si para cualesquiera dos números en los extremos de una arista, uno es el doble del otro. Consideremos cualquier vértice y sus tres vecinos. Estos deben tener escritos o la mitad o el doble del número, y por Casillas dos tienen escrito el mismo número, contradiciendo la condición del problema. Se sigue que $A < V$ siempre.

55.6. Problema 6



Es un hecho conocido que L es el circuncentro de BIC. Análogamente M es el circuncentro de AIC. Por lo tanto LM es la mediatriz de CI y en particular $LM \perp CI$. Sea $P = LM \cap CI$, entonces como $\angle IPL = \angle IPM = 90°$, P está en los círculos de diámetros IL e IM. Por potencia de C a estos círculos tenemos

$$CD \cdot CE = CP \cdot CI = CF \cdot CG$$

Y D, E, F, G son concíclicos. Análogamente F, G, H, J son concíclicos y H, J, D, E son concíclicos.

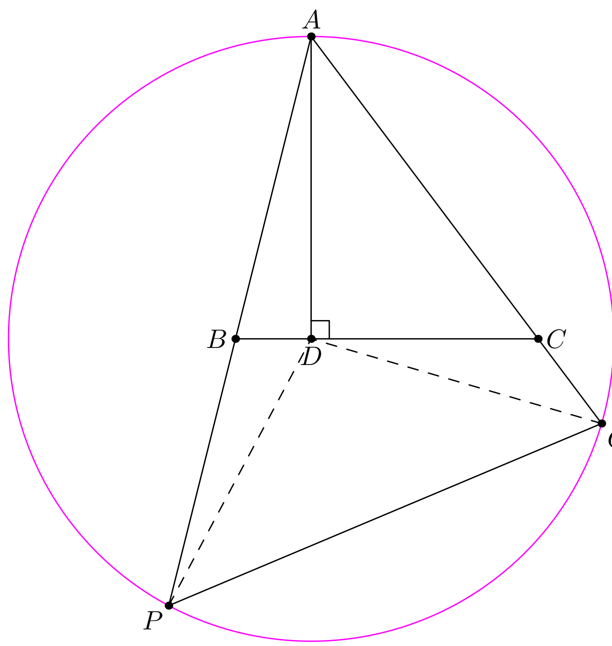
Sean X, Y y Z los puntos medios de IL, IM e IN respectivamente. Notemos que las perpendiculares de A, B y C a los lados de LMN concurren en I, por lo que los triángulos ABC y LMN son ortológicos. Como los lados correspondientes de XYZ son paralelos a los de LMN concluímos que ABC y XYZ también son ortológicos. Luego, las perpendiculares de X, Y y Z a BC, CA y AB respectivamente concurren en un punto O.

Finalmente, como X es el circuncentro de $(IDLE)$, la perpendicular desde X es la mediatriz de DE, y O está en ella. Análogamente O está en las mediatrices de FG y HJ. Con los cíclicos antes obtenidos comprobamos entonces que O equidista de D, E, F, G, H, J, y entonces todos estos puntos son concíclicos.

56. Soluciones de la XXIII OMM 2009

Enunciados en la página 31

56.1. Problema 1



$$\angle AQP = \angle AQD + \angle DQP = \angle DAC + \frac{180^\circ - \angle PDQ}{2} = \angle DAC + 90^\circ - \angle BAC$$
$$= 90^\circ - \angle ACB + 90^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle ACB - \angle BAC = \angle ABC$$

Análogamente $\angle APQ = \angle ACB$, y $\triangle ABC \sim \triangle AQP$.

56.2. Problema 2

Formalmente, tenemos una función $f\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ tal que

- $f(p) = 1$ para p primo.
- $f(ab) = af(b) + bf(a)\ \forall a, b \in \mathbb{Z}^+$

Y buscamos los $n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $f(n) = n$. Sea $g(n) = \frac{f(n)}{n}$, entonces las condiciones se vuelven:

- $g(p) = \frac{1}{p}$ para p primo.
- $g(ab) = g(a) + g(b)\ \forall a, b \in \mathbb{Z}^+$

Y buscamos los n tales que $g(n) = 1$. Utilizando la segunda propiedad, una inducción simple nos da

$$g(a_1 a_2 \dots a_k) = g(a_1) + g(a_2) + \cdots + g(a_k)$$

Para cualesquiera $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}^+$. En particular, $f(a^b) = bf(a)$. Ahora sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_k} \dots p_k^{\alpha_k}$ la factorización canónica de n. Entonces

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \cdots + f(p_k^{\alpha_k}) \\
&= \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \cdots + \alpha_k f(p_k) = \frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{p_k}
\end{aligned}
$$

Entonces basta encontrar cuándo ésta expresión puede ser igual a 1. Sea $S = \frac{\alpha_1}{p_1} + \cdots + \frac{\alpha_k}{p_k}$, y supongamos que S es entero. Notemos que $0 \equiv p_i S \equiv \alpha_i \pmod{p_i}$, y por lo tanto $p_i \mid \alpha_i$. En particular $\alpha_i \geq p_i$ y $\frac{\alpha_i}{p_i} \geq 1$, por lo que $S \geq k$. Luego la única forma de que S sea igual a 1 es si $k = 1$ también. En este caso debemos además tener $\alpha_1 = p_1$, por lo que $g(n) = 1$ si y solo si $n = p^p$ con p primo.

56.3. Problema 3

Sean $P = \sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{a^3+2}$ y $Q = \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^3+2}$. Notemos que $P + 2Q = 3$, y por lo tanto $P \geq 1 \implies Q \leq 1$. Con esto en mente, nos limitamos a probar que $P \geq 1$. Notemos que

$$
\frac{a^3}{a^3+2} = \frac{a^3}{a^3+2abc} = \frac{a^2}{a^2+2bc}
$$

Entonces, aplicando la desigualdad útil tenemos

$$
\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{a^3+2} = \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a^2+2bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} = 1
$$

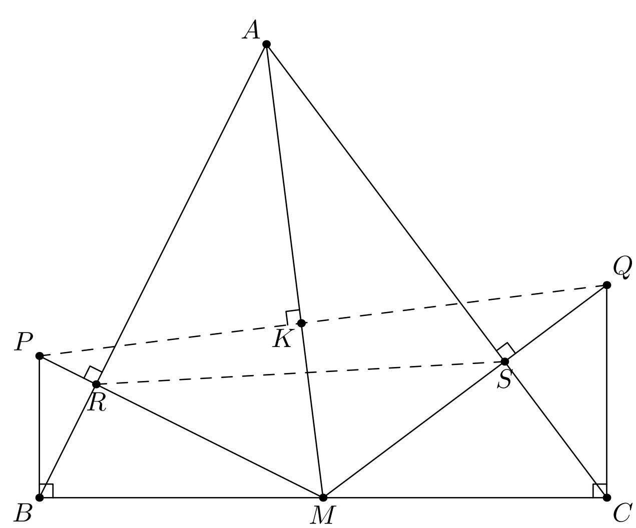
56.4. Problema 4

Sean $m = a_1 < a_2 < \ldots < a_n = M$ los números sin pérdida de generalidad. Entonces

$$
\begin{aligned}
m = a_1 &< a_1 + (a_3 - a_2) + (a_5 - a_4) + \cdots + (a_n - a_{n-1})) = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_n \\
&= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_n < a_n = M
\end{aligned}
$$

Pues $a_{i+1} - a_i > 0$.

56.5. Problema 5



Sea $K = PQ \cap AM$, $R = AB \cap PM$, $S = AC \cap QM$. Como $\angle ASQ = 90°$, tenemos $\angle AKQ = 90°$ si y solo si $AKSQ$ es cíclico, lo cual pasa si y solo si $\angle MQP = \angle MAS$. Notemos que $ARMS$ es cíclico por tener dos ángulos rectos, y entonces $\angle MAS = \angle MRS$. Luego $PQ \perp AM$ si y solo si $\angle MRS = \angle MQP$, lo cual pasa si y solo si P, Q, R, S son concíclicos, lo cual por potencia desde M pasa si y solo si

$$MR \cdot MP = MS \cdot MQ$$

Ahora, notemos que (PBR) es tangente a BC, pues $\angle PRB = \angle PBM = 90°$. Por potencia desde M obtenemos

$$MR \cdot MP = MB^2$$

Análogamente $MS \cdot MQ = MC^2$. Sustituyendo esto en lo antes obtenido concluímos que $AM \perp PQ$ si y solo si

$$MB^2 = MR \cdot MP = MS \cdot MQ = MC^2$$

Lo cual pasa si y solo si M es punto medio de BC.

56.6. Problema 6

Formalmente, tenemos una gráfica simple G con n vértices tal que en cualquier subgráfica inducida de 4 vértices hay un triángulo o tres vértices independientes. Queremos probar que existe una partición $V(G) = G_1 \cup G_2$ tal que la subgráfica inducida por G_1 es completa y la subgráfica inducida por G_2 no tiene aristas. Sea $A \subseteq G$ de tamaño máximo tal que la subgráfica inducida por V es completa y $B = G \setminus A$. Afirmamos que $V(G) = A \cup B$ funciona.

Supongamos por contradicción que no, entonces existen dos vértices adyacentes $u, v \in B$. Como $A \cup \{u\}$ no es completa, existe un vértice $p \in A$ que no es adyacente a u. Análogamente existe un vértice $q \in A$ que no es adyacente a v. Tenemos ahora dos casos:

Caso 1: Si $p \neq q$.

Como $p, q \in A$, p y q son adyacentes, pero entonces es fácil comprobar que la subgráfica inducida por $\{u, v, p, q\}$ no puede tener ni un triángulo ni tres vértices independientes, contradicción.

Caso 2: Si $p = q$

Sea r cualquier vértice en $A \setminus p$, afirmamos que es adyacente a u y v. Utilizando la condición con $\{u, v, p, r\}$ sabemos que hay tres de estos vértices que forman un triángulo o tres que son independientes. Los conjuntos $\{p, u, v\}, \{p, r, u\}, \{p, r, v\}$ no son independientes ni forman un triángulo (pues $pr \in E(G)$), entonces $\{r, u, v\}$ deben ser independientes o forman un triángulo. Como $uv \in E(G)$ concluímos que forman un triángulo.

Como esto se cumple para cualquier $r \in A \setminus p$ y u, v son adyacentes, deducimos que $(A \setminus p) \cup \{u, v\}$ induce una gráfica completa en G, pero esto contradice la maximalidad de A como subgráfica completa inducida.

57. Soluciones de la XXIV OMM 2010

Enunciados en la página 32

57.1. Problema 1

Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \geq b \geq c$. Si $bc \geq 4$ entonces

$$abc \geq 4a \geq a + b + c + a > a + b + c + 1$$

Entonces $bc \leq 3$ y en particular $c \leq 1$, y $c = 1$. La ecuación se reduce a

$$ab = a + b + 2 \implies (a-1)(b-1) = 3$$

Como 3 es primo y $a - 1 > b - 1$ concluímos que $a - 1 = 3$ y $b - 1 = 1$. Luego las ternas son $(4, 2, 1)$ y sus permutaciones.

57.2. Problema 2

Notemos que voltear la misma fila o columna dos veces es equivalente a no hacer nada, entonces podemos suponer que cada fila y columna se voltea a lo más una vez. Notemos que un foco queda encendido si y solo si su fila se voltea y su columna no, o viceversa. Digamos que f_0, f_1 son el número de filas que no se voltean y que sí, respectivamente, y c_0, c_1 son lo mismo para las columnas, de modo que $f_0 + f_1 = c_0 + c_1 = n$. Entonces el número de focos encendidos es

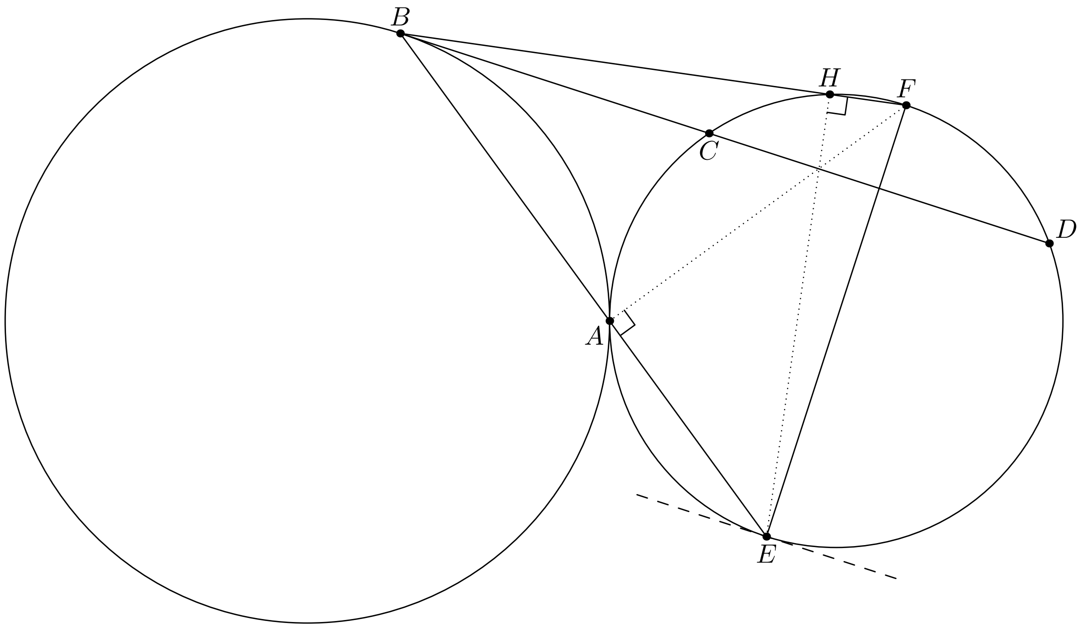
$$f_0 c_1 + c_0 f_1$$

Pues este es el número de parejas $(\text{fila}, \text{columna})$ donde la fila no se volteó pero la columna si, o viceversa. Buscamos entonces probar que $f_0c_1 + c_0f_1 = 0$ o $f_0c_1 + c_0f_1 \geq n$. Como $f_0 + f_1 = n$ tenemos $\text{mín}(f_0, f_1) \leq \frac{n}{2}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f_0 \leq \frac{n}{2}$. Si $f_0 = 0$ entonces $f_1 = n$ y la expresión se vuelve nc_0, que evidentemente es o cero o al menos n. De lo contrario tenemos

$$f_0c_1 + c_0f_1 = f_0(n - c_0) + c_0(n - f_0) = nf_0 + c_0(n - 2f_0) \geq nf_0 \geq n$$

Pues $n - 2f_0 \geq 0$.

57.3. Problema 3



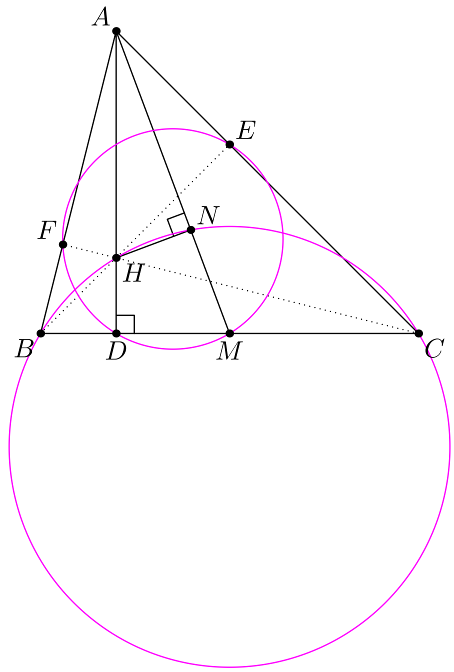
Como A es el centro de homotecia interno entre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, la tangente a $\mathcal{C}_2$ en E es paralela a la tangente a $\mathcal{C}_1$ en B, que es CD. Deducimos entonces que E es el punto medio del arco CAD. Por lo tanto EF es un diámetro de $\mathcal{C}_2$ y $EF \perp CD$. Entonces $\angle EHF = 90°$ y $\angle FAE = 90°$, por lo que $EH \perp BF$ y $FA \perp BE$. Concluímos que EH, AF y CD son las alturas del triángulo BEF, y por lo tanto concurren en su ortocentro.

57.4. Problema 4

Supongamos que esto es posible para cierto n. Notemos que la suma de cada fila es 3 inicialmente y se mantiene igual al realizar operaciones. Entonces la suma total es $3n$, y la suma de cada columna es $\frac{3n}{4}$, por lo que $4 \mid n$.

Ahora, consideremos una fila con números a, b, c, d. Es fácil comprobar que $b + 2c \bmod 3$ es invariante bajo las operaciones. Inicialmente este es 2 en cada fila. Sumando obtenemos que la suma es igual a $2n \bmod 3$. Pero si todas las columnas suman lo mismo, la suma de estas invariantes debe ser $0 \bmod 3$. Deducimos que $3 \mid n$, y entonces $12 \mid n$, lo cual implica $n \geq 12$.

57.5. Problema 5



Sean D, E y F los pies de las alturas de A, B y C respectivamente. Como $BDHF$ y $CEHD$ son cíclicos tenemos

$$AF \cdot AB = AH \cdot AD = AE \cdot AC = \rho^2$$

Invertimos con centro A y radio ρ. La imagen del circuncírculo de BHC es el circuncírculo de DEF, que es conocido que pasa por M. Entonces M es el inverso de N, y como D es el inverso de H conclúimos que $\angle ANH = \angle ADM = 90°$.

57.6. Problema 6

Por el Pequeño Teorema de Fermat

$$(pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1 \equiv (qr)^p - 1 \equiv qr - 1 \pmod{p}$$

Deducimos que $p \mid qr - 1$, y entonces $p \mid pq + qr + rp - 1$. Análogamente q y r dividen a esta cantidad, y entonces

$$pqr \mid pq + qr + rp - 1$$

Suponemos sin pérdida de generalidad que $p < q < r$. Si $p \geq 3$ entonces $pqr \geq 3qr > pq + qr + rp - 1$ y la divisibilidad es imposible. Entonces $p = 2$. Si $q \geq 5$ entonces

$$2qr = qr + qr \geq qr + 5r > qr + 2q + 2r - 1$$

Y nuevamente la divisibilidad es imposible, entonces $q = 3$. La condición ahora se reduce a $6r \mid 5r + 5$, entonces $6r \leq 5r + 5 \implies r \leq 5$. Como $r > q$ deducimos que $r = 5$. Entonces la segunda expresión considerada en el problema es simplemente

$$3(6^5 + 15^2 + 10^3 - 1) = 3(7776 + 225 + 1000 - 1) = 3(9000) = 27000 = (30)^3 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^3$$

Y la divisibilidad es evidente.

58. Soluciones de la XXV OMM 2011

Enunciados en la página 33

58.1. Problema 1

Veamos que es posible cambiar el estado de cualquier foco sin afectar el resto, con lo cual el resultado es obvio. Nombramos $0, 1, \ldots, 23$ a los focos sobre la circunferencia, en orden

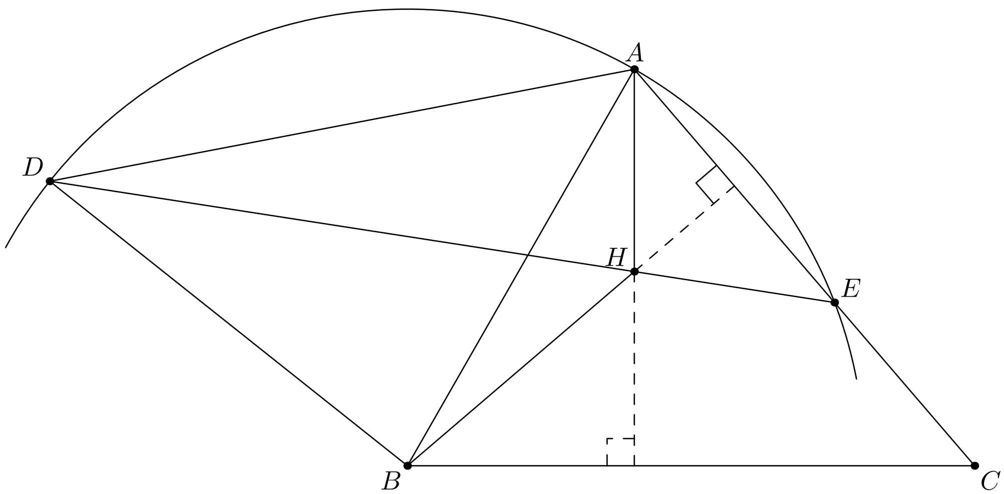
- Para voltear un foco k en la circunferencia.

  Aplicamos la operación 2 a los focos $k, k+8, k+16$ mód 24. Luego aplicamos la operación 1 a los focos $k+8, k+16$ mód 24.

- Para voltear el foco central.

  Aplicamos la operación 1 tres veces, a las parejas $(0, 8)$, $(8, 16)$ y $(16, 0)$.

58.2. Problema 2



Sea H el punto en DE tal que $BH \perp AC$. Si demostramos que $AH \perp BC$, terminamos.

Notemos que B es el circuncentro de ADE, entonces como $BH \perp AE$, BH es la mediatriz de AE y $AH = HE$. Además $\angle ABD = 2\angle AED$ pues estos corresponden a un ángulo central y uno inscrito. Finalmente

$$\angle HAE = \angle AEH = \angle AED = \frac{\angle ABD}{2} = \frac{180° - \angle BDA - \angle BAD}{2} = 90° - \angle BAD = 90° - \angle ACB$$

Donde la última igualdad se da ya que BD es tangente a Γ. Como $\angle HAE + \angle ACB = 90°$ concluímos que $AH \perp BC$.

58.3. Problema 3

Sea $f(x) = x^2 + x - 1$, entonces el problema equivale a encontrar todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $f^n(x) = x$ (entonces $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ es una solución). Afirmamos que para todo n los únicos x son 1 y -1. Estos claramente cumplen, pues $f(x) = x$.

Notemos primero que $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$, por lo que $f(\mathbb{R}) \subset \left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$, y todos los puntos fijos iterados de f están en este intervalo. Luego podemos ignorar todos los x menores que $-5/4$.

Ahora veamos que $f(x) - x = x^2 - 1$, por lo que $f(x) > x$ si $|x| > 1$ y $f(x) < x$ si $|x| < 1$. Veamos ahora que ningún $x > 1$ es un punto fijo iterado. En efecto, si $x > 1$ entonces $f(x) > x > 1$ y entonces

$$x < f(x) < f(f(x)) < \dots$$

Por lo que $f^n(x) > x$ y x no es un punto fijo iterado. Ahora demostramos que si $x \in (0,1)$ entonces x no es un punto fijo iterado. Para esto notemos que

$$f\left(\left[-\frac{5}{4}, 0\right]\right) = \left[-\frac{5}{4}, -\frac{11}{16}\right] \subset \left[-\frac{5}{4}, 0\right]$$

Por lo que si $x < 0$ entonces $f^n(x) < 0$. De aquí concluímos que si un $x \in (0,1)$ es un punto fijo iterado de f entonces $f^n(x) \geq 0$ para todo n. Pero si $x \in (0,1)$ entonces $f(x) < x < 1$, y $f(x) \in (0,1)$. Deducimos entonces que

$$x > f(x) > f(f(x))) > \dots$$

Y $f^n(x) < x$, por lo que x no cumple. Finalmente nos falta ver que pasa con los x en $[-\frac{5}{4}, 0]$. De la cuenta anterior sabemos que $f^n(x) \in [-\frac{5}{4}, -\frac{11}{16}]$ siempre que $x \in [-\frac{5}{4}, 0]$. Sea $a_0 = -\frac{5}{4}$, $b_0 = -\frac{11}{16}$, y definimos

$$a_{n+1} = f(b_n), b_{n+1} = f(a_n)$$

Afirmamos que $a_n < a_{n+1} < -1 < b_{n+1} < b_n < -\frac{1}{2}$ para todo n. Comprobamos esto manualmente para $n = 0$ y ahora vemos que

$$a_{n+2} = f(b_{n+1}) = \left(b_{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} > \left(b_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = f(b_n) = a_{n+1}$$

Y análogamente $b_{n+2} < b_{n+1}$. Que $b_{n+1} > -1$ se sigue de $a_n^2 + a_n - 1 > -1$ pues $a_n < -1$ y entonces $|a_n^2| > |a_n|$. Un argumento similar muestra que $a_{n+1} < -1$. Ahora sea $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Es claro que $a \leq -1$, afirmamos que $a = -1$. Si $a < -1$ entonces veamos que

$$\begin{aligned} f(f(a)) - a &= (a^2 + a - 1)^2 + a^2 + a - 1 - 1 - a = a^4 + a^2 + 1 + 2a^3 - 2a - 2a^2 + a^2 - 2 \\ &= a^4 + 2a^3 - 2a - 1 = (a-1)(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) = (a-1)(a+1)^3 > 0 \end{aligned}$$

Y $f(f(a)) > a$. Como f^2 es continua existe un $\varepsilon > 0$ tal que $f(f(x)) > a$ para $x \in (a - \varepsilon, a]$. Además como a es supremo existe un a_n tal que $a_n \in (a - \varepsilon, a]$. Entonces

$$a_{n+2} = f(b_{n+1}) = f(f(a_n)) > a$$

Contradiciendo que a es supremo. Luego $a = 1$, y análogamente vemos que $\inf\{b_n | n \in \mathbb{N}\} = 1$. Finalmente, supongamos que $x \in [-\frac{5}{4}, \frac{-11}{16}]$ es tal que $f^n(x) = x$ y $x \neq -1$. Como $x \neq -1$, el supremo de a_n es -1, y el ínfimo de b_n es -1, concluímos que existe un n tal que $x \notin [a_n, b_n]$. Como $x \in [a_0, b_0]$ existe un único $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in [a_N, b_N] \text{ pero } x \notin [a_{N+1}, b_{N+1}]$$

Pero por la manera en la que definimos los a_i y b_i tenemos que si $x \in [a_n, b_n]$ entonces $f(x) \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Como los intervalos son anidados concluímos que $f^n(x) \in [a_{N+1}, b_{N+1}]$ para todo N, y entonces $f^n(x) \neq x$.

En conclusión, las soluciones son $(1, 1, \ldots, 1)$ y $(-1, -1, \ldots, -1)$.

58.4. Problema 4

La respuesta es 6060600. Todas las divisibilidades son inmediatas excepto la del 7, que podemos comprobar a mano: $6060600/7 = 865800$.

Supongamos que cierto entero cumple la condición, entonces es divisible entre 2 y 5, por lo que es divisible entre 10, y termina en cero. Luego, uno de los dígitos usados es 0. Sea d el restante. Si $3 \nmid d$ entonces como la suma de dígitos del número es divisible entre 9, pues el número en sí lo es, este número debe ser al menos 111111111, que es mayor a 6060600. Entonces $d = 3, d = 6$ o $d = 9$. Comprobamos los tres casos por separado

- Si $d = 3$

  Como 8 divide al número, éste debe terminar con tres ceros. Además el número de 3s debe ser múltiplo de 3. Ahora veamos que

  $$(10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6) \pmod 7 = (1, 3, 2, 6, 4, 5, 1) \pmod 7$$

  Si el número tiene al menos seis 3s entonces es al menos $333333000 > 6060600$. Si tiene exactamente 3, notemos que entre los números $6, 4, 5, 1$ no hay tres con suma 0 mód 7, por lo que el número tiene más de 7 dígitos y es mayor que 6060600.

- Si $d = 6$

  Las posibles terminaciones para que el número sea múltiplo de 8 son 000 y 600. Si el número termina en 000 obtenemos algo mayor que 6060600 de manera análoga al caso anterior. Digamos ahora que el número termina en 600. Nuevamente, debe haber exactamente 3 dígitos distintos de cero para tener el mínimo número posible. Luego, para arreglar la congruencia $\pmod 7$ hay que elegir dos números de entre $(6, 4, 5, 1)$ con suma 5 mód 7. La única opción es tomar 1 y 4, que nos da el número 6060600.

- Si $d = 9$

  Nuevamente el número debe acabar en 000. Ahora el número es automáticamente múltiplo de 9, por lo que solo hay que considerar la congruencia módulo 7. Hay entonces que elegir algunos números de entre $(6, 4, 5, 1)$ con suma 0 mód 7. Es fácil comprobar que la única opción es 1 y 6, lo cual nos da el número $9009000 > 6060600$.

58.5. Problema 5

Notemos que el número total de cuadritos es $2^{2n} - 1$. El resultado principal es el siguiente:

Lema: Si $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son enteros no negativos tales que $2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_k} = 2^m - 1$ entonces $k \geq m$.

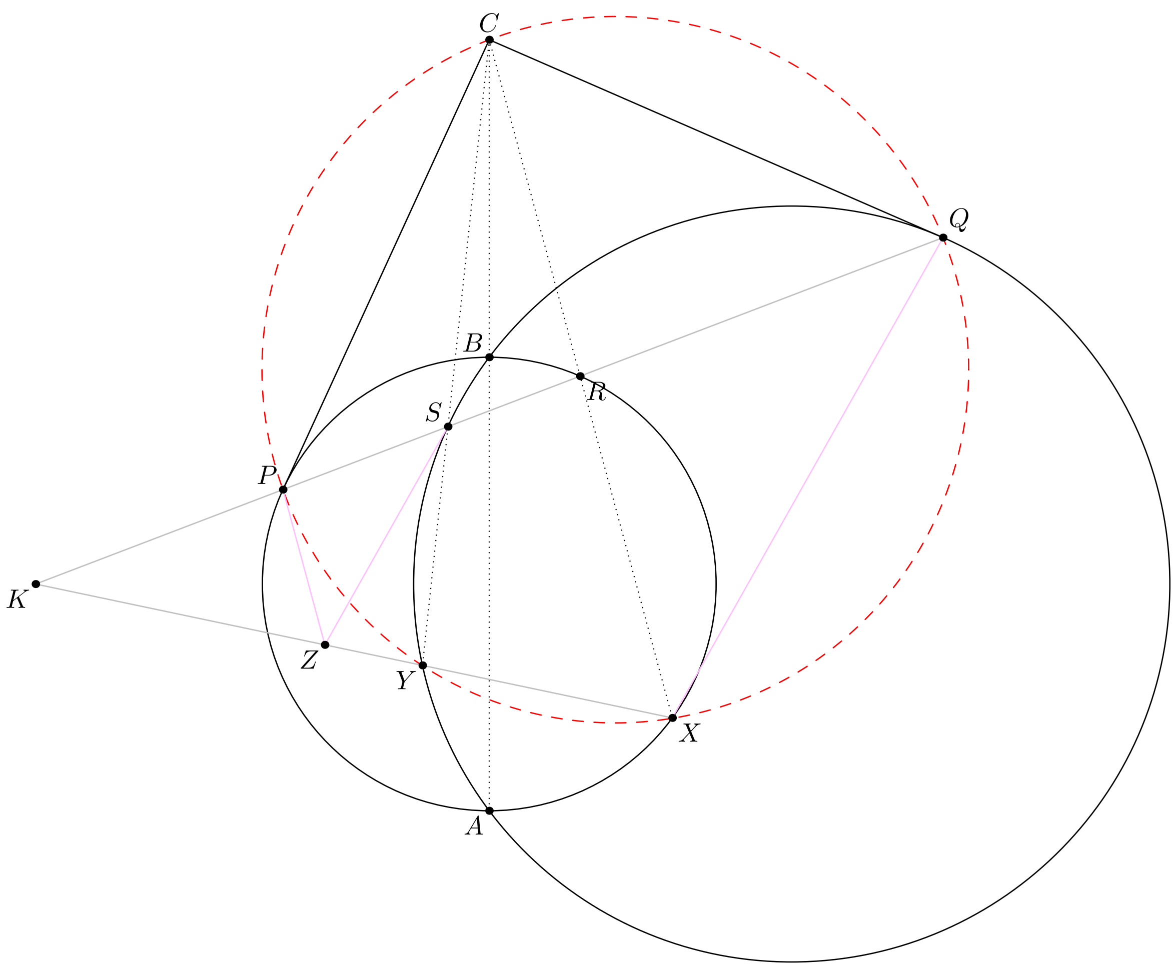
Demostración: Supongamos que la colección $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tiene el mínimo valor posible de k. Entonces $a_i \neq a_j$ pues podríamos sustituir a estos dos elementos por uno único con valor $a_i + 1$. Además es claro que $a_i < m$ para todo i. De aquí se sigue que cada una de las potencias $2^0, 2^1, \ldots, 2^{m-1}$ aparece a lo más una vez y entonces

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m - 1$$

La igualdad solo se da si cada potencia aparece exactamente una vez, lo cual implica que $k = m$. $\square$
El lema implica que se usan al menos $2n$ rectángulos. Para ver que este es el mínimo hacemos la siguiente construcción:

	2^0	2^1	2^2		2^{n-1}
2^0	2^0	2^1	2^2	$\cdots$	2^{n-1}
2^n	2^n	2^{n+1}	2^{n+2}	$\cdots$	2^{2n-1}

58.6. Problema 6



Notemos que C está en el eje radical AB de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, entonces $CP^2 = CB \cdot CA = CQ^2$ y $CP = CQ$. Ahora tenemos $\angle CXP = \angle CPR = \angle CQP$ y entonces $CPXQ$ es cíclico. Análogamente $CPYQ$ es cíclico y C, P, X, Y, Q son todos concíclicos. Veamos además que $CR \cdot CX = CB \cdot CA = CY \cdot CS$ y entonces R, S, X, Y son concíclicos.

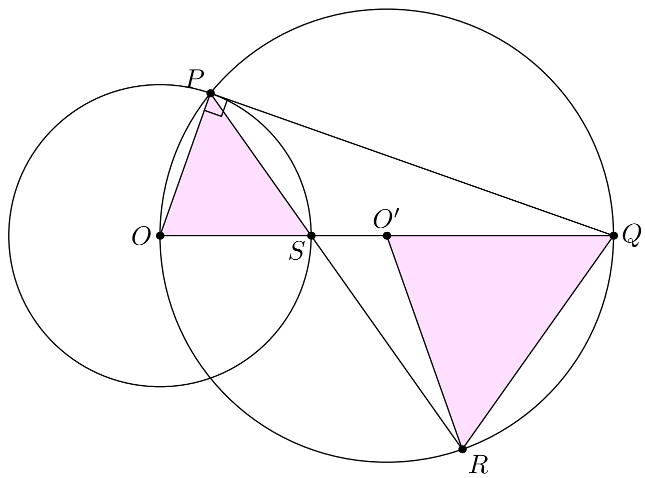
Sea $K = PQ \cap XY$ (que exite pues $PQ \parallel XY \implies CR = CS \implies \triangle CRP \cong CSQ$ y entonces $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tendrían el mismo radio). Por potencia tenemos

$$KP \cdot KQ = KX \cdot KY = KR \cdot KS \implies \frac{KS}{KQ} = \frac{KP}{KR}$$

Para finalizar veamos que $QX \parallel SZ$ si y solo si $\frac{KZ}{KX} = \frac{KS}{KQ}$, y que $RX \parallel PZ$ si y solo si $\frac{KZ}{KX} = \frac{KP}{KR}$. Como ya comprobamos que estas razones son iguales, el resultado es inmediato.

59. Soluciones de la XXVI OMM 2012

Enunciados en la página 34



59.1. Problema 1

Como $OPQR$ es cíclico tenemos $\angle SQR = \angle OPS$. Además $\angle RSQ = \angle OSP$. Como $OP = OS$, pues O es centro de $\mathcal{C}_1$, $\angle OPS = \angle OSP$, y entonces $\angle SQR = \angle RSQ$, y $RS = RQ$.

Sea O' el centro de $\mathcal{C}_2$. Como $\angle OPQ = 90°$, pues QP es tangente a $\mathcal{C}_1$, este centro yace en OQ. Como $O'Q = O'R$ deducimos que $\angle O'RQ = \angle O'QR$. Con los ángulos ya obtenidos podemos ver fácilmente que $\triangle OPS \sim \triangle O'QR$, y entonces

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{OP}{O'Q} = \frac{PS}{QR} = \frac{PS}{SR}$$

59.2. Problema 2

Consideremos una subcuadrícula de 2×2. Dentro de esta subcuadrícula, cualquier número marcado con 3 es vecino de al menos un 1 y cualquier número marcado con 4 es vecino de dos 1s. Veamos que la suma en esta subcuadrícula es a lo más 10. Si el número máximo en la subcuadrícula es 2 esto es inmediato. Si es 4 entonces sus dos vecinos son 1s, y el máximo posible valor del cuarto número es 4, esto suma $4+1+1+4 = 10$. Finalmente si el máximo número es 3 tenemos esencialmente tres casos:

1	3
3	1

2	3
3	1

3	1
3	1

Todos estos con suma menor que 10.

Como el tablero se puede dividir en $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ cuadrículas de 2×2 deducimos que la suma total es a lo más $\frac{5n^2}{4}$. Finalmente, para cualquier n par podemos alcanzar esta suma poniendo 1s y 4s en forma de ajedrez:

4	1	4	1	4	1
1	4	1	4	1	4
4	1	4	1	4	1
1	4	1	4	1	4
4	1	4	1	4	1
1	4	1	4	1	4

59.3. Problema 3

Veamos que entre $x, x+1, \ldots, x+13$ existen seis enteros primos relativos dos a dos. Sea $y \in \{x, x+1, x+2, x+3\}$ tal que $(y, 10) = 1$. Tenemos tres casos.

- Caso 1: Si $y \equiv 0 \pmod{3}$

  Elegimos los números $y, y+2, y+4, y+5, y+8, y+10$. El único par es $y+5$, el único múltiplo de 3 es y, las diferencias entre dos elementos del conjunto no tienen facores primos distintos de $2, 3, 5$, y los números $y, y+5, y+10$ no son múltiplos de 5.

- Caso 2: Si $y \equiv 2 \pmod{3}$

  Elegimos $y, y+2, y+4, y+5, y+6, y+8$. Este es similar al caso anterior con la diferencia de que el único múltiplo de 3 es $y+4$.

- Caso 3: Si $y \equiv 1 \pmod{3}$

  Si $5 \nmid y+1$ elegimos $y, y+1, y+2, y+4, y+6, y+10$, y éste funcion por razones similares a los casos anteriores. En caso contrario elegimos $y, y+4, y+6, y+8, y+9, y+10$.

59.4. Problema 4

Sea $s(n)$ la suma de los dígitos de n y sea $\virgo(n) = \frac{n-s(n)}{9}$. Notemos que $\virgo$ es (no estrictamente) creciente pues $s(n+1) \leq s(n)+1$. Fácilmente comprobamos que $\virgo(\virgo(\virgo(2012))) = 2$, entonces buscamos los números cuya casa es 2. Ahora veamos las desigualdades

$$\virgo(19) = 1 < 2 = \virgo(20) = \virgo(29) < 3 = \virgo(30)$$
$$\virgo(189) = 19 < 20 = \virgo(190) \leq \virgo(279) = 29 < 30 = \virgo(280)$$
$$\virgo(1719) = 189 < 190 = \virgo(1720) \leq \virgo(2529) = 279 < 280 = \virgo(2530)$$
$$\virgo(15499) = 1719 < 1721 = \virgo(15500) \leq \virgo(22789) = 2529 < 2530 = \virgo(22790)$$

Como $\virgo$ es creciente deducimos que los números buscados son los del conjunto $\{2\} \cup [20, 29] \cup [190, 279] \cup [1720, 2529] \cup [15500, 22789]$, que son exactamente 8201 números. Los valores anteriores se pueden obtener manualmente usando búsqueda binaria, pues nuevamente, $\virgo$ es creciente.

59.5. Problema 5

Comenzamos con algunas observaciones preliminares. Identificamos las casillas con coordenadas (x, y). La observación principal es que

- Si una rana es roja entonces $2x + y \pmod 5$ es invariante.
- Si una rana es verde entonces $x + 2y \pmod 5$ es invariante.

Lo cual podemos verificar viendo que cada movimiento deja invariante esta cantidad. Además podemos comprobar fácilmente que una rana roja en la casilla (x, y) puede alcanzar la casilla (x', y') si y solo si $2x + y \equiv 2x' + y'$. La suficiencia es evidente por la invarianza, veamos ahora que es suficiente

Veamos primero que la rana puede moverse 5 casillas en cualquier dirección ortogonal. Esto se alcanza con las secuencias de movimientos

$$\begin{gathered}(2,1),(2,1),(1,-2)\\(-2,-1),(-2,-1),(-1,2)\\(1,-2),(1,-2),(-2,-1)\\(-1,2),(-1,2),(2,1)\end{gathered}$$

Es posible que estos nos hagan salir del tablero, pero siempre podemos permutarlos de manera que esto no suceda, siempre y cuando la casilla destino esté dentro del tablero.

Ahora, suponemos sin perder generalidad que $x' > x$ (de lo contrario esto es equivalente al mismo problema pero yendo de (x', y') a (x, y)). Realizamos movimientos en la dirección $(1, -2)$ hasta que la coordenada x de la rana sea congruente con $x' \pmod 5$. Si en algún momento este movimiento es inválido, nos movemos 5 casillas hacia la izquierda o hacia arriba para volverlo válido. Ahora como la coordenada x de la rana es congruente con $x' \pmod 5$, la coordenada y debe ser congruente con y'. Entonces podemos llegar a la casilla (x', y') desplazandonos 5 en alguna dirección repetidas veces.

Llamemos a una rana roja de tipo k si empeiza en una casilla (x, y) con $2x + y \equiv k \pmod 5$. Análogamente una rana verde que empieza en (x, y) puede llegar a (x', y') si y solo si $x + 2y \equiv x' + 2y' \pmod 5$, y decimos que es de tipo k si $x + 2y \equiv k \pmod 5$.

Parte (b)

Digamos que la rana roja es de tipo k_1 y la verde es de tipo k_2, entonces la casilla (x, y) es simultaneamente alcanzable por ámbas si y solo si

$$\begin{aligned}2x + y &\equiv k_1 \pmod 5\\x + 2y &\equiv k_2 \pmod 5\end{aligned}$$

Restando dos veces la primera congruencia a la segunda tenemos

$$2x \equiv -3x \equiv k_2 - 2k_1 \pmod 5$$

y entonces

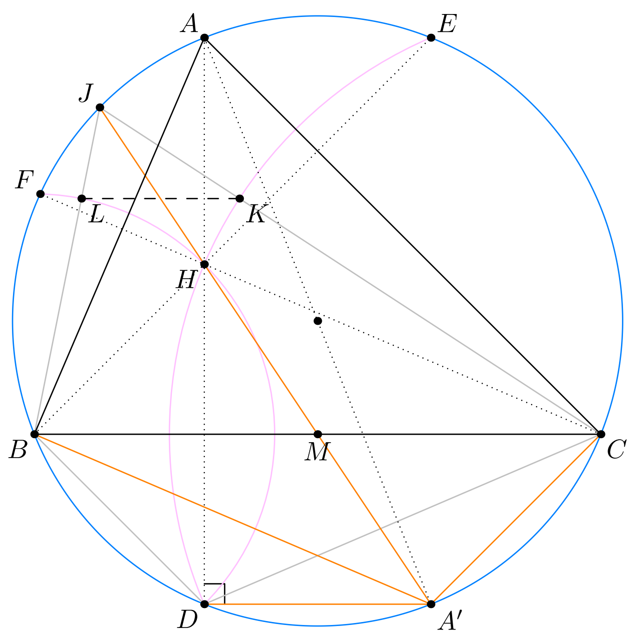
$$x \equiv 3(k_2 - 2k_1) \pmod 5$$

Veamos ahora que si $3(k_2 - 2k_1) \equiv 1 \pmod 5$ hay tres opciones para x, mientras que en cualquier otro caso hay dos. Una vez que fijamos la congruencia de x, la de y también está fija (por cualquiera de las dos ecuaciones), y también tiene dos o tres opciones. Por lo tanto los posibles k son $2 \times 2 = 4, 2 \times 3 = 6$ y $3 \times 3 = 9$. Para ver que todos son alcanzables veamos que $(k_1, k_2) = (0,1), (0,2), (3,3)$ dan $4, 6$ y 9 soluciones respectivamente.

Parte (a)

Por la parte anterior, si dos ranas son de distinto color entonces se pueden encontrar. De lo contrario, hay dos ranas del mismo color y del mismo tipo, y estas también se pueden encontrar.

59.6. Problema 6



Es un hecho conocido que las reflexiones de H respecto a los lados caen en $\mathcal{C}$, y por lo tanto D, E, F son estas reflexiones. Luego $BD = BH = BF$, por lo que B es el punto medio del arco menor DF. Como $J \in \mathcal{C}$, el incentro de DFJ es el punto L en el segmento JB tal que $BL = BD = BF$. Análogamente K está en JC y $CK = CD = CE$. Ahora el paralelismo deseado equivale a

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BL}{CK} = \frac{BJ}{CJ}$$

Sea A' el antipodal de A en $\mathcal{C}$. Entonces $\angle ACA' = 90°$ y $A'C \perp AC$, por lo que $A'C \parallel BH$. Análogamente $A'B \parallel CH$, entonces $BHCA'$ es un paralelogramo y J, H, M, A' son colineales. Finalmente veamos que $\angle ADA' = 90°$, entonces $AD \perp DA'$ y $DA' \parallel BC$. Por lo tanto

$$(B, C; J, D) = A'(B, C; J, D) \stackrel{BC}{=} (B, C; M, \infty_{BC}) = -1$$

Pues M es punto medio de BC. Entonces $BDCJ$ es un cuadrilátero armónico y $\frac{BD}{CD} = \frac{BJ}{CJ}$.

60. Soluciones de la XXVII OMM 2013

Enunciados en la página 36

60.1. Problema 1

Notemos que para todo $i \geq 2$ se cumple que $p_{i+1} - p_i \geq 2$, pues si $p_i \geq 3$ es primo entonces $p_i + 1$ es par. Deducimos que si $a \geq b \geq 2$ entonces

$$p_a - p_b = (p_a - p_{a-1}) + (p_{a-1} - p_{a-2}) + \cdots + (p_{b+1} - p_b) \geq 2 + 2 + \cdots + 2 = 2(a-b)$$

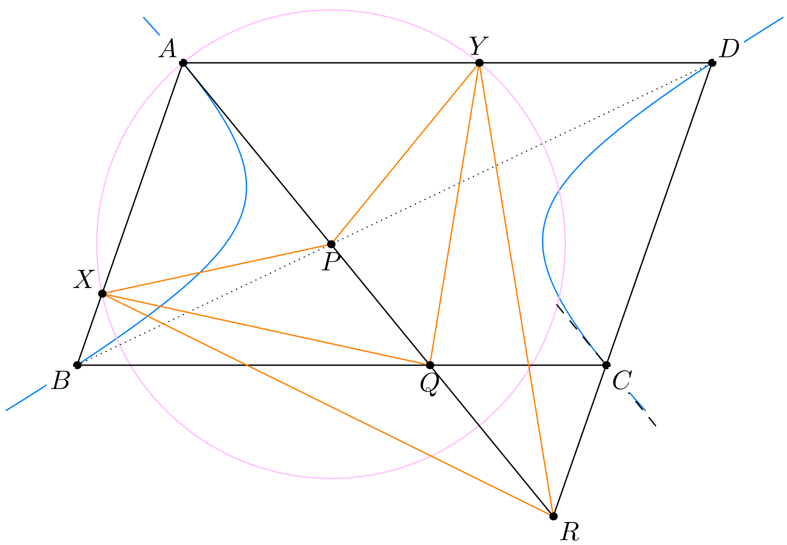
Por lo que para $b \geq 2$, si $p_a - p_b \mid 2(a-b)$ entonces $p_a - p_b = 2(a-b)$. Esto implica que la igualdad debe darse para $p_{i+1} - p_i = 2$ siempre. En particular $p_{b+1} = p_b + 2$ y $p_{b+2} = p_b + 4$. Pero si $b \geq 3$ entonces $3 \nmid p_b$, por lo que alguno de $p_b + 2$ y $p_b + 4$ es múltiplo de 3, contradiciendo que es primo.

Entonces $b \leq 2$. Si $b = 2$ entonces nuevamente debemos tener igualdad en las desigualdades $p_{i+1} - p_i = 2$. Como $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, deducimos que $a = 4$ cumple, pero $p_5 = 11 > 7 + 2$, por lo que ningún $a > 2$ cumple. Si $b = 1$ entonces $p_a - p_b = p_a - 2$ es impar, por lo que debe dividir a $a - b = a - 1$. En particular

$$p_a - 2 \leq a - 1 \implies p_a \leq a + 1$$

Pero $p_{a+1} \geq p_a + 1$, y como $p_3 = 5 > 3 + 1$ se sigue que $p_i > i + 1$ para todo $i \geq 3$, por lo que no hay más soluciones.

60.2. Problema 2



Sea ℓ la recta AP y sea $\mathcal{C}$ una circuncónica de $ABCD$ tangente a ℓ. Por el Teorema de Pascal las intersecciones de lados opuestos del hexágono $ABCCDA$ concurren. Estas son $AB \cap CD = \infty_{AB}$, $BC \cap AD = \infty_{BC}$, y $AA \cap CC$, por lo que estas últimas dos lineas se cortan sobre la linea al infinito y la tangente a $\mathcal{C}$ en C es paralela a ℓ.

Por el Teorema de Involución de Desargues con el cuadrilátero $BCCD$, la cónica $\mathcal{C}$ y la recta ℓ, existe una involución proyectiva sobre ℓ que intercambia las parejas

$$(BC\cap \ell, CD\cap \ell) = (Q,R)$$
$$(CC\cap \ell, BD\cap \ell) = (\infty_\ell, P)$$
$$\text{Las intersecciones } (A,A) \text{ de } \ell \text{ y } \mathcal{C}$$

Como esta manda P al punto al infinito y fija A, debe ser de hecho la inversión con centro P y radio PA, con lo que concluímos que $PA^2 = PQ\cdot PR$.

Finalmente como $PY^2 = PA^2 = PQ\cdot PR$ tenemos $\angle PYQ = \angle PRY$, y entonces

$$\angle APY = \angle PQY + \angle PYQ = \angle PQY + \angle PRY$$

Análogamente $\angle APX = \angle PQX + \angle PRX$, y por lo tanto

$$\angle XPY = \angle APX + \angle APY = \angle PQX + \angle PQY + \angle PRX + \angle PRY = \angle XQY + \angle XRY$$

Como queríamos.

60.3. Problema 3

La respuesta es 672, veamos primero que el conjunto $\{671, 673, 675, \ldots, 2013\}$ con 672 elementos cumple lo deseado. Veamos que todos los elementos son impares mientras que las diferencias $b-c$ son todas pares, por lo que $b-c\nmid a$. Si $a\mid b-c$, supongamos que $b\geq c$. Entonces $b\geq c+2a$ pues c y a tienen la misma paridad. Pero $c+2a\geq 671+2\cdot 671 = 2013$, y la igualdad es imposible pues $a\neq c$. Concluímos que este conjunto cumple.

Ahora supongamos que $S\subseteq\{1,2,\ldots,2013\}$ y $|S|\geq 673$. Si $\text{mín}(S)\geq 671$ entonces existen dos elementos consecutivos en S, pues de lo contrario

$$\text{máx}(S)\geq \text{mín}(S) + 2(|S|-1)\geq 671+2\cdot 672 > 2013$$

Pero $(b+1)-b\mid a$ para cualquier a, entonces S no cumple la condición. Si $\text{mín}(S)\leq 670$ entonces hay dos elementos de $S\setminus\{\text{mín}(S)\}$ que son congruentes módulo $\text{mín}(S)$ por casillas, y $\text{mín}(S)$ divide a su diferencia, por lo que S tampoco cumple.

60.4. Problema 4

Pintamos el cubo de ajedrez, de rosa y gris de tal modo que cada cubo rosa es adyacente a puros grises y vice-versa. De la condición del problema tenemos que cada prisma contiene un cubo negro gris y un cubo negro rosa, de modo que quitar todos los grises nos da la sustitución deseada.

60.5. Problema 5

Si $m=n$ entonces $(n,n) = (n,n-1)+(0,1)$. Ahora supongamos que $m=n+d$ con $d\geq 1$ y que $m+n\geq (m-n)^2$, que equivale a

$$n\geq \frac{d(d-1)}{2}$$

Entonces

$$(n, n+d) = (0,1) + (1,2) + \cdots + (d-1, d) + \left(n - \frac{d(d-1)}{2}, n+d - \frac{d(d+1)}{2}\right)$$

Esta última pareja es de la forma (x, x) con $x \geq 0$, entonces sustituyendo la pareja $(d-1, d)$ por $(d+x-1, d+x)$ obtenemos una representación como suma de parejas especiales distintas.

Recíprocamente supongamos que $(n, m) = (a_1, b_1) + \cdots + (a_k, b_k)$ donde las (a_i, b_i) son parejas especiales distintas. Supongamos sin pérdida de generalidad que $m \geq n$, y reordenando supongamos que las parejas $(a_1, b_1), \ldots, (a_p, b_p)$ son tales que $b_p = a_p + 1$ y $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$, entonces

$$m - n = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_k - a_k) \leq (b_1 + a_1) + \cdots + (b_p - a_p) = p$$

Y

$$\begin{aligned} m + n &= (a_1 + b_1) + \cdots + (a_k + b_k) \geq (a_1 + b_1) + \cdots + (a_p + b_p) = (a_1 + \cdots + a_p) + (b_1 + \cdots + b_p) \\ &\geq (0 + \cdots + p - 1) + (1 + \cdots + p) = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2} = p^2 \end{aligned}$$

Pues las parejas (a_i, b_i) para $1 \leq i \leq p$ son todas distintas, y entonces $a_i \geq i$, $b_i = a_i + 1 \geq i + 1$. Combinando ambas desigualdades nos queda lo que queríamos.

60.6. Problema 6

Demostramos algo más general, si $A_1 \ldots A_8$ es un octágono centralmente simétrico y B_i se definen como en el problema original entonces

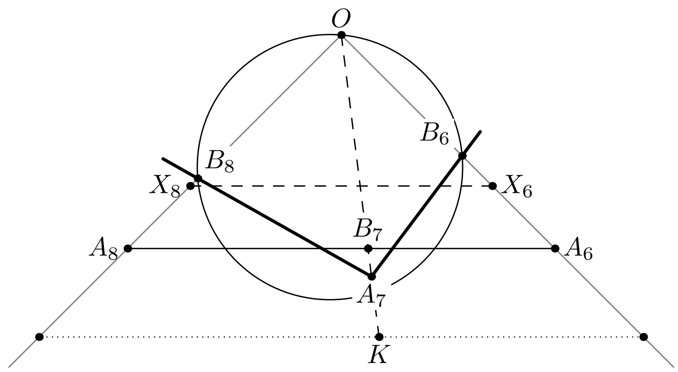
$$\frac{A_i A_{i+4}}{B_i B_{i+4}} \leq \sqrt{2}$$

Para algún i. Tomamos una trasformación afín que mande el paralelogramo $A_2 A_4 A_6 A_8$ a un cuadrado de lado 2. Como las transformaciones afines preservan razones entre segmentos, resta verificar que esto es cierto para este caso.

Sea O el centro de simetría del octágono y para $i \in \{2, 4, 6, 8\}$ sea X_i un punto en el rayo OA_i tal que $OX_i = 1$. Si para algún $i \in \{2, 4, 6, 8\}$ tenemos que $B_i \in A_i X_i$ entonces

$$\frac{A_i A_{i+4}}{B_i B_{i+4}} = \frac{OA_i}{OB_i} \leq \frac{OA_i}{OX_i} = \sqrt{2}$$

Y terminamos. Supongamos entonces que $B_i \in OX_i$ para $i \in \{2, 4, 6, 8\}$. Consideremos el ángulo más grande del paralelogramo $A_1 A_3 A_5 A_7$. Sin pérdida de generalidad éste es $\angle A_7$.



Como los ángulos del paralelogramo suman $360°$, debemos tener $\angle A_7 \geq 90°$. Entonces

$$\angle B_8OB_6 + \angle B_8A_7B_6 = 90° + \angle B_8A_7B_6 \geq 180°$$

Por lo que A_7 está contenido en el circuncírculo de OB_6B_8. Este círculo tiene díametro B_6B_8, que es menor o igual que $X_6X_8 = \sqrt{2}$, pues B_6 y B_8 están en los segmentos OX_6 y OX_8. Entonces este círculo está contenido en el cuadrado de centro O y lado $2\sqrt{2}$ con lados paralelos a los de $A_2A_4A_6A_8$, pues todo punto de este cuadrado tiene distancia al menos $\sqrt{2}$ de O. En particular A_7 está contenido en este cuadrado, y como la homotecia de centro O y razón $\sqrt{2}$ lleva A_6A_8 a un lado de este cuadrado, y B_7 está en A_6A_8, denotando por K a la intersección del rayo OA_7 con este cuadrado concluímos que

$$\frac{A_3A_7}{B_3B_7} = \frac{OA_7}{OB_7} \leq \frac{OK}{OB_7} = \sqrt{2}$$

61. Soluciones de la XXVIII OMM 2014

Enunciados en la página 37

61.1. Problema 1

Más aún, veremos que es posible hacer que los números del 1 al 4026 sean todos verdes. Para cada n del 4026 al 2 de mayor a menor, si n es verde no hacemos nada. De lo contrario elegimos un primo p que divida a n y aplicamos la operación con n y $\frac{n}{p}$. Notemos que siempre aplicamos una operación con el número en el que vamos y uno menor, por lo que una vez que dejamos verde el número actual este permanece verde.

Ahora todos los números del 1 al 4026 son verdes, salvo posiblemente 1. Si el 1 es rojo, sea $4027 = p_1 p_2 \dots p_k$ como producto de primos (no necesariamente distintos). Aplicamos la operación a las parejas

$$(1, p_1), (p_1, p_1 p_2), \dots, (p_1 p_2 \dots p_{k-1}, 4027)$$

Todos los números excepto el 1 y el 4027 se cambian dos veces, por lo que se quedan igual, y el 1 cambia su color.

61.2. Problema 2

Supongamos que m se reduce a n, de modo que $m = bn$ donde $m \equiv b \pmod{10}$. Si $(b, 10) = 1$ entonces $n \equiv 1 \pmod{10}$. Si $(b, 10) = 2$ entonces $n \equiv 1 \pmod{5}$. Si $(b, 10) = 5$ entonces n es impar.

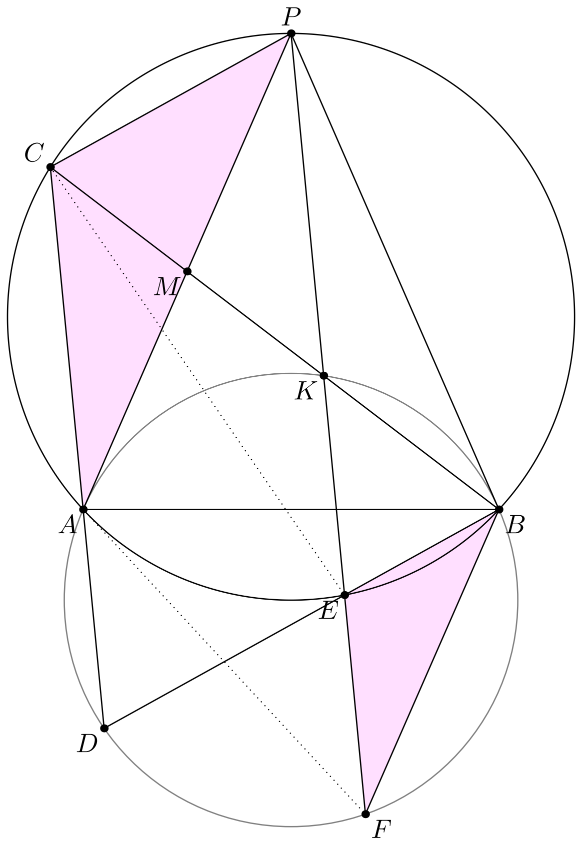
Los números $1, 2, \dots, 9$ todos se reducen a 1. Consideremos ahora un número n que llega a 1 luego de al menos dos reducciones. Denotamos por $r(n)$ al entero al que se reduce n si éste existe.

Si n es par entonces $r(n) \equiv 1 \pmod{5}$. Si $r(n) \equiv 1 \pmod{10}$ entonces $r(n) = 1$, pues $r(m) = m$ para todo número que termina en 1, pero dijimos que n tarda varios pasos en llegar a 1. Entonces $r(n) \equiv 6 \pmod{10}$. En particular $r(n)$ es par, por lo que inductivamente deducimos que $r^k(n)$ termina en 6, y $r^{k+1}(n) = r^k(n)/6$, para todo k con $r^k(n) \neq 1$. Luego n es de la forma $d \cdot 6^k$ donde d es un dígito par. Es fácil ver que $r(n) = 6^k$ y que $r^k(6^k) = 1$, entonces todos estos funcionan.

Si n es impar entonces $r^k(n)$ es impar para todo k. Si $m \not\equiv 5 \pmod{10}$ entonces $r(m) \equiv 1 \pmod{10}$, y debemos tener $r(m) = 1$. Deducimos que para todo $k \geq 0$ tenemos $r^k(n) \equiv 5 \pmod{10}$ o $r^k(n) = 1$. Además si $r(m) \equiv 5 \pmod{10}$ entonces $5 \mid r(m) \mid m$, por lo que $m = 5r(m)$. Deducimos que n es de la forma $d \cdot 5^k$ donde d es un dígito impar. Es fácil comprobar que $r^j(n) = d \cdot 5^{k-j}$ para $j \leq k$ y $r^{k+1}(n) = 1$, por lo que todos estos también funcionan.

En conclusión los enteros deseados son los de un dígito, junto con los de la forma $d \cdot 6^k$ con d dígito par y los de la forma $d \cdot 5^k$ con d dígito impar.

61.3. Problema 3



Demostraremos que los lados correspondientes de los triángulos ACP y FEB son paralelos, por lo que las rectas concurren en el centro de la homotecia que transforma uno en otro.

Para obtener las primeras dos paralelas, aplicamos dos veces el teorema de Reim:

- Por el Teorema de Reim en Γ_1 y Γ_2 con las rectas AP y DE, AD es paralela a PE.
- Por el Teorema de Reim en Γ_1 y Γ_2 con las rectas CD y PB, PC es paralela a BE.

Ahora, sea $K = PF \cap BC$. Como $MA = MP$ y $PK \parallel AC$, el cuadrilátero $ACPK$ es un paralelogramo, y $\angle MPK = \angle MAC = \angle PBC = \angle PBK$, entonces el circuncírculo de BKP es tangente a AC. Por potencia desde M tenemos

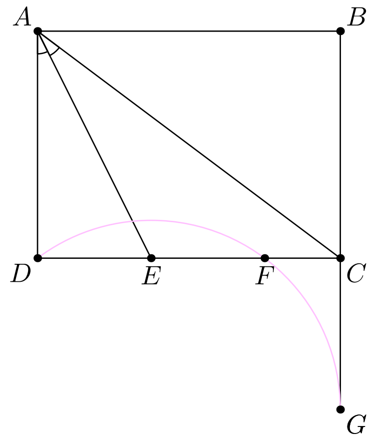
$$MA^2 = MP^2 = MK \cdot MB$$

Entonces MA es tangente al circuncírculo de AKB, por lo que $K \in \Gamma_1$. Finalmente tenemos

$$\angle PAB = \angle PBA = 180^\circ - \angle PCA = 180^\circ - \angle PKA = \angle AKF = \angle ABF$$

Y por lo tanto $AP \parallel BF$.

61.4. Problema 4



Por potencia nos basta verificar que $CG^2 = CF \cdot CD$. Sean $a = AD = BC, b = AB = CD$ y $c = AC = BD$. Utilizando el teorema de la bisectriz en el triángulo ACD calculamos

$$\frac{b}{DE} = \frac{DE + EC}{DE} = 1 + \frac{EC}{DE} = 1 + \frac{AC}{AD} = 1 + \frac{c}{a} = \frac{a+c}{a}$$

Por lo que $DE = \frac{ab}{a+c}$ y $DF = \frac{2ab}{a+c}$, luego $CF = b - \frac{2ab}{a+c} = \frac{b(c-a)}{c+a}$. Finalmente, $CG = c - a$, por lo que

$$\begin{aligned} & CG^2 = CF \cdot CD \\ \iff & (c-a)^2 = b \cdot \frac{b(c-a)}{c+a} \\ \iff & (c-a)(c+a) = b^2 \\ \iff & c^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Lo cual es cierto por el Teorema de Pitágoras.

61.5. Problema 5

Primero veamos que $\sqrt[3]{bc} \leq \frac{b+c+1}{3}$ por MA-MG. Ahora por MA-MG tenemos

$$\frac{a^2}{a + \sqrt[3]{bc}} + \frac{a + \sqrt[3]{bc}}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{2}} = a$$

Sumando cíclicamente obtenemos

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a + \sqrt[3]{bc}} + \sum_{\text{cyc}} \frac{a + \sqrt[3]{bc}}{4} \geq a + b + c = 3$$

Notemos ahora que

$$a + b + c + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} \leq 3 + \frac{b+c+1+c+a+1+a+b+1}{3} = 3 + \frac{2(a+b+c)+3}{3} = 6$$

Por lo que

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}} \geq 3 - \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

La igualdad requiere que se de la igualdad en $\sqrt[3]{bc} \leq \frac{b+c+1}{3}$, lo cual pasa cuando $b = c = 1$, entonces también $a = 1$. En este caso efectivamente se cumple la igualdad.

61.6. Problema 6

La condición es equivalente a $n = d(n)(d(n)-1)$. Como $d(n)$ y $d(n)-1$ son consecutivos, alguno es par, y n es par. Además, debemos tener $d(n) > \sqrt{n}$, de lo contrario $n < d(n)(d(n)-1)$. Encontraremos todos los n pares tales que $d(n) > \sqrt{n}$, con lo cual bastará checarlos. Sea

$$n = \prod_{p \text{ primo}} p^{\nu_p(n)}$$

Donde $\nu_p(n) = 0$ para todos salvo una cantidad finita de p's. Entonces $d(n)$ es el producto de $\nu_p(n)+1$ sobre todos los p. Sea $f_p(\alpha) = \frac{(\alpha+1)^2}{p^\alpha}$, entonces

$$\prod_{p \text{ primo}} f_p(\nu_p(n)) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{(\nu_p(n)+1)^2}{p^{\nu_p(n)}} = \frac{d(n)^2}{n}$$

Y buscamos los n tales que esta fracción es mayor estricta que 1. Con cuentas podemos determinar ahora las siguientes cotas:

- $f_2(k) \leq \frac{9}{4}$, con igualdad si y solo si $k = 2$. En cualquier otro caso $f_2(k) \leq 2$.
- $f_3(k) \leq \frac{4}{3}$, con igualdad si y solo si $k = 1$, y en cualquier otro caso $f_3(k) \leq 1$.
- $f_5(k) \leq 1$, $f_7(k) \leq 1$ y $f_{11}(k) \leq 1$ para todo k.
- $f_p(k) \leq \frac{1}{3}$ para todo $k \geq 1$ y todo $p \geq 13$.

De las tres cotas deducimos que

$$\prod_{p \in \{2,3,5,7,11\}} f_p(\nu_p(n)) \leq 3$$

Y con esto, si algún primo mayor que 11 divide a n la cuarta cota nos da que el producto es a lo más 1. Entonces los únicos primos que pueden dividir a n son $2, 3, 5, 7, 11$.

Si $11 \mid n$ entonces debemos tener $\nu_{11}(n) = 1$ y $\nu_5(n) = \nu_7(n) = 0$. Veamos que $f_{11}(1) \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{11} < 1$, por lo que $\nu_3(n) = 1$. Similarmente vemos que $\nu_2(n) = 2$, y $n = 132$. En lo que resta suponemos que $11 \nmid n$.

Ahora, podemos verificar que $f_7(k) \leq \frac{1}{3}$ para $k \geq 2$ y $f_5(k) \leq \frac{1}{3}$ para $k \geq 3$, entonces $\nu_7(n) \leq 1$ y $\nu_5(n) \leq 2$. Ahora hacemos algunos casos:

- Si $\nu_7(n) = 1$

  Si $25 \mid n$ entonces $f_7(\nu_7(n)) f_5(\nu_5(n)) < \frac{1}{3}$. Si $5 \mid n$ entonces tenemos $f_7(\nu_7(n)) f_5(\nu_5(n)) = \frac{16}{35}$. Si $\nu_3(n) \geq 3$ es fácil ver que tenemos una contradicción. Si $\nu_3(n) = 1$ entonces $f_3(\nu_3(n)) f_5(\nu_5(n)) f_7(\nu_7(n)) = \frac{64}{105}$, y podemos verificar sin mucha dificultad que los posibles $\nu_2(n)$ son $1, 2, 3$. Esto nos da $n = 210$,

$n = 420$ o $n = 840$. Si $\nu_3(n)$ es 0 o 2 entonces $f_3(\nu_3(n))f_5(\nu_5(n))f_7(\nu_7(n)) = \frac{16}{35}$. Es fácil comprobar que $\nu_2(n) = 2$ es la única posibilidad. Esto nos da los números 140 y 1260.

Ahora suponemos que $5 \nmid n$. Si $\nu_3(n) \neq 1$ podemos comprobar que $f_2(k) \leq \frac{7}{4}$ para $k \geq 4$, entonces $\nu_2(n) \leq 3$. Si $\nu_3(n) \geq 4$ entonces $f_3(\nu_3(n)) \leq \frac{25}{81}$ y podemos comprobar que no hay soluciones. Entonces $\nu_3(n) \in \{0, 2, 3\}$. Si $\nu_3(n) = 0$ o $\nu_3(n) = 2$ entonces $f_3(\nu_3(n)) = 1$ y todos los $\nu_2(n) \leq 6$ funcionan, lo cual nos da los números $14, 28, 56, 126, 252, 504$. Si $\nu_3(n) = 3$ entonces $f_3(\nu_3(n))f_7(\nu_7(n)) = \frac{27}{64}$ y podemos comprobar que $f_2(k) \leq \frac{64}{27}$ para todo k. Finalmente si $\nu_3(n) = 1$ entonces $f_3(\nu_3(n))f_7(\nu_7(n)) = \frac{16}{21}$, y podemos verificar que $f_2(k) \leq \frac{21}{26}$ para $k \geq 5$. De aquí obtenemos los números $42, 84, 168, 336$.

- Si $\nu_7(n) = 0$

  Consideremos ahora $\nu_5(n)$. Tenemos ahora tres casos:

  - Si $\nu_5(n) = 2$

    Tenemos $f_5(2) = \frac{9}{25}$. Si $\nu_3(n) \neq 2$ entonces $f_5(2)f_2(\nu_2(n)) \leq \frac{81}{100} < 1$, entonces debemos tener $\nu_3(n) = 1$. Similarmente si $\nu_2(n) \neq 2$ entonces $f_2(\nu_2(n))f_3(1)f_5(2) \leq \frac{24}{25} < 1$, entonces $\nu_2(n) = 2$ y $n = 300$.

  - Si $\nu_5(n) = 1$

    Tenemos $f_5(1) = \frac{4}{5}$. Si $\nu_3(n) \geq 4$ entonces $f_3(\nu_3(n)) \leq \frac{25}{81}$ y podemos ver que el producto siempre es menor que 1. Entonces $\nu_3(n) \leq 3$. Tenemos ahora tres casos.

    - Si $\nu_3(n) = 3$

      Tenemos $f_3(3)f_5(1) = \frac{64}{135}$. Si $\nu_2(n) \neq 2$ comprobamos que el producto es menor que 1, entonces $\nu_2(n) = 2$ y $n = 540$.

    - Si $\nu_3(n) = 1$

      Tenemos $f_3(1)f_5(1) = \frac{16}{15}$. Podemos comprobar que $f_2(k) < \frac{15}{16}$ para $k \geq 6$, entonces $k \leq 5$ y obtenemos los números $30, 60, 120, 240, 480$.

    - Si $\nu_3(n)$ es 0 o 2

      El producto es simplemente $f_5(1) = \frac{4}{5}$. Comprobamos que $f_2(k) < \frac{5}{4}$ para $k \geq 5$, entonces $\nu_2(n) \leq 4$ y obtenemos los números $10, 20, 40, 80, 90, 180, 360, 720$.

  - Si $\nu_5(n) = 0$

    Si $k \geq 4$ entonces $f_3(k) \leq \frac{25}{81} < \frac{4}{9}$, por lo que no hay soluciones. Resta entonces verificar los casos donde $\nu_3(n) \leq 3$

    - Si $\nu_3(n) = 3$

      Tenemos $f_3(3) = \frac{16}{27}$. Para $k \geq 4$ tenemos $f_2(k) \leq \frac{25}{16}$ cuyo producto con el número anterior es menor que 1, entonces $\nu_2(n) \leq 3$, y obtenemos los números $54, 108, 216$.

    - Si $\nu_3(n) = 1$

      Tenemos $f_3(3) = \frac{4}{3}$. Para $k \geq 7$ tenemos $f_2(k) \leq \frac{64}{128} < \frac{3}{4}$, entonces $\nu_2(n) \leq 6$. Obtenemos los números $6, 12, 24, 48, 96, 192$.

    - Si $\nu_3(n) = 0$ o $\nu_3(n) = 2$

      Tenemos $f_3(\nu_3(n)) = 1$. Comprobamos que $f_2(k) \leq \frac{49}{64} < 1$ para $k \geq 6$, entonces $\nu_2(n) \leq 5$. Nuestros últimos números son $2, 4, 8, 16, 32, 18, 36, 72, 144, 288$.

En conclusión, nos basta con checar los siguientes valores para n:

$$\begin{aligned}&2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,24,28,30,32,36,\\&40,42,48,54,56,60,72,80,84,90,96,108,120,\\&126,132,140,144,168,180,192,210,216,240,\\&252,288,300,336,360,420,480,504,540,720,840,1260\end{aligned}$$

Los respectivos valores de $d(n)$ son

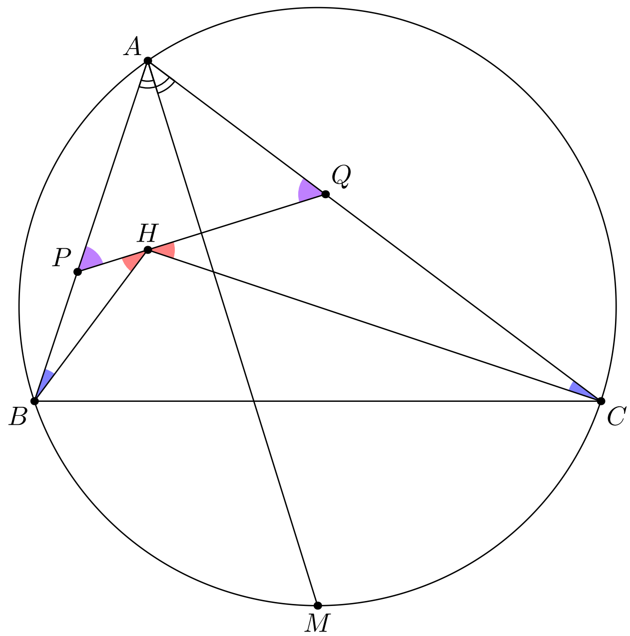
$$\begin{aligned}&2,3,4,4,4,6,4,5,6,6,8,6,8,6,9\\&8,8,10,8,8,12,12,10,12,12,12,12,16\\&12,12,12,15,16,18,14,16,16,20\\&18,18,18,20,24,24,24,24,24,24,30,32,36\end{aligned}$$

Quitando valores repetidos obtenemos $2,3,4,5,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,24,30,32,36$. Quitando de estos los que hacen que $d(n)-1$ sea divisible por un primo mayor que 11 obtenemos $2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,36$. Verificando todos estos, los n correspondientes son $2,6,12,20,30,56,72,90,132,210,240,1260$. De entre estos la cantidad de divisores coincide con 2, 56, 132 y 1260, los cuales son nuestras soluciones finales.

62. Soluciones de la XXIX OMM 2015

Enunciados en la página 38

62.1. Problema 1



Como H es ortocentro de ABC tenemos

$$\angle APQ = \angle PHB + \angle PBH = \angle QHC + \angle QCH = \angle AQP$$

Luego $AP = AQ$, y la bisectriz de $\angle PAQ$ es la mediatriz de PQ. Como esta bisectriz pasa por M obtenemos el resultado.

62.2. Problema 2

Sea h_i el número de cuadritos en la i-ésima columna, yendo de izquierda a derecha. Notemos que si un cuadrito está en la región negra entonces todos los cuadritos arriba y a la derecha de él también lo están. Esto implica que $h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_n$.

Afirmamos que el mínimo número de rectángulos que se requieren para formar una figura es el número de valores positivos distintos en la sucesión $h_1, h_2, \ldots, h_n$. En efecto, si para cada valor positivo a_i en la sucesión tomamos la primera columna con este valor, y tomamos el cuadrito negro de más abajo en esta columna, cada uno de estos cuadritos debe estar dentro de un rectángulo distinto. Recíprocamente, cada cuadrito de la figura negra está arriba y a la derecha de alguno de los cuadritos negros antes descritos, por lo que tomando los rectángulos con estas esquinas formamos la figura.

Existen $\binom{n}{k}$ maneras de elegir k valores positivos entre 1 y n para la sucesión. Digamos que el i-ésimo valor aparece a_i veces, y el 0 aparece a_0 veces, de modo que $a_i \geq 1$ y

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_k = n$$

Restando 1 a cada a_i con $i \geq 1$ vemos que el número de soluciones válidas de esto es igual al número de soluciones en enteros no negativos de

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_k = n - k$$

Por un argumento de separadores, existen $\binom{n}{k}$ soluciones a esta ecuación en enteros no negativos. Una vez que fijamos éstos, toda la figura está fija pues $h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_n$. Concluímos que el número total de figuras con esta propiedad es $\binom{n}{k}^2$.

62.3. Problema 3

Sea $S = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = n\}$. Por hipótesis $1 \in S$ y $ab \in S \iff ab + a + b \in S$. Afirmamos que $S = \mathbb{N}$ y por lo tanto $f(2015) = 2015$.

Demostramos que $n \in S$ para cada entero positivo n por inducción fuerte. Tomamos como caso base que $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq S$, lo cual probamos al final de la solución. Supongamos ahora que $\{1, 2, \ldots, n - 1\} \subseteq S$, demostraremos que $n \in S$. Consideramos tres casos:

- Si $n + 1$ es compuesto

  Sea $n + 1 = pq$ donde $p \geq 2$ y $q \geq 2$, entonces $n = (p - 1)(q - 1) + (p - 1) + (q - 1)$, por lo que $n \in S \iff (p-1)(q-1) \in S$, pero $(p-1)(q-1) < n$, por lo que esto es cierto por hipótesis inductiva.

- Si n no es potencia de 2.

  Sea $n = 2^{k+1}m + 2^k$ donde $k = \nu_2(n)$. Entonces $n = 2^k(2m + 1)$ está en S si y solo si

  $$2^k(2m + 1) + 2^k + 2m + 1 = 2^{k+1}(m + 1) + 2m + 1 \in S$$

  Aplicando la condición con $b = 1$ tenemos que m está en S si y solo si $2m + 1$ está en S. Es decir, si $m > 1$ es impar entonces está en S si y solo si $\frac{m-1}{2}$ está en S. Entonces este último número está en S si y solo si

  $$2^k(m + 1) + m$$

  Lo está, y podemos verificar fácilmente que este número es menor que n, por lo cuál está en S por hipótesis inductiva.

- Si $n + 1$ es un primo de Fermat.

  Entonces $n = 2^{2^m}$, donde $m \geq 2$ pues $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq S$. De la condición con $b = 2$ tenemos que $2m \in S$ si y solo si $3m + 2 \in S$, entonces

  $$n \in S \iff 3 \cdot 2^{2^m - 1} + 2 \in S$$

  Aplicando de nuevo esta misma condición tenemos

  $$3 \cdot 2^{2^m - 1} + 2 \in S \iff 3\left(3 \cdot 2^{2^m - 2} + 1\right) + 2 = 9 \cdot 2^{2^m - 2} + 5 \in S$$

  Ahora usando que $m \in S \iff 2m + 1 \in S$ deducimos que

  $$9 \cdot 2^{2^m - 2} + 5 \in S \iff 9 \cdot 2^{2^m - 3} + 2 \in S$$

Y finalmente usando nuevamente que $3m+2 \in S \iff 2m \in S$ deducimos que

$$9 \cdot 2^{2^m-3} + 2 \in S \iff 6 \cdot 2^{2^m-3} \in S$$

Pero $6 \cdot 2^{2^m-3} < 8 \cdot 2^{2^m-3} = n$, por lo que esto es cierto, y $n \in S$.

Finalmente hay que probar los casos base de la inducción. Escribimos $a \overset{p,q}{\iff} b$ para denotar que $a \in S \iff b \in S$ se sigue de aplicar la condición con p, q. Entonces

$$3 \overset{1,1}{\iff} 1$$
$$4 \overset{4,1}{\iff} 9 \overset{3,3}{\iff} 15 \overset{1,7}{\iff} 7 \overset{1,3}{\iff} 3 \overset{1,1}{\iff} 1$$
$$2 \overset{1,2}{\iff} 5 \overset{1,5}{\iff} 11 \overset{1,11}{\iff} 23 \overset{3,5}{\iff} 15 \overset{1,7}{\iff} 7 \overset{1,3}{\iff} 3 \overset{1,1}{\iff} 1$$

Con lo cual los casos base son ciertos.

62.4. Problema 4

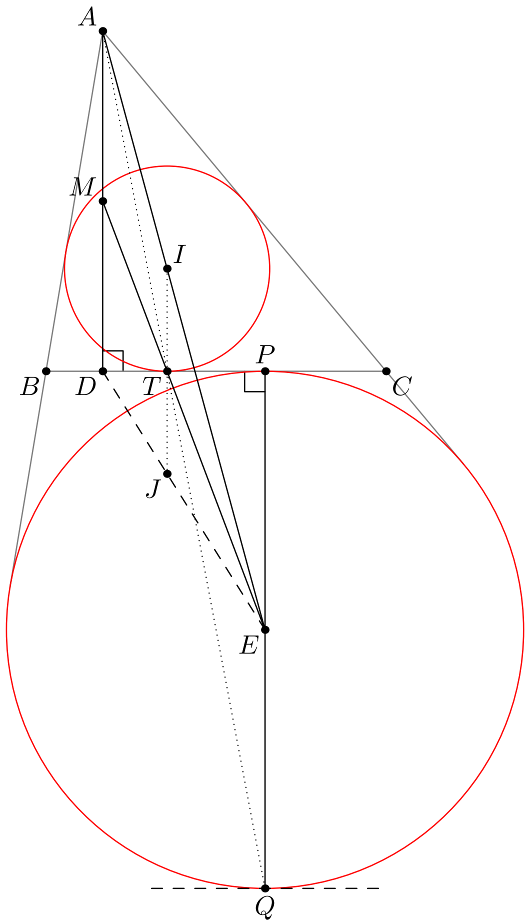
Contamos primero cuántos números hay. Supongamos que $\max(a,b,c) = k$ con $1 \leq k \leq n$. Hay exactamente $3 \cdot (k-1)^2$ ternas donde el máximo aparece exactamente una vez. Esto consiste en elegir la posición del máximo y elegir algún valor para cada una de las otras dos posiciones. Similarmente hay exactamente $3 \cdot (k-1)$ ternas donde el máximo aparece exactamente dos veces, y hay exactamente una donde aparece tres veces. Por lo que la cantidad total de números que quedan es

$$\begin{aligned} 3\sum_{k=0}^{n-1} k^2 + 3 \cdot 2 \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 3 &= \frac{3n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{6n(n-1)}{2} + 3n = \frac{n(n-1)(2n-1) + 6n(n-1) + 6n}{2} \\ &= \frac{n^3 - 3n^2 + n + 6n^2 - 6n + 6n}{2} = \frac{n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

Ahora tenemos dos casos. Si $n = 2k$ es par entonces el resultado es $k(2k+1)(4k+1)$. Notemos que los factores $k, 2k+1$ y $4k+1$ son primos relativos por parejas pues $2k+1-2(k) = 1$, $4k+1-4(k) = 1$, $2(2k+1)-(4k+1) = 1$. Luego si su producto es cuadrado perfecto entonces todos son cuadrados perfectos. Pero entonces $4k$ es un cuadrado perfecto y $4k+1$ también, lo cual es imposible pues $k \geq 1$.

Si $n = 2k-1$ es impar entonces el resultado es $k(2k-1)(4k-1)$. Nuevamente los tres factores son primos relativos por parejas, y los tres deben ser cuadrados perfectos, por lo que $4k$ es un cuadrado perfecto, y $4k-1$ no puede serlo pues $k \geq 1$.

62.5. Problema 5



Sabemos que E es el excentro opuesto a A. Sea P su punto de tangencia con BC, sea M el punto medio de AD, T el punto de tangencia del incírculo de ABC con BC, y Q el antipodal a P en el excírculo de ABC.

Como PQ es diámetro del excírculo, las tangentes a este en P y Q son paralelas, por lo que la tangente al excírculo en Q es paralela a BC. Como la tangente al incírculo en T es paralela a BC, concluímos que Q es la imagen de T bajo la homotecia positiva que lleva el incírculo de ABC al excírculo. Ésta tiene centro A, y por lo tanto A, T, Q son colineales.

Ahora como $AD \parallel PQ$ tenemos que $\triangle ATD \sim \triangle QTP$ y E, T, M son colineales por ser M y E puntos medios de AD y PQ respectivamente. Con esto es fácil concluir, pues M y T son los puntos medios de AD y IJ respectivamente, y $(A, I, E), (M, T, E)$ son colineales.

62.6. Problema 6

Sea $\sigma(n)$ la suma de los divisores de n. Afirmamos que si $n = 2^a b$ con b impar entonces $f(n) = (2^{a+1} - 3)\sigma(b)$. En efecto:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{d|n}(-1)^d d = \sum_{k=0}^{a} \sum_{\substack{d|n \\ \nu_2(d)=k}} (-1)^d d = \sum_{\substack{d|n \\ \nu_2(d)=0}} (-1)^d d + \sum_{k=1}^{a} \sum_{\substack{d|n \\ \nu_2(d)=k}} (-1)^d d \\
&= \sum_{k=1}^{a} \sum_{\substack{d|n \\ \nu_2(d)=k}} d - \sum_{\substack{d|n \\ \nu_2(d)=0}} d = \sum_{k=1}^{a}\sum_{d'|b} 2^k d' - \sum_{d'|b} d' = \left(-1 + \sum_{k=1}^{a} 2^k\right) \sum_{d'|b} d' = (2^{a+1}-3)\sigma(b)
\end{aligned}
$$

Ahora supongamos que $f(n)$ es una potencia de 2, en particular $2^a - 3$ lo es. Si $a > 1$ entonces $2^a - 3 > 2^{a-1}$ por lo cual esto es imposible. Entonces $a = 1$, pues $a = 0$ implicaría $2^{a+1} - 3$ negativo lo cual también es imposible. Ahora sea

$$
n = 2p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}
$$

Donde los p_i son primos impares. Tenemos $f(n) = \sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \sigma\left(p_i^{\alpha_i}\right)$. Es fácil comprobar que

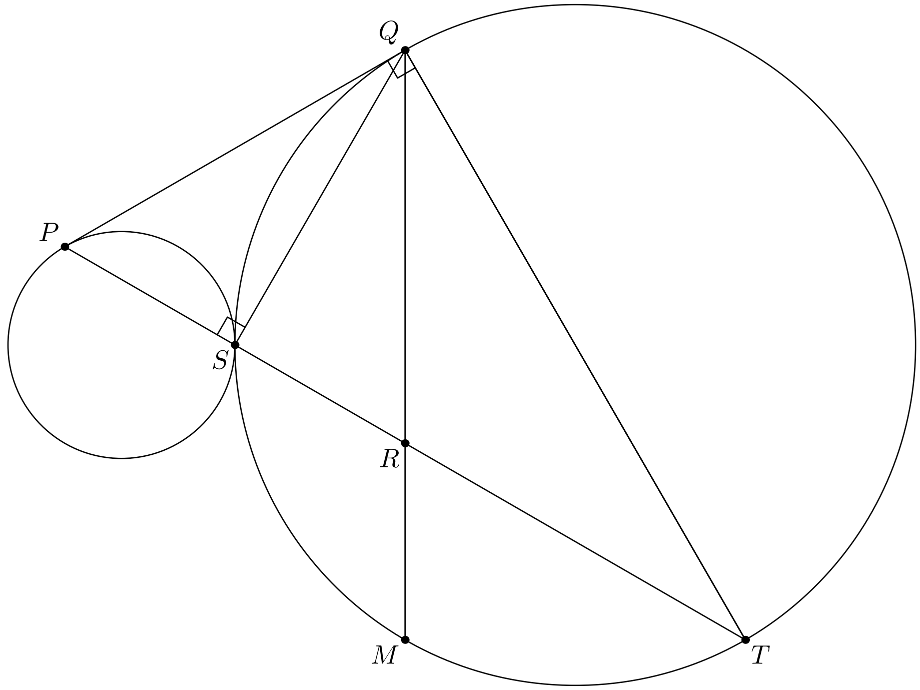
$$
\sigma\left(p_i^{\alpha_i}\right) = 1 + p_i + p_i^2 + \cdots + p_i^{\alpha_i} = \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}
$$

Si $\alpha_i > 1$ entonces por el Teorema de Zsigmondy existe un primo q tal que $q \mid p_i^{\alpha_i+1} - 1$ pero $q_i \nmid p_i - 1$. Como $2 \mid p_i - 1$, pues p_i es impar, concluímos que $q \neq 2$. Entonces $\sigma(p_i^{\alpha_i})$ no puede ser una potencia de 2, y $\sigma(n)$ tampoco. Luego $\alpha_i = 1$ y n es libre de cuadrados, como queríamos.

63. Soluciones de la XXX OMM 2016

Enunciados en la página 40

63.1. Problema 1



Veamos que las tangentes a $\mathcal{C}_2$ en Q y T son ambas perpendiculares a QT pues QT es un diámetro de $\mathcal{C}_2$, entonces PQ es paralela a la tangente a $\mathcal{C}_2$ en T, por lo que P es la imagen de T bajo la homotecia negativa que lleva $\mathcal{C}_2$ a $\mathcal{C}_1$. Esta tiene centro S, entonces P, S, T son colineales, y como el radio de $\mathcal{C}_2$ es el triple del radio de $\mathcal{C}_1$ tenemos $ST = 3SP$.

Sea M la segunda intersección de QR con $\mathcal{C}_2$. Veamos que

$$(T, S; R, P) = Q(T, S; R, P) \overset{\mathcal{C}_2}{=} (T, S; M, Q)$$

Tenemos $TM = MS$ pues QM es bisectriz de $\angle SQT$ y $\frac{TQ}{QS} = \frac{TR}{RS}$ por el Teorema de la Bisectriz. Entonces

$$\frac{TR}{RS} : \frac{TP}{PS} = \frac{TM}{MS} : \frac{TQ}{QS} = \frac{TM}{MS} : \frac{TR}{RS}$$

Entonces $\left(\frac{TR}{RS}\right)^2 = \frac{TP}{PS} = 4$ y $TR = 2RS$. Veamos ahora que (PSQ) es tangente a TQ pues $\angle PSQ = \angle PQT = 90°$. Entonces

$$TQ^2 = TS \cdot TP = \frac{3}{2}TR \cdot 2TR = 3TR^2$$

Entonces $TR = \frac{\sqrt{3}}{3}TQ$. Ahora por el Teorema de Stewart en el triángulo QST con la ceviana QR tenemos

$$
\begin{aligned}
&QS^2 \cdot RT + TQ^2 \cdot RS = ST(QR^2 + TR \cdot RS) \\
\iff &QR^2 = \frac{QS^2 \cdot RT + TQ^2 \cdot RS}{ST} - TR \cdot RS = \frac{\left(\frac{QT}{2}\right)^2 \cdot (2RS) + QT^2 \cdot RS}{3RS} - (2RS) \cdot RS \\
&= \frac{(QT^2 \cdot RS)\left(\frac{1}{2}+1\right)}{3RS} - 2RS^2 = \frac{QT^2}{2} - 2RS^2 = \frac{3TR^2}{2} - 2RS^2 = \frac{3(2RS)^2}{2} - 2RS^2 \\
&= 6RS^2 - 2RS^2 = 4RS^2
\end{aligned}
$$

Y $QR = 2RS = RT$, como queríamos.

63.2. Problema 2

Sea S el conjunto de los números que eventualmente se colorean. Afirmamos que $S = \{3, 4, 5, \dots\}$. La condición nos dice que si m, n forman una pareja guerrera entonces $m \in S \iff n \in S$. Veamos primero que 1 y 2 no están en S, pues no forman ninguna pareja guerrera con otro entero positivo y entonces no hay forma de colorearlos. Ahora probamos por inducción fuerte sobre n que si $\{3, 4, \dots, n-1\} \subseteq S$ entonces $n \in S$, con lo cual terminamos. Tenemos dos casos:

- Si n es compuesto.

  Sea $n = ab$ con $a, b \geq 2$, entonces n forma una pareja guerrera con $1 \times (a + b - 1)$. Además $ab > a + b - 1 \iff (a-1)(b-1) > 0$, lo cual es cierto, por lo que $a + b - 1 \in S$ por hipótesis inductiva, y $n \in S$.

- Si n es primo.

  Entonces $1 \cdot n$ forma una pareja guerrera con $2(n-1)$. Como n es primo y mayor que 3, $n - 1$ es compuesto. Sea $n - 1 = ab$ donde $a \geq b \geq 2$. Si $n = 5$ ya sabemos que n está en S y no hay nada que probar. De lo contrario podemos suponer que $a \geq 3$. Ahora $2(n-1) = 2ab = a(2b)$ forma una pareja guerrera con $1(2b + a - 1)$. Tenemos que $2b + a - 1 < n = ab + 1$ si y solo si $(a-2)(b-1) > 0$. Como $b \geq 2$ y $a \geq 3$ esto es cierto, entonces $2b + a - 1 \in S$, por lo que $2ab \in S$, y $n \in S$.

63.3. Problema 3

Si $x < 0$ entonces $\lfloor x^2 \rfloor \geq 0 > \lfloor x^3 \rfloor$. Si $0 \leq x < 1$ entonces $\lfloor x \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor = 0$. Si $1 \leq x < \sqrt{2}$ entonces $\lfloor x \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor = 1$. Si $\sqrt{2} \leq x < \sqrt[3]{3}$ entonces $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x^3 \rfloor = 2$. Entonces $x \geq \sqrt[3]{3}$ y afirmamos que $x = \sqrt[3]{3}$ funciona. Veamos que

$$
81 \geq 64 \implies 3\sqrt[3]{3} \geq 4 \implies \sqrt[3]{3} \geq \frac{4}{3} \implies \sqrt[3]{3} - 1 \geq \frac{1}{3}
$$

Entonces para $n \geq 3$ tenemos $x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) = x^n(\sqrt[3]{3} - 1) \geq 3(\sqrt[3]{3} - 1) \geq 1$, entonces $\lfloor x^{n+1} \rfloor \geq \lfloor x^n + 1 \rfloor = \lfloor x^n \rfloor + 1$, lo cual prueba la desigualdad.

63.4. Problema 4

La respuesta es $n = 999993$. Primero veamos que n tiene a lo más 7 dígitos. Sea $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1}$ con $k \geq 7$ y consideremos los números $\overline{a_1}, \overline{a_2 a_1}, \dots, \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1}$. Si alguno es múltiplo de 7, terminamos. De lo contrario, como hay al menos 7, hay dos que son congruentes módulo 7, y su diferencia es un número de la forma $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_m 00 \dots 0}$ que es múltiplo de 7, por lo que $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_m}$ es un múltiplo de 7 contenido en n.

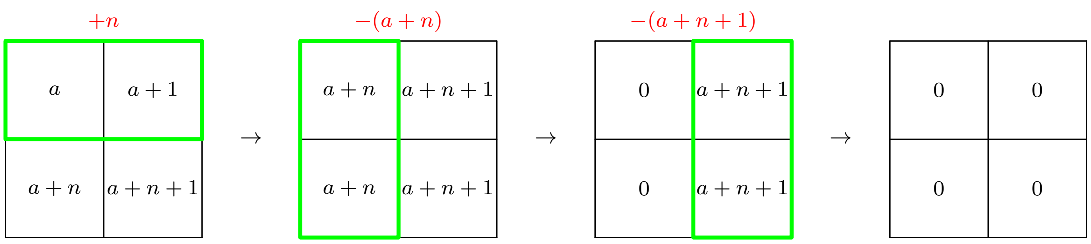
Entonces nos basta ver que 999993 no contiene múltiplos de 7 pero que todos los números en $[999994, 999999]$ sí. Para esto veamos que $(10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6) \pmod 7 = (3, 2, 6, 4, 5, 1)$. Entonces los seis números $999999, 98, 7, 9996, 99995, 994$ son todos múltiplos de 7, mientras que ningún número de la forma $10^k - 7$ es múltiplo de 7 y tampoco lo es ninguno de la forma $10^k - 1$ con $k \leq 5$, por lo que 999993 no contiene múltiplos de 7.

63.5. Problema 5

Primero demostramos que n debe ser par. Pintamos las casillas alternadamente de blanco y negro, como ajedrez. Cada movimiento afecta a una casilla de cada color, por lo que la diferencia entre la suma de los números en ambos colores es constante, y debe ser igual a 0 inicialmente. Pero si n es impar esta diferencia es

$$(1 + 3 + \cdots + n^2) - (2 + 4 + \cdots + n^2 - 1) = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2-1}{2}\right)\left(\frac{n^2+1}{2}\right) \neq 0$$

Por lo que n debe ser par. Veamos que para n par esto siempre es posible, y además se puede hacer en $\frac{3n^2}{4}$. Basta ver que podemos aplicar los siguientes movimientos a cada subcuadrícula de 2×2:



Para concluir, probamos que $\frac{3n^2}{4}$ es el mínimo número posible de operaciones para n par. Primero veamos que si se hacen varios movimientos a una misma pareja de casillas estos se pueden combinar, por lo que supondremos que para cada pareja de casillas, a lo más un movimiento la afecta. Pintamos una casilla de rosa si está involucrada en exactamente un movimiento. De lo contrario, la pintamos de gris. Sea M el número total de movimientos y r el número de casillas rosas. Sea $m(C)$ el número de movimientos que involucran a una casilla C. Entonces tenemos

$$M = \frac{1}{2}\sum_{C} m(C) = \frac{1}{2}\left(\sum_{C \text{ rosa}} m(C) + \sum_{C \text{ gris}} m(C)\right) \geq \frac{1}{2}\left(r + 2(n^2 - r)\right) = n^2 - \frac{r}{2}$$

Pues cada casilla gris está involucrada en al menos dos movimientos por definición. Ahora obtenemos una segunda cota con un argumento distinto. Digamos que un movimiento es *uwu* si involucra a una casilla rosa y *owo* de lo contrario. Notemos que cada movimiento uwu involucra una casilla rosa y una gris, pues no hay dos casillas con el mismo valor. La afirmación principal es la siguiente:

Afirmación: Cualquier casilla gris está involucrada en al menos un movimiento owo

Demostración: Supongmos que para la casilla que contiene a, todos los movimientos que la afectan son uwu, entonces debe ser igual a la suma de algunas de sus casillas vecinas. Éstas contienen $a-1, a-n, a+1$ y $a+n$. Si usamos $a+1$ y $a+n$ ya excedemos a, entonces solo podemos usar $a-1$ y $a-n$. Por lo tanto debemos tener $a - 1 + a - n = a \implies a = n + 1$. Pero entonces a no es adyacente a la casilla que tiene $a - 1$, contradicción.

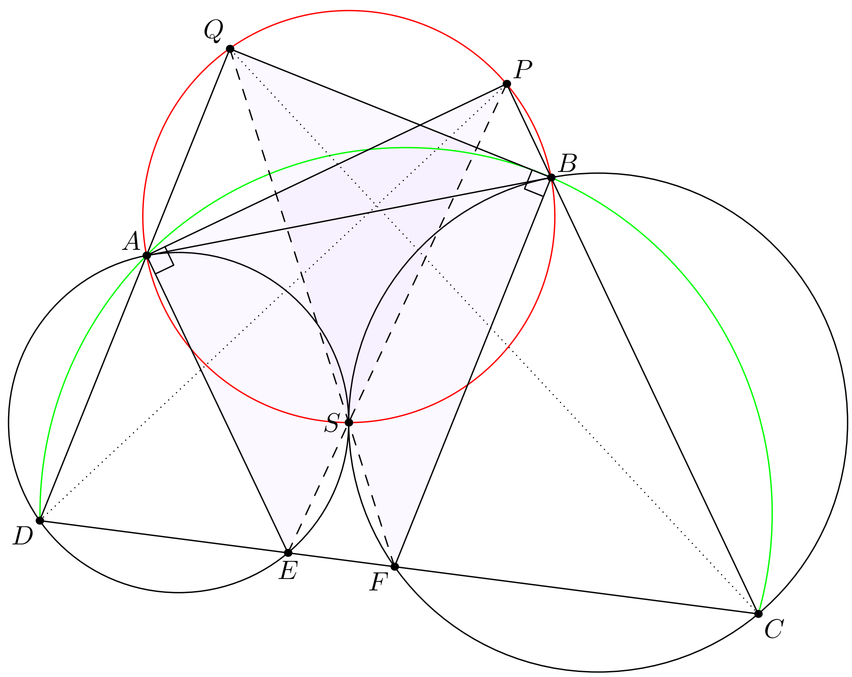
Ahora, hay exactamente r movimientos uwu, pues para cada casilla rosa el único movimiento que la afecta debe ser uwu. Entre las $n^2 - r$ casillas restantes debe haber al menos $\frac{n^2-r}{2}$ movimientos owo, pues cada una está involucrada en alguno. Deducimos que

$$M \geq r + \frac{n^2 - r}{2} = \frac{n^2 + r}{2}$$

Finalmente promediando nuestras dos cotas tenemos

$$M \geq \frac{1}{2}\left(n^2 - \frac{r}{2} + \frac{n^2 + r}{2}\right) = \frac{3n^2}{4}$$

63.6. Problema 6



Denotamos por $\measuredangle XYZ$ al ángulo dirigido $\measuredangle(XY, YZ)$ mód $180°$. Comenzamos demostrando algunos hechos preliminares. Veamos que

$$\measuredangle ADE = \measuredangle ADC = \measuredangle ABC = \measuredangle(AB, BC) = \measuredangle(AB, AE) = \measuredangle BAE$$

Por lo que AB es tangente al circuncírculo de ADE. Análogamente AB es tangente al circuncírculo de ABF. Ahora veamos que $DP \perp CQ$ si y solo si $\triangle ADP \sim \triangle BQC$. Tenemos

$$\begin{aligned}\measuredangle PDA &= \measuredangle(PD, DA) = \measuredangle(PD, CQ) + \measuredangle(CQ, DA)\\ &= \measuredangle(PD, CQ) + \measuredangle(CQ, QB) + \measuredangle(QB, DA) = \measuredangle(PD, CQ) + \measuredangle CQB + 90°\end{aligned}$$

Por lo que $\measuredangle PDA = \measuredangle CQB$ si y solo si $\measuredangle(PD, CQ) = 90°$. Análogamente $\measuredangle QCB = \measuredangle DPA$ si y solo si $\measuredangle(PD, CQ) = 90°$, lo que prueba este resultado. Veamos además que $AQPB$ es cíclico pues $\measuredangle AQB = \measuredangle APB = 90°$, entonces

$$\measuredangle DAP = \measuredangle QAP = \measuredangle QBP = \measuredangle QBC$$

Por lo que la semejanza anterior sucede si y solo si $AD \cdot BC = AP \cdot QB$. Además veaamos que los triángulos ADE y BFC son semejantes pues sus lados correspondientes son paralelos, y entonces $AD \cdot BC = AE \cdot BF$. Combinando todo lo anterior tenemos que

$$DP \perp CQ \iff AE \cdot BF = AP \cdot QB \iff \frac{AE}{AP} = \frac{BQ}{BF}$$

Pero $\measuredangle EAP = \measuredangle QBF = 90^\circ$, entonces esto pasa si y solo si $\triangle EAP$ es semejante a $\triangle QBF$. Habiendo probado esto procedemos a demostrar el si y solo si.

$\Rightarrow$) **Si $DP \perp CQ$ entonces (ADE) y (BCF) son tangentes.**

Sea $S = PE \cap QF$, afirmamos que los círculos son de hecho tangentes en S. Primero veamos que

$$\measuredangle AQS = \measuredangle(AQ, QS) = \measuredangle(BF, QS) = \measuredangle BFQ = \measuredangle APE = \measuredangle APS$$

Donde $\measuredangle BFQ = \measuredangle APE$ se da por la semejanza antes mencionada. Entones A, P, Q, S, B son todos concíclicos. Ahora

$$\measuredangle ASE = \measuredangle ASP = \measuredangle ABP = \measuredangle ABC = \measuredangle ADC = \measuredangle ADE$$

Y S está en el circuncírculo de ADE. Análogamente está en el circuncírculo de BCF. Finalmente, como

$$\measuredangle BFS + \measuredangle SEA = \measuredangle BFQ + \measuredangle PEA = \measuredangle APE + \measuredangle PEA = 90^\circ = \measuredangle BSA$$

Deducimos que los círculos son tangentes en S, pues si ℓ es la tangente a (BCF) en ℓ entonces $\measuredangle(\ell, SA) = \measuredangle BSA - \measuredangle(BS, \ell) = \measuredangle BSA - \measuredangle BFS = \measuredangle SEA$, y ℓ es tangente a (ADE).

$\Leftarrow$ **Si (ADE) y (BCF) son tangentes entonces $DP \perp CQ$.**

Sea S el punto de tangencia de los círculos. Como AB es una tangente común a ambos es fácil verificar que $\measuredangle BSA = 90^\circ$, y entonces A, Q, P, B, S son concíclicos. Ahora veamos que

$$\measuredangle ASP = \measuredangle ABP = \measuredangle ABC = \measuredangle ADC = \measuredangle ADE = \measuredangle ASE$$

Y E, S, P son colineales. Análogamente F, S, Q son colineales. Para concluir calculamos

$$\measuredangle APE = \measuredangle APS = \measuredangle ABS = \measuredangle BFS = \measuredangle BFQ$$

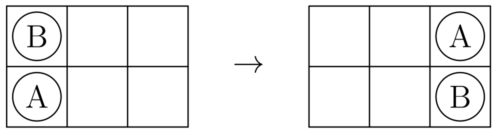
Y análogamente $\measuredangle BQF = \measuredangle AEP$. Concluímos que $\triangle AEP \sim \triangle BQF$, y por lo tanto $DP \perp CQ$.

64. Soluciones de la XXXI OMM 2017

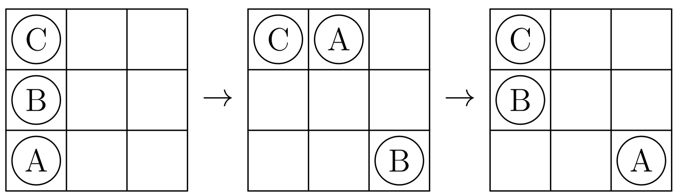
Enunciados en la página 41

64.1. Problema 1

Coloreamos alternadamente las casillas de blanco y negro como ajedrez. Notemos que al hacer un movimiento, un caballo cambia el color de la casilla en la que está, por lo que cada jugada conserva la paridad del número de casillas blancas que tienen caballos se queda fija. Con esto es inmediato que k debe ser impar. Para concluir probamos que si los caballos están todos a la columna $k+2$. Primero veamos que si tenemos dos caballos en casillas adyacentes verticalmente entonces podemos moverlos de la siguiente manera:



Entonces podemos mover los 2016 caballos de más arriba a la columna $k+2$. Para finalizar veamos que antes de estos movimientos podemos mover el caballo de hasta abajo dos posiciones a la derecha con los siguientes movimientos:



64.2. Problema 2

La respuesta es 12859, que se alcanza tomando los números $2017 - 60k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$. La suma de m elementos en este conjunto es de la forma $2017m - 60t$, que es divisible entre m para cualquier $m \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, Además la suma de todos es $7 \times 2017 - 60(21)$, que es divisible entre 7.

Ahora consideremos cualquier conjunto equilibrado $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ con elementos menores o iguales que 2017.

Afirmación. Para cualquier m con $1 \leq m \leq n-1$, todos los elementos del conjunto son congruentes módulo m.

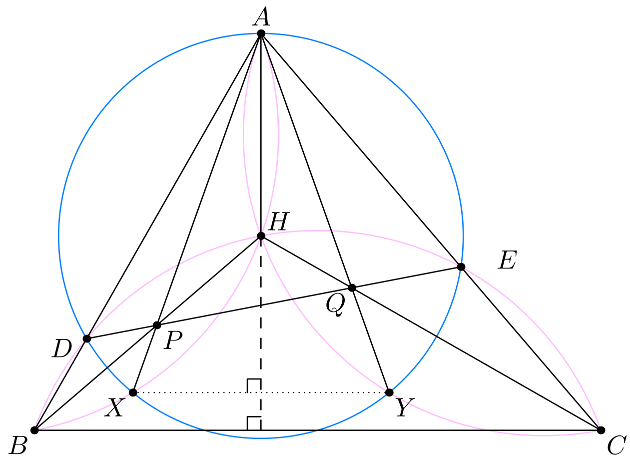
Demostración. Fijemos $1 \leq i < j \leq n$. Sea S cualquier subconjunto de $A \setminus \{a_i, a_j\}$ con $m-1$ elementos. Como A es equilibrado, las sumas de los conjuntos $S \cup \{a_i\}$ y $S \cup \{a_j\}$ ambas son divisibles entre m. La diferencia entre estas es $a_i - a_j$, que debe ser un múltiplo de m, entonces $a_i \equiv a_j \pmod{m}$.

De la afirmación deducimos que un conjunto equilibrado con m elementos, todos son congruentes módulo $[1, 2, \ldots, n-1]$. Si $n \geq 8$ entonces este mínimo común múltiplo es al menos $[1, 2, \ldots, 7] = 420$. Luego tenemos

$$\text{mín}(A) \leq \text{máx}(A) - 420(n-1) \leq 2017 - 420 \cdot 7 < 0$$

Por lo cual este caso es imposible. Si $n \leq 6$ entonces la suma de los elementos de S es menor que $6 \times 2017 < 12859$. Finalmente nos queda el caso $n = 7$, y tenemos que todos los elementos son congruentes módulo $[1, 2, \ldots, 6] = 60$. Como todos son distintos concluímos que el k-ésimo elemento más grande es menor o igual que $2017 - 60k$. Como el conjunto descrito al inicio cumple la igualdad para todo k, concluímos que este nos da la suma máxima.

64.3. Problema 3



Notemos que

$$\angle BEA = 180^\circ - \angle BEC = 180^\circ - \angle BHC = \angle BAC$$

Y entonces $BA = BE$. Como $BH \perp AE$ se sigue que BH es mediatriz de AE, y en particular $PA = PE$ y $HA = HE$. Análogamente $QA = QD$ y $HA = HD$, por lo que $HD = HE$. Ahora por Potencia repetidamente tenemos

$$PA \cdot PX = PB \cdot PH = PD \cdot PE$$

Como $PA = PE$ deducimos que $PX = PD$, y entonces $AX = DE$. Análogamente $AY = DE$. Ahora veamos que

$$\angle PDA = \angle ECB = \angle ACB = 180^\circ - \angle AHB = 180^\circ - \angle AHP$$

Y $AHPD$ es cíclico. Análogamente $AHQE$ es cíclico. Finalmente tenemos

$$\angle XAH = \angle PAH = \angle PDH = \angle EDH = \angle DEH = \angle QEH = \angle QAH = \angle YAH$$

Entonces AH es bisectriz interna de $\angle XAY$, y como $AX = AY$ concluímos que $AH \perp XY$.

64.4. Problema 4

Sean $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ los elementos del conjunto, entonces por la desigualdad del triángulo tenemos que $a_n < a_1 + a_2$. Si $a_2 \leq 1009$ entonces como $a_n \geq a_2 + n - 2$ concluímos que

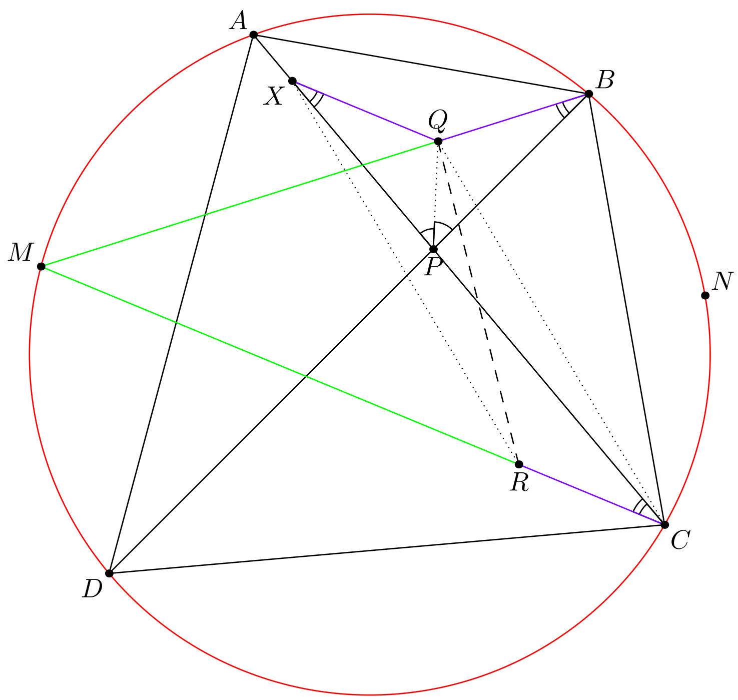
$$a_2 + n - 2 < a_1 + a_2 \implies n < a_1 + 2 \leq 1010$$

Y $n \leq 1009$. Si $a_2 > 1009$ entonces como $a_n \geq a_2 + n - 2$ tenemos

$$a_2 + n - 2 \leq 2017 \implies n \leq 2019 - a_2 \leq 1009$$

En ambos casos hay a lo más 1009 elementos, y esto se puede alcanzar tomando, por ejemplo, el conjunto $\{1008, 1009, \ldots, 2016\}$. En éste cualquier suma de dos elementos es mayor que 2016, por lo que se cumple la desigualdad del triángulo para cualquier terna, y el conjunto tiene la propiedad T.

64.5. Problema 5



Afirmamos primero que MN es paralela a la bisectriz interna de $\angle APD$. Para ver esto notemos que

$$\measuredangle(AP, MN) = \measuredangle(AP, AN) + \measuredangle(AN, MN) = \measuredangle(ND, DP) + \measuredangle(MN, ND) = \measuredangle(MN, DP)$$

Donde la igualdad de en medio se da pues M y N son puntos medios de los arcos BC y AD. Se sigue que PQ es la bisectriz exterior de $\angle APD$, que es la bisectriz interior de $\angle APB$.

Sea X la reflexión de B respecto a PQ, que está en AC pues PQ biseca $\angle APB$. Entonces $\triangle XQP$ es congruente a $\triangle BQP$, por lo que $XQ = BQ = RC$ y

$$\angle QXC = \angle QXP = \angle QBP = \angle MBD = \angle ACM = \angle XCR$$

Donde $\angle MBD = \angle ACM$ se da pues M es punto medio del arco AD. De esto junto con $XQ = RC$ deducimos que $CRXQ$ es un paralelogramo, y entonces CX pasa por el punto medio de QR.

64.6. Problema 6

La respuesta es $m = 2^{n-1} + 1$. Primero veamos que A puede garantizar la victoria para este valor de m. En los primeros 2^{n-1} turnos, A elige dos urnas vacías y coloca un voto en cada una. B puede vaciar a lo más una urna en cada turno, por lo que al final de estos turnos hay 2^{n-1} urnas con un voto cada una. En los sigientes 2^{n-2} turnos A elige parejas de estas urnas y coloca un voto en cada una. Esto crea 2^{n-1} urnas con dos votos, y B puede vaciar a lo más 2^{n-2}, dandonos 2^{n-2} urnas con dos votos. En los siguientes 2^{n-3} turnos

A elige parejas de estas urnas, y así sucesivamente. Inductivamente se obtienen 2^{n-k} urnas con k votos, que es 1 para $k = n$.

Ahora demostramos que si $m = 2^{n-1}$ entonces B puede garantizar que A nunca gane si siempre vacía la urna con más votos. Más fuertemente, afirmamos que luego de cualquier turno de B hay a lo más $2^{n-k} - 1$ urnas con k o más votos, que es cero para $k = n$. Procedemos por inducción, el caso base es $k = 0$, que es cierto pues B vacía al menos una urna.

Supongamos que el resultado es cierto para $0, 1, \ldots, k-1$, demostraremos que es cierto para k. Para esto demostramos un lema auxiliar: Si después de algún turno de B hay p urnas con k o más votos entonces hay a lo más $2^{n-k+1} - 1 - 2p$ urnas con exactamente $k-1$ votos. Como esto debe ser no negativo tenemos $p \leq 2^{n-k} - 1$, y terminamos. Esto es cierto siempre que $p = 0$ por la hipótesis inductiva.

Supongamos ahora que esto no es cierto y tomemos el primer momento donde se viola esta desigualdad. Digamos que en su turno anterior A eligió q urnas con $k-1$ votos, que había c_k urnas con k o más votos y c_{k-1} con exactamente $k-1$. Entonces c_k aumenta a $c_k + q$, y luego B lo disminuye a $c_k + q - 1$. Por otro lado c_{k-1} disminuye en q y luego aumenta en a lo más $2 - q$, por lo que es a lo más $c_{k-1} + 2 - 2q$. Concluímos que

$$c_{k-1} + 2 - 2q \geq 2^{n-k} - 2(c_k + q - 1)$$

$$\Longrightarrow$$

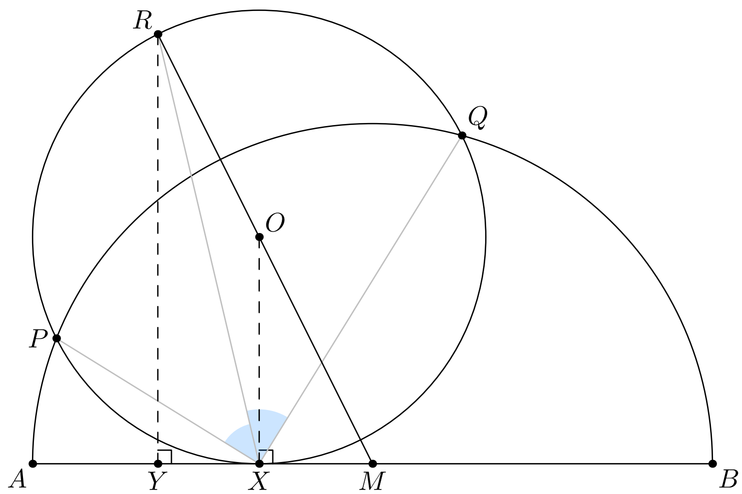
$$c_{k-1} \geq 2^{n-k} - 2c_k$$

Y por lo tanto se debió violar la desigualdad en el turno anterior, contradiciendo que este es el primer momento en el que falla.

65. Soluciones de la XXXII OMM 2018

Enunciados en la página 42

65.1. Problema 1



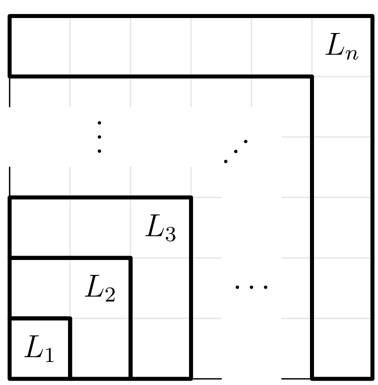
Como XR es bisectriz de $\angle PXQ$, R es el punto medio del arco PQ en (PXQ) y $RP = RQ$. Como $MP = MQ$ concluímos que MR es la mediatriz de PQ. Sea O el circuncentro de PXQ, que también está en esta mediatriz. Entonces $OX \perp \ell$, pues (PXQ) es tangente a ℓ, y entonces $RY \parallel OX$. Por el Teorema de Tales concluímos que

$$\frac{MX}{XY} = \frac{OM}{OR} = \frac{OM}{OX} > 1$$

Lo último pues $\angle OXM = 90°$ y entonces $OX = \sqrt{OM^2 - MX^2} < OM$.

65.2. Problema 2

La respuesta es $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Ésta se alcanza tomando figuras $L_1, L_2, \ldots, L_n$ y juntándolas para formar un cuadrado de $n \times n$.



Veamos que este es el mínimo. Digamos que usamos $L_{a_1}, L_{a_2}, \ldots, L_{a_k}$ para cubrir el tablero. Tenemos dos pasos esencialmente disjuntos:

Paso 1: Demostramos que $k \geq n$.

Consideremos la *esquina* de cada L_{a_i}, que es la casilla donde se traslapan las dos fichas de $1 \times a_i$ y $a_i \times 1$ que la forman. Veamos que cada L_i solo cubre casillas en la misma fila o columna que su esquina. Si $k < n$ entonces hay una fila sin esquinas y una columna sin esquinas, por lo que la intersección de estas no puede estar cubierta por ninguna L. Concluímos que $k \geq n$.

Paso 2: Demostramos que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq \frac{n^2+k}{2}$

Notemos que la figura L_m cubre exactamente $2m - 1$ casillas. Como las L_{a_i} deben cubrir las n^2 casillas del tablero concluímos que

$$(2a_1 - 1) + (2a_2 - 1) + \cdots + (2a_k - 1) \geq n^2$$
$$\Longrightarrow$$
$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \geq n^2 + k$$
$$\Longrightarrow$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq \frac{n^2 + k}{2}$$

Combinando ambos pasos deducimos que $a_1 + \cdots + a_k \geq \frac{n^2+n}{2}$, como queríamos.

65.3. Problema 3

Sea $f(n)$ el número de sucesiones campechanas de tamaño n tales que $a_i \mid n$ para todo i. Demostramos primero la siguiente afirmación:

Afirmación: Si m y n son primos relativos entonces $f(mn) \geq f(m)f(n)$.

Demostración: Sean $a_2, \ldots, a_{n+1}$ y $b_2, \ldots, b_{m+1}$ sucesiones campechanas de tamaños n y m respectivamente que cumplen la condición. Afirmamos que la sucesión

$$c_i = a_i b_i$$

Para $i = 2, 3, \ldots, mn + 1$ es campechana de tamaño mn, donde definimos $a_i = a_{i+n}$ y $b_i = b_{i+m}$. Es claro que $c_i \mid mn$ pues $a_i \mid n$ y $b_i \mid m$.

Notemos que $(i, c_j) = 1$ si y solo si a_j y b_j son primos relativos con i. Notemos que $(i, a_j) = (i \pmod{n}, a_j)$, pues $a_j \mid n$. Como (a_i) es campechana existen exactamente a_i términos de la sucesión (a_i) tales que se cumple $(i \bmod n, a_j) = 1$. Análogamente existen exactamente b_i términos de la sucesión (b_i) tales que $(i \bmod m, b_j) = 1$. Se sigue que hay exactamente mn parejas (x, y) con $2 \leq x \leq n+1$ y $2 \leq y \leq m+1$ tales que $(i, a_x) = (i, b_y) = 1$. Como m y n son primos relativos, por el teorema chino del residuo existe un único $z \in \{2, \ldots, mn + 1\}$ tal que $z \equiv x \pmod{n}$ y $z \equiv y \pmod{m}$. Este nos da un término de la sucesión que es primo relativo con i, y todos se generan de esta forma, por lo que hay exactamente $a_i b_i$.

Finalmente veamos que esta asignación es inyectiva. Si algún primo p divide a todos los elementos de la sucesión a_i entonces $p \leq n$ pues $a_i \mid n$, y $a_p = 0$, lo cual es contradictorio. Entonces $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, por lo que para cada $2 \leq i \leq m + 1$:

$$\gcd(b_i a_2, b_i a_3, \ldots, b_i a_{n+1}) = b_i$$

Entonces dada la sucesión (c_i) podemos recuperar unívocamente la sucesión (b_i). Análogamente podemos recuperar la sucesión (a_i), por lo que esta asignación es inyectiva, lo cual demuestra la desigualdad. $\square$

Para finalizar demostramos que $f(p) \geq 1$ y $f(pq) \geq 2$ para cualesquiera primos distintos p, q, entonces

$$f(m) = f(p_1p_2 \dots p_k) \geq f(p_1p_2)f(p_3)f(p_4)\dots f(p_k) \geq f(p_1p_2) \geq 2$$

Veamos que la sucesión dada por $a_i = p$ para $i \in \{2, \dots, p+1\} \setminus \{p\}$ y $a_p = 1$ es campechana de tamaño p. En efecto, todos los elementos de la sucesión son primos relativos con cualquier número entre $2, 3, \dots, p+1$ distinto de p, y 1 es el único primo relativo con p. Entonces $f(p) \geq 1$, y resta demostrar que $f(pq) \geq 2$. Afirmamos que las sucesiones

$$a_i = p^{[p \nmid i]}q^{[q \nmid i]} \qquad b_i = p^{[q \nmid i]}q^{[p \nmid i]}$$

Son ambas campechanas, donde $[X]$ es la función que da 1 si X es verdadero y 0 de lo contrario. Para ambas sucesiones, si m no es divisible entre p o q entonces todos los términos de la sucesión son primos relativos con pq, y el único término primo relativo con pq es $a_{pq} = b_{pq} = 1$.

Si $(m, pq) = p$ entonces $(a_i, m) \mid p$, por lo que $(a_i, m) = 1$ si y solo si $p \nmid a_i$, lo cual pasa si y solo si $p \mid i$. Hay exactamente $a_m = q$ múltiplos de p en $\{2, 3, \dots, pq+1\}$, que es justo lo que queremos. Para b_i tenemos $(b_i, m) = 1$ si y solo si $p \nmid a_i$, lo cual pasa si y solo si $q \mid i$. Hay exactamente $p = b_m$ múltiplos de q en $\{2, 3, \dots, pq+1\}$, que es justo lo que queremos. Análogamente vemos que la condición se cumple si $(m, pq) = q$.

65.4. Problema 4

Sea $f(n) = 1 + 2 + \cdots + n$. Afirmamos que se cumplen las siguientes desigualdades, que son fáciles de comprobar:

- $f(1)f(n) < f(n+1)$ para todo $n \geq 1$.
- $f(n) < f(2)f(n-2)$ para todo $n \geq 5$.
- $f(4)^2 < f(3)^2 f(2)$.
- $f(2)^2 < f(4)$.
- $f(2)f(4) < f(3)^2$.

De todas estas deducimos que en la elección óptima de a_i's para cierto n no puede haber $1s$ (pues podemos cambiar 1, a_i por $a_i + 1$), no puede haber números mayores o iguales que 5 (pues podemos cambiar a_i por 2, $a_i - 2$). Hay a lo más un 2 (pues podemos cambiar $2, 2$ por 4), hay a lo más un 4 (pues podemos cambiar $4, 4$ por $2, 3, 3$), y no puede haber tanto un 2 como un 4 (pues podemos cambiar $2, 4$ por $3, 3$). De aquí determinamos que las tuplas (a_i) que maximizan el producto $f(a_1)f(a_2)\dots f(a_k)$ para cada n son de hecho únicas (salvo permutación):

- (3, 3, 3, …, 3), con $f(a_1)\dots f(a_k) = 6^{\frac{n}{3}}$, si $n \equiv 0 \pmod{3}$
- (4, 3, 3, …, 3), con $f(a_1)\dots f(a_k) = 10 \cdot 6^{\frac{n-4}{3}}$ si $n \equiv 1 \pmod{3}$.
- (2, 3, 3, …, 3), con $f(a_1)\dots f(a_k) = 3 \cdot 6^{\frac{n-2}{3}}$ si $n \equiv 2 \pmod{3}$.

65.5. Problema 5

El problema es equivalente a determinar cuándo el conjunto

$$\left\{ \frac{i(i+1)}{2} \bmod n \;\middle|\; i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \right\}$$

Contiene cada residuo módulo n exactamente una vez. Observemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{p(p+1)}{2} \equiv \frac{q(q+1)}{2} \pmod{n} \\
\iff &\frac{p^2+p-q^2-q}{2} \equiv 0 \pmod{n} \\
\iff &\frac{(p-q)(p+q+1)}{2} \equiv 0 \pmod{n} \\
\iff &2n \mid (p-q)(p+q+1)
\end{aligned}
$$

Por lo que buscamos encontrar todos los n tales que esta condición nunca se cumple para $0 \leq p \neq q \leq n-1$. Afirmamos que esto pasa si y solo si n es una potencia de 2. Sea $n = 2^a b$ con b impar. La idea es que para cualesquiera $x < y$ de distinta paridad el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
p - q &= x \\
p + q + 1 &= y
\end{aligned}
$$

Tiene una solución en enteros no negativos dada por $\left(\frac{x+y-1}{2}, \frac{y-x-1}{2}\right)$. Supongamos que $b > 1$. Si $2^a > b$ elegimos $(x, y) = (b, 2^{a+1})$, de lo contrario elegimos $(x, y) = (2^{a+1}, b)$. Tenemos

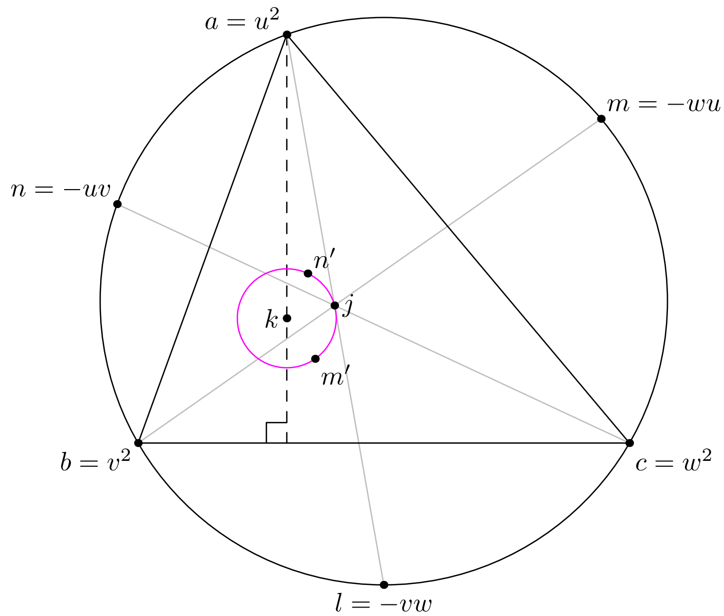
$$
0 \leq \frac{y-x-1}{2} \leq \frac{x+y-1}{2} = \frac{2^{a+1}+b-1}{2} < 2^a b = n
$$

Usando que $b \geq 3$. Entonces $2n \mid (p-q)(p+q+1)$ y hay dos $\frac{x(x+1)}{2}$ congruentes módulo n. Supongamos ahora que $b = 1$, de modo que $n = 2^a$. Si $2^{a+1} = 2n \mid (p-q)(p+q+1)$, entonces como los factores $p-q$ y $p+q+1$ tienen paridad debemos tener $p-q = 1$ y $p+q+1 = 2^{a+1}$. Pero esto implica $p = 2^a = n$, que está fuera del rango permisible. Concluímos que

$$
\frac{p(p+1)}{2} \not\equiv \frac{q(q+1)}{2} \pmod{2^a}
$$

Para cualesquiera $0 \leq p \neq q \leq n-1$, entonces $n = 2^a$ funciona.

65.6. Problema 6



Procedemos por números complejos. Sea L el punto medio del arco BC que no contiene a A. Tomamos el circuncírculo de ABC como el círculo unitario. Denotando por x al número complejo correspondiente a X, por un resultado conocido existen números complejos u, v, w con $|u| = |v| = |w| = 1$ tales que

$$\begin{aligned} a &= u^2 & l &= -vw \\ b &= v^2 & m &= -wu \\ c &= w^2 & n &= -uv \end{aligned}$$

Y el incentro es igual a $-(uv+vw+wu)$, pues es el ortocentro de $\triangle LMN$. Aplicando una rotación adecuada podemos suponer que $u = 1$.

Ahora calculamos m' y n'. Como M es punto medio del arco AC, tenemos $AM = MC$, por lo que el cuadrilátero $AM'CM$ es de hecho un paralelogramo. Deducimos que $a + c = m + m'$, de modo que

$$m' = a + c - m = 1 + w^2 - (-w) = 1 + w + w^2$$

Análogamente $n' = 1 + v + v^2$. El incentro, que denotamos por j para evitar confusión está dado por $j = -v - w - vw$. Ahora debemos calcular el circuncentro de IMN. Es conocido que para un triángulo XYZ representado por números complejos x, y, z, su circuncentro está dado por

$$O = \begin{vmatrix} x & x\overline{x} & 1 \\ y & y\overline{y} & 1 \\ z & z\overline{z} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x & \overline{x} & 1 \\ y & \overline{y} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix}$$

Sean $p = m' - j, q = n' - j$, nuestra estrategia será calcular el circuncentro del triángulo formado por los complejos p, q y 0, y luego transladarlo por j. Cuando $z = 0$ la fórmula anterior se vuelve simplemente

$$\frac{xy(\overline{y}-\overline{x})}{x\overline{y}-y\overline{x}}$$

Que es manejable. Veamos que $p = m' - j = 1 + 2w + w^2 + v + vw = (1 + w)(1 + v + w)$. Análogamente $q = (1 + v)(1 + v + w)$. Ahora podemos calcular

$$\overline{p} = \overline{(1+w)(1+v+w)} = (1+\overline{w})(1+\overline{v}+\overline{w}) = \left(1+\frac{1}{w}\right)\left(1+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{vw^2}(w+1)(vw+v+w)$$

Análogamente $\overline{q} = \frac{1}{v^2w}(v+1)(vw+v+w)$. Ahora con un poco de valentía procedemos a calcular el numerador. Tenemos

$$\begin{aligned}
pq(\overline{q}-\overline{p}) &= pq\left(\frac{1}{v^2w}(v+1)(vw+v+w) - \frac{1}{vw^2}(w+1)(vw+v+w)\right) \\
&= pq\left(\frac{vw+v+w}{v^2w^2}\left[w(v+1)-v(w+1)\right]\right) = pq\frac{(vw+v+w)(w-v)}{v^2w^2} \\
&= \frac{(1+w)(1+v)(vw+v+w)(1+v+w)^2(w-v)}{v^2w^2}
\end{aligned}$$

Ahora calculamos el denominador:

$$\begin{aligned}
p\overline{q}-q\overline{p} &= \frac{(1+w)(1+v+w)(1+v)(vw+v+w)}{v^2w} - \frac{(1+v)(1+v+w)(1+w)(vw+v+w)}{vw^2} \\
&= \frac{(1+v)(1+w)(1+v+w)(vw+v+w)(w-v)}{v^2w^2}
\end{aligned}$$

Milagrosamente al dividir nos queda simplemente $1 + v + w$, de modo que el circuncentro K de $IM'N'$ está dado por $k = j + 1 + v + w = 1 - vw$. Para finalizar queremos demostrar que AK es perpendicular a BC, lo cual pasa si y solo si $\frac{k-a}{c-b}$ es imaginario puro, es decir

$$\frac{k-a}{c-b} = -\overline{\left(\frac{k-a}{c-b}\right)}$$

Calculamos entonces

$$t = \frac{k-a}{c-b} = \frac{-vw+1-1}{w^2-v^2} = \frac{vw}{v^2-w^2}$$

Y entonces

$$\overline{t} = \frac{\frac{1}{vw}}{\frac{1}{v^2}-\frac{1}{w^2}} = \frac{(vw)^2\left(\frac{1}{vw}\right)}{(vw)^2\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{w^2}\right)} = \frac{vw}{w^2-v^2} = -\frac{vw}{v^2-w^2} = -t$$

Con lo cual hemos terminado.

66. Soluciones de la XXXIII OMM 2019

Enunciados en la página 43

66.1. Problema 1

Supongamos que $d(n) \geq 5$, entonces $n \geq 7$ y $n^{d(n)} \geq 7^5 > 2019$. Basta entonces considerar los casos con $d(n) \leq 4$.

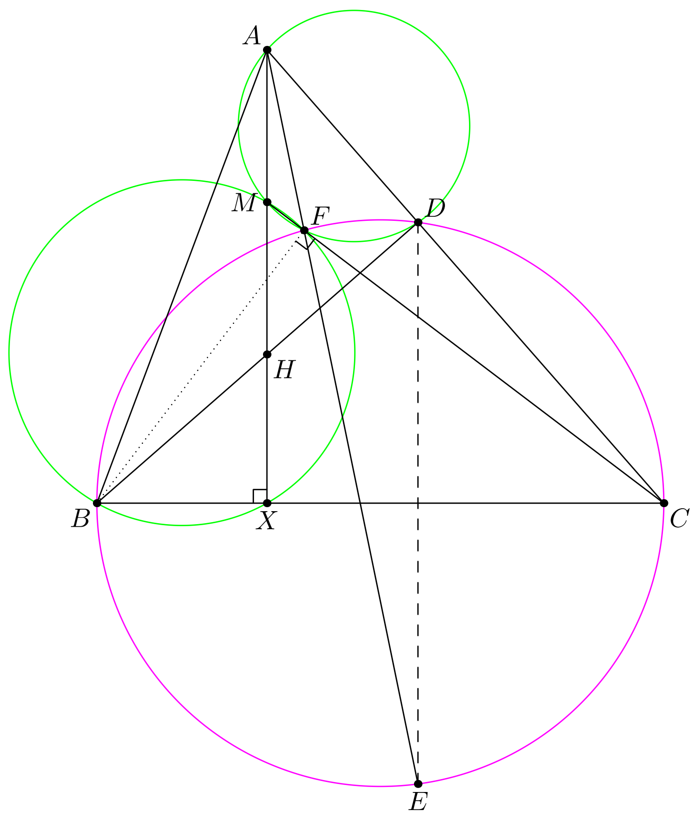
Si $d(n) = 4$ entonces $n \leq 7$ pues $7^4 > 2019$. La única opción es $n = 6$ que nos da $n = 6^4 = 1296$.

Si $d(n) = 3$ entonces $n = p^2$ con p primo. Si $p > 3$ entonces $n \geq 25$ y $n^3 \geq 25^3 > 2019$. Entonces las opciones son $4^3 = 64$ y $9^3 = 729$.

Si $d(n) = 2$ entonces $n = p$ con p primo. Debemos tener $p^2 \leq 2019$ y entonces $p < 45$, lo cual nos da los números $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$.

Finalmente si $d(n) = 1$ obtenemos $n = 1$.

66.2. Problema 2



Sea F' la proyección de B sobre CF. Demostraremos que $F = F'$, con lo cual terminamos. Sea X el pie de la altura desde A, entonces $MFXB$ es cíclico y por potencia desde C tenemos $CM \cdot CF = CB \cdot CX = CA \cdot CD$, y $AMFD$ es cíclico. Además tenemos que M es el circuncentro de ADH, y entonces $MA = MD = MH$. Finalmente veamos que $\angle BFC = \angle BDC = \angle BEC = 90°$, y entonces B, F, D, C, E son concíclicos. Entonces

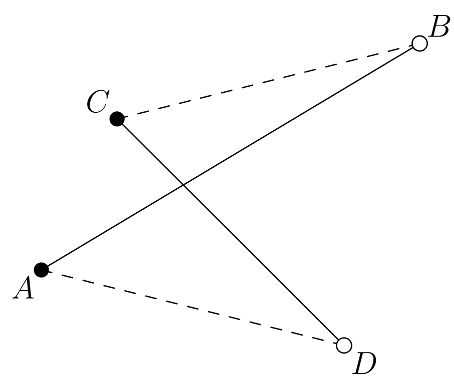
$$
\begin{aligned}
\angle DF'E = \angle DBC &= \angle DBC + \angle CBE = 2\angle DBC = 2\angle HBX = 2\angle HAD \\
&= 2\angle MAD = \angle MAD + \angle MDA = 180^\circ - \angle AMD = 180^\circ - \angle AF'D
\end{aligned}
$$

Por lo que A, F', E son colineales y $F = F'$.

66.3. Problema 3

Pintamos a los números menores o iguales que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ de blanco y los números mayores que $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ de negro. Si n es impar hay dos números exactamente iguales a $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, pintamos uno de blanco y uno de negro. La observación principal es que si conecta un punto blanco con uno negro, el segmento que los une será etiquetado con el número negro. Nuestra estrategia para ambas partes será entonces encontrar, o forzar una división donde todos los segmentos tengan un punto de cada color, pues hay exactamente $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ números negros distintos.

a) Consideramos la partición de los puntos en n segmentos donde todos tienen un extremo blanco y un extremo negro con suma de longitudes de los segmentos mínima. En ésta no puede haber intersecciones, pues si las hubiera podríamos tomar una configuración con una suma de longitudes menor:



b) Sí es posible. Pintamos los puntos alternadamente de blanco y negro en el círculo, y luego colocamos los números chicos arbitrariamente en los puntos blancos y los números grandes en los negros. Afirmamos que cada segmento debe conectar un punto blanco con uno negro. Esto pasa ya que si un segmento conecta dos puntos del mismo color, entonces deja una cantidad impar de puntos de cada lado, y por lo tanto es imposible conectar los puntos sin intersecciones.

66.4. Problema 4

La respuesta es 11, que podemos lograr por ejemplo tomando la lista $a_i = \nu_2(i)$. Esto funciona ya que si tomamos dos múltiplos de 2^k consecutivos alguno es divisible por 2^{k+1}, por lo que el máximo número de cualquier sublista debe aparecer exactamente una vez.

Ahora veamos que 10 no es posible. Supongamos que $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ es una lista muy buena con solo 10 valores distintos. Para cada posición $1 \leq i \leq 2019$ consideremos la tupla

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$$

Donde x_i es el número de veces que aparece el i-ésimo elemento, módulo 2. Como solo hay 2^{10} tuplas posibles, por Casillas existen dos posiciones a las que se les asigna la misma tupla, digamos que estas son $i < j$. Entonces en la lista $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j$ cada número aparece una cantidad par de veces, y en particular el máximo aparece al menos dos veces, contradicción.

66.5. Problema 5

Veamos que después de t minutos, el saltamontes está en la posición

$$a\left\lfloor \frac{t}{a} \right\rfloor - b\left\lfloor \frac{t}{b} \right\rfloor$$

Esto se debe a que $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ es el número de múltiplos de k menores o iguales que n para cualesquiera enteros positivos n y k. Además, $k\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ es el mayor múltiplo de k que es menor o igual que n. De este argumento vemos que

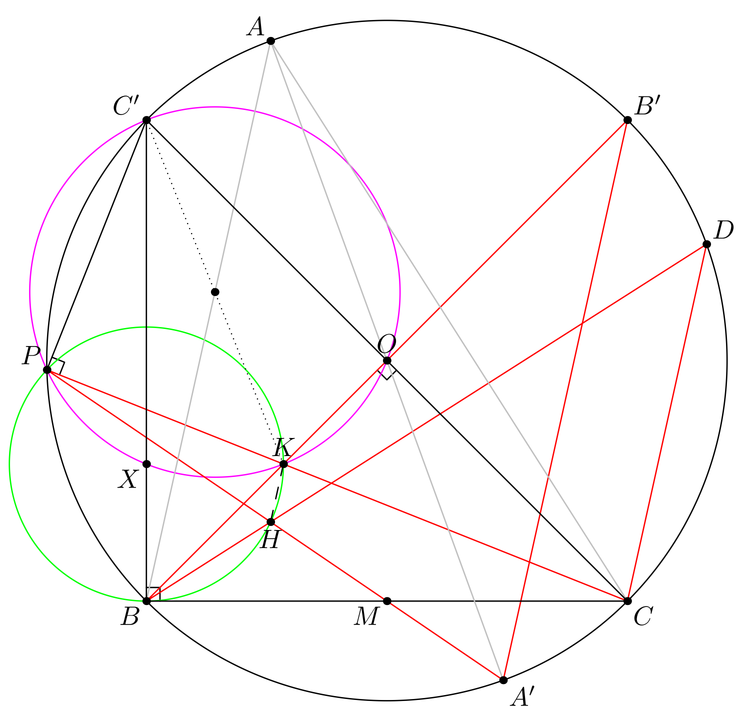
$$-a < a\left\lfloor \frac{t}{a} \right\rfloor - b\left\lfloor \frac{t}{b} \right\rfloor < b$$

Para ver la desigualdad de la derecha veamos que si $m = a\lfloor \frac{t}{a} \rfloor$ entonces alguno de los números $m, m-1, \ldots, m-b+1$ debe ser múltiplo de b, por lo que el mayor múltiplo de b menor o igual que t es al menos $m-b+1$. La otra desigualdad se ve de manera análoga. Para finalizar demostramos que los números que el saltamonte alcanza son justamente los enteros del intervalo $(-a, b)$. Para esto observemos que

$$x + a \equiv x - b \pmod{a+b}$$

Por lo que módulo $a+b$ la posición de x avanza en a en cada minuto que es múltiplo de a o de b, salvo cuando $ab \mid x$, en cuyo caso avanza $2a$. Como en el intervalo $(0, ab]$ hay exactamente $a+b-1$ números que son múltiplos de a o de b (pues $(a,b) = 1$), concluímos que el saltamontes visita todos los residuos módulo $a+b$, excepto $-a$, que nos saltamos pues se avanza $2a$ en vez de a en $t = ab$. Como el intervalo $(-a, b)$ contiene exactamente un representante de cada clase de congruencia módulo $a+b$ (excepto $-a$), deducimos que el saltamontes pasa por todos los enteros en este intervalo.

66.6. Problema 6



Sean A', B', C' los Γ-antipodales de A, B y C respectivamente, y sea M el punto medio de BC. Es un hecho conocido que A', M, H son colineales y que $BHCA'$ es un paralelogramo. Sea P' la intersección del rayo MH con Γ, entonces por potencia tenemos

$$MB^2 = MB \cdot MC = MA' \cdot MP = MH \cdot MP'$$

Y $(P'HB)$ es tangente a BC, por lo que $P = P'$. Además esto nos dice que $MC^2 = MP \cdot MH$ y (PHC) es tangente a BC, por lo que el problema es simétrico y basta probar que el circuncentro de PXO está en AB.

Sea $K = PC \cap OB$, y notemos que $BCB'C'$ es un cuadrado pues $\angle A = 45°$ y entonces $\angle BC'C = 45°$, además de que $BCB'C'$ es un rectángulo. Entonces

$$\angle C'OK = 90° = \angle C'PC = \angle C'PK$$

Y C', P, K, O son concíclicos. Ahora, como $C'B \perp BC$ y (PHB) es tangente a BC, K está en BC'. De aquí podemos ver que

$$\angle C'XP = \angle XBP + \angle XPB = 2\angle XBP = 2\angle C'BP = \angle C'OP$$

Y C', P, X, K, O son todos concíclicos. Este círculo tiene diámetro CK, y entonces el circuncentro de OPX es el punto medio de CK, y buscamos probar que éste está en AB.

Sea D la segunda intersección de BH con Γ. Como $\angle A = 45°$ tenemos $\angle ABD = 45°$, y $ABCD$ es un trapecio isósceles, por lo que $CD \parallel AB$. Ahora por el Teorema de Pascal en el hexágono $B'BDCPA'$, los puntos $K = B'B \cap CP$, $H = BD \cap A'P$, y $\infty_{AB} = CD \cap A'B'$ son colineales, por lo que $KH \parallel AB$. Para finalizar veamos que $AHBC'$ es un paralelogramo, y por lo tanto el punto medio de CH está en AB. Como $HK \parallel AB$ concluímos que el punto medio de CK también está en AB.