Transformaciones Geométricas

Representación Matricial y Coordenadas Homogéneas

Introducción

- Muchas aplicaciones gráficas implican secuencias de transformaciones geométricas.
- Una animación debería requerir que un objeto fuese trasladado y rotado tras cada incremento de movimiento.
- La visualización de las transformaciones implica secuencias de traslaciones y rotaciones para llevarnos desde la escena original especificada a la visualización en un dispositivo de salida.
- Aquí, consideramos cómo las representaciones de matrices discutidas en la sección anterior pueden reformularse, de tal forma que puedan ser procesadas eficientemente.

Introducción

- Cada una de las tres transformaciones bidimensionales básicas (traslación, rotación y cambio de escala) pueden expresarse en forma de matriz general:

$$\boxed{\mathbf{P' = M_1 \bullet P + M_2}}$$

P y **P'** representados en vectores columnas.

$\mathbf{M_1}$ es una matriz de 2x2 que contiene factores multiplicativos

$\mathbf{M_2}$ es una matriz columna de 2 elementos que contiene los términos traslacionales.

Introducción

- Para la traslación, $\mathbf{M}_1$ es la matriz identidad.
- Para la rotación o el cambio de escala, $\mathbf{M}_2$ contiene los términos traslacionales asociados con el punto pivote.

- Para producir una secuencia de transformaciones con esas ecuaciones podemos hacer una cosa a la vez, o
- **combinar transformaciones para que la posición final de las coordenadas se obtenga directamente a partir de las coordenadas iniciales, <u>sin calcular valores intermedios</u>.**

Coordenadas Homogéneas

- Los términos multiplicativos y traslacionales pueden ser combinados dentro de una matriz sencilla, si expandimos la representación a matrices de 3x3.
- Podemos usar la **tercera columna** de la matriz de transformación para los términos traslacionales, y todas las ecuaciones de transformación pueden expresarse como **multiplicación de matrices**.

Coordenadas Homogéneas

- Necesitamos además expandir la representación matricial para posiciones de coordenadas bidimensionales a una matriz columna de 3 elementos.
- Una técnica estándar para lograr esto consiste en expandir cada representación de posición-coordenada bidimensional (x,y) en representaciones de 3 elementos (x_h, y_h, h) llamadas **coordenadas homogeneas.**

Coordenadas Homogéneas

- Donde el parámetro homogéneo h es un valor distinto de cero tal que:

$$\boxed{\mathbf{x = x_h \,/\, h\,, \quad y = y_h/h}}$$

- Por tanto una representación de coordenadas homogéneas bidimensionales, puede escribirse también como (h•x, h •y, h).
- Para transformaciones geométricas, podemos elegir el parámetro homogéneo h para cualquier valor distinto de cero.
- Así hay un número infinito de representaciones homogéneas equivalentes para cada punto de coordenadas (x,y).

Coordenadas Homogéneas

- Una elección acertada es fijar h = 1.
- Cada posición bidimensional se representa con coordenadas homogeneas (x,y,1).

- Expresar posiciones en coordenadas homogéneas nos permite representar todas las ecuaciones de transformaciones geométricas como multiplicación de matrices, que es el método estándar usado en sistemas gráficos.

Coordenadas Homogéneas

- ***Las posiciones de coordenadas bidimensionales se representan con vectores columna de tres elementos, y las operaciones de transformación bidimensionales se representan como matrices de 3x3.***

Matriz de traslación bidimensiobnal

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P' = T(t_x, t_y) \bullet P}$$

$T(t_x,t_y)$: matriz de traslación de 3x3.

Matriz de rotación bidimensional

sobre el origen

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P' = R(\theta) \bullet P}$$

R(θ) : matriz de rotación de 3x3.

Matriz de cambio de escala bidimensional

sobre el origen

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P' = S(s_x, s_y) \bullet P}$$

$S(s_x,s_y)$: matriz de cambio de escala de 3x3.

Transformaciones Inversas

MATRIZ DE TRASLACION INVERSA

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

INVERSA DE MATRIZ DE ROTACION

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

INVERSA DE MATRIZ DE CAMBIO DE ESCALA

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMACIONES COMPUESTAS BIDIMENSIONALES

- Usando la representación de matrices, podemos establecer una secuencia de transformaciones como **matriz de transformación compuesta** calculando el producto de las transformaciones individuales.
- Formando productos con las matrices de transformación se conoce como **concatenación** o **composición.**

TRANSFORMACIONES COMPUESTAS BIDIMENSIONALES

$$P' = M_1 \bullet M_2 \bullet P$$
$$= M \bullet P$$

- Es más eficiente primero multiplicar la transformación de matrices para formar una única matriz compuesta.
- La posición de coordenadas se transforma usando la matriz compuesta M, mejor que aplicando las transformaciones M_1 y luego M_2.

Rotación general sobre un punto de pivote bidimensional

1. Trasladar el objeto de tal forma que la posición del punto de pivote se mueva al origen de coordenadas.
2. Rotar el objeto sobre el eje de coordenadas.
3. Trasladar el objeto de tal forma que el punto de pivote vuelva a su posición original.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotación general sobre un punto de pivote bidimensional…

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & x_r(1-\cos\theta)+y_r\,\text{sen}\,\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_r(1-\cos\theta) -x_r\,\text{sen}\,\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Que puede expresarse de la forma:

$$T(x_r, y_r)\bullet R(\theta)\bullet T(-x_r,-y_r)=R(x_r,y_r,\theta)$$