Curso de R y estadística básica

[Felipe de J. Muñoz González]

fmunoz@lcg.unam.mx

Distribuciones discretas
Descargar Presentación

Variables Aleatorias Discretas

Variables Aleatorias Discretas

- Funciones de Probabilidad

Para toda variable discreta X se asocia una función de probabilidad $fX : S_X \to [0, 1]$ definida como:

$f_X(x) = P(X = x), x \in S_X.$

y cumplen las siguientes caracteristicas

1. $f_X(x)>0$ para todo $x \in S$
2. $\mathrm{Sum}(x \in S, f_X(x)) = 1$
3. $P(X \in A) = \mathrm{Sum}(x \in A, f_X(x))$ para todo $A \subset S$

Variables Aleatorias Discretas

- Funciones de Probabilidad

- **Media, Varianza y SD**

Media o Esperanza

$\mu = E(X) = \text{sum}(x * f_X(x))$, donde $x \in S$

Varianza

$\sigma^2 = \text{SUM}[(x - \mu)^2 * f_X(x)]$, donde $x \in S$

SD

$\sigma = \text{sqrt}(\sigma^2)$

Ejemplo

x∈ S	0	1	2	3
f_X(x) = P(X = x)	1/8	3/8	3/8	1/8

Variables Aleatorias Discretas

- Funciones de Probabilidad

- Ejemplo

Definimos el problema

```
> x <- c(0,1,2,3)
> f <- c(1/8, 3/8, 3/8, 1/8)
```

Calculamos la media

```
> mu <- sum(x * f)
> mu
```

Calculamos la varianza

```
> sigma2 <- sum((x-mu)^2 * f)
> sigma2
```

Calculamos la desviación estandar

```
> sigma2 <- sum((x-mu)^2 * f)
> sigma2
```

Calculamos las sumas acomulativas

```
> F = cumsum(f)
> F
```

Variables Aleatorias Discretas

- Funciones de Probabilidad

- Paquete distEx

```
> install.packages("distrEx")
> library(distrEx)
> X <- DiscreteDistribution(supp = 0:3, prob = c(1,3,3,1)/8)
> E(X); var(X); sd(X)
```

```
> mu <- sum(x * f)
> mu
```

Distribución Uniforme Discreta

Distribución Uniforme Discreta

- Funcion de Probabilidad

Para una variable aleatoria X con una distribución discreta 1,2,3,…,m la función de probabilidad es:

f_X(x) = 1/m donde x = 1, 2, . . . , m

o

X ∼ disunif(m)

Un experimento aleatorio donde esta distribución ocurre es el elegir un numero entero entre 1 y 100, sea X el numero escogido entonces:

X ∼ disunif(m = 100)

y

P(X=x) = 1/100, x=1,…100

Distribución Uniforme Discreta

- Media, Varianza y desviación

Media

`μ = Sum_1^m (x`*`f_X(x)) = Sum_1^m(x`*`(1/m) )`

`μ = (1/m) * (1+2+3+...+m) = (m+1)/2`

Varianza

`Sum_1^m (x^2 * f_X(x)) = (1/m)Sum_1^m(x^2) = (m+1)(2m+1)/6`

`σ^2 = Sum_1^m (x^2 * f_X(x)) - μ^2 = (m+1)(2m+1)/6 - ((m+1)/2)^2 =...= (m^2-1)/12`

Desviación

`σ = sqrt( (m^2-1)/12)`

Distribución Uniforme Discreta

- Media, Varianza y desviación

Para simular una distribución aleatoria uniforme utilizamos la función

```
> ?sample
```

Ejemplos

- Tira un dado 3000 veces

```
> sample(6, size = 3000, replace = TRUE).
```

- Seleccionar un numero aleatorio entre 30 y 70

```
> sample(30:70, size = 27, replace= TRUE)
```

- Tirar una moneda 1000 veces

```
> sample(c("A","S"), size = 1000, replace = TRUE)
```

Distribución Binomial

Distribución Binomial

- Ensayo de Bernulli

Esta distribución se basa en un ensayo de Bernulli (donde solamente hay dos posibles resultados, Exito (True) y Fracaso (Falso).

sea X la variable aleatoria, X = 1 si el suceso tiene exito y X = 0 si no lo tiene.

La probabilidad del suceso se define como p y el fracaso como 1-p=q

La función de probabilidad esta definida como:

f_X(x) = p^x (1-p)^(1-x) donde x={0,1}

Es facil calcular la media, varianza y desviación

μ = E(X) = p

E(X^2) = p

σ^2 = p – p^2 = p(1 – p).

Distribución Binomial

- Modelo binomial

Contienen 3 caracteristicas:

- Se realizan n pruebas de bernulli
- Las pruebas son **independientes**
- La probabilidad p es constante

Si X considera el numero de exitos en n experimentos, entonces la función de probabilidad es:

f_X(x) = Conv(n,x)*p^x*(1-p)^(n-x) para x=0,1,2,3,…,n

Decimos que X tiene una distribucion binomial y se escribe e X ~ binom(size = n, prob = p).

Distribución Binomial

- Modelo binomial

- Media, Varianza y Desviación

Media

μ = SUM_0^n (x*Conv(n,x)* p^x * (1-p)^(n-x))

μ = SUM_1_n (x *(n!/(x!(n-x!)))* p^(x-1) * q^(n-x))

μ = np

De modo similar, obtenemos la varianza

σ^2 = E(X(X – 1)) + E(X) – [E(X)]^2

Distribución Binomial

- Modelo binomial

- **Media, Varianza y Desviación**

Media

$\mu = \mathrm{SUM}_0^n\,(x\,\mathit{Conv(n,x)}\ p^x * (1-p)^{(n-x)})$

$\mu = \mathrm{SUM\_1\_n}\,(x\ \mathit{(n!/(x!(n-x!)))}\ p^{(x-1)} * q^{(n-x)})$

$\mu = np$

De modo similar, obtenemos la varianza

$\sigma^2 = E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2$

Distribución Binomial

- Modelo binomial
- Ejemplo

Ejemplo.

Una familia de 4 hijos. Cada hijo solo puede ser Hombre o Mujer, las probabilidades de que sea uno u otro son 1/2 y los eventos son independientes. Si decimos que X es el numero de hombres entonces X ∼ binom(size = 4, prob = 1/2).

por lo tanto

$f_X(2)=Conv(4,2)(1/2)^2(1/2)^2= 6/2^4$

la media del numero de hombres es 4(1/2) = 2 y la varianza de X es de 4(1/2)(1/2) =1

Distribución Binomial

- Modelo binomial

- Ejemplo

```
?pbinom
```

Tirar 12 dados al mismo tiempo y definimos X como el numero de 6's que aparacen. Nosotros queremos obtener la probabilidad de obtener 7,8 o 9 6's.

S={salir 6 en un dado}

P(S) = 1/6

X ~ binom(size =12, prob =1/6)

$P(7 \leq X \leq 9)$ =SUM_{X=7}^{X=9} Conv(12,x)*(1/6)^x* (5/6)^(12-x)

```
> pbinom(9, size=12, prob=1/6) - pbinom(6, size=12, prob=1/6)
```

```
> diff(pbinom(c(6,9), size = 12, prob = 1/6)) # same thing
```

Paquete distr

```
> install.packages("distr")
```

```
> library(distr)
> X <- Binom(size = 3, prob = 1/2)
> X
```

```
> d(X)(1) # pmf of X evaluated at x = 1

> p(X)(2) # cdf of X evaluated at x = 2
```

Distribuciones Discretas

Resumen

- Distribución de bernoulli
- Distribución binomial
- Distribución binomial negativa
- Distribución Hipergeométrica
- Distribución de poisson

Distribuciones Discretas

Introducción

Recordemos que una variable aleatoria X tiene una distribución de proba
discreta (o simplemente una distribución discreta) si:

$$P\left(X = x_i\right) = \begin{cases} p_i & \text{si } x = x_i \ (i = 1, 2, \ldots) \\ 0 & \text{en el otro caso} \end{cases} \qquad \text{con } p_i \geq 0 \text{ y } \sum_i p_i =$$

That's all folks (for now)!

Slideshow created using remark.