Формальные языки.
Домашнее задание 3.

Жаворонков Эдгар
504 группа, SE

21 марта 2016 г.

1. (a) Покажем индукцией по n.
База индукции — $n = 1$. Тривиально:

$$(\epsilon)(e)^* = e*$$

Пусть для некоторого n верно

$$(\epsilon|e|ee|\dots|e^{n-1})(e^n)^* = e^*$$

Рассмотрим язык принимаемый выражением:

$$R = (\epsilon|e|ee|\dots|e^{n-1}|e^n)(e^{n+1})^*$$
$$L(R) = \{ab \mid a \in L((\epsilon|e|ee|\dots|e^{n-1}|e^n)) \wedge b \in L((e^n)^*)\}$$

Рассмотрим теперь язык, описывающий все слова a:

$$L((\epsilon|e|ee|\dots|e^{n-1}|e^n)) =$$
$$= L(\epsilon|e|ee|\dots|e^{n-1}) \cup L(e^n)$$
$$\Rightarrow L(R) = \{ab \mid a \in L(\epsilon|e|ee|\dots|e^{n-1}) \vee a \in L(e^n) \wedge b \in L((e^n)^*)\}$$

В силу дистрибутивности дизъюнкции имеем:

$$L(R) = \{ab \mid (a \in L(\epsilon|e|ee|\dots|e^{n-1}) \wedge b \in L((e^n)^*)) \vee (a \in L(e^n) \wedge b \in L((e^n)^*))\}$$

Заметим, что левый дизъюнкт — это предположение индукции и вспомним, что дизъюнкция обращается в истину, если хотя бы один из ее входов истинен. Поэтому переход доказан. $\square$

(b) Рассмотрим строчку, которая матчится левым выражением. Она имеет вид $s_e \dots s_e s_f \dots s_f s_e \dots s_e s_f \dots s_f s_e \dots s_e \dots$

Заметим теперь, что выражение справа матчит все строчки вида $s_e \dots s_e$ или $s_f \dots s_f$. Но левое регулярное выражение так же матчит эти строчки, следовательно они равны.

(c) Выражение слева матчит либо пустую строку, либо строки вида $s_e s_e s_f \dots s_e s_f s_f$. Но выражение справа точно так же описывает эти строки(пустая строка разрешена замыканием Клини, а последовательность строк, стартующая с $s_e s_f$ так же матчится этим выражением)

2. (a) $R_1 = (a|b)^*ab(a|b)^*|(a|b)^*a|b^* = (a|b)^* = R_2$

Покажем два включения: $L(R_1) \subseteq L(R_2)$ - очевидно

$L(R_2) \subseteq L(R_1)$ - индукция по структуре слова $w \in L(R_2)$:

- w состоит из одних b — b^*
- w представляет собой конкатенацию непустого слова из $L(R_2)$ и буквы a — $(a|b)^*a$
- $w = v_1 abv_2$, где v_1, v_2 - непустые слова из $L(R_2)$ — $(a|b)^*ab(a|b)^*$

(b) $(a|b)^*(ab|ba)(a|b)^*|a^*|b^* = (a|b)^*$

Индукция, аналогичная предыдущему пункту

3. (a)

$$
\begin{aligned}
ID &= (\_(\_)^*alnum|alpha)(\_|alnum^*) \\
alnum &= alpha|num \\
alpha &= a - z|A - Z \\
num &= 0 - 9
\end{aligned}
$$

(b)

$$\begin{aligned}
ratio &= rat|sgnnum.(0^*num|\epsilon)exp \\
sgn &= (\epsilon| + |-) \\
sgnnum &= sgn\ num \\
num &= (1-9)(0|(1-9))^* \\
rat &= sgnnum|sgnnum.0^*num|sgnnum(\epsilon|.|.0)|.0^*num \\
exp &= esgn(0|num)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
list &= [(\backslash s)^*|(ints;)^*ints] \\
ints &= (\backslash s)^*(0|num|num(num_0)^*)(\backslash s)^* \\
num &= 1-9 \\
num_0 &= 0-9
\end{aligned}$$