

# **TRABAJO PRÁCTICO FINAL**

## **Análisis Dinámico, Control dinámico y Simulación de un robot de 6 grados de libertad**

### **Alumnos:**

- **Asade, Jorge.**
- **Rosende, Alejandro.**
- **Villafañe, Melisa.**

**Profesor: Ing. H. Giannetta.**

## Definiciones y herramientas matemáticas

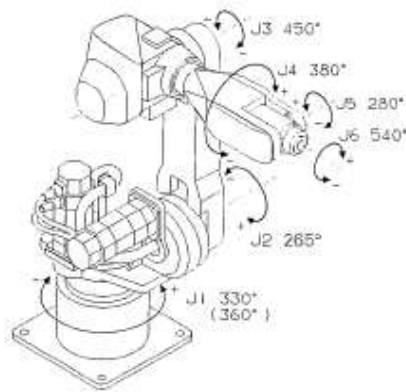
### Introducción

Un robot por definición es un manipulador multifuncional reprogramable capaz de mover materia con determinados grados de libertad, según trayectorias variables para realizar diversas tareas.

Se llama grados de libertad a cada uno de los movimientos que puede realizar una articulación respecto de la anterior.

Las transmisiones son las encargadas de llevar el movimiento desde los actuadores hasta las articulaciones.

Los reductores se utilizan para adaptar la velocidad y el par de la salida del actuador a valores adecuados para el movimiento. La relación entre el par y velocidad de salida respecto de la entrada en un actuador está dada por:



$$T_s = \eta T_e \frac{\omega_e}{\omega_s}$$

Dónde:

- T**: Par
- $\omega$** : Velocidad
- $\eta$** : Rendimiento
- e**: Entrada
- s**: Salida

### **Actuadores:**

Los actuadores son los encargados de generar el movimiento de los elementos del robot según las ordenes dadas por la unidad de control. Se deben considerar las siguientes características:

- Potencia
- Controlabilidad
- Peso
- Volumen
- Precisión
- Velocidad
- Mantenimiento
- Costo

Los actuadores se pueden clasificar en:

- Actuadores neumáticos
  - Cilindros o pistones neumáticos
  - Motores neumáticos
- Actuadores hidráulicos (funcionalmente en general no se distinguen de los neumáticos, sólo que en vez de utilizar aire, actúan con líquidos que en general son aceites.)
- Motores eléctricos
  - Motores de CC.
  - Motores de CA.
  - Paso a paso.

### **Sensores:**

Los sensores se encargan de brindar la información precisa del estado (posición, velocidad, etc) a la unidad de control.

Para tener información de la posición de un rotor se utilizan los encoders y resolvers.

Básicamente un encoder está constituido por un disco codificado (solidario con el eje a controlar) con marcas (agujeros en su superficie) que son atravesadas por un rayo de luz, al cortarse o no el haz el encoder emite una señal cuadrada que deberá interpretar el controlador, tomando su defasaje para saber el sentido de giro y tomando la cantidad de pulsos para saber su posición.

Un resolver son 3 bobinas, una solidaria a la rotación con una portadora de 400 hz y otras 2 fijas al rededor, al girar la primera el acoplamiento con las otras dos varía, lo que hace que la señal resultante dependa del seno del ángulo de giro.

Los elementos terminales o efectores son los encargados de interactuar con el entorno del robot o materia, pueden ser de aprehensión, herramientas, etc.

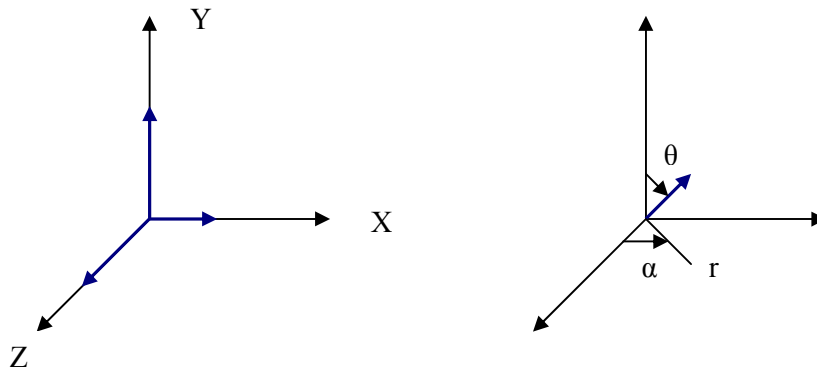
## Herramientas matemáticas

Para ubicar un punto en el espacio podemos utilizar 2 métodos:

- Coordenadas cartesianas
- Coordenadas polares

Las primeras utilizan 3 vectores que agrupándolos de a 2 forman un plano transversal al otro grupo de 2 vectores, y lograr ubicar un punto en el espacio con una componente de cada uno de ellos.

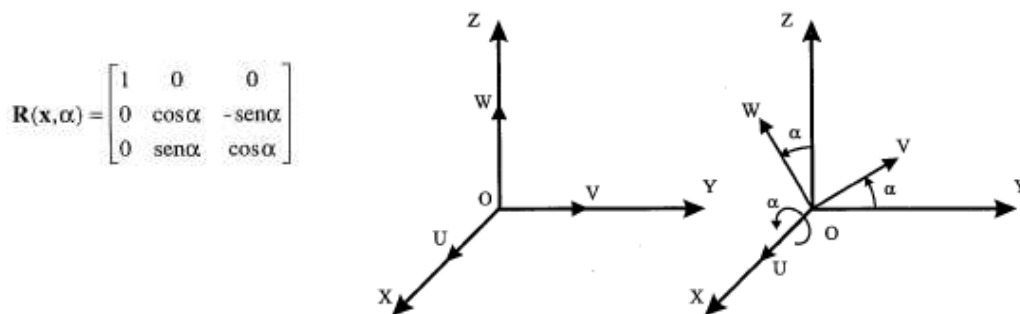
Las coordenadas polares ubican el punto con un determinado radio que se desplaza con 2 ángulos desde el origen.



Una forma de representar y operar con los componentes de éstos sistemas de coordenadas es utilizando matrices. Por ejemplo cuando queremos hacer girar un sistema respecto de otro utilizamos la matriz rotación.

## Matriz rotación

La matriz rotación define la orientación de un sistema respecto de otro, veamos un ejemplo en el que se desea hacer rotar el sistema OXYZ sobre el eje X para llegar al sistema OUVW:



También podemos lograr un movimiento haciendo varias rotaciones, lo que se llama composición de rotaciones, cabe aclarar que no es lo mismo hacer las rotaciones descuidando el orden de las mismas, veamos un ejemplo

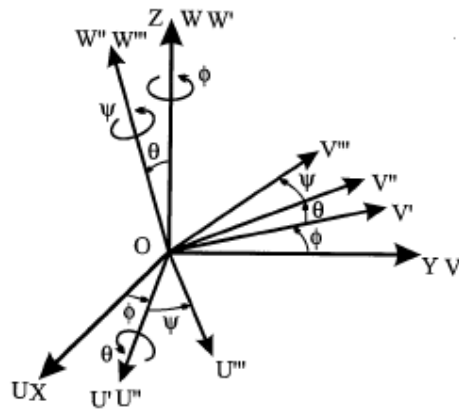
$$T = R(x, \alpha) R(y, \Phi) R(z, \theta) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Phi & 0 & s\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\Phi & 0 & c\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c\Phi & 0 & s\Phi \\ s\alpha s\Phi & c\alpha & -s\alpha c\Phi \\ c\alpha s\Phi & s\alpha & c\alpha c\Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c\Phi c\theta & -c\Phi s\theta & 1 \\ s\alpha s\Phi c\theta + c\alpha s\theta & -s\alpha s\Phi s\theta + c\alpha c\theta & -s\alpha c\Phi \\ -s\alpha s\Phi c\theta + s\alpha s\theta & s\alpha s\Phi s\theta + s\alpha c\theta & c\alpha c\Phi \end{pmatrix}$$

Existe otro método para realizar composición de rotaciones que son los ángulos de Euler, donde básicamente se realizan giros sobre ejes ya girados:

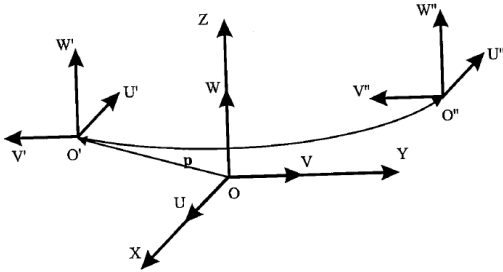


Aquí lo que se hizo fue:

- Girar OUVW un ángulo  $\alpha$  respecto de Z hasta llegar a OU'V'W'.
- Girar OU'V'W' un ángulo  $\theta$  respecto de U' hasta llegar a OU''V''W''.
- Y así sucesivamente.

## Matriz traslación

De la misma manera que la matriz rotación, con la matriz traslación logramos el movimiento de un sistema de referencia a otro.



La matriz traslación se compone de la siguiente manera:

$$x' = x + kx$$

$$y' = y + ky$$

$$z' = z + kz$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & Kx \\ 0 & 1 & 0 & Ky \\ 0 & 0 & 1 & Kz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Matrices homogéneas

La representación de un punto en un espacio n-dimensional se realiza con n+1 dimensiones para las matrices homogéneas. Por ejemplo: supongamos un sistema oXYZ que contiene un vector  $p(x,y,z) = a i + b j + c k$ , se representará con el vector  $p(a w, b w, c w, w)$  donde  $w$  tiene un valor arbitrario:

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces podemos definir a la matriz de transformación homogénea  $T$ , la cual sirve para transformar un sistema de matrices homogéneas en otro.

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \mathbf{f}_{1 \times 3} & \mathbf{w}_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

Está compuesta por 4 matrices para determinar la rotación y traslado de un sistema (esto es considerando nula la perspectiva y el escalado cómo sucede en las aplicaciones de robótica), de ésta manera la matriz  $T$  nos queda:

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cómo conclusión la matriz de transformación homogénea se utiliza para:

- Representar la posición y orientación de un sistema OUVW respecto de un sistema fijo OXYZ.
- Transformar un vector de un sistema a otro.
- Rotar y trasladar un vector respecto de un sistema fijo OXYZ.

## **Dinámica del robot.**

### **Introducción**

Las ecuaciones cinemáticas describen el movimiento del robot sin considerar las fuerzas y torques que afectan el movimiento, las ecuaciones dinámicas por otro lado describen la relación entre las fuerzas y el movimiento. Las ecuaciones del movimiento son importantes al considerar el diseño del robot, para la simulación y animación del movimiento del robot, y en el diseño de los algoritmos de control.

Esta relación se obtiene mediante el denominado modelo dinámico, que relaciona matemáticamente:

- La localización del robot definida por sus variables articulares o por las coordenadas de localización de su extremo, y sus derivadas: velocidad y aceleración.
- Las fuerzas y pares aplicados en las articulaciones (o en el extremo del robot).
- Los parámetros dimensionales del robot, como longitud, masas e inercias de sus elementos.

El problema de la obtención del modelo dinámico de un robot es, por lo tanto, uno de los aspectos más complejos de la robótica, lo que ha llevado a ser obviado en numerosas ocasiones.

- Simulación del movimiento del robot.
- Diseño y evaluación de la estructura mecánica del robot.
- Dimensionado de los actuadores.
- Diseño y evaluación del control dinámico del robot.

Este último fin es evidentemente de gran importancia, pues de la calidad del control dinámico del robot depende la precisión y velocidad de sus movimientos. La gran complejidad ya comentada existente en la obtención del modelo dinámico del robot, ha motivado que se realicen ciertas simplificaciones, de manera que así pueda ser utilizado en el diseño del controlador.

Es importante hacer notar que el modelo dinámico completo de un robot debe incluir no sólo la dinámica de sus elementos (barras o eslabones) sino también la propia de sus sistemas de transmisión, de los actuadores y sus equipos electrónicos de mando.

Estos elementos incorporan al modelo dinámico nuevas inercias, rozamientos, saturaciones de los circuitos electrónicos, etc. aumentando aún más su complejidad.

Por último, es preciso señalar que si bien en la mayor parte de las aplicaciones reales de la robótica, las cargas e inercias manejadas no son suficientes como para originar deformaciones en los eslabones del robot, en determinadas ocasiones no ocurre así, siendo preciso considerar al robot como un conjunto de eslabones no rígidos. Aplicaciones de este tipo pueden encontrarse en la robótica espacial o en robots de grandes dimensiones, entre otras.

Para la formulación de las ecuaciones dinámicas de un robot usaremos el método de Newton-Euler el cual se suele usar para cálculos numéricos.



### **Método de Newton-Euler:**

Con este método se llega a la misma solución que con el método de Lagrange pero se toma un camino diferente. En particular en el método de Lagrange se trata al manipulador como un todo y se desarrolla el análisis usando la función de Lagrange (la diferencia entre la energía cinética y energía potencial). En el método de Newton-Euler se trabaja con cada unión del robot, y se escriben las ecuaciones que describen el movimiento lineal y el movimiento angular. Por supuesto, una vez que se acoplan todas las uniones, las ecuaciones que describen cada unión contienen fuerzas de acoplamiento y torques que aparecen en las ecuaciones de las uniones adyacentes. Haciendo esto podemos determinar todos los términos de acoplamiento y eventualmente obtener una descripción del manipulador como un todo. Así vemos que la formulación de Newton-Euler es un poco diferente a la formulación de Lagrange.

Históricamente ambos métodos se desarrollan en paralelo y cada uno tiene ciertas ventajas. Por ejemplo, anteriormente se creía que el método de Newton-Euler es mas adecuado al cálculo recursivo que la formulación de Lagrange. Sin embargo actualmente ambos métodos son equivalentes en todo sentido. Así actualmente la principal razón para tener otro método de análisis a nuestra disposición es que podría proveer diferentes puntos de vista.

En cualquier sistema mecánico podemos identificar un set de coordenadas generalizadas y sus correspondientes fuerzas generalizadas. Analizar la dinámica de un sistema significa encontrar la relación entre  $q$  y  $\tau$ . En este punto podemos distinguir entre dos aspectos. Primero, nosotros podemos estar interesados en obtener ecuaciones cerradas que describan la evolución en el tiempo de las coordenadas genéricas. Segundo, podemos estar interesados en conocer que fuerza se necesita aplicar para obtener una evolución particular de las coordenadas genéricas. Esta distinción es tal que después solo queramos saber que función  $\tau$  dependiente del tiempo produce una trayectoria particular  $q$  y no que relación hay entre ambas. Es justo decir que en el análisis formal, la función de Lagrange es superior, mientras que en el último caso el método de Newton-Euler es superior.

### **Algoritmo computacional para el modelo dinámico de Newton-Euler:**

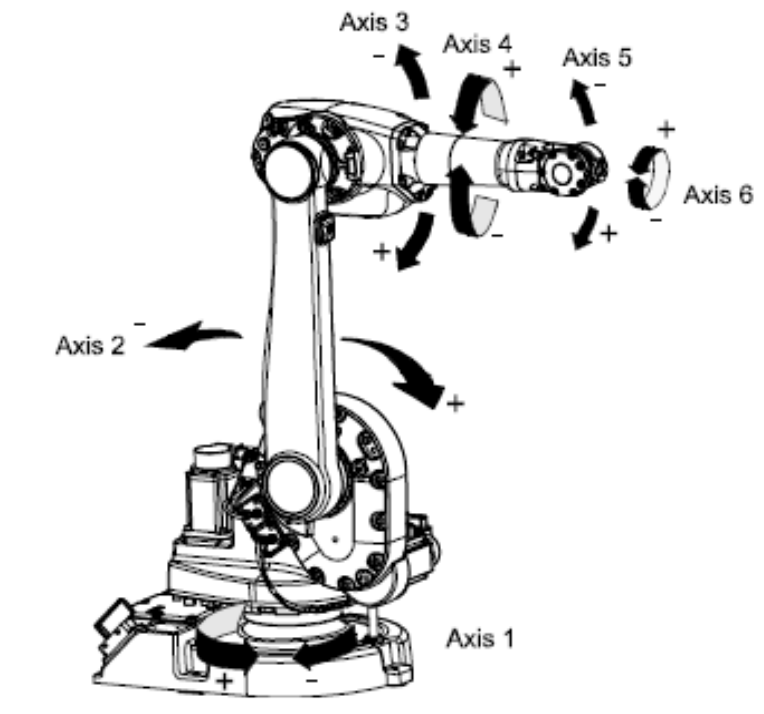
Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo con las normas de Denavit-Hartenberg, siendo las mismas:

- **D-H 1.** Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con  $n$  (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.
- **D-H 2.** Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en  $n$ .
- **D-H 3.** Localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.
- **D-H 4.** Para  $i$  de 0 a  $n-1$  situar el eje  $z_i$  sobre el eje de la articulación  $i + 1$ .
- **D-H 5.** Situar el origen del sistema de la base  $\{S_0\}$  en cualquier punto del eje  $z_0$ . Los ejes  $x_0$  e  $y_0$  se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con  $z_0$ .
- **D-H 6.** Para  $i$  de 1 a  $n-1$ , situar el sistema  $\{S_i\}$  (solidario al eslabón  $i$ ) en la intersección del eje  $z_i$  con la línea normal común a  $z_{i-1}$  y  $z_i$ . Si ambos ejes se cortasen se situaría  $\{S_i\}$  en el punto de corte. Si fuesen paralelos  $\{S_i\}$  se situaría en la articulación  $i + 1$ .
- **D-H 7.** Situar  $x_i$  en la línea normal común a  $z_{i-1}$  y  $z_i$ .
- **D-H 8.** Situar  $y_i$  de modo que forme un sistema dextrógiro con  $x_i$  y  $z_i$ .

TP Final - Análisis Dinámico, Control dinámico y Simulación de un robot de 6 grados de libertad	Página 10 de 41
	Asade - Rosende - Villafañe

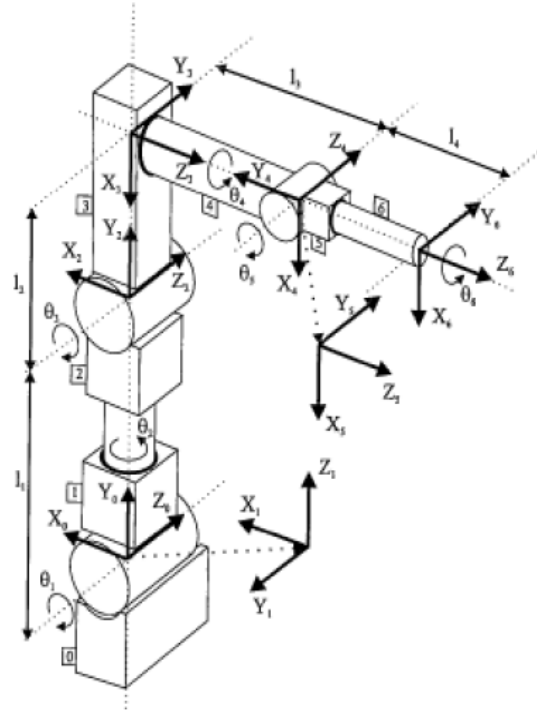
- **D-H 9.** Situar el sistema  $\{S_n\}$  en el extremo del robot de modo que  $z_n$ , coincida con la dirección de  $z_{n-1}$  y  $x_n$  sea normal a  $z_{n-1}$  y  $z_n$ .
- **D-H 10.** Obtener  $\theta_i$  como el ángulo que hay que girar en torno a  $z_{i-1}$  para que  $x_{i-1}$  y  $x_i$ , queden paralelos.
- **D-H 11.** Obtener  $d_i$ , como la distancia, medida a lo largo de  $z_{i-1}$ , que habría que desplazar  $\{S_{i-1}\}$  para que  $x_i$  y  $x_{i-1}$  quedasen alineados.
- **DH 12.** Obtener  $a_i$  como la distancia medida a lo largo de  $x_i$  (que ahora coincidiría con  $x_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\{S_{i-1}\}$  para que su origen coincidiese con  $\{S_i\}$ .
- **DH 13.** Obtener  $\alpha_i$  como el ángulo que habría que girar entorno a  $x_i$ , (que ahora coincidiría con  $x_{i-1}$ ), para que el nuevo  $\{S_{i-1}\}$  coincidiese totalmente con  $\{S_i\}$ .
- **DH 14.** Obtener las matrices de transformación  $i^{-1}A_i$  definidas anteriormente.
- **DH 15.** Obtener la matriz de transformación que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot  $T = {}^0A_1, {}^1A_2 \dots {}^{n-1}A_n$
- **DH 16.** La matriz  $T$  define la orientación (sub-matriz de rotación) y posición (sub-matriz de traslación) del extremo referido a la base en función de las  $n$  coordenadas articulares.

### **Análisis dinámico de un robot de seis grados de libertad:**



### Desarrollo del modelo dinámico:

Esquema que muestra la aplicación de las reglas de Denavit-Hartenberg.



- Los cuatro parámetros de D-H ( $\theta_i$ ,  $a_i$ ,  $d_i$ ,  $\alpha_i$ ) dependen de las características Geométricas de cada eslabón y de las articulaciones que le unen con el anterior y siguiente. En concreto estos representan:
- $\theta_i$  es el ángulo que forman los ejes  $x_{i-1}$  y  $x_i$ , medido en un plano perpendicular al eje  $z_{i-1}$ , utilizando la regla de la mano derecha. Se trata de un parámetro variable en articulaciones giratorias.
- $d_i$  es la distancia a lo largo del eje  $z_{i-1}$  desde el origen del sistema de coordenadas, hasta la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$ . Se trata de un parámetro variable en articulaciones prismáticas.
- $a_i$  es la distancia a lo largo del eje  $x_i$  que va desde la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$  hasta el origen del sistema  $i$ -ésimo, en el caso de articulaciones giratorias. En el caso de articulaciones prismáticas, se calcula como la distancia más corta entre los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$ .
- $\alpha_i$  es el ángulo de separación del eje  $z_{i-1}$  y el eje  $z_i$ , medido en un plano perpendicular al eje  $x_i$ , utilizando la regla de la mano derecha.

Articulación	$\theta$	d	a	$\alpha$
1	$\theta_1$	0	0	-90

2	$\theta_2$	$l_1$	0	90
3	$\theta_3 - 90$	0	$-l_2$	90
4	$\theta_4$	$l_3$	0	-90
5	$\theta_5$	0	0	90
6	$\theta_6$	$l_4$	0	0

Partiendo de:

$${}^i R_{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\cos(\alpha_i)\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_i)\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_i)\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_i)\cos(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{bmatrix}$$

### Obtención de las matrices de rotación y sus inversas.

$${}^0 R_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ S_1 & 0 & C_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^1 R_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ S_2 & 0 & -C_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^2 R_3 = \begin{bmatrix} S_3 & 0 & -C_3 \\ -C_3 & 0 & -S_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3 R_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 \\ S_4 & 0 & C_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^4 R_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 \\ S_5 & 0 & -C_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^5 R_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se obtienen las inversas, que son las que vamos a usar para el cálculo

$${}^1 R_0 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^2 R_1 = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_2 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^3 R_2 = \begin{bmatrix} S_3 & -C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C_3 & -S_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^4 R_3 = \begin{bmatrix} C_4 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_4 & C_4 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^5 R_4 = \begin{bmatrix} C_5 & S_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_5 & -C_5 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^6 R_5 = \begin{bmatrix} C_6 & S_6 & 0 \\ -S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### Condiciones iniciales para el sistema de base $S_0$

Esto ocurre así debido a que el sistema no está en movimiento.

$${}^0 \omega_0 = \text{Velocidad Angular} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0 \dot{\omega}_0 = \text{Aceleración Angular} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

TP Final - Análisis Dinámico, Control dinámico y Simulación de un robot de 6 grados de libertad	Página 14 de 41
	Asade - Rosende - Villafañe

$${}^0v_0 = \text{VelocidadLineal} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^0\dot{v}_0 = \text{AceleraciónLineal} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$$

Además no se ejercen fuerzan externas en el extremo del robot  ${}^7f_7 = {}^7n_7 = 0$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

${}^i p_i$  son las coordenadas del origen del sistema  $S_i$ , respecto a  $S_{i-1}$ , recurriendo a los parámetros de Denavit-Hartenberg =  $[a_i \ d_i \text{Sen}(\alpha_i) \ d_i \text{Cos}(\alpha_i)]$

$${}^1p_1 = [0 \ 0 \ 0]$$

$${}^2p_2 = [0 \ l_1 \text{Sen}(90) \ l_1 \text{Cos}(90)] = [0 \ l_1 \ 0]$$

$${}^3p_3 = [-l_2 \ 0 \ 0]$$

$${}^4p_4 = [0 \ l_3 \text{Sen}(-90) \ l_3 \text{Cos}(-90)] = [0 \ -l_3 \ 0]$$

$${}^5p_5 = [0 \ 0 \ 0]$$

$${}^6p_6 = [0 \ l_4 \text{Sen}(0) \ l_4 \text{Cos}(0)] = [0 \ 0 \ l_4]$$

${}^i s_i$  son las coordenadas del centro de masas del eslabón i respecto del sistema  $\{S_i\}$

$${}^1s_1 = [0 \ 0 \ 0]$$

$${}^2s_2 = [0 \ 0 \ 0]$$

$${}^3s_3 = [0 \ 0 \ 0]$$

$${}^4s_4 = [0 \ 0 \ 0]$$

$${}^5s_5 = [0 \ 0 \ 0]$$

$${}^6s_6 = [0 \ 0 \ 0]$$

El resto de las piezas tiene cada una el centro de masa en su respectivo el centro.

Con respecto a las matrices de inercia, serán consideradas 0, debido a que la masa de las 6 piezas esta concentrada en sus respectivos centros de gravedad.

$${}^i I_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Velocidad angular del sistema $\{S_i\}$

$${}^i\omega_i = \begin{cases} {}^iR_{i-1}({}^{i-1}\omega_{i-1} + z_0\dot{q}_i) \text{ (Rotación)} \\ {}^iR_{i-1}({}^{i-1}\omega_{i-1}) \text{ (Traslación)} \end{cases}$$

$${}^1\omega_1 = {}^1R_0({}^0\omega_0 + z_0\dot{q}_1) = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\dot{\theta}_1] \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\omega_2 = {}^2R_1({}^1\omega_1 + z_0\dot{q}_2) = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_2 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\dot{\theta}_2] \right) = \begin{bmatrix} -S_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ C_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^3\omega_3 = {}^3R_2({}^2\omega_2 + z_0\dot{q}_3) = \begin{bmatrix} S_3 & -C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C_3 & -S_3 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -S_2\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ C_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\dot{\theta}_3] \right) = \begin{bmatrix} -S_2\dot{\theta}_1S_3 - C_3\dot{\theta}_2 \\ C_2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \\ S_2\dot{\theta}_1C_3 - S_3\dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^4\omega_4 = {}^4R_3({}^3\omega_3 + z_0\dot{q}_4) = \begin{bmatrix} C_4 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_4 & C_4 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -S_2\dot{\theta}_1S_3 - C_3\dot{\theta}_2 \\ C_2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \\ S_2\dot{\theta}_1C_3 - S_3\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\dot{\theta}_4] \right) =$$

$${}^4\omega_4 = \begin{bmatrix} -S_2\dot{\theta}_1S_3C_4 - C_3\dot{\theta}_2C_4 + C_2\dot{\theta}_1S_4 + \dot{\theta}_3S_4 \\ S_2\dot{\theta}_1C_3 - S_3\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4 \\ S_2\dot{\theta}_1S_3S_4 - C_3\dot{\theta}_2S_4 + C_2\dot{\theta}_1C_4 + \dot{\theta}_3C_4 \end{bmatrix}$$

$${}^5\omega_5 = {}^5R_4({}^4\omega_4 + z_0\dot{q}_5) = \begin{bmatrix} C_5 & S_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_5 & -C_5 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -S_2\dot{\theta}_1S_3C_4 - C_3\dot{\theta}_2C_4 + C_2\dot{\theta}_1S_4 + \dot{\theta}_3S_4 \\ S_2\dot{\theta}_1C_3 - S_3\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4 \\ S_2\dot{\theta}_1S_3S_4 - C_3\dot{\theta}_2S_4 + C_2\dot{\theta}_1C_4 + \dot{\theta}_3C_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\dot{\theta}_5] \right) =$$

$${}^5\omega_5 = \begin{bmatrix} -S_2\dot{\theta}_1S_3C_4C_5 - C_3\dot{\theta}_2C_4C_5 + C_2\dot{\theta}_1S_4C_5 + \dot{\theta}_3S_4C_5 + S_2\dot{\theta}_1C_3S_5 - S_3\dot{\theta}_2S_5 + \dot{\theta}_4S_5 \\ S_2\dot{\theta}_1S_3S_4 - C_3\dot{\theta}_2S_4 + C_2\dot{\theta}_1C_4 + \dot{\theta}_3C_4 + \dot{\theta}_5 \\ -S_2\dot{\theta}_1S_3C_4S_5 - C_3\dot{\theta}_2C_4S_5 + C_2\dot{\theta}_1S_4S_5 + \dot{\theta}_3S_4S_5 - S_2\dot{\theta}_1C_3C_5 + S_3\dot{\theta}_2C_5 - \dot{\theta}_4C_5 \end{bmatrix}$$

$${}^6\omega_6 = {}^6R_5 \left( {}^5\omega_5 + z_0 \dot{q}_6 \right) = \begin{bmatrix} C_6 & S_6 & 0 \\ -S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( {}^5\omega_5 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\dot{\theta}_6] \right) =$$

$${}^6\omega_6 = \begin{bmatrix} -S_2 \dot{\theta}_1 S_3 C_4 C_5 C_6 - C_3 \dot{\theta}_2 C_4 C_5 C_6 + C_2 \dot{\theta}_1 S_4 C_5 C_6 + \dot{\theta}_3 S_4 C_5 C_6 + S_2 \dot{\theta}_1 C_3 S_5 C_6 - S_3 \dot{\theta}_2 S_5 C_6 \\ + \dot{\theta}_4 S_5 C_6 + S_2 \dot{\theta}_1 S_3 S_4 S_6 - C_3 \dot{\theta}_2 S_4 S_6 + C_2 \dot{\theta}_1 C_4 S_6 + \dot{\theta}_3 C_4 S_6 + \dot{\theta}_5 S_6 \\ + S_2 \dot{\theta}_1 S_3 C_4 C_5 S_6 + C_3 \dot{\theta}_2 C_4 C_5 S_6 - C_2 \dot{\theta}_1 S_4 C_5 S_6 - \dot{\theta}_3 S_4 C_5 S_6 - S_2 \dot{\theta}_1 C_3 S_5 S_6 + S_3 \dot{\theta}_2 S_5 S_6 \\ - \dot{\theta}_4 S_5 S_6 - S_2 \dot{\theta}_1 S_3 S_4 C_6 + C_3 \dot{\theta}_2 S_4 C_6 - C_2 \dot{\theta}_1 C_4 C_6 - \dot{\theta}_3 C_4 C_6 - \dot{\theta}_5 C_6 \\ - S_2 \dot{\theta}_1 S_3 C_4 S_5 - C_3 \dot{\theta}_2 C_4 S_5 + C_2 \dot{\theta}_1 S_4 S_5 + \dot{\theta}_3 S_4 S_5 - S_2 \dot{\theta}_1 C_3 C_5 + S_3 \dot{\theta}_2 C_5 - \dot{\theta}_4 C_5 + \dot{\theta}_6 \end{bmatrix}$$

### Aceleración angular del sistema $\{S_i\}$

$${}^i\dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^iR_{i-1} \left( {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} + z_0 \ddot{q}_i \right) + {}^{i-1}\omega_{i-1} * z_0 \dot{q}_i & (Rotación) \\ {}^iR_{i-1} \left( {}^{i-1}\dot{\omega}_{i-1} \right) & (Traslación) \end{cases}$$

$${}^1\dot{\omega}_1 = {}^1R_0 \left( {}^0\dot{\omega}_0 + z_0 \ddot{q}_1 \right) + {}^0\omega_0 * z_0 \dot{q}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\ddot{\theta}_1] \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\dot{\theta}_1] = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\dot{\omega}_2 = {}^2R_1 \left( {}^1\dot{\omega}_1 + z_0 \ddot{q}_2 \right) + {}^1\omega_1 * z_0 \dot{q}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_2 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\ddot{\theta}_2] \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\dot{\theta}_2] =$$

$${}^2\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} -S_2 \ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ C_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^3\dot{\omega}_3 = {}^3R_2 \left( {}^2\dot{\omega}_2 + z_0 \ddot{q}_3 \right) + {}^2\omega_2 * z_0 \dot{q}_3 =$$

$${}^3\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} S_3 & -C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C_3 & -S_3 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -S_2 \ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ C_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\ddot{\theta}_3] \right) + \begin{bmatrix} -S_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ C_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\dot{\theta}_3] =$$

$${}^3\dot{\omega}_3 = \begin{bmatrix} -S_2 \ddot{\theta}_1 S_3 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 S_3 - \ddot{\theta}_2 C_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\ C_2 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3 + S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ S_2 \ddot{\theta}_1 C_3 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 C_3 + \ddot{\theta}_2 S_3 \end{bmatrix}$$



---


$$\begin{aligned}
{}^4\dot{\omega}_4 &= {}^4R_3 \left( {}^3\dot{\omega}_3 + z_0 \ddot{q}_4 \right) + {}^3\omega_3 * z_0 \dot{q}_4 = \\
{}^4\dot{\omega}_4 &= \begin{bmatrix} C_4 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_4 & C_4 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} -S_2 \ddot{\theta}_1 S_3 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 S_3 - \ddot{\theta}_2 C_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \\ C_2 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3 + S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \\ S_2 \ddot{\theta}_1 C_3 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 C_3 + \ddot{\theta}_2 S_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\ddot{\theta}_4] \right) + \begin{bmatrix} -S_2 \dot{\theta}_1 S_3 - C_3 \dot{\theta}_2 \\ C_2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 \\ S_2 \dot{\theta}_1 C_3 - S_3 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\dot{\theta}_4] \\
{}^4\dot{\omega}_4 &= \begin{bmatrix} -S_2 \ddot{\theta}_1 S_3 C_4 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 S_3 C_4 - \ddot{\theta}_2 C_3 C_4 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 C_4 + C_2 \ddot{\theta}_1 S_4 + \ddot{\theta}_3 S_4 + S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 S_4 + C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \\ -S_2 \ddot{\theta}_1 C_3 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 C_3 - \ddot{\theta}_2 S_3 + \ddot{\theta}_4 + S_2 \dot{\theta}_1 S_3 \dot{\theta}_4 + C_3 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \\ S_2 \ddot{\theta}_1 S_3 S_4 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 S_3 S_4 + \ddot{\theta}_2 C_3 S_4 - \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 S_4 + C_2 \ddot{\theta}_1 C_4 + \ddot{\theta}_3 C_4 + S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 C_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^5\dot{\omega}_5 &= {}^5R_4 \left( {}^4\dot{\omega}_4 + z_0\ddot{q}_5 \right) + {}^4\omega_4 * z_0\dot{q}_5 = \\
 {}^5\dot{\omega}_5 &= \begin{bmatrix} C_5 & S_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_5 & -C_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_2\ddot{\theta}_1S_3C_4 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2S_3C_4 - \ddot{\theta}_2C_3C_4 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3C_4 + C_2\ddot{\theta}_1S_4 + \ddot{\theta}_3S_4 + S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3S_4 + C_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_4 \\ -S_2\ddot{\theta}_1C_3 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2C_3 - \ddot{\theta}_2S_3 + \ddot{\theta}_4 + S_2\dot{\theta}_1S_3\dot{\theta}_4 + C_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4 \\ S_2\ddot{\theta}_1S_3S_4 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2S_3S_4 + \ddot{\theta}_2C_3S_4 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3S_4 + C_2\ddot{\theta}_1C_4 + \ddot{\theta}_3C_4 + S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3C_4 \\ -S_2\dot{\theta}_1S_3C_4 - C_3\dot{\theta}_2C_4 + C_2\dot{\theta}_1S_4 + \dot{\theta}_3S_4 \\ S_2\dot{\theta}_1C_3 - S_3\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4 \\ S_2\dot{\theta}_1S_3S_4 - C_3\dot{\theta}_2S_4 + C_2\dot{\theta}_1C_4 + \dot{\theta}_3C_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ddot{\theta}_5 + \\
 &+ \begin{bmatrix} -S_2\dot{\theta}_1S_3C_4 - C_3\dot{\theta}_2C_4 + C_2\dot{\theta}_1S_4 + \dot{\theta}_3S_4 \\ S_2\dot{\theta}_1C_3 - S_3\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4 \\ S_2\dot{\theta}_1S_3S_4 - C_3\dot{\theta}_2S_4 + C_2\dot{\theta}_1C_4 + \dot{\theta}_3C_4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_5 \\
 {}^5\dot{\omega}_5 &= \begin{bmatrix} -S_2\ddot{\theta}_1S_3C_4C_5 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2S_3C_4C_5 - \ddot{\theta}_2C_3C_4C_5 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3C_4C_5 + C_2\ddot{\theta}_1S_4C_5 + \ddot{\theta}_3S_4C_5 + S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3S_4C_5 + C_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4C_5 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_4C_5 \\ -S_2\ddot{\theta}_1C_3S_5 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2C_3S_5 - \ddot{\theta}_2S_3S_5 + \ddot{\theta}_4S_5 + S_2\dot{\theta}_1S_3\dot{\theta}_4S_5 + C_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4S_5 + S_2\dot{\theta}_1C_3\dot{\theta}_5 - S_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_4\dot{\theta}_5 \\ S_2\ddot{\theta}_1S_3S_4 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2S_3S_4 + \ddot{\theta}_2C_3S_4 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3S_4 + C_2\ddot{\theta}_1C_4 + \ddot{\theta}_3C_4 + S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3C_4 + \ddot{\theta}_5 + S_2\dot{\theta}_1S_3C_4\dot{\theta}_5 + C_3\dot{\theta}_2C_4\dot{\theta}_5 - C_2\dot{\theta}_1S_4\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_3S_4\dot{\theta}_5 \\ -S_2\dot{\theta}_1S_3C_4S_5 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2S_3C_4S_5 - \ddot{\theta}_2C_3C_4S_5 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3C_4S_5 + C_2\ddot{\theta}_1S_4S_5 + \ddot{\theta}_3S_4S_5 + S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3S_4S_5 + C_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4S_5 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_4S_5 \\ + S_2\dot{\theta}_1C_3C_5 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2C_3C_5 + \ddot{\theta}_2S_3S_5 - \ddot{\theta}_4C_5 - S_2\dot{\theta}_1S_3\dot{\theta}_4C_5 - C_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4C_5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Análogamente.

$$\begin{aligned}
 {}^6\dot{\omega}_6 &= {}^6R_5 \left( {}^5\dot{\omega}_5 + z_0\ddot{q}_6 \right) + {}^5\omega_5 * z_0\dot{q}_6 = \\
 {}^6\dot{\omega}_6 &= \begin{bmatrix} (-S_2\ddot{\theta}_1S_3C_4C_5 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2S_3C_4C_5 - \ddot{\theta}_2C_3C_4C_5 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3C_4C_5 + C_2\ddot{\theta}_1S_4C_5 + \ddot{\theta}_3S_4C_5 + S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3S_4C_5 + C_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4C_5 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_4C_5 \\ -S_2\ddot{\theta}_1C_3S_5 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2C_3S_5 - \ddot{\theta}_2S_3S_5 + \ddot{\theta}_4S_5 + S_2\dot{\theta}_1S_3\dot{\theta}_4S_5 + C_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4S_5 + S_2\dot{\theta}_1C_3\dot{\theta}_5 - S_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_4\dot{\theta}_5)C_6 + \\ (S_2\ddot{\theta}_1S_3S_4 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2S_3S_4 + \ddot{\theta}_2C_3S_4 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3S_4 + C_2\ddot{\theta}_1C_4 + \ddot{\theta}_3C_4 + S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3C_4 + \ddot{\theta}_5 + S_2\dot{\theta}_1S_3C_4\dot{\theta}_5 + C_3\dot{\theta}_2C_4\dot{\theta}_5 - C_2\dot{\theta}_1S_4\dot{\theta}_5 \\ - \dot{\theta}_3S_4\dot{\theta}_5)S_6 + (S_2\dot{\theta}_1S_3C_4C_5S_6 + C_3\dot{\theta}_2C_4C_5S_6 - C_2\dot{\theta}_1S_4C_5S_6 - \dot{\theta}_3S_4C_5S_6 - S_2\dot{\theta}_1C_3S_5S_6 + S_3\dot{\theta}_2S_5S_6 \\ - \dot{\theta}_4S_5S_6 - S_2\dot{\theta}_1S_3S_4C_6 + C_3\dot{\theta}_2S_4C_6 - C_2\dot{\theta}_1C_4C_6 - \dot{\theta}_3C_4C_6 - \dot{\theta}_5C_6)\dot{\theta}_6 \\ (-S_2\ddot{\theta}_1S_3C_4C_5 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2S_3C_4C_5 - \ddot{\theta}_2C_3C_4C_5 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3C_4C_5 + C_2\ddot{\theta}_1S_4C_5 + \ddot{\theta}_3S_4C_5 + S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3S_4C_5 + C_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4C_5 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_4C_5 \\ -S_2\ddot{\theta}_1C_3S_5 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2C_3S_5 - \ddot{\theta}_2S_3S_5 + \ddot{\theta}_4S_5 + S_2\dot{\theta}_1S_3\dot{\theta}_4S_5 + C_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4S_5 + S_2\dot{\theta}_1C_3\dot{\theta}_5 - S_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_4\dot{\theta}_5)(-S_6) + \\ (S_2\ddot{\theta}_1S_3S_4 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2S_3S_4 + \ddot{\theta}_2C_3S_4 - \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3S_4 + C_2\ddot{\theta}_1C_4 + \ddot{\theta}_3C_4 + S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3C_4 + \ddot{\theta}_5 + S_2\dot{\theta}_1S_3C_4\dot{\theta}_5 + C_3\dot{\theta}_2C_4\dot{\theta}_5 - C_2\dot{\theta}_1S_4\dot{\theta}_5 \\ - \dot{\theta}_3S_4\dot{\theta}_5)C_6 + (-S_2\dot{\theta}_1S_3C_4C_5C_6 - C_3\dot{\theta}_2C_4C_5C_6 + C_2\dot{\theta}_1S_4C_5C_6 + \dot{\theta}_3S_4C_5C_6 + S_2\dot{\theta}_1C_3S_5C_6 - S_3\dot{\theta}_2S_5C_6 \\ + \dot{\theta}_4S_5C_6 + S_2\dot{\theta}_1S_3S_4S_6 - C_3\dot{\theta}_2S_4S_6 + C_2\dot{\theta}_1C_4S_6 + \dot{\theta}_3C_4S_6 + \dot{\theta}_5S_6)\dot{\theta}_6 \\ -S_2\ddot{\theta}_1S_3C_4S_5 - \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2S_3C_4S_5 - \ddot{\theta}_2C_3C_4S_5 + \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3C_4S_5 + C_2\ddot{\theta}_1S_4S_5 + \ddot{\theta}_3S_4S_5 + S_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3S_4S_5 + C_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4S_5 + \dot{\theta}_3\dot{\theta}_4S_5 \\ + S_2\dot{\theta}_1C_3C_5 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2C_3C_5 + \ddot{\theta}_2S_3S_5 - \ddot{\theta}_4C_5 - S_2\dot{\theta}_1S_3\dot{\theta}_4C_5 - C_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_4C_5 + \ddot{\theta}_6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### Aceleración lineal del sistema i

$${}^i\dot{v}_i = \left\{ \begin{array}{l} {}^i\dot{\omega}_i * {}^i p_i + {}^i\omega_i * ({}^i\omega_i * {}^i p_i) + {}^i R_{i-1} {}^{i-1}\dot{v}_{i-1} \text{ (Rotación)} \\ {}^i R_{i-1} (z_0 \ddot{q}_i + {}^{i-1}\dot{v}_{i-1}) + {}^i\dot{\omega}_i * {}^i p_i + 2 {}^i\omega_i * {}^i R_{i-1} z_0 \dot{q}_i + {}^i\omega_i * ({}^i\dot{\omega}_i * {}^i p_i) \text{ (Traslación)} \end{array} \right.$$

$${}^1\dot{v}_1 = {}^1\dot{\omega}_1 * {}^1 p_1 + {}^1\omega_1 * ({}^1\omega_1 * {}^1 p_1) + {}^1 R_0 {}^0\dot{v}_0$$

$${}^0\dot{v}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad {}^1 p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Siendo, así la ecuación se reduce } {}^1\dot{v}_1 = {}^1 R_0 {}^0\dot{v}_0$$

$${}^1\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2\dot{v}_2 = {}^2\dot{\omega}_2 * {}^2 p_2 + {}^2\omega_2 * ({}^2\omega_2 * {}^2 p_2) + {}^2 R_1 {}^1\dot{v}_1$$

$${}^2 p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^2 R_1 = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_2 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^2\omega_2 = \begin{bmatrix} -S_2 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ C_2 \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad {}^2\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} -S_2 \ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \\ C_2 \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} -C_2 \ddot{\theta}_1 l_1 - S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 - S_2 g \\ -(C_2 \dot{\theta}_1)^2 l_1 - (S_2 \dot{\theta}_1)^2 l_1 \\ -S_2 \ddot{\theta}_1 l_1 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 + C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 + C_2 g \end{bmatrix}$$

$${}^3\dot{v}_3 = {}^3\dot{\omega}_3 * {}^3 p_3 + {}^3\omega_3 * ({}^3\omega_3 * {}^3 p_3) + {}^3 R_2 {}^2\dot{v}_2$$

$${}^3 p_3 = \begin{bmatrix} -l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^3 R_2 = \begin{bmatrix} S_3 & -C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C_3 & -S_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3\dot{v}_3 = \begin{bmatrix} (C_2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3)^2 l_2 + (S_2 \dot{\theta}_1 C_3 - S_3 \dot{\theta}_2)^2 l_2 + (-C_2 \ddot{\theta}_1 l_1 - S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 - S_2 g) S_3 + ((C_2 \dot{\theta}_1)^2 l_1 + (S_2 \dot{\theta}_1)^2 l_1) C_3 \\ (-S_2 \ddot{\theta}_1 C_3 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 C_3 - \ddot{\theta}_2 S_3) l_2 - (-S_2 \dot{\theta}_1 S_3 - C_3 \dot{\theta}_2) (C_2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3) l_2 + S_2 \dot{\theta}_1 C_3 - S_3 \dot{\theta}_2 \\ (C_2 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3 + S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3) l_2 - (S_2 \dot{\theta}_1 C_3 - S_3 \dot{\theta}_2) (-S_2 \dot{\theta}_1 S_3 - C_3 \dot{\theta}_2) l_2 + (C_2 \ddot{\theta}_1 l_1 + S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 + S_2 g) C_3 + \\ ((C_2 \dot{\theta}_1)^2 l_1 + (S_2 \dot{\theta}_1)^2 l_1) S_3 \end{bmatrix}$$

$${}^4\dot{v}_4 = {}^4\dot{\omega}_4 * {}^4p_4 + {}^4\omega_4 * ({}^4\omega_4 * {}^4p_4) + {}^4R_3 {}^3\dot{v}_3$$

$${}^4p_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad {}^4R_3 = \begin{bmatrix} C_4 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_4 & C_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^4\dot{v}_4 = \left[ \begin{aligned} & (S_2\ddot{\theta}_1 S_3 S_4 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 S_3 S_4 + \ddot{\theta}_2 C_3 S_4 - \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 S_4 + C_2 \ddot{\theta}_1 C_4 + \ddot{\theta}_3 C_4 + S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 C_4) l_3 - \\ & (-S_2 \dot{\theta}_1 S_3 C_4 - C_3 \dot{\theta}_2 C_4 + C_2 \dot{\theta}_1 S_4 + \dot{\theta}_3 S_4) (S_2 \dot{\theta}_1 C_3 - S_3 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) l_3 + \\ & \left( (C_2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3)^2 l_2 + (S_2 \dot{\theta}_1 C_3 - S_3 \dot{\theta}_2)^2 l_2 + (-C_2 \ddot{\theta}_1 l_1 - S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 - S_2 g) S_3 + \left( (C_2 \dot{\theta}_1)^2 l_1 + (S_2 \dot{\theta}_1)^2 l_1 \right) C_3 \right) C_4 + \\ & \left( (-S_2 \ddot{\theta}_1 C_3 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 C_3 - \ddot{\theta}_2 S_3) l_2 - (-S_2 \dot{\theta}_1 S_3 - C_3 \dot{\theta}_2) (C_2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3) l_2 + S_2 \dot{\theta}_1 C_3 - S_3 \dot{\theta}_2 \right) S_4 \\ \\ & (-S_2 \dot{\theta}_1 S_3 C_4 - C_3 \dot{\theta}_2 C_4 + C_2 \dot{\theta}_1 S_4 + \dot{\theta}_3 S_4)^2 l_3 + (S_2 \dot{\theta}_1 S_3 S_4 - C_3 \dot{\theta}_2 S_4 + C_2 \dot{\theta}_1 C_4 + \dot{\theta}_3 C_4)^2 l_3 - \\ & \left( (C_2 \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_3 + S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3) l_2 - (S_2 \dot{\theta}_1 C_3 - S_3 \dot{\theta}_2) (-S_2 \dot{\theta}_1 S_3 - C_3 \dot{\theta}_2) l_2 + (C_2 \ddot{\theta}_1 l_1 + S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 + S_2 g) C_3 + \right. \\ & \left. \left( (C_2 \dot{\theta}_1)^2 l_1 + (S_2 \dot{\theta}_1)^2 l_1 \right) S_3 \right) \\ \\ & (S_2 \ddot{\theta}_1 S_3 C_4 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 S_3 C_4 + \ddot{\theta}_2 C_3 C_4 - \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 C_4 - C_2 \ddot{\theta}_1 S_4 - \ddot{\theta}_3 S_4 - S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 S_4 - C_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 - \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4) l_3 - \\ & (S_2 \dot{\theta}_1 C_3 - S_3 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) (S_2 \dot{\theta}_1 S_3 S_4 - C_3 \dot{\theta}_2 S_4 + C_2 \dot{\theta}_1 C_4 + \dot{\theta}_3 C_4) l_3 - \\ & \left( (C_2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3)^2 l_2 + (S_2 \dot{\theta}_1 C_3 - S_3 \dot{\theta}_2)^2 l_2 + (-C_2 \ddot{\theta}_1 l_1 - S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 - S_2 g) S_3 + \left( (C_2 \dot{\theta}_1)^2 l_1 + (S_2 \dot{\theta}_1)^2 l_1 \right) C_3 \right) S_4 + \\ & \left( (-S_2 \ddot{\theta}_1 C_3 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 C_3 - \ddot{\theta}_2 S_3) l_2 - (-S_2 \dot{\theta}_1 S_3 - C_3 \dot{\theta}_2) (C_2 \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3) l_2 + S_2 \dot{\theta}_1 C_3 - S_3 \dot{\theta}_2 \right) C_4 \end{aligned} \right]$$

Nota: de aquí en adelante, debido al tamaño de las ecuaciones, me referiré  $(x)^{\{1\}}, (x)^{\{2\}}, (x)^{\{3\}}$  a los miembros de la matriz siendo :

$$\begin{bmatrix} (x)^{\{1\}} \\ (x)^{\{2\}} \\ (x)^{\{3\}} \end{bmatrix}$$

$${}^5\dot{v}_5 = {}^5\dot{\omega}_5 * {}^5p_5 + {}^5\omega_5 * ({}^5\omega_5 * {}^5p_5) + {}^5R_4 {}^4\dot{v}_4$$

$${}^5R_4 = \begin{bmatrix} C_5 & S_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_5 & -C_5 & 0 \end{bmatrix} \quad {}^5p_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Siendo, así la ecuación se reduce } {}^5\dot{v}_5 = {}^5R_4 {}^4\dot{v}_4$$

$${}^5\dot{v}_5 = \begin{bmatrix} ({}^4\dot{v}_4)^{\{1\}} C_5 + ({}^4\dot{v}_4)^{\{2\}} S_5 \\ ({}^4\dot{v}_4)^{\{3\}} \\ ({}^4\dot{v}_4)^{\{1\}} S_5 - ({}^4\dot{v}_4)^{\{2\}} C_5 \end{bmatrix}$$

$${}^6\dot{v}_6 = {}^6\dot{\omega}_6 * {}^6p_6 + {}^6\omega_6 * ({}^6\omega_6 * {}^6p_6) + {}^6R_5 {}^5\dot{v}_5$$

$${}^6p_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_4 \end{bmatrix} \quad {}^6R_5 = \begin{bmatrix} C_6 & S_6 & 0 \\ -S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C_5$$

$${}^6\dot{v}_6 = \begin{bmatrix} ({}^6\dot{\omega}_6)^{\{2\}} l_4 + ({}^6\omega_6)^{\{3\}} ({}^6\omega_6)^{\{1\}} l_4 + ({}^5\dot{v}_5)^{\{1\}} C_6 + ({}^5\dot{v}_5)^{\{2\}} S_6 \\ -({}^6\dot{\omega}_6)^{\{1\}} l_4 + ({}^6\omega_6)^{\{3\}} ({}^6\omega_6)^{\{2\}} l_4 - ({}^5\dot{v}_5)^{\{1\}} S_6 + ({}^5\dot{v}_5)^{\{2\}} C_6 \\ -\left(({}^6\omega_6)^{\{3\}}\right)^2 l_4 - \left(({}^6\omega_6)^{\{1\}}\right)^2 l_4 + ({}^5\dot{v}_5)^{\{3\}} \end{bmatrix}$$

### **Aceleración lineal del centro de gravedad del eslabón i**

$${}^i a_i = {}^i\dot{\omega}_i * {}^i S_i + {}^i\omega_i * ({}^i\omega_i * {}^i S_i) + {}^i\dot{v}_i$$

Siendo  ${}^1S_1 = {}^2S_2 = {}^3S_3 = {}^4S_4 = {}^5S_5 = {}^6S_6 = [0 \ 0 \ 0]$  por lo tanto  ${}^i a_i = {}^i\dot{v}_i$

### **Fuerza ejercida sobre el eslabón i**

$${}^i f_i = {}^i R_{i+1} {}^{i+1} f_{i+1} + m_i {}^i a_i$$

Como se habia dicho anteriormente, no se ejercen fuerzan externas en el extremo del robot por lo tanto

$${}^7 f_7 = {}^7 n_7 = 0$$

$${}^6 f_6 = {}^6 R_7 {}^7 f_7 + m_6 {}^6 a_6$$

$${}^6f_6 = {}^6R_7[0] + [m_6] \begin{bmatrix} ({}^6a_6)^{\{1\}} \\ ({}^6a_6)^{\{2\}} \\ ({}^6a_6)^{\{3\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_6 ({}^6a_6)^{\{1\}} \\ m_6 ({}^6a_6)^{\{2\}} \\ m_6 ({}^6a_6)^{\{3\}} \end{bmatrix}$$

$${}^5f_5 = {}^5R_6 {}^6f_6 + m_5 {}^5a_5$$

$${}^5f_5 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_6 ({}^6a_6)^{\{1\}} \\ m_6 ({}^6a_6)^{\{2\}} \\ m_6 ({}^6a_6)^{\{3\}} \end{bmatrix} + [m_5] \begin{bmatrix} ({}^5a_5)^{\{1\}} \\ ({}^5a_5)^{\{2\}} \\ ({}^5a_5)^{\{3\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_6 ({}^6a_6)^{\{1\}} C_6 - m_6 ({}^6a_6)^{\{2\}} S_6 + m_5 ({}^5a_5)^{\{1\}} \\ m_6 ({}^6a_6)^{\{1\}} S_6 + m_6 ({}^6a_6)^{\{2\}} C_6 + m_5 ({}^5a_5)^{\{2\}} \\ m_6 ({}^6a_6)^{\{3\}} + m_5 ({}^5a_5)^{\{3\}} \end{bmatrix}$$

$${}^4f_4 = {}^4R_5 {}^5f_5 + m_4 {}^4a_4$$

$${}^4f_4 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 \\ S_5 & 0 & -C_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_6 ({}^6a_6)^{\{1\}} C_6 - m_6 ({}^6a_6)^{\{2\}} S_6 + m_5 ({}^5a_5)^{\{1\}} \\ m_6 ({}^6a_6)^{\{1\}} S_6 + m_6 ({}^6a_6)^{\{2\}} C_6 + m_5 ({}^5a_5)^{\{2\}} \\ m_6 ({}^6a_6)^{\{3\}} + m_5 ({}^5a_5)^{\{3\}} \end{bmatrix} + [m_4] \begin{bmatrix} ({}^4a_4)^{\{1\}} \\ ({}^4a_4)^{\{2\}} \\ ({}^4a_4)^{\{3\}} \end{bmatrix} =$$

$${}^4f_4 = \begin{bmatrix} \left( m_6 ({}^6a_6)^{\{1\}} C_6 - m_6 ({}^6a_6)^{\{2\}} S_6 + m_5 ({}^5a_5)^{\{1\}} \right) C_5 + \left( m_6 ({}^6a_6)^{\{3\}} + m_5 ({}^5a_5)^{\{3\}} \right) S_5 + m_4 ({}^4a_4)^{\{1\}} \\ \left( m_6 ({}^6a_6)^{\{1\}} C_6 - m_6 ({}^6a_6)^{\{2\}} S_6 + m_5 ({}^5a_5)^{\{1\}} \right) S_5 - \left( m_6 ({}^6a_6)^{\{3\}} + m_5 ({}^5a_5)^{\{3\}} \right) C_5 + m_4 ({}^4a_4)^{\{2\}} \\ m_6 ({}^6a_6)^{\{1\}} S_6 + m_6 ({}^6a_6)^{\{2\}} C_6 + m_5 ({}^5a_5)^{\{2\}} + m_4 ({}^4a_4)^{\{3\}} \end{bmatrix}$$

$${}^3f_3 = {}^3R_4 {}^4f_4 + m_3 {}^3a_3$$

$${}^3f_3 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 \\ S_4 & 0 & C_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ({}^4f_4)^{\{1\}} \\ ({}^4f_4)^{\{2\}} \\ ({}^4f_4)^{\{3\}} \end{bmatrix} + [m_3] \begin{bmatrix} ({}^3a_3)^{\{1\}} \\ ({}^3a_3)^{\{2\}} \\ ({}^3a_3)^{\{3\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ({}^4f_4)^{\{1\}} C_4 - ({}^4f_4)^{\{3\}} S_4 + m_3 ({}^3a_3)^{\{1\}} \\ ({}^4f_4)^{\{1\}} S_4 + ({}^4f_4)^{\{3\}} C_4 + m_3 ({}^3a_3)^{\{2\}} \\ -({}^4f_4)^{\{2\}} + m_3 ({}^3a_3)^{\{3\}} \end{bmatrix}$$

$${}^2f_2 = {}^2R_3 {}^3f_3 + m_2 {}^2a_2$$

$${}^2f_2 = \begin{bmatrix} S_3 & 0 & -C_3 \\ -C_3 & 0 & -S_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left({}^4f_4\right)^{\{1\}} C_4 - \left({}^4f_4\right)^{\{3\}} S_4 + m_3 \left({}^3a_3\right)^{\{1\}} \\ \left({}^4f_4\right)^{\{1\}} S_4 + \left({}^4f_4\right)^{\{3\}} C_4 + m_3 \left({}^3a_3\right)^{\{2\}} \\ -\left({}^4f_4\right)^{\{2\}} + m_3 \left({}^3a_3\right)^{\{3\}} \end{bmatrix} + [m_2] \begin{bmatrix} \left({}^2a_2\right)^{\{1\}} \\ \left({}^2a_2\right)^{\{2\}} \\ \left({}^2a_2\right)^{\{3\}} \end{bmatrix} =$$

$${}^2f_2 = \begin{bmatrix} \left(\left({}^4f_4\right)^{\{1\}} C_4 - \left({}^4f_4\right)^{\{3\}} S_4 + m_3 \left({}^3a_3\right)^{\{1\}}\right) S_3 - \left(-\left({}^4f_4\right)^{\{2\}} + m_3 \left({}^3a_3\right)^{\{3\}}\right) C_3 + m_2 \left({}^2a_2\right)^{\{1\}} \\ -\left(\left({}^4f_4\right)^{\{1\}} C_4 - \left({}^4f_4\right)^{\{3\}} S_4 + m_3 \left({}^3a_3\right)^{\{1\}}\right) C_3 - \left(-\left({}^4f_4\right)^{\{2\}} + m_3 \left({}^3a_3\right)^{\{3\}}\right) S_3 + m_2 \left({}^2a_2\right)^{\{2\}} \\ \left({}^4f_4\right)^{\{1\}} S_4 + \left({}^4f_4\right)^{\{3\}} C_4 + m_3 \left({}^3a_3\right)^{\{2\}} + m_2 \left({}^2a_2\right)^{\{3\}} \end{bmatrix}$$

$${}^1f_1 = {}^1R_2 {}^2f_2 + m_1 {}^1a_1$$

$${}^1f_1 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ S_2 & 0 & -C_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left({}^2f_2\right)^{\{1\}} \\ \left({}^2f_2\right)^{\{2\}} \\ \left({}^2f_2\right)^{\{3\}} \end{bmatrix} + [m_1] \begin{bmatrix} \left({}^1a_1\right)^{\{1\}} \\ \left({}^1a_1\right)^{\{2\}} \\ \left({}^1a_1\right)^{\{3\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left({}^2f_2\right)^{\{1\}} C_2 + \left({}^2f_2\right)^{\{3\}} S_2 + m_1 \left({}^1a_1\right)^{\{1\}} \\ \left({}^2f_2\right)^{\{1\}} S_2 - \left({}^2f_2\right)^{\{3\}} C_2 + m_1 \left({}^1a_1\right)^{\{2\}} \\ \left({}^2f_2\right)^{\{2\}} + m_1 \left({}^1a_1\right)^{\{3\}} \end{bmatrix}$$

### Par ejercicio sobre el eslabón i

$${}^i n_i = {}^i R_{i+1} \left[ {}^{i+1} n_{i+1} + \left( {}^{i+1} R_i {}^i p_i \right) * {}^{i+1} f_{i+1} \right] + \left( {}^i p_i + {}^i S_i \right) * m_i {}^i a_i + {}^i I_i {}^i \dot{\omega}_i + {}^i \omega_i * \left( {}^i I_i {}^i \omega_i \right)$$

$${}^6 n_6 = {}^6 R_7 \left[ {}^7 n_7 + \left( {}^7 R_6 {}^6 p_6 \right) * {}^7 f_7 \right] + \left( {}^6 p_6 + {}^6 S_6 \right) * m_6 {}^6 a_6 + {}^6 I_6 {}^6 \dot{\omega}_6 + {}^6 \omega_6 * \left( {}^6 I_6 {}^6 \omega_6 \right) =$$

$${}^6 R_7 \left[ [0] + \left( {}^7 R_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_4 \end{bmatrix} \right) * [0] \right] + \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) * m_6 \begin{bmatrix} \left({}^6a_6\right)^{\{1\}} \\ \left({}^6a_6\right)^{\{2\}} \\ \left({}^6a_6\right)^{\{3\}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left({}^6\dot{\omega}_6\right)^{\{1\}} \\ \left({}^6\dot{\omega}_6\right)^{\{2\}} \\ \left({}^6\dot{\omega}_6\right)^{\{3\}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left({}^6\omega_6\right)^{\{1\}} \\ \left({}^6\omega_6\right)^{\{2\}} \\ \left({}^6\omega_6\right)^{\{3\}} \end{bmatrix} * \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left({}^6\omega_6\right)^{\{1\}} \\ \left({}^6\omega_6\right)^{\{2\}} \\ \left({}^6\omega_6\right)^{\{3\}} \end{bmatrix} \right)$$

$${}^6 n_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_4 \end{bmatrix} * m_6 \begin{bmatrix} \left({}^6a_6\right)^{\{1\}} \\ \left({}^6a_6\right)^{\{2\}} \\ \left({}^6a_6\right)^{\{3\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_4 m_6 \left({}^6a_6\right)^{\{2\}} \\ l_4 m_6 \left({}^6a_6\right)^{\{1\}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nota: La componente  ${}^i I_i$  es una matriz nula para todos los valores de i, por lo tanto una parte de la ecuación es siempre nulo  $\left( {}^i I_i {}^i \dot{\omega}_i + {}^i \omega_i * \left( {}^i I_i {}^i \omega_i \right) = 0 \right)$ . Entonces se obvió en el calculo pero se deberá tener en cuenta en el caso de que  ${}^i I_i$  sea distinto de cero.

$${}^5n_5 = {}^5R_6 \left[ {}^6n_6 + ({}^6R_5 {}^5p_5) * {}^6f_6 \right] + ({}^5p_5 + {}^5S_5) * m_5 {}^5a_5 + {}^5I_5 {}^5\dot{\omega}_5 + {}^5\omega_5 * ({}^5I_5 {}^5\omega_5) =$$

$$\begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_4 m_6 ({}^6a_6)^{\{2\}} \\ l_4 m_6 ({}^6a_6)^{\{1\}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^6R_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ({}^6f_6)^{\{1\}} \\ ({}^6f_6)^{\{2\}} \\ ({}^6f_6)^{\{3\}} \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) * m_5 \begin{bmatrix} ({}^5a_5)^{\{1\}} \\ ({}^5a_5)^{\{2\}} \\ ({}^5a_5)^{\{3\}} \end{bmatrix}$$

$${}^5n_5 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_4 m_6 ({}^6a_6)^{\{2\}} \\ l_4 m_6 ({}^6a_6)^{\{1\}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-l_4 m_6 ({}^6a_6)^{\{2\}}) C_6 - (l_4 m_6 ({}^6a_6)^{\{1\}}) S_6 \\ (-l_4 m_6 ({}^6a_6)^{\{2\}}) S_6 + (l_4 m_6 ({}^6a_6)^{\{1\}}) C_6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^4n_4 = {}^4R_5 \left[ {}^5n_5 + ({}^5R_4 {}^4p_4) * {}^5f_5 \right] + ({}^4p_4 + {}^4S_4) * m_4 {}^4a_4 + {}^4I_4 {}^4\dot{\omega}_4 + {}^4\omega_4 * ({}^4I_4 {}^4\omega_4) =$$

$$\begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 \\ S_5 & 0 & -C_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ({}^5n_5)^{\{1\}} \\ ({}^5n_5)^{\{2\}} \\ ({}^5n_5)^{\{3\}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_5 & S_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_5 & -C_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ({}^5f_5)^{\{1\}} \\ ({}^5f_5)^{\{2\}} \\ ({}^5f_5)^{\{3\}} \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -l_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) * m_4 \begin{bmatrix} ({}^4a_4)^{\{1\}} \\ ({}^4a_4)^{\{2\}} \\ ({}^4a_4)^{\{3\}} \end{bmatrix}$$

$${}^4n_4 = \begin{bmatrix} \left( ({}^5n_5)^{\{2\}} ({}^5f_5)^{\{3\}} - (C_5 l_3 + ({}^5n_5)^{\{3\}}) ({}^5f_5)^{\{2\}} \right) C_5 + \left( (-S_5 l_3 + ({}^5n_5)^{\{1\}}) ({}^5f_5)^{\{2\}} - ({}^5n_5)^{\{2\}} ({}^5f_5)^{\{1\}} \right) S_5 - l_3 m_4 ({}^4a_4)^{\{3\}} \\ \left( ({}^5n_5)^{\{2\}} ({}^5f_5)^{\{3\}} - (C_5 l_3 + ({}^5n_5)^{\{3\}}) ({}^5f_5)^{\{2\}} \right) S_5 - \left( (-S_5 l_3 + ({}^5n_5)^{\{1\}}) ({}^5f_5)^{\{2\}} - ({}^5n_5)^{\{2\}} ({}^5f_5)^{\{1\}} \right) C_5 \\ (C_5 l_3 + ({}^5n_5)^{\{3\}}) ({}^5f_5)^{\{1\}} + (S_5 l_3 + ({}^5n_5)^{\{1\}}) ({}^5f_5)^{\{3\}} + l_3 m_4 ({}^4a_4)^{\{1\}} \end{bmatrix}$$

$${}^3n_3 = {}^3R_4 \left[ {}^4n_4 + ({}^4R_3 {}^3p_3) * {}^4f_4 \right] + ({}^3p_3 + {}^3S_3) * m_3 {}^3a_3 + {}^3I_3 {}^3\dot{\omega}_3 + {}^3\omega_3 * ({}^3I_3 {}^3\omega_3) =$$

$$\begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 \\ S_4 & 0 & C_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ({}^4n_4)^{\{1\}} \\ ({}^4n_4)^{\{2\}} \\ ({}^4n_4)^{\{3\}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_4 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_4 & C_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ({}^4f_4)^{\{1\}} \\ ({}^4f_4)^{\{2\}} \\ ({}^4f_4)^{\{3\}} \end{bmatrix} + \left( \begin{bmatrix} -l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) * m_3 \begin{bmatrix} ({}^3a_3)^{\{1\}} \\ ({}^3a_3)^{\{2\}} \\ ({}^3a_3)^{\{3\}} \end{bmatrix}$$

$${}^3n_3 = \begin{bmatrix} \left( ({}^4n_4)^{\{2\}} ({}^4f_4)^{\{3\}} - (S_4 l_2 + ({}^4n_4)^{\{3\}}) ({}^4f_4)^{\{2\}} \right) C_4 - \left( (-C_4 l_2 + ({}^4n_4)^{\{1\}}) ({}^4f_4)^{\{2\}} - ({}^4n_4)^{\{2\}} ({}^4f_4)^{\{1\}} \right) S_4 \\ \left( ({}^4n_4)^{\{2\}} ({}^4f_4)^{\{3\}} - (S_4 l_2 + ({}^4n_4)^{\{3\}}) ({}^4f_4)^{\{2\}} \right) S_4 + \left( (-C_4 l_2 + ({}^4n_4)^{\{1\}}) ({}^4f_4)^{\{2\}} - ({}^4n_4)^{\{2\}} ({}^4f_4)^{\{1\}} \right) C_4 + l_2 m_3 ({}^3a_3)^{\{3\}} \\ (S_4 l_2 + ({}^4n_4)^{\{3\}}) ({}^4f_4)^{\{1\}} - (-C_4 l_2 + ({}^4n_4)^{\{1\}}) ({}^4f_4)^{\{3\}} - l_2 m_3 ({}^3a_3)^{\{2\}} \end{bmatrix}$$



$${}^2n_2 = {}^2R_3 \left[ {}^3n_3 + ({}^3R_2 {}^2p_2) * {}^3f_3 \right] + ({}^2p_2 + {}^2S_2) * m_2 {}^2a_2 + {}^2I_2 {}^2\dot{\omega}_2 + {}^2\omega_2 * ({}^2I_2 {}^2\omega_2) =$$

$$\begin{bmatrix} S_3 & 0 & -C_3 \\ -C_3 & 0 & -S_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ({}^3n_3)^{\{1\}} \\ ({}^3n_3)^{\{2\}} \\ ({}^3n_3)^{\{3\}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_3 & -C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C_3 & -S_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ({}^3f_3)^{\{1\}} \\ ({}^3f_3)^{\{2\}} \\ ({}^3f_3)^{\{3\}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * m_2 \begin{bmatrix} ({}^2a_2)^{\{1\}} \\ ({}^2a_2)^{\{2\}} \\ ({}^2a_2)^{\{3\}} \end{bmatrix}$$

$${}^2n_2 = \begin{bmatrix} \left( ({}^3n_3)^{\{2\}} ({}^3f_3)^{\{3\}} - (S_3 l_1 + ({}^3n_3)^{\{3\}}) ({}^3f_3)^{\{2\}} \right) S_3 - \left( (-C_3 l_1 + ({}^3n_3)^{\{1\}}) ({}^3f_3)^{\{2\}} - ({}^3n_3)^{\{2\}} ({}^3f_3)^{\{1\}} \right) C_3 + l_1 m_2 ({}^2a_2)^{\{3\}} \\ - \left( ({}^3n_3)^{\{2\}} ({}^3f_3)^{\{3\}} - (S_3 l_1 + ({}^3n_3)^{\{3\}}) ({}^3f_3)^{\{2\}} \right) C_3 - \left( (-C_3 l_1 + ({}^3n_3)^{\{1\}}) ({}^3f_3)^{\{2\}} - ({}^3n_3)^{\{2\}} ({}^3f_3)^{\{1\}} \right) S_3 \\ \left( -S_3 l_1 + ({}^3n_3)^{\{3\}} \right) ({}^3f_3)^{\{1\}} - \left( C_3 l_1 + ({}^3n_3)^{\{1\}} \right) ({}^3f_3)^{\{3\}} - l_1 m_2 ({}^2a_2)^{\{1\}} \end{bmatrix}$$

$${}^1n_1 = {}^1R_2 \left[ {}^2n_2 + ({}^2R_1 {}^1p_1) * {}^2f_2 \right] + ({}^1p_1 + {}^1S_1) * m_1 {}^1a_1 + {}^1I_1 {}^1\dot{\omega}_1 + {}^1\omega_1 * ({}^1I_1 {}^1\omega_1) =$$

$$\begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ S_2 & 0 & -C_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ({}^2n_2)^{\{1\}} \\ ({}^2n_2)^{\{2\}} \\ ({}^2n_2)^{\{3\}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_2 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ({}^2f_2)^{\{1\}} \\ ({}^2f_2)^{\{2\}} \\ ({}^2f_2)^{\{3\}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * m_1 \begin{bmatrix} ({}^1a_1)^{\{1\}} \\ ({}^1a_1)^{\{2\}} \\ ({}^1a_1)^{\{3\}} \end{bmatrix}$$

$${}^1n_1 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 \\ S_2 & 0 & -C_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ({}^2n_2)^{\{1\}} \\ ({}^2n_2)^{\{2\}} \\ ({}^2n_2)^{\{3\}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ({}^2n_2)^{\{1\}} C_2 + ({}^2n_2)^{\{3\}} S_2 \\ ({}^2n_2)^{\{1\}} S_2 - ({}^2n_2)^{\{3\}} C_2 \\ ({}^2n_2)^{\{2\}} \end{bmatrix}$$

### **Fuerza o torque (par) aplicado a la articulación i.**

$$\tau_i = \begin{cases} {}^i n_i^T {}^i R_{i-1} z_0 (\text{Rotación}) \\ {}^i f_i^T {}^i R_{i-1} z_0 (\text{Traslación}) \end{cases}$$

$$\tau_1 = {}^1n_1^T {}^1R_0 z_0$$

$$\begin{bmatrix} {}^1n_1^{\{1\}} & {}^1n_1^{\{2\}} & {}^1n_1^{\{3\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_1 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1n_1^{\{1\}} & {}^1n_1^{\{2\}} & {}^1n_1^{\{3\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -{}^1n_1^{\{2\}}$$

$$\tau_2 = {}^2n_2^T {}^2R_1 z_0$$

$$\begin{bmatrix} {}^2n_2^{\{1\}} & {}^2n_2^{\{2\}} & {}^2n_2^{\{3\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_2 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2n_2^{\{1\}} & {}^2n_2^{\{2\}} & {}^2n_2^{\{3\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = {}^2n_2^{\{2\}}$$

$$\tau_3 = {}^3n_3^T {}^3R_2 z_0$$

$$\begin{bmatrix} {}^3n_3^{\{1\}} & {}^3n_3^{\{2\}} & {}^3n_3^{\{3\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_3 & -C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -C_3 & -S_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^3n_3^{\{1\}} & {}^3n_3^{\{2\}} & {}^3n_3^{\{3\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = {}^3n_3^{\{2\}}$$

$$\tau_4 = {}^4n_4^T {}^4R_3 z_0$$

$$\begin{bmatrix} {}^4n_4^{\{1\}} & {}^4n_4^{\{2\}} & {}^4n_4^{\{3\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_4 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -S_4 & C_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^4n_4^{\{1\}} & {}^4n_4^{\{2\}} & {}^4n_4^{\{3\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -{}^4n_4^{\{2\}}$$

$$\tau_5 = {}^5n_5^T {}^5R_4 z_0$$

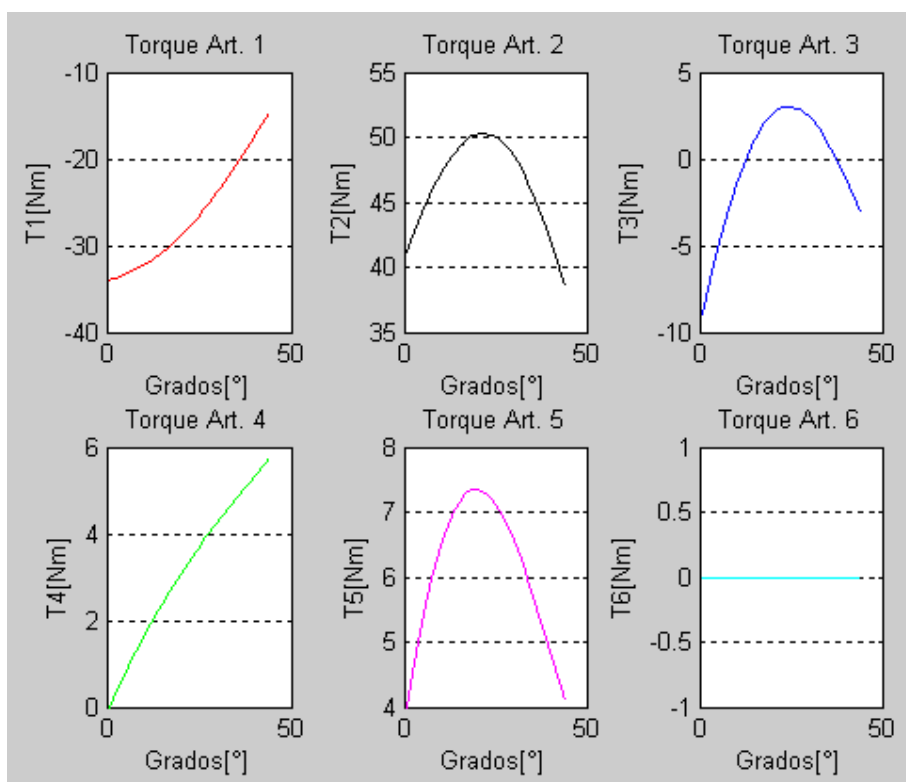
$$\begin{bmatrix} {}^5n_5^{\{1\}} & {}^5n_5^{\{2\}} & {}^5n_5^{\{3\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_5 & S_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_5 & -C_5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^5n_5^{\{1\}} & {}^5n_5^{\{2\}} & {}^5n_5^{\{3\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = {}^5n_5^{\{2\}}$$

$$\tau_6 = {}^6n_6^T {}^6R_5 z_0$$

$$\begin{bmatrix} {}^6n_6^{\{1\}} & {}^6n_6^{\{2\}} & {}^6n_6^{\{3\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_6 & S_6 & 0 \\ -S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^6n_6^{\{1\}} & {}^6n_6^{\{2\}} & {}^6n_6^{\{3\}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^6n_6^{\{3\}}$$

### Simulación en Matlab:

También se desarrollo el algoritmo en matlab, obteniendo los siguiente resultados para cada una de las articulaciones:



Estas curvas corresponden a un movimiento continuo y simultaneo de las 6 articulaciones en un ángulo de 45 grados.

## **Control Dinámico**

### **Introducción**

El problema del control de los manipuladores es el problema de determinar la historia en el tiempo del conjunto de entrada requerido para hacer que el actuador ejecute un comando de movimiento. El conjunto de entradas requerido puede ser un conjunto de fuerzas y torques, o pueden ser entradas a los actuadores, por ejemplo, tensión de entrada de los motores, dependiendo del modelo usado para el diseño del controlador. El comando de movimiento se especifica típicamente ya sea como una secuencia de posiciones y orientaciones del actuador, o como una trayectoria continua.

Hay muchas técnicas de control y metodologías que pueden ser aplicadas al control de manipuladores. El método de control particular elegido así como la forma en que es implementado pueden tener un impacto importante en el desempeño del manipulador y consecuentemente en el rango de sus posibles aplicaciones. Por ejemplo, el trazado de trayectorias continuas requiere una arquitectura de control diferente que la que requiere el control punto a punto.

Además, el diseño mecánico del manipulador en si mismo influirá en el tipo de esquema de control necesario. Por ejemplo, los problemas de control encontrados en un manipulador cartesiano son fundamentalmente diferentes a los encontrados en un manipulador tipo codo. Esto crea lo que se llama un intercambio de hardware/software entre la estructura mecánica del sistema y la arquitectura /programación del controlador.

Continuamente se están haciendo mejoras tecnológicas en el diseño mecánico de los robots, las cuales mejoran su potencial de rendimiento y amplían su rango de aplicación. Realizar este incremento de rendimiento, sin embargo, requiere un control mas sofisticado. Se puede trazar una analogía con la industria aeronáutica. Los primeros aviones eran relativamente fáciles de volar pero tenían una capacidad de rendimiento limitada. Así como el rendimiento aumenta con los avances tecnológicos también aumentan los problemas de control hasta el punto en que los más modernos vehículos, como un trasbordador o un avión de guerra, no pueden ser volados sin un sofisticado control de computadora.

Como ilustración del efecto del diseño mecánico en los problemas de control, comparemos un robot actuado por motores de CC de imán permanente con engranaje de reducción con un robot de manejo directo que usa motores de alto torque sin reducción. En el primer caso, la dinámica del motor es lineal y bien comprendida y el efecto del engranaje de reducción es principalmente para desacoplar el sistema reduciendo el momento de inercia a través de las uniones. Sin embargo, el uso de los engranajes introduce fricción, complejidad en el tren de manejo y “backlash”.

En el caso del robot de manejo directo, los problemas de fricción, “backlash” y complejidad debido a los engranajes son eliminados. Sin embargo, el acoplamiento a través de las uniones es ahora significativo, y la dinámica del motor en si mismo puede ser mucha mas compleja. El resultado es que para alcanzar un alto desempeño de este tipo de manipuladores, un grupo diferente de problemas de control debe ser resuelto.

A un robot se le demandan por lo general elevadas prestaciones en velocidad y precisión de movimiento. Este objetivo ha marcado en gran medida las investigaciones y avances tecnológicos realizados en el campo de la robótica. La utilización de materiales más ligeros, de sistemas de transmisión sin holgura y con baja inercia, de actuadores rápidos y precisos o de sensores de elevada resolución, han permitido mejorar de manera notable la calidad del movimiento del robot.

Del mismo modo, los algoritmos de control del robot tienen por objetivo mejorar al máximo las características de velocidad y precisión. El control cinemático selecciona trayectorias que idealmente

deberá seguir el robot para, teniendo en cuenta sus limitaciones, ajustarse lo mejor posible a las especificaciones del movimiento dadas por el usuario. En la práctica, este ajuste del movimiento del robot a las especificaciones del usuario no será del todo posible, pues las características dinámicas del robot (inercias, rozamiento, holguras, etc.) muchas veces desconocidas, impiden en general una coincidencia entre la trayectoria deseada  $q_d(t)$  y la real  $q(t)$ .

El control dinámico tiene por misión procurar que las trayectorias realmente seguidas por el robot  $q(t)$  sean lo más parecidas posibles a las propuestas por el control cinemático  $q_d(t)$ .

Para ello hace uso del conocimiento del modelo dinámico del robot y de las herramientas de análisis y diseño aportadas por la teoría del servocontrol (representación interna, estado, estabilidad de Lyapunov, control PID, control adaptativo, etc.).

Como se vio al obtener el modelo dinámico de un robot, éste es fuertemente no lineal, multivariable, acoplado y de parámetros variantes, por lo que en general su control es extremadamente complejo.

En la práctica ciertas simplificaciones, válidas para un gran número de los robots comerciales existentes, facilitan el diseño del sistema de control, dando unos resultados razonablemente aceptables, aunque limitando en ciertas situaciones la calidad de sus prestaciones.

La utilización de técnicas de control más potentes, que podrían dar mejores resultados, pueden verse limitadas en la práctica por la elevada complejidad y coste computacional, que si bien es abordable con la tecnología actual, supone un mayor coste económico.

Normalmente el control dinámico se realiza en el espacio articular, esto es, controlándolas trayectorias articulares  $q(t)$  del robot.

Sin embargo, en ciertas ocasiones, como por ejemplo cuando el robot entra en contacto con el entorno desarrollando fuerzas de reacción, puede optarse por realizar el control en el espacio de la tarea o cartesiano, controlando la trayectoria del extremo  $jet$ ).

En este capítulo se van a examinar las técnicas de control dinámico más frecuentes, centrándose principalmente en el control en el espacio articular.

Dentro de éste se considerará tanto el control mono articular, en el que se desprecia la interacción entre los grados de libertad del robot, como el control multiarticular, en el que se considera al robot como el sistema multivariable que realmente es.

Las técnicas de control utilizadas serán las basadas en control PID y control por prealimentación, ampliamente extendidas, utilizándose también en ocasiones la linealización por inversión del modelo.

Se realizará asimismo alguna referencia a técnicas de control más potentes, como puede ser el control adaptativo.

El control dinámico se utiliza para que las trayectorias que recorre el robot ( $q(t)$ ) sean lo más parecida a las indicadas a través del control cinemática ( $q_d(t)$ ).

Para ello se hace uso del modelo dinámico del robot y de las herramientas tales como lazos PID, variables de estado, control adaptativo, etc.

Tal como se demuestra con el análisis dinámico, el movimiento de un robot es no lineal, multivariable, acoplado y de parámetros variantes. La utilización de técnicas de control potentes se ven limitadas en la práctica, por el costo de su implementación y complejidad. Por eso en la práctica existen métodos que simplifican éste análisis dando resultados aceptables y con los que se diseñan la gran parte de los robots comerciales.

TP Final - Análisis Dinámico, Control dinámico y Simulación de un robot de 6 grados de libertad	Página 30 de 41
	Asade - Rosende - Villafañe

Existen 2 métodos principales para el control dinámico:

- Control Mono-articular
- Control Multi-articular

En el control Mono-articular se estudia cada eslabón sin tener en cuenta la interacción entre los distintos grados de libertad. En el control Multi-articular se estudia al robot cómo un sistema multi-variable.

Con el fin de sacar un mayor provecho del estudio, se optó por el control mono-articular.

## Control Mono-articular

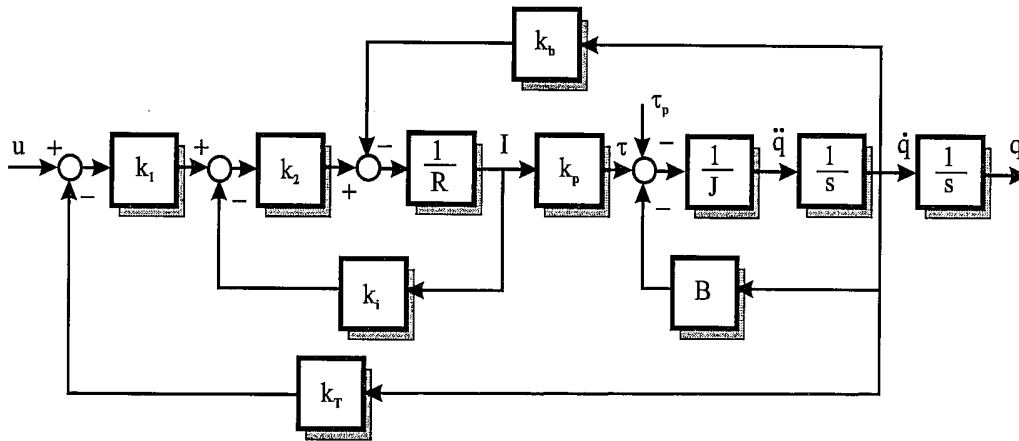
Las características mecánicas de un robot (dimensiones, peso, tipo de actuadores, etc.) influyen notablemente en el tipo de control a utilizar. Citamos la expresión del modelo dinámico de un robot:

$$\tau = D(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) + C(q) + F_v \dot{q}$$

Notar la existencia del par debido al rozamiento viscoso (matriz diagonal constante  $F_v$ ), además puede verse cómo la estructura cinemática del robot va a modificar la forma de las matrices  $D$ ,  $H$  y  $C$  y, por lo tanto, la complejidad del modelo y su correspondiente control.

### Control PID

Tal cómo dijimos en el tema anterior, el control de un robot puede ser tratado como el control de  $n$  ejes independientes, incluyendo en el par perturbador  $\tau_p$  el efecto de los parámetros no constantes de la diagonal de la matriz  $D$ , elementos no diagonales y los pares generados por la gravedad y movimientos relativos (matrices  $C$  y  $H$ ). En estos casos y con el accionamiento de tipo eléctrico, se tendrá que el correspondiente diagrama de bloques de cada eje sería el siguiente ( sin tener en cuenta el factor de reducción aplicado en el eje):



J: Inercia  
 B: Rozamiento viscoso  
 T: Par del accionamiento  
 $\tau_p$ : Par perturbador  
 R: Regulador PID  
 K: Constante  
 u: Tensión de mando

$$\tau = k u$$

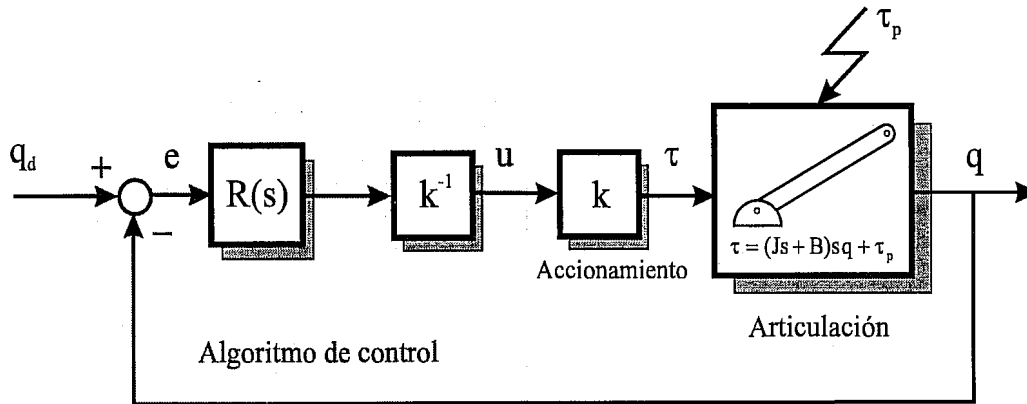
y

$$\tau = (Js + B)sq + \tau_p$$

entonces:

$$q = \frac{k}{(Js + B)s} \left( u - \frac{1}{k} \tau_p \right)$$

Con lo que el esquema de control quedaría:



Siendo  $R(s)$  un lazo PID compuesto por:

$$R(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{1}{s} (k_p s + k_i + k_d s^2)$$

Una de las utilidades más importantes de éste esquema es que podemos medir el error entre la trayectoria deseada y la que realmente recorre el robot.

$$e(s) = \frac{\tau_p + (Js + B)sq_d}{R(s) + (Js + B)s}$$

Vemos que si no se cambia la posición deseada ( $q_d=0$ ),  $T_p$  tiene forma de escalón unitario ( $T_p=1/s$ ), y la acción integral no nula (si la acción integral es nula tenemos un control basado en lazo PD que no logra anular el efecto de la perturbación), el regulador será siempre un sistema estable y los efectos del par perturbador se anulan, entonces, el error será:

$$e(s) = \frac{1}{(k_p s + k_i + k_d s^2) + (Js + B)s^2}$$

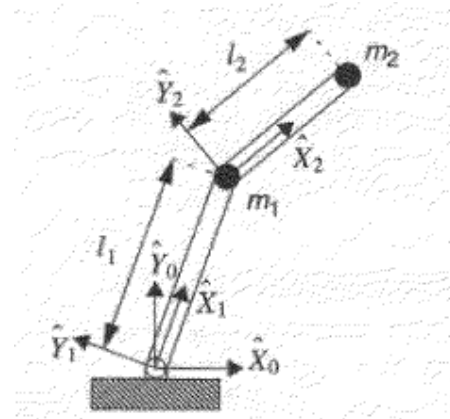
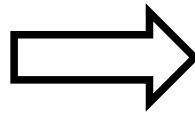
Cómo conclusión, el control PID permite anular el efecto de una posible perturbación en escalón en régimen permanente, así como asegurar que finalmente  $q$  y  $q_d$  coinciden, sin embargo, no consigue que  $q$  siga la evolución de  $q_d$  a lo largo del tiempo.



## **Análisis del control dinámico de un robot de seis grados de libertad:**

### **Simulación**

Para simular el comportamiento del robot utilizamos parte de las librerías de la herramienta Hemero para Matlab y utilizamos los datos del robot IRB 6400RF.



Entonces tomamos:

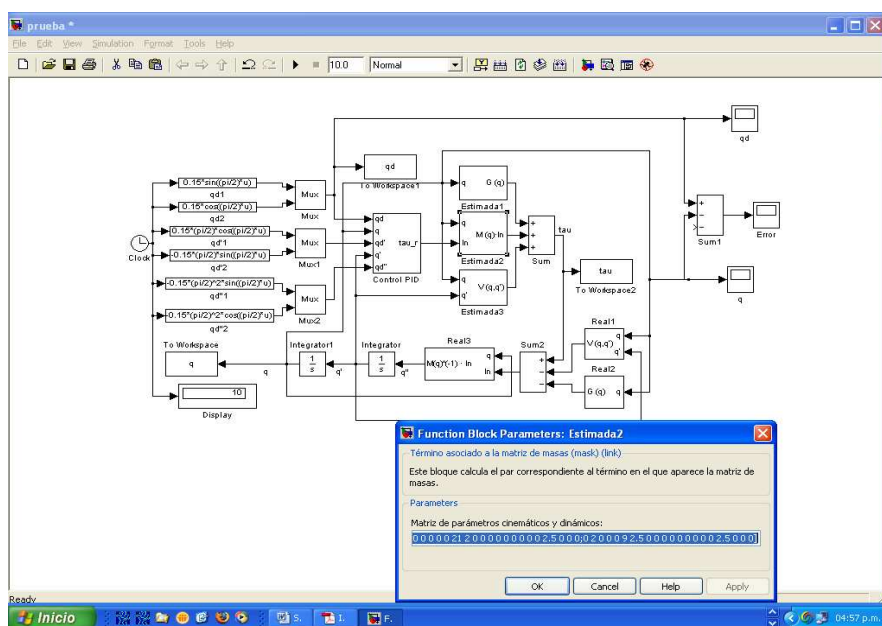
$$L1 = 2 \text{ m}$$

$$L2 = 2,5 \text{ m}$$

$$m1 = 20 \text{ kg}$$

$$m2 = 10 \text{ kg}$$

1. Cargamos el modelo dinámico en el lazo de control suponiendo un error por defecto en la estimación del 10% (por exceso en la masa 1 y por defecto en la masa 2).

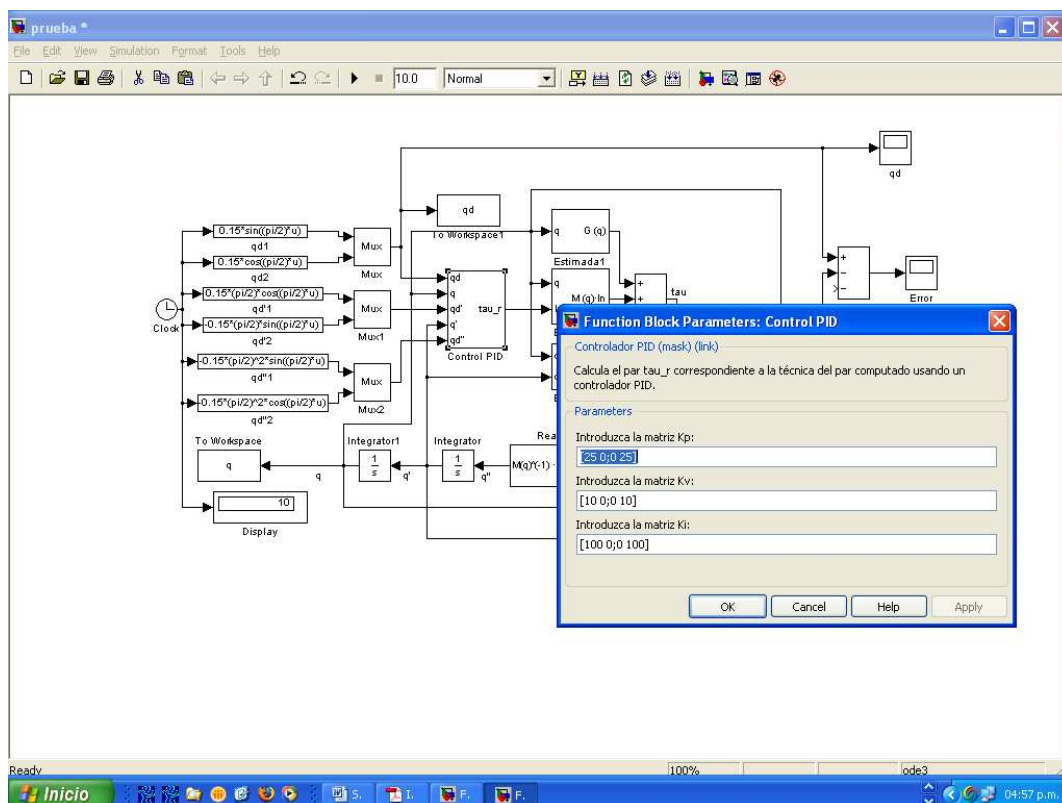


2. Cargamos las constantes del lazo siendo:

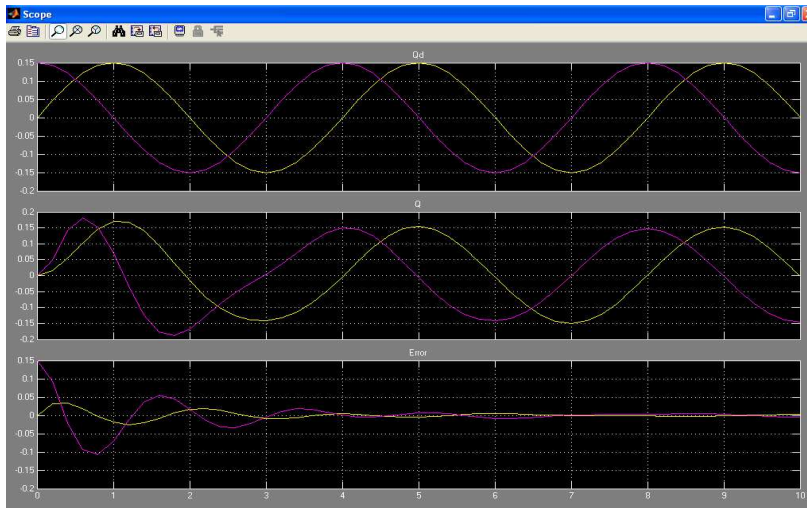
$K_p = 25$

$K_v = 10$

$K_i = 100$

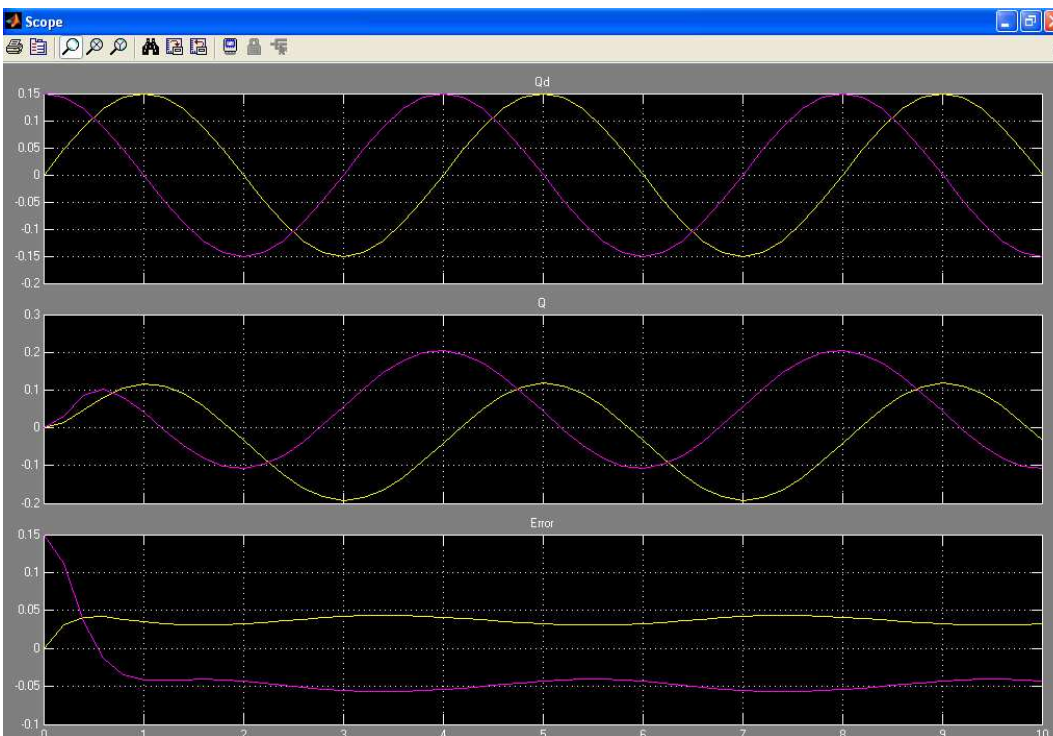


3. Para éstos valores introducimos 2 señales senoidales ( $\sin()$  y  $\cos()$ ).
4. Y observamos la trayectoria deseada, real y el error entre ellas:



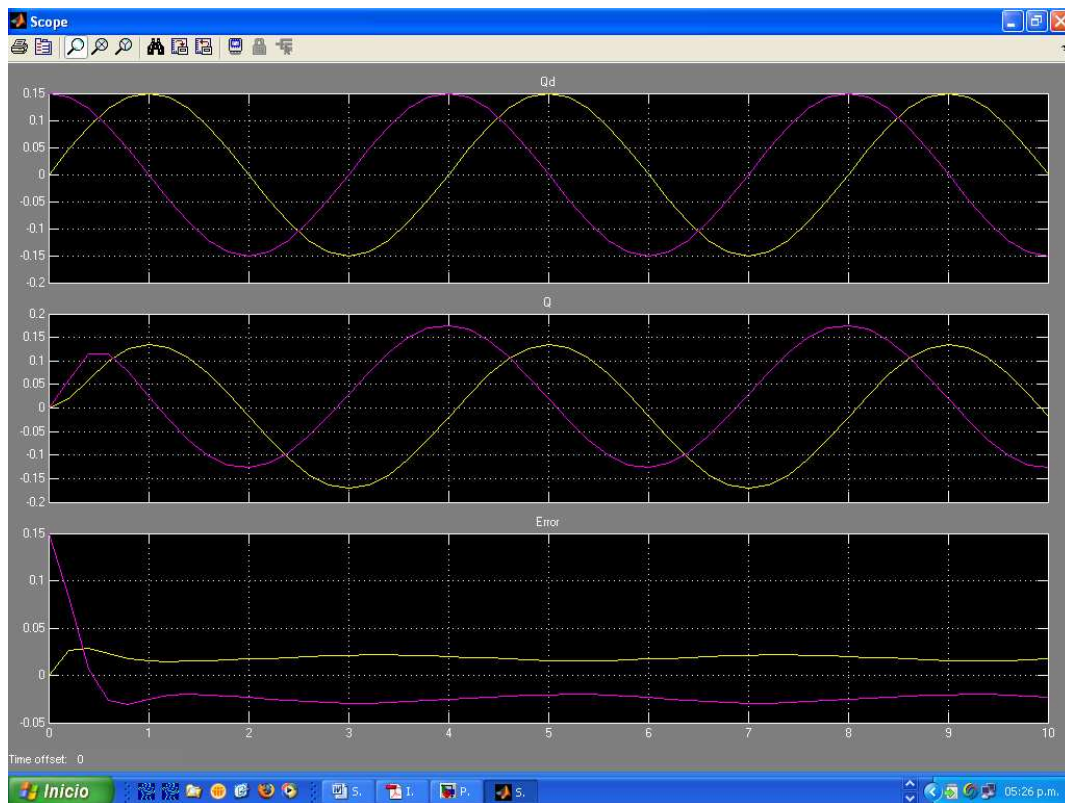
Cómo vemos, en el transitorio ( $5\zeta \approx 5$  seg) es notable el error de trayectoria pero debido al lazo PID el mismo se atenúa en el tiempo.

5. Ahora anulamos la constante de integración  $K_i=0$ , entonces:



Vemos que al desaparecer la constante de integración (en éste caso estaríamos utilizando el método de par computado con lazo PD), el error no desaparece en el permanente.

6. Ésta situación puede mejorarse si incrementamos la constante proporcional, hacemos  $K_p = 50$ .

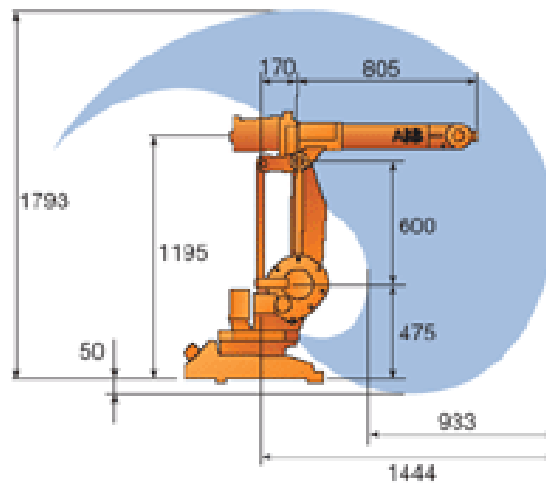


Se puede apreciar la mejora introducida, al disminuir el error de trayectorias debido al incremento de la constante proporcional, pero sigue presente durante el ciclo permanente.

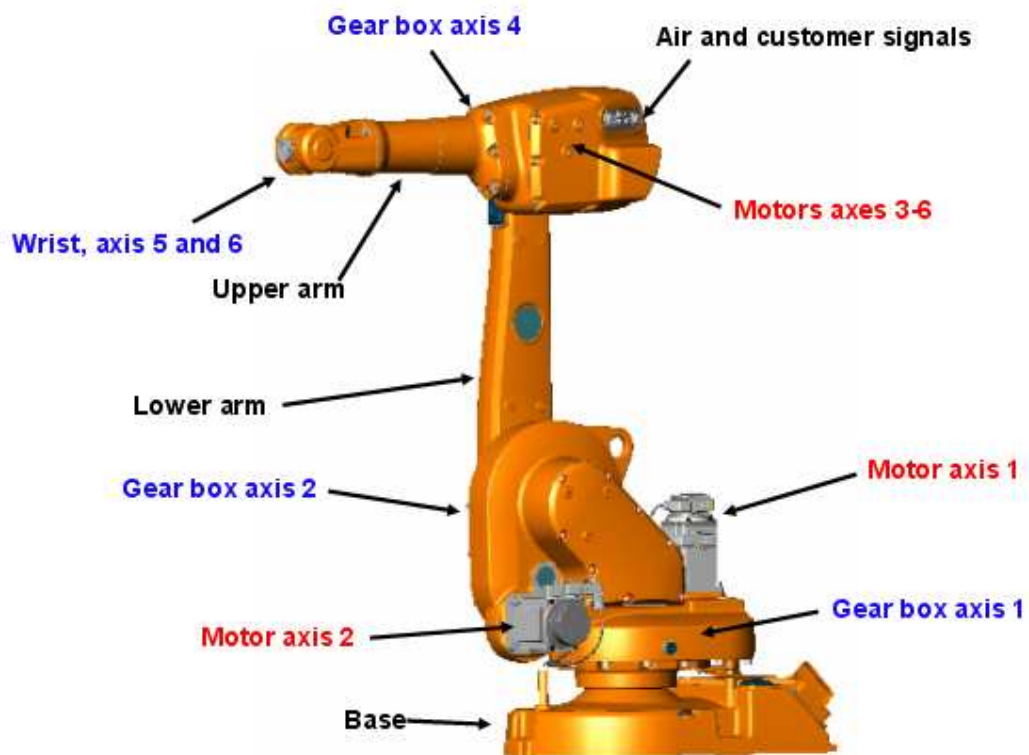
El control dinámico por lazo PID permite corregir, en el transitorio, el error entre la trayectoria deseada y la real, siempre y cuando el lazo esté sintonizado con la variable  $K_i$  adecuada, si ésta desaparece, el error se mantendrá durante el permanente lo cual se puede optimizar incrementando la variable proporcional.

## Apéndice:

### Manipulador Real:



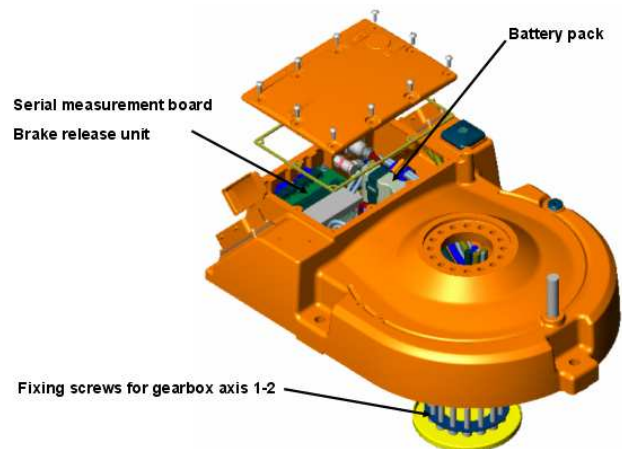
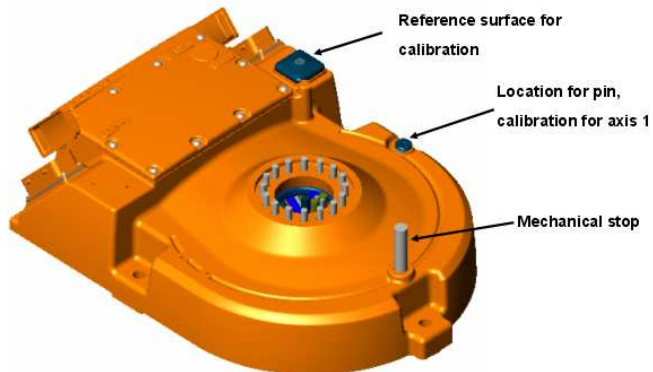
## Manipulator parts



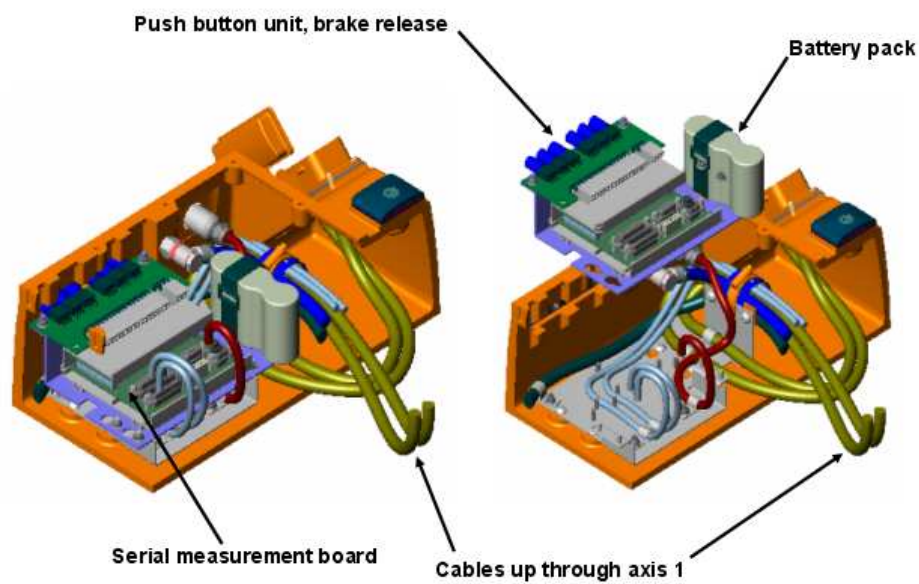


## Base explode

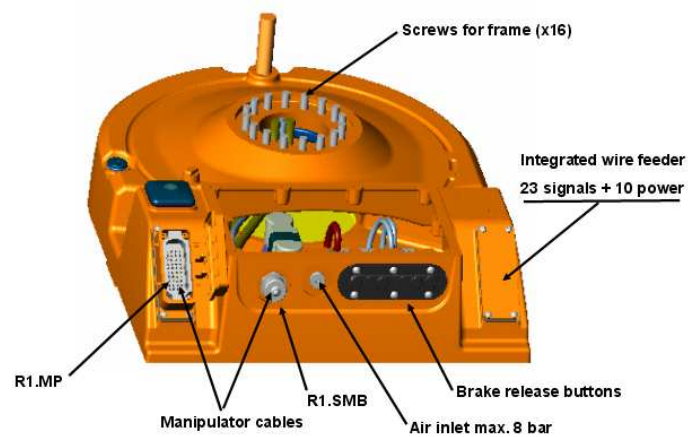
### Base



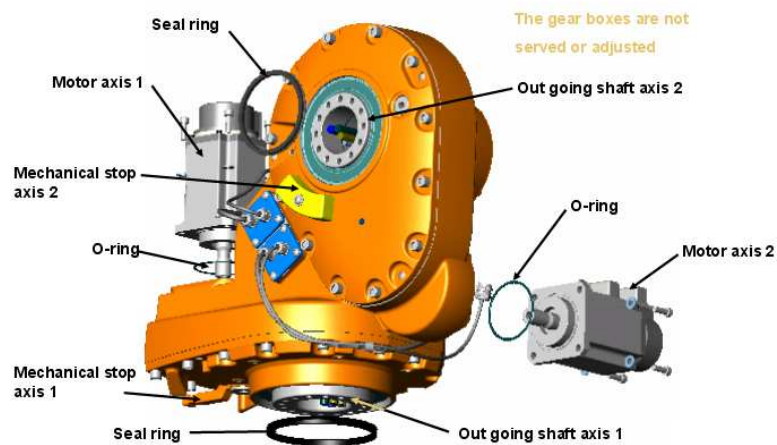
## SMB and cable layout



## Connections at base

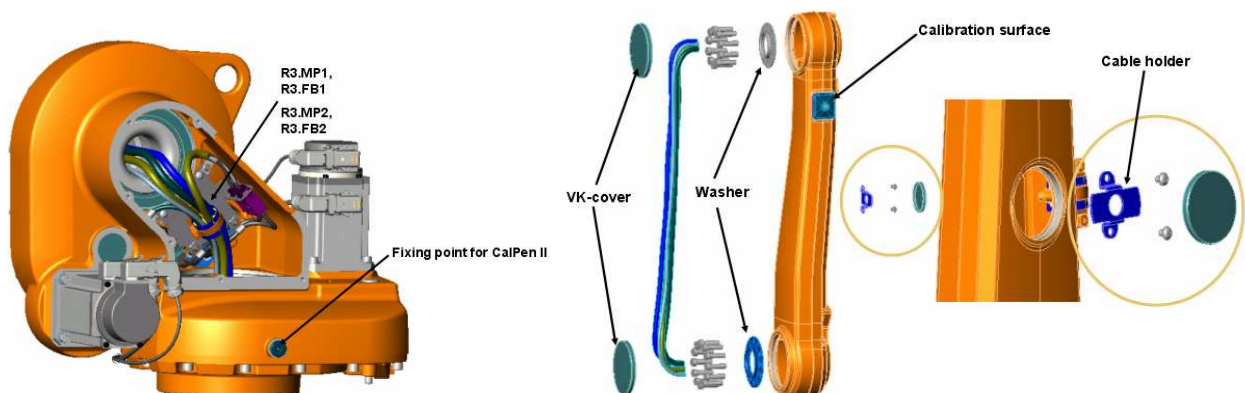


## Frame, axis 1 and 2

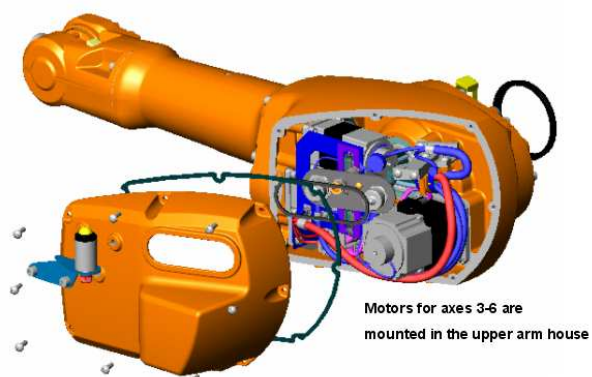


## Lower arm

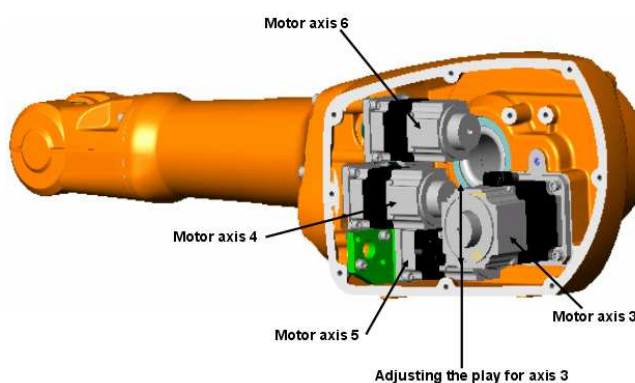
### Frame side view, without cover



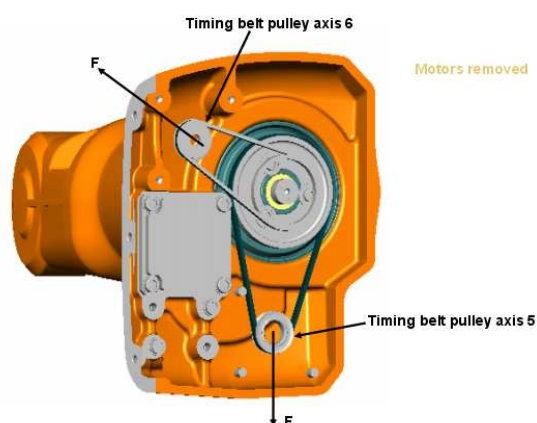
## Upper arm



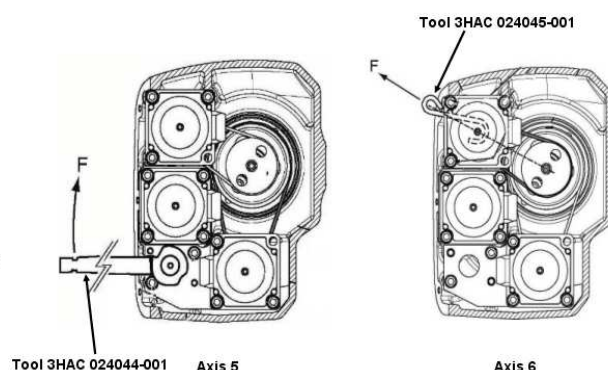
## Upper arm, motors



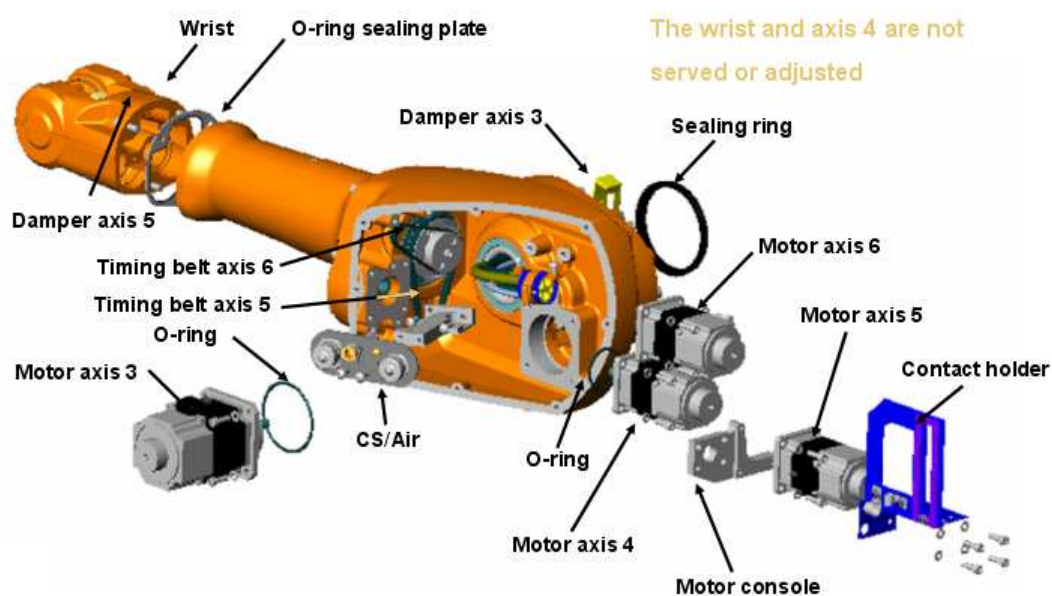
## Upper arm, view from behind



## Adjustment of timing belt

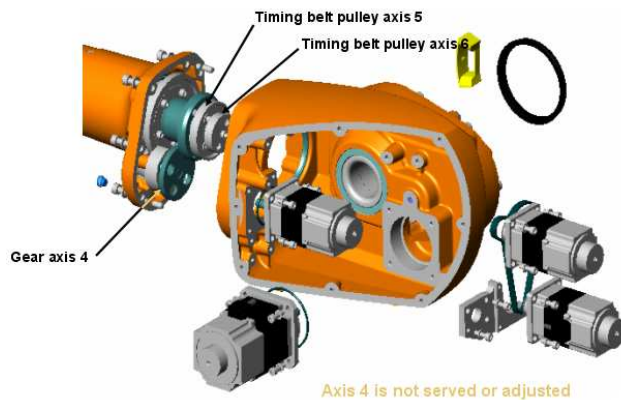


## Upper arm, exploded

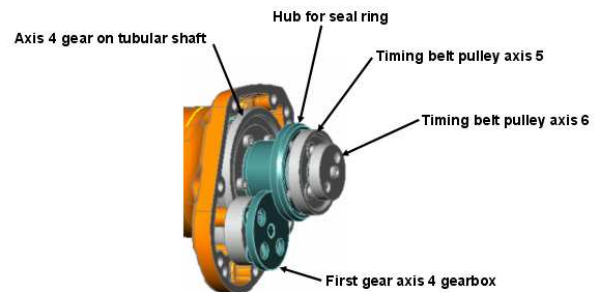




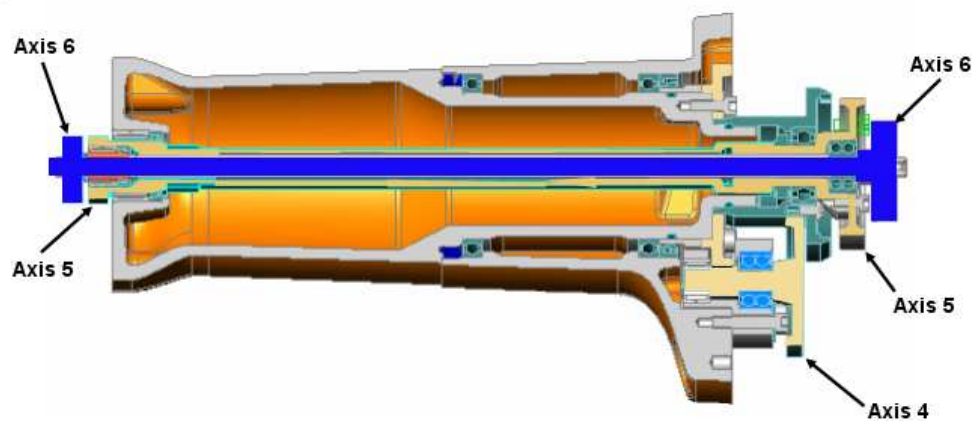
## Upper arm, axis 4 exploded



## Axes 4 – 6 drive line



## Tubular shaft, cut through view



## Customer connections, upper arm

