

Robótica – Trabajo Práctico N° 2:

Dinámica de un robot móvil diferencial

Integrantes:

- Federico Coppede
- Matías Paramidani

Consignas:

El desarrollo del TP2 consistirá en la modelación dinámica del robot educativo N6 de la empresa robogroup, el cual será el hardware disponible para probar el modelo obtenido durante la realización de la práctica.

- Calcular el modelo dinámico en Matlab para una trayectoria establecida.
- Implementar dicho modelo en el N6.
- Comparar El modelo Matlab con la programación real y extraer conclusiones y gráficos.

Hipótesis básicas simplificadoras:

- El robot se mueve sobre una superficie plana sin irregularidades ni defectos del suelo.
- Los ejes de guiado son perpendiculares al suelo.
- Se supone que las ruedas se mueven con rodadura pura (el deslizamiento es despreciable)
- Robot sin partes flexibles.
- Todas las partes utilizadas en la modelación coinciden con el modelo real del robot.

Introducción

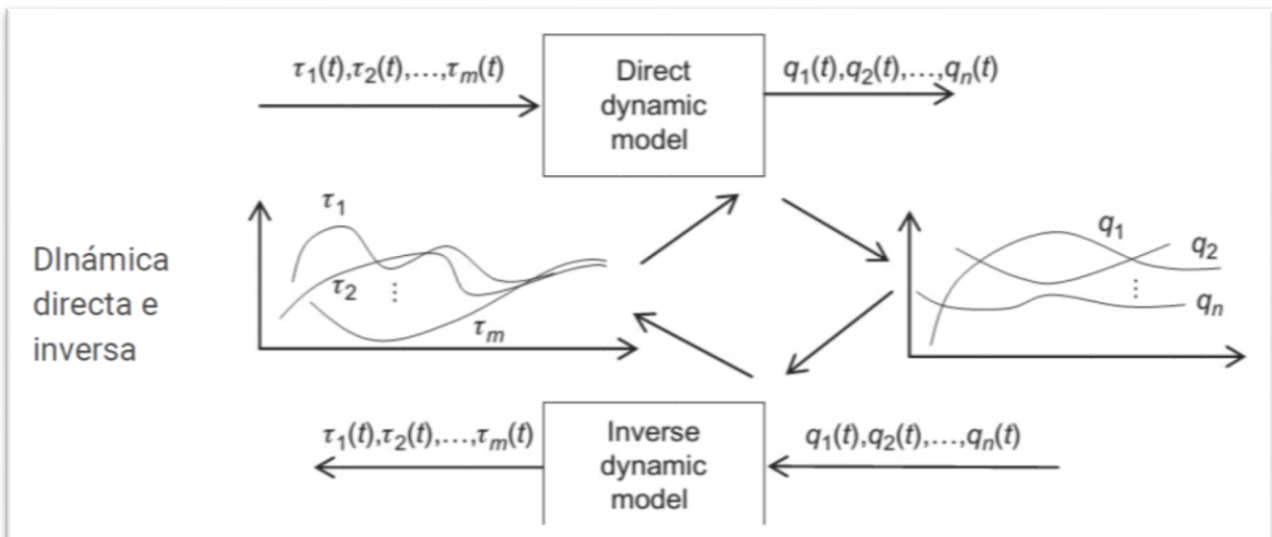
El robot móvil en cuestión tiene 3 grados de libertad respecto a una referencia: posición en el plano (X,Y) y orientación (Θ). Idealmente, independientemente de donde inicie, el robot debe poder moverse a cualquier posición y orientación (X,Y, Θ).

La dinámica del robot se deriva de las ecuaciones dinámicas del movimiento del robot. Partiendo de dos metodologías:

- Newton-Euler
- Lagrange

Siendo la complejidad del método de Newton-Euler es $O(n)$, mientras que el de Lagrange será $O(n^3)$, en donde n es el número de grados de libertad.

Modelo dinámico directo e inverso:

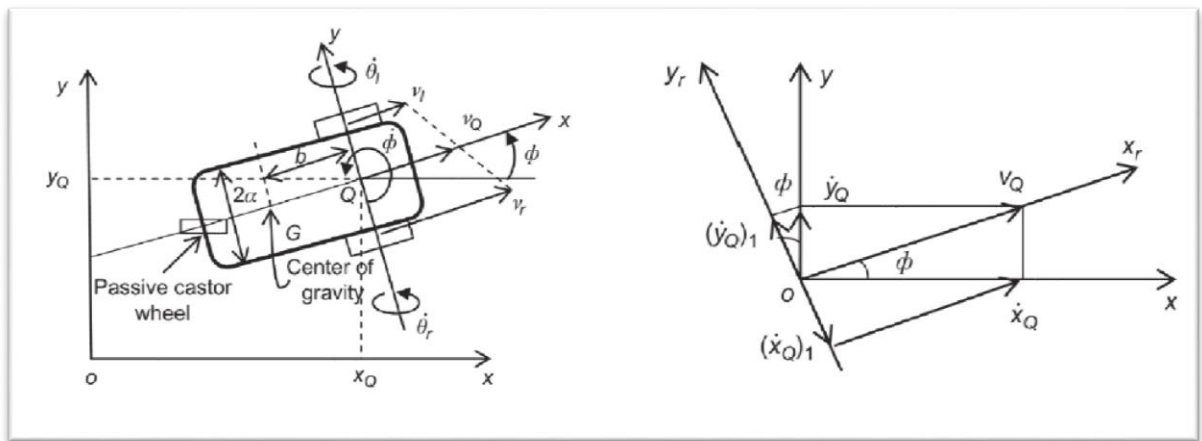


El objetivo de este estudio, como se muestra en el cuadro explicativo es, en función de los parámetros físicos del objeto (masa, momentos de inercia, centro de gravedad, etc.) obtener la respuesta dinámica con respecto a una referencia al aplicar un torque en determinada parte del objeto (ruedas).

Cuando se parte de las propiedades físicas y de los requerimientos de aceleración del objeto, para llegar al torque necesario en los motores, se trata de un estudio de *dinámica inversa*.

El análisis planteado en este caso contempla dos casos posibles para el desarrollo de las ecuaciones:

- 1) Caso 1 (modelo simplificado). Cuando el COG (Centro de Gravedad) coincide con el punto central entre ambas ruedas del robot diferencial (Q), no existe fricción en las ruedas, y el conjunto motor – rueda tiene inercia cero.



Partiendo de las ecuaciones de Newton-Euler se obtiene:

$$\dot{v} = \frac{(t_r + t_l)}{m * r}$$

$$\dot{w} = \frac{2 * a}{I * r} * (t_r - t_l)$$

Donde:

\dot{v} : Aceleración

t_r : Torque en la rueda derecha

t_l : Torque en la rueda izquierda

I : Momento de inercia

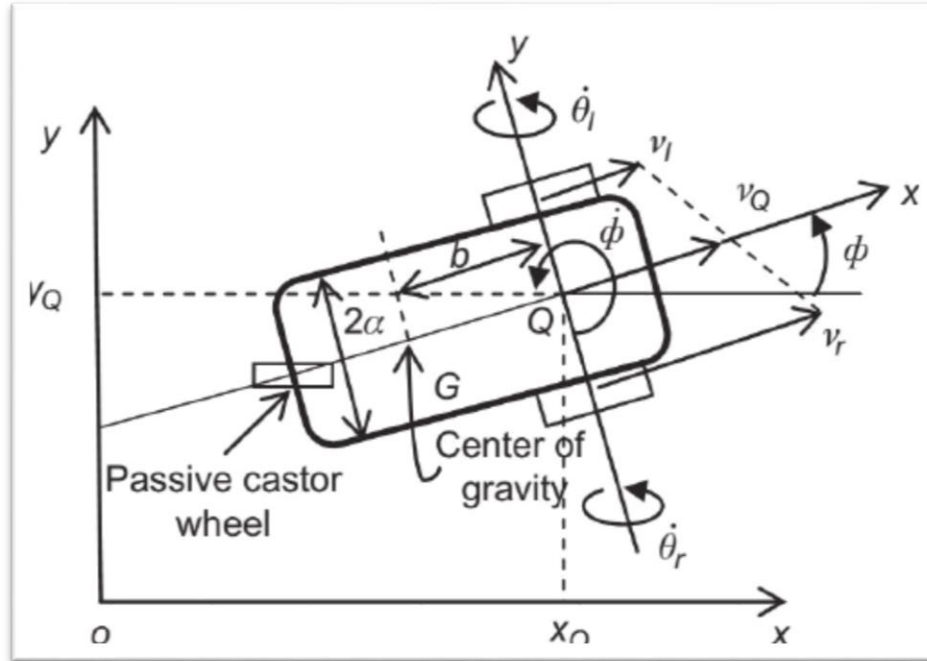
r : Radio de las ruedas

m : Masa del robot

\dot{w} : Aceleración angular

a : Distancia entre ruedas

- 2) Caso 2 (modelo completo). Cuando no coincide el punto Q con el centro de gravedad, existe fricción con el mismo coeficiente en ambas ruedas y el conjunto motor – rueda no tiene inercia cero.



Para este caso de análisis hay que contemplar la distancia "b" que existe entre el punto Q y el centro de gravedad.

Partiendo del modelo de Lagrange y dado que hay movimiento solo en el plano x-y, se plantea el lagrangiano sabiendo que la energía potencial es cero, y este resulta igual a la energía cinética dada por $K = K_1 + K_2 + K_3$

Siendo:

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_G^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} I_Q \dot{\phi}^2$$

$$K_3 = \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2} I_o \dot{\theta}_l^2$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_G &= \dot{x}_Q + b\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{y}_G &= \dot{y}_Q - b\dot{\phi} \cos \phi\end{aligned}$$

La energía cinética se expresa directamente en términos de las velocidades angulares de las ruedas motrices. La función de Lagrange L es igual a K, ya que el robot se mueve en el plano horizontal y por lo tanto la energía potencial P es cero, siendo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_r} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta_r} &= \tau_r - \beta \dot{\theta}_r \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}_l} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta_l} &= \tau_l - \beta \dot{\theta}_l\end{aligned}$$

Donde β es el coeficiente de fricción de las ruedas y t_l, t_r son el torque en cada rueda.

Finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned}D_{11}\ddot{\theta}_r + D_{12}\ddot{\theta}_l + \beta\dot{\theta}_r &= \tau_r \\ D_{21}\ddot{\theta}_r + D_{22}\ddot{\theta}_l + \beta\dot{\theta}_l &= \tau_l\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}D_{11} = D_{22} &= \left[\frac{mr^2}{4} + \frac{(I_Q + mb^2)r^2}{8a^2} + I_o \right] \\ D_{12} = D_{21} &= \left[\frac{mr^2}{4} - \frac{(I_Q + mb^2)r^2}{8a^2} \right]\end{aligned}$$

Desarrollo

La dificultad en la aplicación de este método radica en la correcta medición de todos los parámetros que incluyen al modelo físico, si bien algunos son fácilmente obtenibles como son el peso, radio de las ruedas, distancia entre rudas etc., otros parámetros son más difíciles de obtener, centro de gravedad y momento de inercia principalmente.

Para obtener todos los parámetros físicos se utilizó un CAD mecánico, por medio del cual, luego de diseñar y asignar los materiales de cada pieza apropiadamente, se obtuvieron todos los datos necesarios para el desarrollo de este trabajo.

Pasos para la obtención de todos los parámetros:

- 1) El primer paso consiste en la elección del CAD mecánico, en este caso y por simplicidad elegimos el software SolidWorks, ya que la mayoría de las piezas estaban diseñadas por el fabricante del robot y esto nos permitió obtener un modelo muy aproximado al real.
- 2) Partiendo de las piezas básicas se armó un modelo aproximado al cual le harían falta algunos retoques para obtener el modelo final. La mayoría de las piezas utilizadas en este paso se pueden descargar de: <http://multiplo.org/es/chassis-1/>

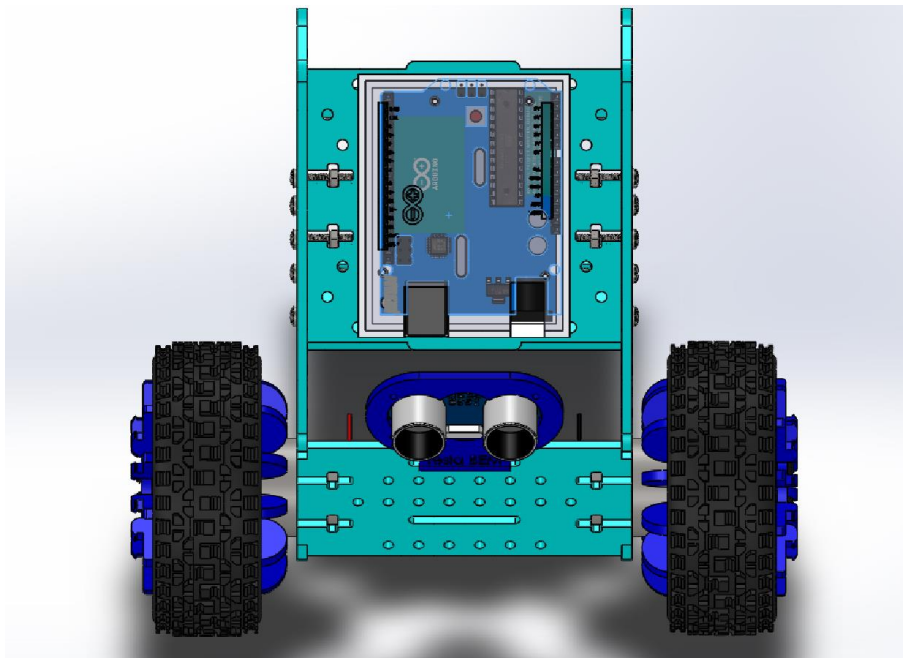
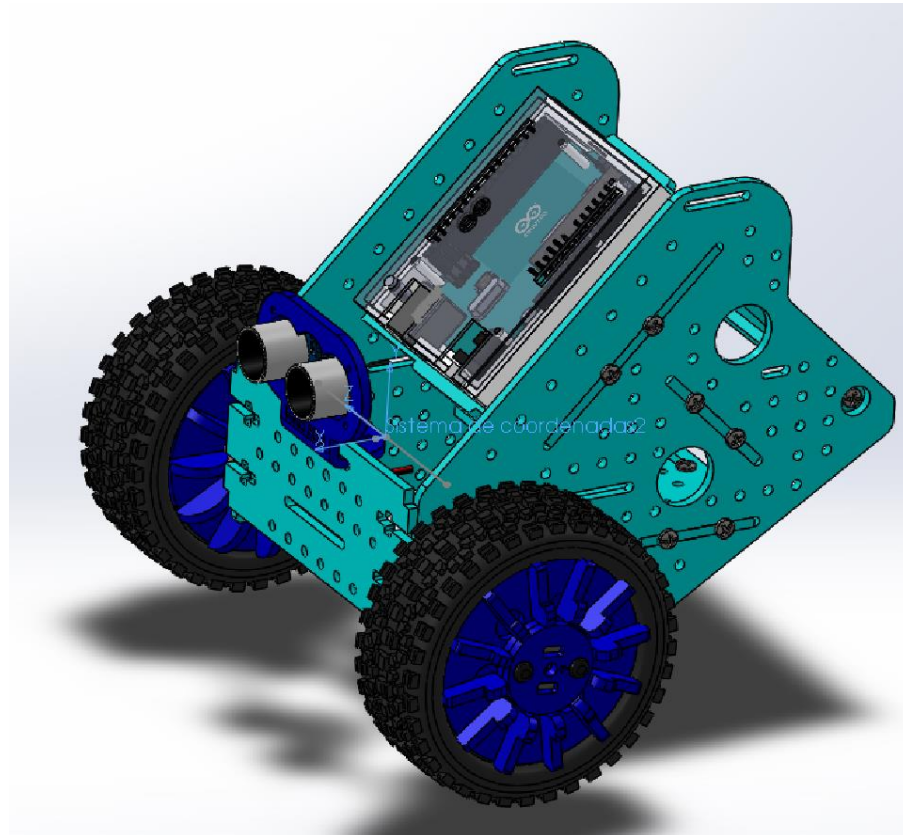


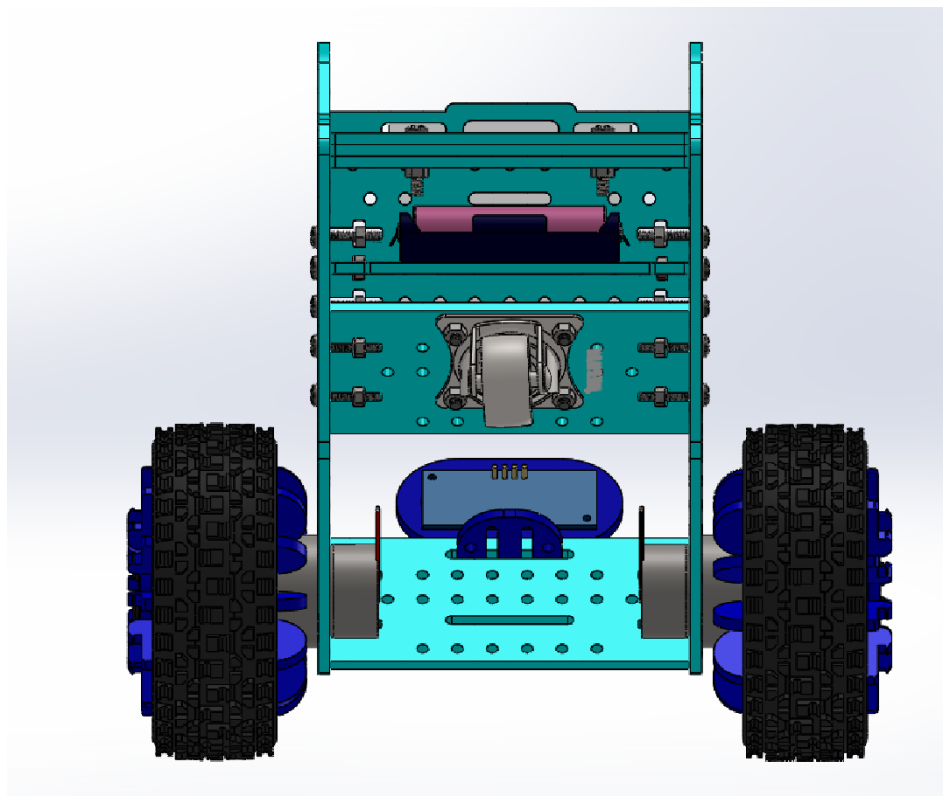
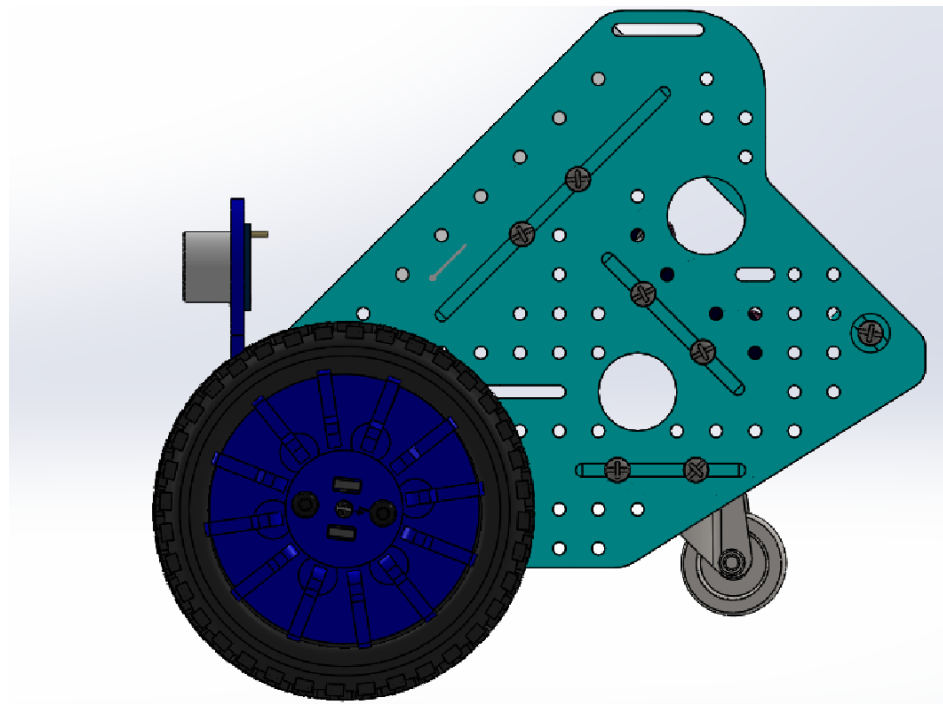
Como se puede ver, están disponible la mayoría de las piezas que componen la estructura principal del robot.

- 3) Partiendo de la estructura básica, se mejoró el modelo agregando ruedas, tornillos y tuercas. Todas las piezas utilizadas en este paso se pueden descargar de: <https://github.com/multiplo/mechanics/>
- 4) El diseño se finalizó agregando las partes restantes que más influyen en la dinámica del movimiento, estas son:
 - Motores (2 motores DC)
 - Pilas (3 AA)
 - Placa principal (Arduino)
 - Sensor ultrasónico

Existe una librería de partes desde donde se descargaron todas estas partes. En la misma también se puede encontrar una gran variedad de piezas útiles para otros proyectos: <https://grabcad.com/>

Capturas tomadas del diseño finalizado:





Datos obtenidos:

Masa = 745.33 gr

Volumen = 436039.84 mm³

Área de superficie = 382041.21 mm²

Centro de masa:

X = -26.93 mm

Y = -12.82 mm

Z = -0.01 mm

Ejes principales de inercia y momentos principales de inercia: (gr*mm²)

Medido desde el centro de masa.

lx = (-0.01, 0.00, -1.00) Px = 1957887.03

ly = (-0.87, 0.50, 0.01) Py = 2404760.73

lz = (0.50, 0.87, 0.00) Pz = 3369170.11

Momentos de inercia: (gr*mm²)

Obtenidos en el centro de masa y alineados con el sistema de coordenadas de resultados.

Lxx = 2641550.69 Lxy = -415111.57 Lxz = 3718.70

Lyx = -415111.57 Lyy = 3132345.85 Lyz = -1344.39

Lzx = 3718.70 Lzy = -1344.39 Lzz = 1957921.33

Momentos de inercia: (gr*mm²)

Medido desde el sistema de coordenadas de salida.

lxx = 2764101.88 lxy = -157738.54 lxz = 3998.22

lyx = -157738.54 lyy = 3672862.61 lyz = -1211.29

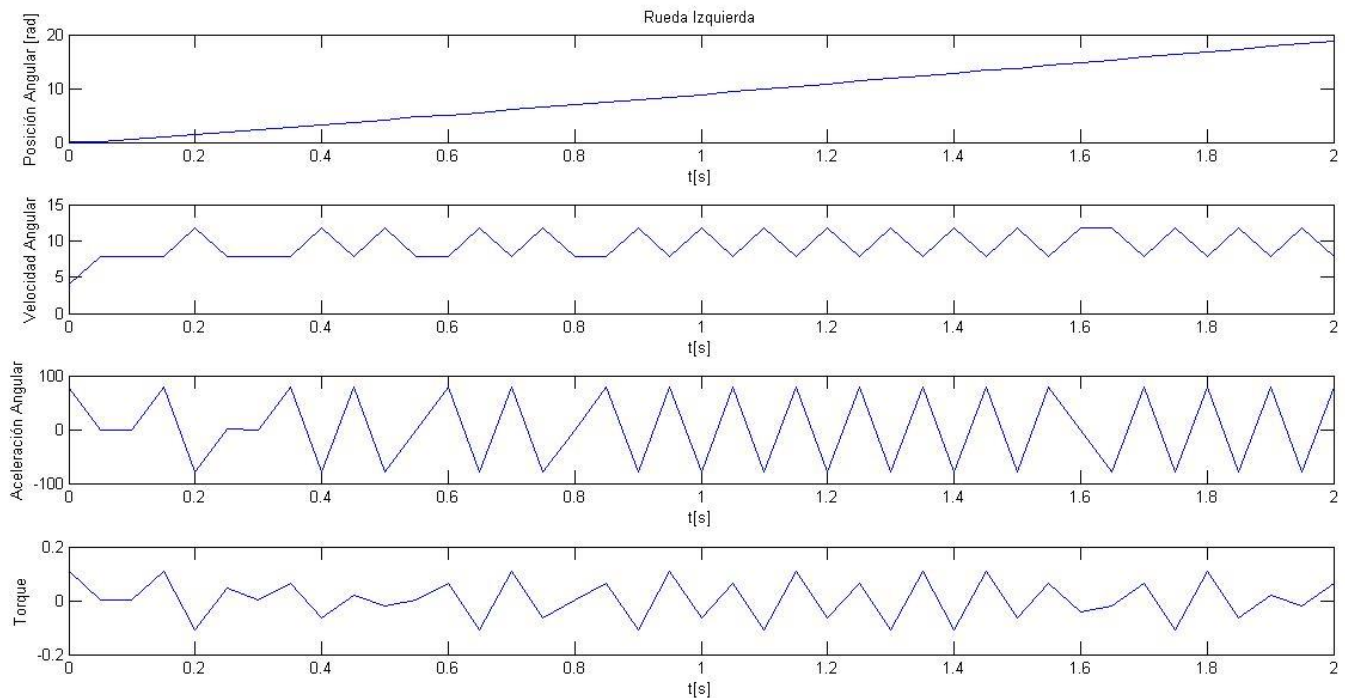
lzx = 3998.22 lzy = -1211.29 lzz = 2620989.00

Mediciones

Una vez obtenidos los parámetros del robot, procedimos a analizar las magnitudes en cuestión, posición angular, velocidad angular, aceleración angular y torque, para la trayectoria realizada en el trabajo práctico número 1.

Como dicha trayectoria era a velocidad constante idealmente deberíamos obtener una aceleración y un torque nulos.

Sin embargo los resultados obtenidos fueron los siguientes:



Se observa que la posición angular no es una recta perfecta, esto se debe a que la velocidad en ambas ruedas no es perfectamente constante. Sin embargo el valor medio de la velocidad coincide con el esperado.

Debido a las variaciones, positivas y negativas, de la velocidad se obtiene una aceleración con picos aún más pronunciados y con valores positivos (aumento de velocidad) y negativos (disminución de la velocidad). Sin embargo otra vez el valor medio de la aceleración da cero como era de esperarse.

El torque a su vez presenta picos positivos y negativos, debido a las variaciones en la aceleración antes mencionados, y también posee el valor medio nulo esperado.

A continuación modificamos la trayectoria del robot de la siguiente manera:

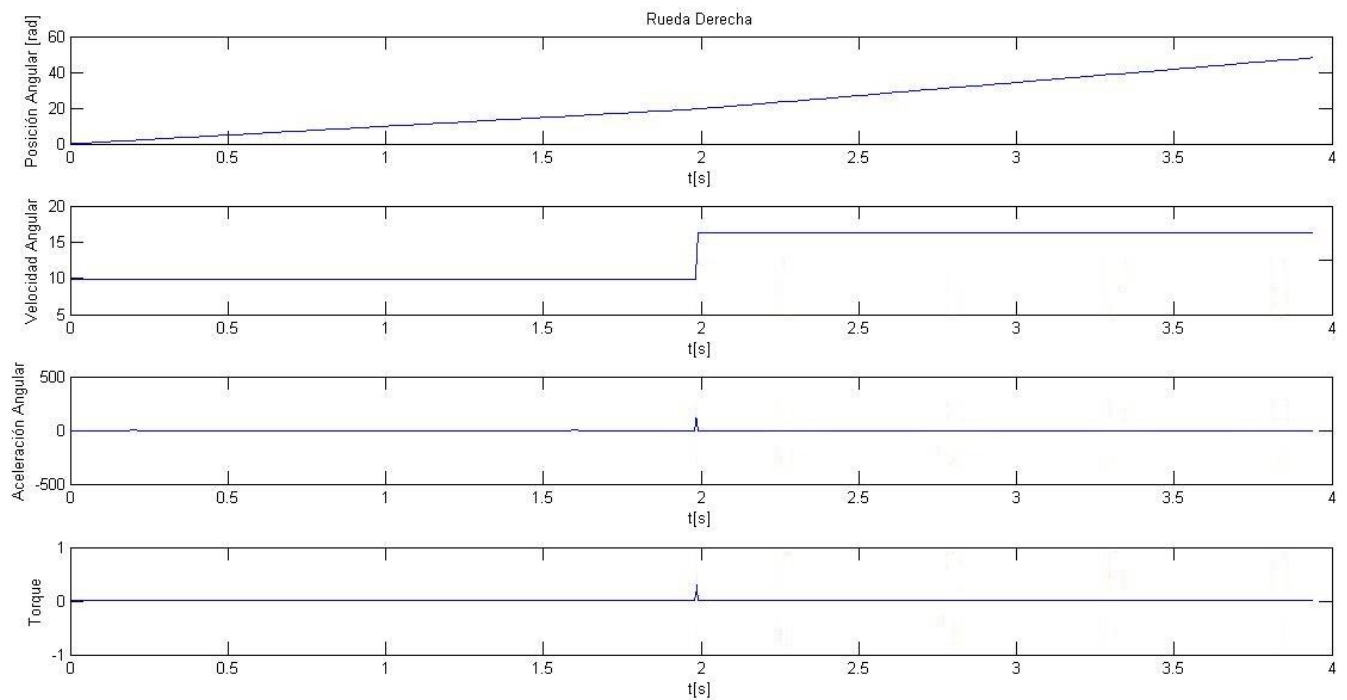
- Rueda derecha: 50 pasos en 2 segundos y luego 75 pasos en dos segundos
- Rueda izquierda: 50 pasos en 2 segundos y luego 75 pasos en dos segundos

Repitiendo los cálculos realizados en el tp1 la velocidad teórica de cada rueda es:

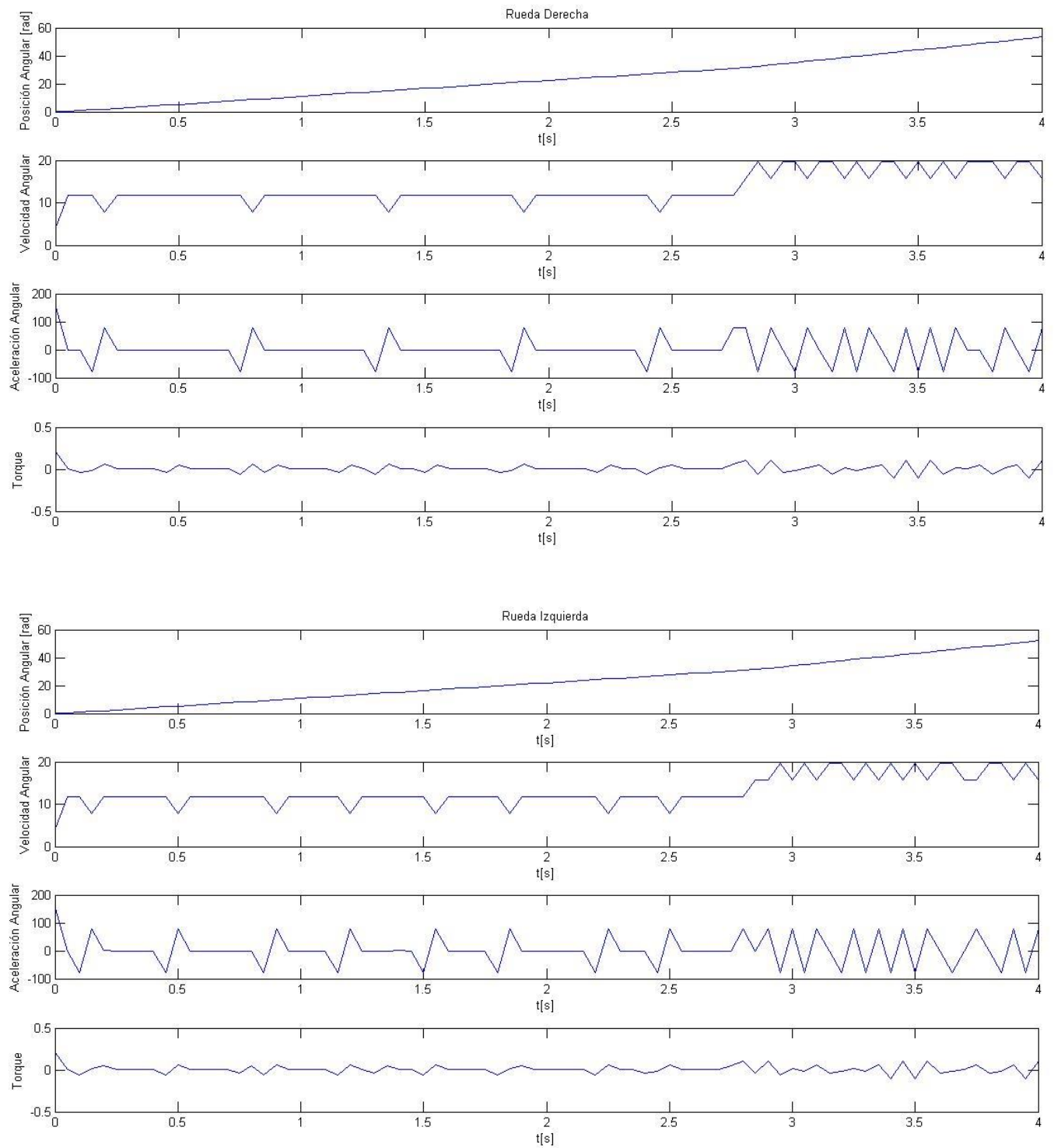
$$\text{Para } 0s < t < 2s: v_{rpm} = \frac{v \cdot 60}{P_{rueda}} = 93.75 \text{ rpm} = 9.81 \text{ rad/s}$$

$$\text{Para } 2s < t < 4s: v_{rpm} = \frac{v \cdot 60}{P_{rueda}} = 140.62 \text{ rpm} = 14.73 \text{ rad/s}$$

En teoría únicamente debería aparecer una aceleración en la transición entre ambos segmentos de la trayectoria. El fabricante no da ningún dato sobre el tiempo que tarda cada motor en aumentar la velocidad, es por eso que se hace imposible calcular la aceleración teórica y más aún el torque, pero la forma de ambas señales en función del tiempo idealmente es la siguiente:



Para la trayectoria programada en el Multiplo N6 los resultados fueron los siguientes:



De las mediciones se puede observar varias cosas:

- La velocidad de las ruedas no cambia a los 2s sino un tiempo más tarde, aproximadamente 2.75s, este mismo efecto se observó en el trabajo práctico nro. 1, puede deberse a un error en la base de tiempo del Arduino y/o a un retardo de activación propio de la función SetSpeed de la librería DCMotor de DuinoBot. Sin embargo las velocidades medias de cada tramo de la trayectoria se acercan bastante a las esperadas, a pesar del error que ya se demostró en el trabajo práctico anterior.
- Al igual que en la medición anterior la velocidad no es perfectamente constante en cada tramo de la trayectoria, esto hace que la aceleración no sea nula en cada tramo y por lo tanto lo mismo pasa con el torque. El error se va arrastrando, debido al algoritmo de cálculo, y se vuelve más evidente para el torque.
- Debido a este error antes mencionado el torque realizado por el motor para cambiar de velocidad no sobresale del resto de los valores temporales del mismo.
- Es posible que se puedan optimizar las mediciones utilizando un algoritmo un poco más complejo.