

### **Introducción**

La dinámica se ocupa de la relación entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento que en él se origina. Por lo tanto, el modelo dinámico de un robot tiene por objeto conocer la relación entre el movimiento del robot y las fuerzas implicadas en el mismo.

Esta relación se obtiene mediante el denominado modelo dinámico, que relaciona matemáticamente:

1. La localización del robot definida por sus variables articulares y sus derivas: velocidad y aceleración.
2. Las fuerzas y pares aplicadas en las articulaciones.
3. Los parámetros dimensionales del robot, como longitud, masas e inercias de sus elementos.

La obtención del modelo, aumenta de complejidad al aumentar los grados de libertad. Por este motivo no siempre es posible obtener un modelo dinámico expresado en una forma cerrada, esto es, mediante una serie de ecuaciones, generalmente del tipo diferencial de 2º orden, cuya integración permita conocer qué movimiento surge al aplicar una fuerza. El modelo dinámico debe ser resuelto de manera iterativa mediante la utilización de un procesamiento numérico.

El problema de la obtención del modelo dinámico del robot es, por lo tanto, uno de los aspectos más complejos de la robótica que nos permite conseguir los siguientes fines:

1. Simulación del movimiento del robot.
2. Diseño y evaluación de la estructura mecánica del robot.
3. Dimensionamiento de los actuadores.
4. Diseño y evaluación del control dinámico del robot.

Es importante hacer notar que el modelo dinámico completo de un robot debe incluir no sólo la dinámica de sus elementos sino también la propia de sus sistemas de transmisión, de los actuadores y sus equipos electrónicos de mando.

A continuación vamos a desarrollar los métodos más utilizados considerando a los robots como rígidos.

### **Modelo dinámico de la estructura mecánica de un robot rígido**

Este modelo se basa fundamentalmente en el planteamiento del equilibrio de fuerzas establecido en la segunda ley de Newton, o en su equivalente de rotación, la ley de Euler:

$$\sum F = m\dot{v}$$

$$\sum T = I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega)$$

De este planteamiento del equilibrio de fuerzas y pares que intervienen sobre el robot se obtienen los denominados modelos dinámicos directo e inverso:

- Modelo dinámico directo: expresa la evolución temporal de las coordenadas articulares del robot en función de las fuerzas y pares que intervienen.
- Modelo dinámico inverso: expresa las fuerzas y pares que intervienen en función de la evolución de las coordenadas articulares y sus derivadas.

En el planteamiento del equilibrio de fuerzas en un robot real de 5 ó 6 grados de libertad, debe tenerse en cuenta que junto con las fuerzas de inercia y gravedad, aparecen fuerzas de Coriolis debidas al movimiento relativo existente entre los diversos elementos, así como de fuerzas centrípetas que dependen de la configuración instantánea del manipulador.

Un planteamiento alternativo para la obtención del modelo puede ser usar la formulación Lagrangiana, basada en consideraciones energéticas. Este método es más sistemático y facilita enormemente la formulación de un modelo.

Lagrange estable la ecuación:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau$$

$$L = k - \mu$$

Con:

$q_i$ : coordenadas generalizadas

$\tau$ : vector de fuerzas y pares aplicados a las  $q_i$

L: función lagrangiana

k: energía cinética

$\mu$ : energía potencial

#### Obtención del modelo dinámico de un robot mediante la formulación de Lagrange – Euler

Este planteamiento utiliza, por tanto, las matrices  ${}^{i-1}A_i$  que relacionan el sistema de coordenadas de referencia del elemento i con el del elemento i-1. Se realizan en este caso operaciones de producto y suma innecesarias. Se trata de un procedimiento ineficiente desde el punto de vista computacional, donde tiene una complejidad de  $O(n^4)$ . Sin embargo, conduce a unas ecuaciones finales bien

estructuradas donde aparecen de manera clara los diversos pares y fuerzas que intervienen en el movimiento.

- Algoritmo computacional para el modelo dinámico por Lagrange – Euler

- 1) Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo a las normas D-H.
- 2) Obtener las matrices de transformación  ${}^0A_i$  para cada elemento i.
- 3) Obtener las matrices  $U_{ij}$  definidas por:

$$U_{ij} = \frac{\partial}{\partial q_j} {}^0A_i$$

- 4) Obtener las matrices  $U_{ijk}$  definidas por:

$$U_{ijk} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k}$$

- 5) Obtener las matrices de pseudoinercias  $J_i$  para cada elemento, que vienen definidas por:

$$U_{ijk} = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i dm & \int x_i z_i dm & \int x_i dm \\ \int y_i x_i dm & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i dm & \int y_i dm \\ \int z_i x_i dm & \int z_i y_i dm & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ \int x_i dm & \int y_i dm & \int z_i dm & \int dm \end{bmatrix}$$

Donde las integrales están extendidas al elemento i considerado, y  $(x_i, y_i, z_i)$  son las coordenadas del diferencial de masa  $dm$  respecto al sistema de coordenadas del elemento.

- 6) Obtener la matriz de inercias  $D=[d_{ij}]$  cuyos elementos vienen definidos por:

$$d_{ij} = \sum_{k=(\max i, j)}^n \text{Traza}(U_{kj} J_k U_{ki}^T)$$

Con  $i, j = 1, 2, \dots, n$

$n$ : número de grados de libertad

- 7) Obtener los términos  $h_{ikm}$  por:

$$h_{ikm} = \sum_{j=(\max i, k, m)}^n \text{Traza}(U_{jkm} J_j U_{ji}^T)$$

Con  $i, k, m = 1, 2, \dots, n$

- 8) Obtener la matriz columna de fuerzas de Coriolis y centrípeta  $H = [h_i]^T$  cuyos elementos viene definidos por:

$$h_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m$$

9) Obtener la matriz columna de fuerzas de gravedad  $C = [c_i]^T$  cuyos elementos viene definidos por:

$$c_i = \sum_{j=1}^n (-m_j g U_{ji}^j r_j)$$

con  $i = 1, 2, \dots, n$

$g$ : es el vector de gravedad expresado en el sistema de la base  $\{S_0\}$  y viene expresado en  $(g_{x0}, g_{y0}, g_{z0}, 0)$

${}^i r_j$ : es el vector de coordenadas homogéneas del centro de masa del elemento  $j$  expresado en el sistema de referencia del elemento  $i$ .

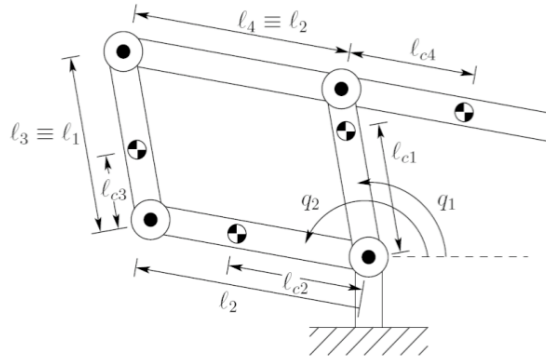
10) La ecuación dinámica del sistema será:

$$\tau = D\ddot{q} + H + C$$

Donde  $\tau$  es el vector de fuerzas y pares motores efectivos aplicados sobre cada coordinan  $q_i$ .

### Análisis Dinámico

El mecanismo mostrado en la siguiente figura se llama Five Bar Linkage:



Este mecanismo es muy usado en robótica ya que posee ciertas ventajas, las cuales facilitan su estudio e implementación en la industria. Como más adelante veremos, tiene la particularidad de que si se cumplen las relaciones  $l_1=l_3$  y  $l_2=l_4$ , las ecuaciones quedan desacopladas y las variables  $q_1$  y  $q_2$  pueden ser controladas independientemente. Si bien, las longitudes deben coincidir, los centros de masa no tienen esta limitación. La configuración así obtenida es un paralelogramo que representa una cadena cinemática cerrada, lo cual simplifica las cosas ya que, aunque se vean cuatro eslabones moviéndose, podemos afirmar que solamente tenemos dos grados de libertad  $q_1$  y  $q_2$ .



Para empezar vamos a utilizar el enfoque energético de Lagrange-Euler. Primero calculamos las coordenadas de los centros de masa de los eslabones:

$$\begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cdot \cos q_1 \\ l_{c1} \cdot \sin q_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c2} \cdot \cos q_2 \\ l_{c2} \cdot \sin q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c3} \\ y_{c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c2} \cdot \cos q_1 \\ l_{c2} \cdot \sin q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{c3} \cdot \cos q_1 \\ l_{c3} \cdot \sin q_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{c4} \\ y_{c4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos q_1 \\ l_1 \cdot \sin q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{c4} \cdot \cos(q_2 - \pi) \\ l_{c4} \cdot \sin(q_2 - \pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos q_1 \\ l_1 \cdot \sin q_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_{c4} \cdot \cos q_2 \\ l_{c4} \cdot \sin q_2 \end{bmatrix}$$

A continuación, con la ayuda de estas expresiones vamos a calcular las velocidades de los centros de masa en funciones de las variables  $q_1^g$  y  $q_2^g$ :

$$\begin{aligned} v_{c1} &= \begin{bmatrix} -l_{c1} \cdot \sin q_1 & 0 \\ l_{c1} \cdot \cos q_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \dot{q}_1^g \\ v_{c2} &= \begin{bmatrix} 0 & -l_{c2} \cdot \sin q_2 \\ 0 & l_{c2} \cdot \cos q_2 \end{bmatrix} \cdot \dot{q}_2^g \\ v_{c3} &= \begin{bmatrix} -l_{c3} \cdot \sin q_1 & -l_2 \cdot \sin q_2 \\ l_{c3} \cdot \cos q_1 & l_2 \cdot \cos q_2 \end{bmatrix} \cdot \dot{q}_1^g \\ v_{c4} &= \begin{bmatrix} -l_1 \cdot \sin q_1 & l_{c4} \cdot \sin q_2 \\ l_1 \cdot \cos q_1 & l_{c4} \cdot \cos q_2 \end{bmatrix} \cdot \dot{q}_1^g \end{aligned}$$

Ahora definimos la velocidad por el jacobiano  $J_{vci}$  en la manera evidente, es decir, como las cuatro matrices que aparecen en las ecuaciones del punto anterior. Queda claro que la velocidad de los cuatro eslabones está dada simplemente por:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_3 = \dot{q}_1^g \cdot k \\ \omega_2 &= \omega_4 = \dot{q}_2^g \cdot k \end{aligned}$$

La matriz de inercia está dada por la siguiente ecuación:

$$D(q) = \sum_{i=1}^4 m_i J_{vc}^T J_{vc} + \begin{bmatrix} I_1 + I_3 & 0 \\ 0 & I_2 + I_4 \end{bmatrix}$$

Ahora sustituyendo las matrices de inercia que describimos en el punto anterior, en esta ecuación, y usando las identidades trigonométricas, obtenemos:

$$\begin{aligned} d_{11}(q) &= m_1 l_{c1}^2 + m_3 l_{c3}^2 + m_4 l_1^2 + I_1 + I_3 \\ d_{12}(q) &= d_{21}(q) = (m_3 l_2 l_{c3} - m_4 l_1 l_{c4}) \cos(q_2 - q_1) \\ d_{22}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_{c4}^2 + I_2 + I_4 \end{aligned}$$

De las expresiones anteriores notamos que si:

(1)

$$m_3 l_2 l_{c3} = m_4 l_1 l_{c4}$$

Entonces los términos  $d_{12}$  y  $d_{22}$  son cero, por lo tanto la matriz de inercias es diagonal y constante. Como consecuencia las ecuaciones dinámicas no contendrán fuerzas de Coriolis ni fuerzas centrífugas.

Enfocándonos ahora en la energía potencial, tenemos que:

$$P = g \sum_{i=1}^4 y_{ci}$$

$$P = g \cdot \sin q_1 (m_1 l_{c1} + m_3 l_{c3} + m_4 l_1) + g \cdot \sin q_2 (m_2 l_{c2} + m_3 l_2 - m_4 l_{c4})$$

Reescribiendo las ecuaciones:

$$\phi_1 = g \cdot \cos q_1 (m_1 l_{c1} + m_3 l_{c3} + m_4 l_1)$$

$$\phi_2 = g \cdot \cos q_2 (m_2 l_{c2} + m_3 l_2 - m_4 l_{c4})$$

En estas ecuaciones, podemos observar que  $\phi_1$  depende solo de  $q_1$  y  $\phi_2$  depende solo de  $q_2$ . Por lo tanto, si se cumple la condición (1), el mecanismo complejo que estamos estudiando es descrito por el siguiente set de ecuaciones desacopladas:

$$d_{11}^{\text{g}} \ddot{q}_1 + \phi_1(q_1) = \tau_1$$

$$d_{22}^{\text{g}} \ddot{q}_2 + \phi_2(q_2) = \tau_2$$

Aquí se puede apreciar la particularidad de este famoso mecanismo utilizado en robots industriales. Si la relación (1) se cumple, entonces se pueden ajustar separadamente los ángulos  $q_1$  y  $q_2$  sin preocuparse por la interacción entre ambos.

### Diseño del sistema

Ahora proseguimos con el diseño del mecanismo explicado anteriormente, definiendo los siguientes valores numéricos:

Por simplicidad, definimos todas las masas iguales:

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1Kg$$

Longitudes:

$$l_1 = l_3 = 20cm$$

$$l_2 = l_4 = 30cm$$

Luego definimos los centros de masa:

$$l_{c1} = 17cm$$

$$l_{c2} = 20cm$$

$$l_{c3} = 10cm$$

Como sabemos que:  $m_3 l_2 l_{c3} = m_4 l_1 l_{c4}$ , entonces:

$$l_{c4} = 15cm$$

Ahora calculamos los momentos de inercia de cada barra respecto a su centro de masa, utilizando la siguiente fórmula:

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

Entonces queda:

$$I_1 = I_3 = 0.0033 \text{Kgm}^2$$

$$I_2 = I_4 = 0.0075 \text{Kgm}^2$$

Ya con estos valores podemos calcular las componentes de la matriz de inercias D.

$$d_{11}(q) = m_1 l_{c1}^2 + m_3 l_{c3}^2 + m_4 l_1^2 + I_1 + I_3$$

$$d_{11}(q) = 0.0855 \text{Kgm}^2$$

$$d_{12}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_{c4}^2 + I_2 + I_4$$

$$d_{11}(q) = 0.1675 \text{Kgm}^2$$

Ahora calculamos  $\phi_1$  y  $\phi_2$

$$\phi_1 = g \cdot (m_1 l_{c1} + m_3 l_{c3} + m_4 l_1) \cdot \cos q_1$$

$$\phi_1 = 4.6 \text{Nm} \cdot \cos q_1$$

$$\phi_2 = g \cdot (m_2 l_{c2} + m_3 l_2 - m_4 l_{c4}) \cdot \cos q_2$$

$$\phi_2 = 3.43 \text{Nm} \cdot \cos q_2$$

Las ecuaciones diferenciales quedan finalmente:

$$0.0855 \text{Kgm}^2 \cdot \overset{g}{q_1} + 4.6 \text{Nm} \cdot \cos q_1 = \tau_1$$

$$0.1675 \text{Kgm}^2 \cdot \overset{g}{q_2} + 3.43 \text{Nm} \cdot \cos q_2 = \tau_2$$

- Motor 1

Seleccionamos un  $q_1 = 15^\circ = 0.26 \text{rad}$

Para elegir la velocidad suponemos que el ángulo  $q_1$  se va a mover en un tiempo de 3 segundos.

$$\overset{g}{q_1} = 0.086 \text{rad} / s$$

A su vez, queremos que alcance la velocidad máxima (100%) en 1 segundo

$$\overset{g}{q_1} = 0.086 \text{rad} / s^2$$



Entonces, si reemplazamos en la ecuación dinámica, obtenemos:

$$\tau_1 = 4.45 Nm$$

En base al catálogo de ABB de servomotores de la serie 9C, elegimos el motor modelo **9C4.3.40...M** que posee las siguientes características:

- Rated torque: 5.4 Nm
- Rated current: 5.2 A
- Rated speed: 4000 rpm/m

Al motor se le deberá agregar la caja de engranajes correspondientes.

- Motor 2

Seleccionamos un  $q_2 = 85^\circ = 1.48 \text{ rad}$

Para elegir la velocidad suponemos que el ángulo  $q_2$  se va a mover en un tiempo de 8 segundos.

$$\overset{g}{q}_2 = 0.185 \text{ rad} / s$$

A su vez, queremos que alcance la velocidad máxima (100%) en 2 segundos

$$\overset{g}{q}_2 = 0.0925 \text{ rad} / s^2$$

Entonces, si reemplazamos en la ecuación dinámica, obtenemos:

$$\tau_2 = 0.33 Nm$$

Entonces, si reemplazamos en la ecuación dinámica, obtenemos:

$$\tau_1 = 4.45 Nm$$

En base al catálogo de ABB de servomotores de la serie 9C, elegimos el motor modelo **9C1.1.30...M** que posee las siguientes características:

- Rated torque: 1.3 Nm
- Rated current: 1.4 A
- Rated speed: 3000 rpm/m

Al motor se le deberá agregar la caja de engranajes correspondientes.

Nota: en otro archivo adjuntamos la hoja de datos correspondientes a los motores.

## Implementación en VHDL

En los archivos que adjuntamos se encuentran los archivos fuente para la ejecución del programa utilizando el ModelSim.

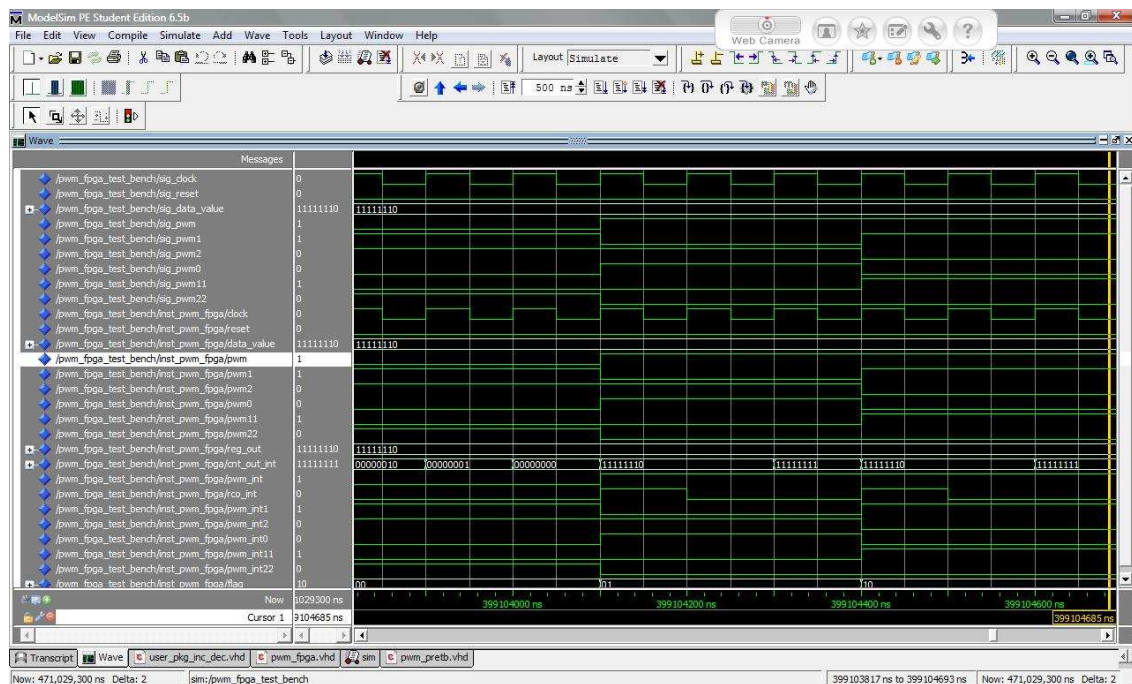
En nuestra implementación solamente hicimos el control del PWM para un solo motor, ya que el método de control de los dos motores es igual. Solamente cambia el ciclo de trabajo de los pulsos de tensión entregados al motor, que va a depender de la velocidad que se le quiera imprimir.

En el programa, trabajamos con una máquina de estados, por la que en cada desborde del contador cambia de estado. Cada estado posible es un paso del motor, o sea se activan dos bobinas y se desactiva una, para que se genere el movimiento. El movimiento es controlado a través de la duración del pulso.

Se trabaja con 6 salidas: 1, 2 y 3 son las salidas correspondientes a los transistores superiores en el diagrama del PWM, y las salidas 1.1, 2.2 y 3.3 son las salidas correspondientes a los transistores de la parte inferior del diagrama (los encargados de realizar la modulación).

Cuando la salida toma el valor 0, el transistor está abierto (no circula corriente). En cambio, cuando toma el valor 1, el transistor se cierra (circula corriente).

A continuación mostramos un screenshot de la pantalla del testbench que muestra como varían las salidas de acuerdo al movimiento de rotación del motor. En la imagen se ve un giro completo del motor.



### **Conclusiones**

Gracias a la realización de este trabajo práctico pudimos poner en práctica la teoría dinámica para el diseño de robots, como a su vez conocer los diferentes tipos de accionamiento y posibilidades que nos ofrecen las grandes compañías como ABB, Siemens, etc.

Nos adentramos en el lenguaje de programación VHDL, el cual posee las siguientes ventajas:

- Confirmamos que la implementación de VHDL reduce drásticamente los tiempos de desarrollo y testeo.
- Se comprobó que la dificultad de desarrollo disminuye al ser un software descriptivo en comparación al desarrollo de circuitos secuenciales.
- Las vistas de la señales ayudan a debuggear de forma rápida y efectiva.