



## **TESIS FINAL**

*Desarrollo de la Cinemática Directa e Inversa del Robot RT2 Apolo de 6 GDL*

**ALUMNOS:**

<b>CANALE, José</b>	Leg.: 115148-4
<b>LLANOS, Pablo</b>	Leg.: 115589-1
<b>SANCHEZ, Martín</b>	Leg.: 112687-8

**PROFESOR:**

Ing. **GIANNETTA, Hernán**

**CURSO:**

R6055

**GRUPO**

RT2 APOLO - CINEMATICA

**FECHA DE ENTREGA:**

09/02/2010

**FECHA DE APROBACION:**

\_\_\_\_/\_\_\_\_/2010

**OBSERVACIONES:**

---

---

---

---

---



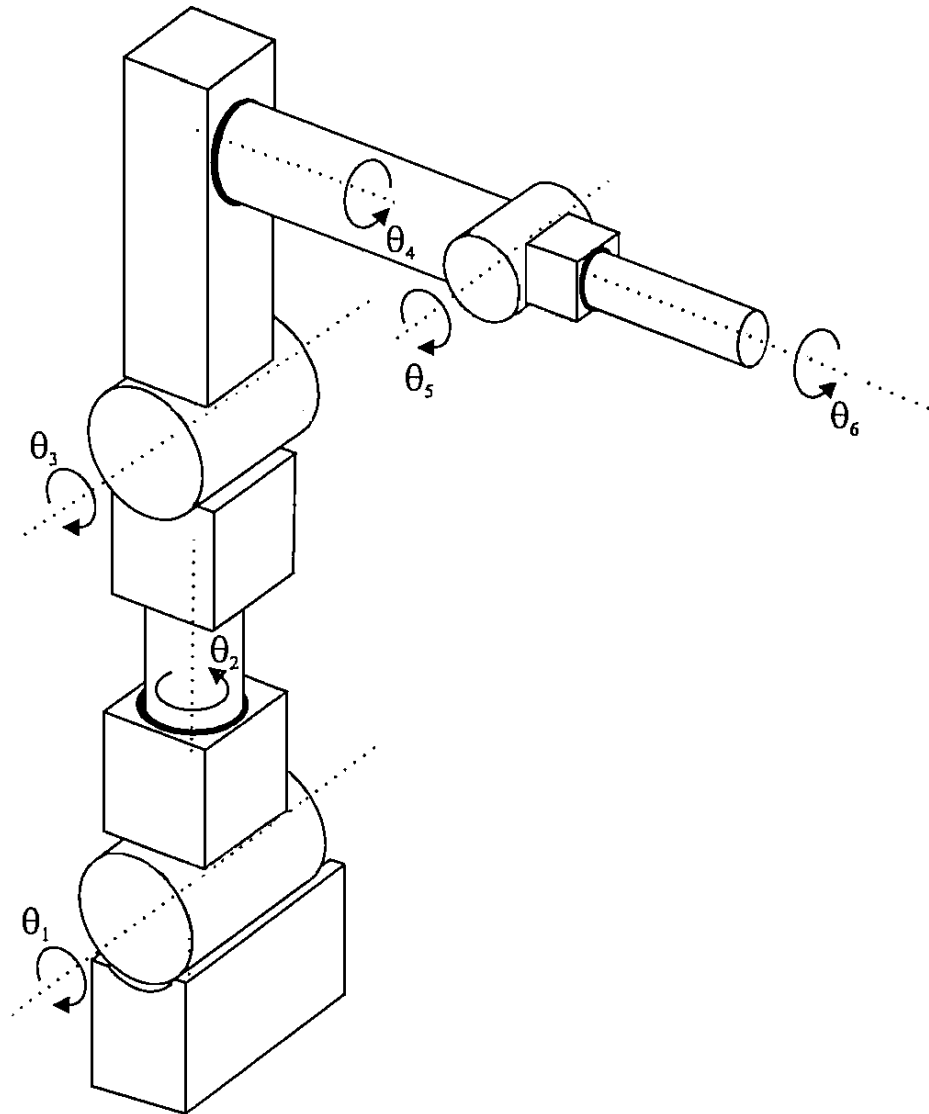
## **1. ÍNDICE**

1.	ÍNDICE.....	2
2.	Objetivo .....	3
3.	Introducción teórica .....	4
3.1	Cinemática.....	4
3.2	Cinemática Directa .....	5
3.2.1	Método de Denavit-Hartenberg .....	6
3.3	Cinemática Inversa.....	9
3.3.1	Método Geométrico .....	10
3.3.2	Método por Matriz Homogénea.....	10
3.3.3	Método por Desacoplo Cinemático.....	10
4.	Desarrollo de la cadena cinemática directa e inversa .....	11
4.1	Cadena cinemática directa.....	11
4.2	Cadena cinemática inversa .....	17
5.	Simulación en Matlab .....	23
5.1	Código fuente .....	23
5.2	Figuras.....	25
6.	Conclusiones.....	27
7.	Bibliografía y referencias .....	27

## **2. Objetivo**

El objetivo del presente trabajo es estudiar las cadenas cinemáticas directa e inversa de un robot manipulador industrial de 6 grados de libertad y comprobar los resultados obtenidos mediante herramientas de simulación como el Matlab.

El modelo del manipulador bajo estudio es el RT2 Apolo:



### **3. Introducción teórica**

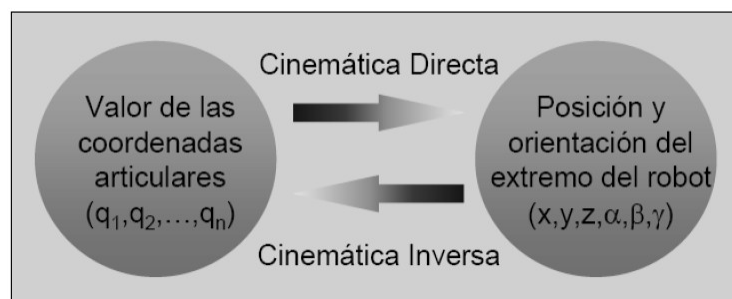
#### **3.1 Cinemática**

La cinemática es la ciencia que estudia el movimiento excluyendo las fuerzas que la causaron. Dentro la ciencia de la cinemática se estudia la posición, velocidad, aceleración y todas las derivadas de las variables de posición. Por tanto la cinemática hace referencia a las propiedades geométricas del movimiento. Los Manipuladores están formados por enlaces rígidos que están conectados entre si por uniones que permiten un movimiento relativo que los enlaces vecinos. Estas uniones están por lo general instrumentados por sensores de posición que permiten la medición de la posición de los enlaces vecinos. En el caso de uniones que generan movimiento de traslación y rotación los desplazamientos en general se llaman ángulos de unión.

En el caso de robots industriales los manipuladores forman cadenas abiertas y la posición de cada unión por lo general se define por una sola variable por tanto el numero de uniones es igual al numero de grados de libertad. Al final de la cadena de uniones que forman al manipulador se encuentra el efector final o en ingles end-effector. Dependiendo de la aplicación del robot el efector final pueden ser pinzas, un imán u otro dispositivo. Por lo general se describe la posición del manipulador relativo al eje de coordenadas de referencia que se encuentra en una base fija del manipulador.

Existen dos problemas fundamentales a resolver en la cinemática de un robot: la cadena cinemática directa y la inversa. La cadena cinemática directa permite determinar cuál será la posición y orientación final del extremo del robot con respecto a las posiciones de las articulaciones y los parámetros geométricos del robot. Por otro lado, la cadena cinemática inversa resuelve qué posiciones debe adoptar el robot en cada una de sus articulaciones para lograr una posición y orientación dada en su extremo.

A continuación se muestra un diagrama de relación entre estos dos problemas a resolver:



### 3.2 Cinemática Directa

Como se comentó anteriormente el problema cinemático directo consiste en encontrar la ubicación del extremo del robot en el espacio a partir de los valores de sus coordenadas articulares y los parámetros geométricos de sus eslabones. Utilizando coordenadas cartesianas para definir la posición y ángulos de Euler para la orientación del extremo la solución que se busca es de la forma:

$$x = f_{x(q1,q2,q3,q4,q5,q6)}$$

$$y = f_{y(q1,q2,q3,q4,q5,q6)}$$

$$z = f_{z(q1,q2,q3,q4,q5,q6)}$$

$$\alpha = f_{\alpha(q1,q2,q3,q4,q5,q6)}$$

$$\beta = f_{\beta(q1,q2,q3,q4,q5,q6)}$$

$$\gamma = f_{\gamma(q1,q2,q3,q4,q5,q6)}$$

Existen tres métodos que permiten hallar estas relaciones:

- Método basado en relaciones geométricas

Este método consiste en encontrar las relaciones entre la posición del extremo del robot y las posiciones de las articulaciones por medio de relaciones trigonométricas. Si bien es un método válido para robots de pocos grados de libertad, al no ser sistemático se vuelve inaplicable para sistemas de más de 3 grados de libertad.

- Método de Denavit-Hartenberg

Es un método sistemático que utiliza una matriz de transformación homogénea para describir la relación espacial entre cada par de elementos rígidos adyacentes y luego con la multiplicación de éstas se obtiene la matriz de transformación homogénea de la cadena cinemática completa. Al ser un método sistemático es válido para robots de muchos grados de libertad. Dado que es el que se eligió para desarrollar el cálculo, este método se explica en detalle más adelante.

- Método de los cuaternios

El álgebra de cuaternios un método alternativo a las matrices de transformación homogénea para representar transformaciones de rotación y desplazamiento, por lo tanto, pueden utilizarse del mismo modo para encontrar las coordenadas de la posición y orientación del sistema de referencia asociado al extremo del robot  $\{S_6\}$  con respecto al sistema de referencia asociado a la base  $\{S_0\}$ . Para obtener dicha relación se convierte  $\{S_0\}$  en  $\{S_1\}$ ,  $\{S_1\}$  en  $\{S_2\}$ , y así sucesivamente hasta  $\{S_6\}$  por medio de translaciones seguidas de rotación.

### 3.2.1 Método de Denavit-Hartenberg

#### 3.2.1.1 Descripción General

El método de Denavit-Hartenberg es un método matricial que permite establecer de manera sistemática un sistema de coordenadas  $\{S_i\}$  sobre cada eslabón de una cadena articulada para luego determinar las ecuaciones cinemáticas de la cadena completa.

Como en general un robot de  $n$  grados de libertad está formado por  $n$  eslabones unidos por  $n$  articulaciones a cada eslabón se le puede asociar un sistema de referencia y utilizando las transformaciones homogéneas se pueden representar las rotaciones y translaciones entre los diferentes eslabones. En forma general se llama matriz  ${}^{i-1}A_i$  a la que resulta de dichas transformaciones entre eslabones consecutivos.

Considerando todos los eslabones, a la matriz resultante se le denomina  $T$ :

$$T = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6$$

Siguiendo el método de D-H es posible pasar de un eslabón al siguiente mediante 4 transformaciones básicas (rotaciones y translaciones) que dependerán exclusivamente de la geometría del mismo:

- 1) Rotación alrededor del eje  $z_{i-1}$  un ángulo  $\theta_i$
- 2) Translación a lo largo del eje  $z_{i-1}$  una distancia  $d_i$  (vector  $d_i = [0, 0, d_i]$ )
- 3) Translación a lo largo de  $x_i$  una distancia  $a_i$  (vector  $a_i = [a_i, 0, 0]$ )
- 4) Rotación alrededor del eje  $x_i$  un ángulo  $\alpha_i$

Realizando las transformaciones mencionadas en el orden indicado resulta:

$${}^{i-1}A_i = T_{(z, \theta_i)} \cdot T_{(0, 0, d_i)} \cdot T_{(a_i, 0, 0)} \cdot T_{(x, \alpha_i)}$$

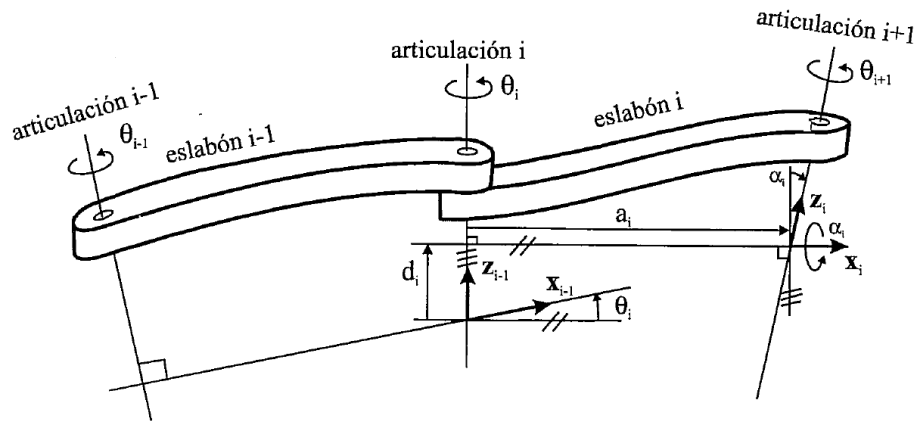
$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 3.2.1.2 Algoritmo de Denavit-Hartenberg:

- D-H 1) Numerar los eslabones comenzando con 1 (primer eslabón móvil de la cadena) y acabando con n (último eslabón móvil). Se numerará como eslabón 0 a la base fija del robot.
- D-H 2) Numerar cada articulación comenzando por 1 (la correspondiente al primer grado de libertad) y acabando en n.
- D-H 3) Localizar el eje de cada articulación. Si ésta es rotativa, el eje será su propio eje de giro. Si es prismática, será el eje a lo largo del cual se produce el desplazamiento.
- D-H 4) Para i de 0 a n-1 situar el eje  $z_i$  sobre el eje de la articulación i+1.
- D-H 5) Situar el origen del sistema de la base  $\{S_0\}$  en cualquier punto del eje  $z_0$ . Los ejes  $x_0$  e  $y_0$  se situarán de modo que formen un sistema dextrógiro con  $z_0$ .
- D-H 6) Para i de 1 a n-1 situar el sistema  $\{S_i\}$  (solidario al eslabón i) en la intersección del eje  $z_i$  con la línea normal común a  $z_{i-1}$  y  $z_i$ . Si ambos ejes se cortasen se situaría  $\{S_i\}$  en el punto de corte. Si fuesen paralelos  $\{S_i\}$  se situaría en la articulación i + 1.
- D-H 7) Situar  $x_i$  en la línea normal común a  $z_{i-1}$  y  $z_i$ .
- D-H 8) Situar  $y_i$  de modo que forme un sistema dextrógiro con  $x_i$  y  $z_i$ .
- D-H 9) Situar el sistema  $\{S_n\}$  en el extremo del robot de modo que  $z_n$ , coincida con la dirección de  $z_{n-1}$  y  $x_n$  sea normal a  $z_{n-1}$  y  $z_n$ .
- D-H 10) Obtener  $\theta_i$  como el ángulo que hay que girar en torno a  $z_{i-1}$  para que  $x_{i-1}$  y  $x_i$  queden paralelos.
- D-H 11) Obtener  $d_i$ , como la distancia, medida a lo largo de  $z_{i-1}$ , que habría que desplazar  $\{S_{i-1}\}$  para que  $x_i$  y  $x_{i-1}$  quedasen alineados.
- D-H 12) Obtener  $a_i$  como la distancia medida a lo largo de  $x_i$  (que ahora coincidiría con  $x_{i-1}$ ) que habría que desplazar el nuevo  $\{S_{i-1}\}$  para que su origen coincidiese con  $\{S_i\}$ .
- D-H 13) Obtener  $\alpha_i$  como el ángulo que habría que girar entorno a  $x_i$ , (que ahora coincidiría con  $x_{i-1}$ ), para que el nuevo  $\{S_{i-1}\}$  coincidiese totalmente con  $\{S_i\}$ .
- D-H 14) Obtener las matrices de transformación  ${}^{i-1}A_i$  definidas anteriormente.
- D-H 15) Obtener la matriz de transformación T que relaciona el sistema de la base con el del extremo del robot.
- D-H 16) La matriz T define la orientación (submatriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo referido a la base en función de las n coordenadas articulares.

Los cuatro parámetros de D-H ( $\theta_i$ ,  $d_i$ ,  $a_i$ ,  $\alpha_i$ ) dependen únicamente de las características geométricas de cada eslabón. En la figura que se muestra a continuación se pueden observar los parámetros y los sistemas de coordenadas de cada eslabón codificados según el método descripto:



La definición formal de los parámetros es la siguiente:

$\theta_i$ : Es el ángulo que forman los ejes  $x_{i-1}$  y  $x_i$  medido en un plano perpendicular al eje  $z_{i-1}$ , utilizando la regla de la mano derecha. Se trata de un parámetro variable en articulaciones giratorias.

$d_i$ : Es la distancia a lo largo del eje  $z_{i-1}$  desde el origen del sistema de coordenadas (i-1)-ésimo hasta la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$ . Se trata de un parámetro variable en articulaciones prismáticas.

$a_i$ : Es la distancia a lo largo del eje  $x_i$  que va desde la intersección del eje  $z_{i-1}$  con el eje  $x_i$  hasta el origen del sistema i-ésimo, en el caso de articulaciones giratorias. En el caso de articulaciones prismáticas, se calcula como la distancia más corta entre los ejes  $z_{i-1}$  y  $z_i$ .

$\alpha_i$ : Es el ángulo de separación del eje  $z_{i-1}$  y el eje  $z_i$ , medido en un plano perpendicular al eje  $x_i$ , utilizando la regla de la mano derecha.

Luego de obtener los parámetros D-H se calculan las matrices A y por último se calcula la matriz T con las formulas que se recuerdan a continuación:

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i.S\theta_i & S\alpha_i.S\theta_i & a_i.C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i.C\theta_i & -S\alpha_i.C\theta_i & a_i.S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6$$



### 3.3 Cinemática Inversa

El objetivo del problema cinemático inverso consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot  $q=[q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ , para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial.

El procedimiento de obtención de las ecuaciones del problema cinemático inverso es fuertemente dependiente de la configuración del robot. Si bien se han desarrollado algunos procedimientos genéricos susceptibles de ser programados, el inconveniente de estos procedimientos es que se trata de métodos numéricos iterativos, cuya velocidad de convergencia e incluso su convergencia en sí no está siempre garantizada.

Para resolver el problema cinemático inverso es mucho más adecuado encontrar una solución cerrada. Esto es, encontrar una relación matemática explícita de la forma:

$$q_k = f_{k(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)}$$
$$k = 1 \dots n(GDL)$$

Este tipo de solución presenta, entre otras, las siguientes ventajas:

- Posibilidad de resolverse en tiempo real (por ejemplo, en el seguimiento de una determinada trayectoria).
- Permite incluir determinadas reglas o restricciones que aseguren que la solución obtenida sea la más adecuada de entre las posibles (por ejemplo, límites en los recorridos articulares) ya que con cierta frecuencia la solución del problema cinemático inverso no es única.

Teniendo en cuenta que en muchos casos los tres primeros grados de libertad tienen una estructura planar (sus elementos quedan contenidos en un plano) y que los últimos tres grados de libertad (dedicados fundamentalmente a orientar el extremo del robot) corresponden a giros sobre ejes que se cortan en un punto es posible establecer ciertas pautas generales que permitan plantear y resolver el problema cinemático inverso de una manera sistemática.

Para resolver los valores de las primeras variables que son las que consiguen posicionar el robot (prescindiendo de la orientación de su extremo) se pueden utilizar los métodos geométricos o bien recurrir a manipular directamente las ecuaciones correspondientes al problema cinemático directo (Matriz Homógena).

Si se consideran robots con capacidad de posicionar y orientar su extremo en el espacio (6 GDL), se utiliza el método de desacoplamiento cinemático que permite, para determinados tipos de robots, resolver los primeros grados de libertad, dedicados al posicionamiento, de manera independiente a la resolución de los últimos grados de libertad, dedicados a la orientación. Cada uno de estos dos problemas más simples podrá ser tratado y resuelto tanto por el método Geométrico como por el método de la matriz homogénea.



### 3.3.1 Método Geométrico

Este método utiliza relaciones trigonométricas y geométricas para la resolución de triángulos formados por los elementos y articulaciones del robot. Es adecuado para robots de pocos grados de libertad o para el caso de que se consideren sólo los primeros grados de libertad, dedicados a posicionar el extremo.

El procedimiento en sí se basa en encontrar suficiente número de relaciones geométricas en las que intervendrán las coordenadas del extremo del robot, sus coordenadas articulares y las dimensiones físicas de sus elementos.

### 3.3.2 Método por Matriz Homogénea

Este método se basa en tratar de obtener el modelo cinemático inverso de un robot a partir del conocimiento de su modelo directo. Es decir, suponiendo conocidas las relaciones que expresan el valor de la posición y orientación del extremo del robot en función de sus coordenadas articulares, obtener por manipulación de ecuaciones las relaciones inversas.

Sin embargo, en muchas ocasiones esta tarea es tan compleja que obliga a desecharla. Además, dado que el problema cinemático directo resuelto contiene 12 ecuaciones en el caso de un robot de 6 GDL y se buscan sólo 6 relaciones (una por cada grado de libertad), existirán necesariamente ciertas dependencias entre las 12 expresiones de partida (resultado de la condición de ortonormalidad de los vectores  $n$ ,  $o$  y  $a$ ). Esto implica que la elección de las ecuaciones se deberá realizar con sumo cuidado.

### 3.3.3 Método por Desacoplo Cinemático

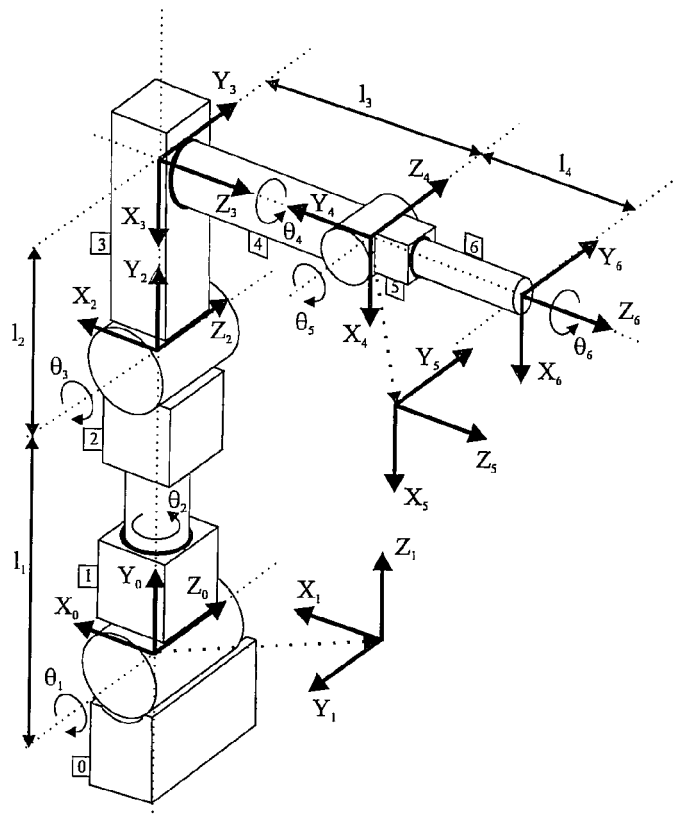
El método de desacoplo cinemático se basa en separar los problemas de posicionamiento (primeros grados de libertad) y orientación del extremo (últimos grados de libertad) separando ambos problemas. Para ello, dada una posición y orientación finales deseadas, establece las coordenadas del punto de corte de los 3 últimos ejes (muñeca del robot) y se calculan los valores de las tres primeras variables articulares ( $q_1, q_2, q_3$ ) que consiguen posicionar este punto con cualquiera de los procedimientos anteriores. Luego, a partir de los datos de orientación ya calculados se obtienen el resto de los valores de las variables articulares.

Los procedimientos anteriores se utilizan para obtener los valores de las 3 primeras variables articulares del robot, aquellas que posicionan su extremo en unas coordenadas ( $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ ) determinadas, aunque pueden ser igualmente utilizadas para la obtención de las 6 a costa de una mayor complejidad.

## 4. Desarrollo de la cadena cinemática directa e inversa

### 4.1 Cadena cinemática directa

**D-H 1 a D-H 9:** Para el cálculo de la cadena cinemática directa según el método de Denavit Hartenberg se comienza identificando los eslabones y articulaciones y ubicando los sistemas de cada eslabón



**D-H 10 a D-H 13:** Luego se obtienen los parámetros de Denavit-Hartenberg

Articulación	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$
1	$\theta_1$	0	0	$-90^\circ$
2	$\theta_2$	$l_1$	0	$90^\circ$
3	$\theta_3 - 90^\circ$	0	$-l_2$	$90^\circ$
4	$\theta_4$	$l_3$	0	$-90^\circ$
5	$\theta_5$	0	0	$90^\circ$
6	$\theta_6$	$l_4$	0	0

**D-H 14:** Con los parámetros obtenidos se obtienen las matrices de transformación entre eslabones

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -C(-90^\circ).S\theta_1 & S(-90^\circ).S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & C(-90^\circ).C\theta_1 & -S(-90^\circ).C\theta_1 & 0 \\ 0 & S(-90^\circ) & C(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -C(90^\circ).S\theta_2 & S(90^\circ).S\theta_2 & 0 \\ S\theta_2 & C(90^\circ).C\theta_2 & -S(90^\circ).C\theta_2 & 0 \\ 0 & S(90^\circ) & C(90^\circ) & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & 0 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} C(\theta_3 - 90^\circ) & -C(90^\circ).S(\theta_3 - 90^\circ) & S(90^\circ).S(\theta_3 - 90^\circ) & -l_2.C(\theta_3 - 90^\circ) \\ S(\theta_3 - 90^\circ) & C(90^\circ).C(\theta_3 - 90^\circ) & -S(90^\circ).C(\theta_3 - 90^\circ) & -l_2.S(\theta_3 - 90^\circ) \\ 0 & S(90^\circ) & C(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} S\theta_3 & 0 & -C\theta_3 & -l_2.S\theta_3 \\ -C\theta_3 & 0 & -S\theta_3 & l_2.C\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3A_4 = \begin{bmatrix} C\theta_4 & -C(-90^\circ).S\theta_4 & S(-90^\circ).S\theta_4 & 0 \\ S\theta_4 & C(-90^\circ).C\theta_4 & -S(-90^\circ).C\theta_4 & 0 \\ 0 & S(-90^\circ) & C(-90^\circ) & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_4 & 0 & -S\theta_4 & 0 \\ S\theta_4 & 0 & C\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4A_5 = \begin{bmatrix} C\theta_5 & -C(90^\circ).S\theta_5 & S(90^\circ).S\theta_5 & 0 \\ S\theta_5 & C(90^\circ).C\theta_5 & -S(90^\circ).C\theta_5 & 0 \\ 0 & S(90^\circ) & C(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_5 & 0 & S\theta_5 & 0 \\ S\theta_5 & 0 & -C\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$${}^5A_6 = \begin{bmatrix} C\theta_6 & -C(0^\circ).S\theta_6 & S(0^\circ).S\theta_6 & 0 \\ S\theta_6 & C(0^\circ).C\theta_6 & -S(0^\circ).C\theta_6 & 0 \\ 0 & S(0^\circ) & C(0^\circ) & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta_6 & -S\theta_6 & 0 & 0 \\ S\theta_6 & C\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**D-H 15:** Se calcula la matriz de transformación T que relaciona el sistema de la base con el extremo del robot. Se utilizará la nomenclatura  $S_i = \sin \theta_i$  para simplificar la sintaxis.

$$T = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 \cdot {}^3A_4 \cdot {}^4A_5 \cdot {}^5A_6$$

$${}^0A_2 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1.C_2 & -S_1 & C_1.S_2 & -l_1.S_1 \\ S_1.C_2 & C_1 & S_1.S_2 & l_1.C_1 \\ -S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_3 = {}^0A_2 \cdot {}^2A_3 = \begin{bmatrix} C_1.C_2 & -S_1 & C_1.S_2 & -l_1.S_1 \\ S_1.C_2 & C_1 & S_1.S_2 & l_1.C_1 \\ -S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_3 & 0 & -C_3 & -l_2.S_3 \\ -C_3 & 0 & -S_3 & l_2.C_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_3 = \begin{bmatrix} C_1.C_2.S_3 + S_1.C_3 & C_1.S_2 & -C_1.C_2.C_3 + S_1.S_3 & -C_1.C_2.l_2.S_3 - S_1.l_2.C_3 - l_1.S_1 \\ S_1.C_2.S_3 - C_1.C_3 & S_1.S_2 & -S_1.C_2.C_3 - C_1.S_3 & -S_1.C_2.l_2.S_3 + C_1.l_2.C_3 + l_1.C_1 \\ -S_2.S_3 & C_2 & S_2.C_3 & S_2.l_2.S_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_4 = {}^0A_3 \cdot {}^3A_4 = \begin{bmatrix} n_{x3} & o_{x3} & a_{x3} & p_{x3} \\ n_{y3} & o_{y3} & a_{y3} & p_{y3} \\ n_{z3} & o_{z3} & a_{z3} & p_{z3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{x4} & o_{x4} & a_{x4} & p_{x4} \\ n_{y4} & o_{y4} & a_{y4} & p_{y4} \\ n_{z4} & o_{z4} & a_{z4} & p_{z4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n_{x4} = C_1.C_2.C_4.S_3 + C_3.C_4.S_1 + C_1.S_2.S_4$$

$$n_{y4} = C_2.C_4.S_1.S_3 - C_1.C_3.C_4 + S_1.S_2.S_4$$

$$n_{z4} = -C_4.S_2.S_3 + C_2.S_4$$

$$o_{x4} = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 - S_1 \cdot S_3$$

$$o_{y4} = S_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + C_1 \cdot S_3$$

$$o_{z4} = -S_2 \cdot C_3$$

$$a_{x4} = -C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 \cdot S_4 - C_3 \cdot S_1 \cdot S_4 + C_1 \cdot C_4 \cdot S_2$$

$$a_{y4} = -C_2 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_4 + C_1 \cdot C_3 \cdot S_4 + C_4 \cdot S_1 \cdot S_2$$

$$a_{z4} = S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 + C_2 \cdot C_4$$

$$p_{x4} = -l_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + l_3 \cdot S_1 \cdot S_3 - l_2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 - l_2 \cdot C_3 \cdot S_1 - l_1 \cdot S_1$$

$$p_{y4} = -l_3 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot S_1 - l_3 \cdot C_1 \cdot S_3 - l_2 \cdot C_2 \cdot S_1 \cdot S_3 + l_2 \cdot C_1 \cdot C_3 + l_1 \cdot C_1$$

$$p_{z4} = l_3 \cdot C_3 \cdot S_2 + l_2 \cdot S_2 \cdot S_3$$

$${}^0A_5 = {}^0A_4 \cdot {}^4A_5 = \begin{bmatrix} n_{x4} & o_{x4} & a_{x4} & p_{x4} \\ n_{y4} & o_{y4} & a_{y4} & p_{y4} \\ n_{z4} & o_{z4} & a_{z4} & p_{z4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{x5} & o_{x5} & a_{x5} & p_{x5} \\ n_{y5} & o_{y5} & a_{y5} & p_{y5} \\ n_{z5} & o_{z5} & a_{z5} & p_{z5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n_{x5} = C_1 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_3 + C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_1 + C_1 \cdot C_5 \cdot S_2 \cdot S_4 + C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot S_5 - S_1 \cdot S_3 \cdot S_5$$

$$n_{y5} = C_2 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_1 \cdot S_3 - C_1 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 + C_5 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_4 + C_2 \cdot C_3 \cdot S_1 \cdot S_5 + C_1 \cdot S_3 \cdot S_5$$

$$n_{z5} = -C_4 \cdot C_5 \cdot S_2 \cdot S_3 + C_2 \cdot C_5 \cdot S_4 - C_3 \cdot S_2 \cdot S_5$$

$$o_{x5} = -C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 \cdot S_4 - C_3 \cdot S_1 \cdot S_4 + C_1 \cdot C_4 \cdot S_2$$

$$o_{y5} = -C_2 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_4 + C_1 \cdot C_3 \cdot S_4 + C_4 \cdot S_1 \cdot S_2$$

$$o_{z5} = S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 + C_2 \cdot C_4$$

$$a_{x5} = C_1 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot S_3 \cdot S_5 + C_3 \cdot C_4 \cdot S_1 \cdot S_5 + C_1 \cdot S_2 \cdot S_4 \cdot S_5 - C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_5 + C_5 \cdot S_1 \cdot S_3$$

$$a_{y5} = C_2 \cdot C_4 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 - C_1 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot S_5 + S_1 \cdot S_2 \cdot S_4 \cdot S_5 - C_2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot S_1 - C_1 \cdot C_5 \cdot S_3$$

$$a_{z5} = -C_4 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_5 + C_2 \cdot S_4 \cdot S_5 + C_3 \cdot C_5 \cdot S_2$$

$$p_{x5} = -l_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + l_3 \cdot S_1 \cdot S_3 - l_2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 - l_2 \cdot C_3 \cdot S_1 - l_1 \cdot S_1$$

$$p_{y5} = -l_3 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot S_1 - l_3 \cdot C_1 \cdot S_3 - l_2 \cdot C_2 \cdot S_1 \cdot S_3 + l_2 \cdot C_1 \cdot C_3 + l_1 \cdot C_1$$

$$p_{z5} = l_3 \cdot C_3 \cdot S_2 + l_2 \cdot S_2 \cdot S_3$$

$$T = {}^0 A_6 = {}^0 A_5 \cdot {}^5 A_6 = \begin{bmatrix} n_{x5} & o_{x5} & a_{x5} & p_{x5} \\ n_{y5} & o_{y5} & a_{y5} & p_{y5} \\ n_{z5} & o_{z5} & a_{z5} & p_{z5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{x6} & o_{x6} & a_{x6} & p_{x6} \\ n_{y6} & o_{y6} & a_{y6} & p_{y6} \\ n_{z6} & o_{z6} & a_{z6} & p_{z6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} n_{x6} &= C_1 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_3 + C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_1 + C_1 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_2 \cdot S_4 + C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_6 \cdot S_5 - C_6 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 \\ &\quad - C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot S_6 - C_3 \cdot S_1 \cdot S_4 \cdot S_6 + C_1 \cdot C_4 \cdot S_2 \cdot S_6 \\ n_{y6} &= C_2 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_1 \cdot S_3 - C_1 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 + C_5 \cdot C_6 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_4 + C_2 \cdot C_3 \cdot C_6 \cdot S_1 \cdot S_5 + C_1 \cdot C_6 \cdot S_3 \cdot S_5 \\ &\quad - C_2 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot S_6 + C_1 \cdot C_3 \cdot S_4 \cdot S_6 + C_4 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_6 \\ n_{z6} &= -C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_2 \cdot S_3 + C_2 \cdot C_5 \cdot C_6 \cdot S_4 - C_3 \cdot C_6 \cdot S_2 \cdot S_5 + S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 \cdot S_6 + C_2 \cdot C_4 \cdot S_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o_{x6} &= -C_1 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_3 \cdot S_6 - C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_1 \cdot S_6 - C_1 \cdot C_5 \cdot S_2 \cdot S_4 \cdot S_6 - C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot S_5 \cdot S_6 + S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 \cdot S_6 \\ &\quad - C_1 \cdot C_2 \cdot C_6 \cdot S_3 \cdot S_4 - C_3 \cdot C_6 \cdot S_1 \cdot S_4 + C_1 \cdot C_4 \cdot C_6 \cdot S_2 \\ o_{y6} &= -C_2 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_6 + C_1 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot S_6 - C_5 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_4 \cdot S_6 - C_2 \cdot C_3 \cdot S_1 \cdot S_5 \cdot S_6 - C_1 \cdot S_3 \cdot S_5 \cdot S_6 \\ &\quad - C_2 \cdot C_6 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_4 + C_1 \cdot C_3 \cdot C_6 \cdot S_4 + C_4 \cdot C_6 \cdot S_1 \cdot S_2 \\ o_{z6} &= C_4 \cdot C_5 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_6 - C_2 \cdot C_5 \cdot S_4 \cdot S_6 + C_3 \cdot S_2 \cdot S_5 \cdot S_6 + C_6 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 + C_2 \cdot C_4 \cdot C_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{x6} &= C_1 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot S_3 \cdot S_5 + C_3 \cdot C_4 \cdot S_1 \cdot S_5 + C_1 \cdot S_2 \cdot S_4 \cdot S_5 - C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_5 + C_5 \cdot S_1 \cdot S_3 \\ a_{y6} &= C_2 \cdot C_4 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 - C_1 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot S_5 + S_1 \cdot S_2 \cdot S_4 \cdot S_5 - C_2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot S_1 - C_1 \cdot C_5 \cdot S_3 \\ a_{z6} &= -C_4 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_5 + C_2 \cdot S_4 \cdot S_5 + C_3 \cdot C_5 \cdot S_2 \end{aligned}$$

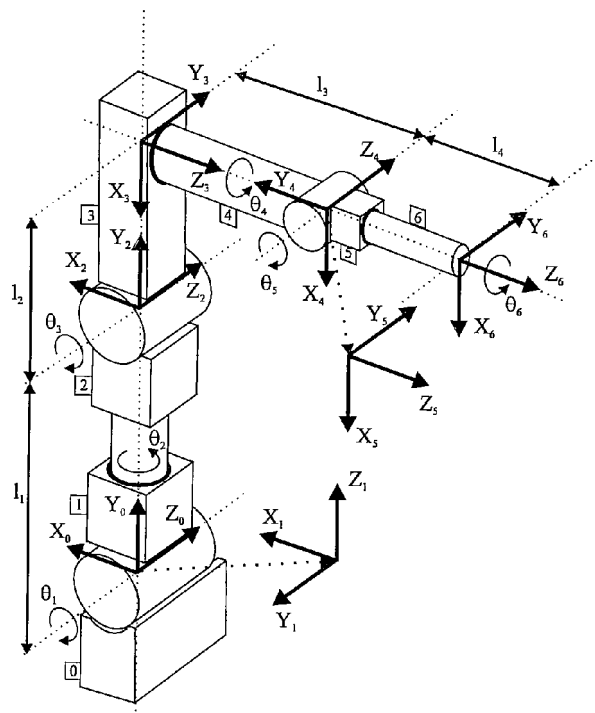
$$\begin{aligned} p_{x6} &= l_4 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot S_3 \cdot S_5 + l_4 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot S_1 \cdot S_5 + l_4 \cdot C_1 \cdot S_2 \cdot S_4 \cdot S_5 - l_4 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_5 + l_4 \cdot C_5 \cdot S_1 \cdot S_3 - l_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \\ &\quad + l_3 \cdot S_1 \cdot S_3 - l_2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 - l_2 \cdot C_3 \cdot S_1 - l_1 \cdot S_1 \\ p_{y6} &= l_4 \cdot C_2 \cdot C_4 \cdot S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 - l_4 \cdot C_1 \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot S_5 + l_4 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_4 \cdot S_5 - l_4 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot S_1 - l_4 \cdot C_1 \cdot C_5 \cdot S_3 - l_3 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot S_1 \\ &\quad - l_3 \cdot C_1 \cdot S_3 - l_2 \cdot C_2 \cdot S_1 \cdot S_3 + l_2 \cdot C_1 \cdot C_3 + l_1 \cdot C_1 \\ p_{z6} &= -l_4 \cdot C_4 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_5 + l_4 \cdot C_2 \cdot S_4 \cdot S_5 + l_4 \cdot C_3 \cdot C_5 \cdot S_2 + l_3 \cdot C_3 \cdot S_2 + l_2 \cdot S_2 \cdot S_3 \end{aligned}$$

**D-H 16:** La matriz T define la orientación (submatriz de rotación) y posición (submatriz de traslación) del extremo referido a la base en función de las n coordenadas articulares.

En las ecuaciones resultantes queda reflejado el valor de la posición ( $p_x, p_y, p_z$ ) y orientación ( $n, o, a$ ) del extremo del robot en función de las coordenadas articulares ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ ). Para comprobar la validez de las mismas a continuación se calculan la posición y orientación iniciales (todas las posiciones 0) del extremo del Robot:

$$\begin{array}{llll} n_x = 0 & o_{x6} = 0 & a_{x6} = -1 & p_x = -(l_3 + l_4) \\ n_{y6} = -1 & o_{y6} = 0 & a_{y6} = 0 & p_y = l_1 + l_2 \\ n_{z6} = 0 & o_{z6} = 1 & a_{z6} = 0 & p_{z6} = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} i_{x0} \\ j_{x0} \\ k_{x0} \end{bmatrix} = R_0 \cdot \begin{bmatrix} i_{x6} \\ j_{y6} \\ k_{z6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{x6} \\ j_{y6} \\ k_{z6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{z6} \\ -i_{x6} \\ j_{y6} \end{bmatrix}$$



Como se puede observar en la figura los resultados son correctos tanto en la posición y la orientación iniciales del extremo del robot ( $\{S_6\}$ ) con respecto al sistema de referencia en la base del robot ( $\{S_0\}$ ).



## 4.2 Cadena cinemática inversa

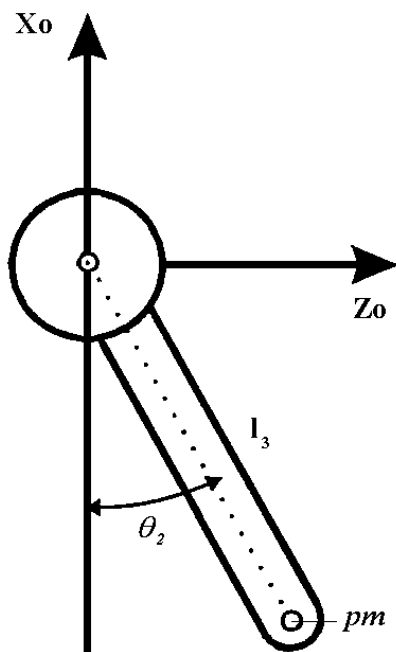
Se utilizará el método del desacople cinemático para obtener la resolución del problema cinemático inverso. Como el cruce de los ejes de los últimos tres grados de libertad se cruzan en el origen del  $\{S_5\}$  (coincidente con el origen de  $\{S_4\}$ ) se utilizará el mismo como punto de desacople. Con las articulaciones  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  se buscará posicionar el sistema y con las articulaciones  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  y  $\theta_6$  se conseguirá la orientación deseada.

Siendo:  $pm = \overline{O_o O_5}$  y  $pr = \overline{O_o O_6}$  donde  $pm$  es un vector desde el origen del sistema de referencia hasta el punto central de la “muñeca” del robot y  $pr$  es un vector desde el origen del sistema de referencia hasta el punto deseado en el extremo del robot. Se pueden encontrar las coordenadas del punto central del sistema  $\{S_5\}$  teniendo en cuenta que el eje  $z_6$  es coincidente con el  $z_5$  y la distancia entre los sistemas  $\{S_5\}$  y  $\{S_6\}$  es  $l_4$ .

$$pm = \begin{bmatrix} pm_x \\ pm_y \\ pm_z \end{bmatrix} = pr - l_4 \cdot z_6 = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} - l_4 \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

A continuación se calculan los valores de las articulaciones  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  para lograr ubicar el robot en el  $pm$  obtenido con el procedimiento anterior.

Como la posición angular del extremo del vector  $pm$  sobre el plano  $x_0$ - $z_0$  sólo depende de la articulación  $\theta_2$  esta se puede relacionar geoméricamente con el punto como:



$$\theta_2 = \arctg \frac{pm_x}{pm_z} + 90^\circ$$

si  $pm_z > 0$

$$\theta_2 = \arctg \frac{pm_x}{pm_z} - 90^\circ$$

si  $pm_z < 0$

Los valores de  $\theta_1$  y  $\theta_3$  se obtendrán despejando las ecuaciones de la posición del sistema  $\{S_4\}$  coincidente con pm:

$$p_{x4} = pm_x = -l_3.C_1.C_2.C_3 + l_3.S_1.S_3 - l_2.C_1.C_2.S_3 - l_2.C_3.S_1 - l_1.S_1$$

$$p_{y4} = pm_y = -l_3.C_2.C_3.S_1 - l_3.C_1.S_3 - l_2.C_2.S_1.S_3 + l_2.C_1.C_3 + l_1.C_1$$

$$p_{z4} = pm_z = l_3.C_3.S_2 + l_2.S_2.S_3$$

Siendo el  $\sin\theta_2$  conocido, se despeja  $\theta_3$  de la ecuación de  $p_{z4}$ :

$$pm_z = l_3.C_3.S_2 + l_2.S_2.S_3$$

$$\frac{pm_z}{S_2} = l_3.C_3 + l_2.S_3 = l_3.\sqrt{1-S_3^2} + l_2.S_3$$

$$\left( \frac{pm_z}{l_3.S_2} - \frac{l_2}{l_3}.S_3 \right)^2 = 1 - S_3^2$$

$$\left( \frac{pm_z}{l_3.S_2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{pm_z}{l_3.S_2} \cdot \frac{l_2}{l_3}.S_3 + \left( \frac{l_2}{l_3}.S_3 \right)^2 = 1 - S_3^2$$

$$\left[ \left( \frac{l_2}{l_3} + 1 \right).S_3^2 - 2 \cdot \frac{pm_z.l_2}{l_3^2.S_2}.S_3 + \left( \frac{pm_z}{l_3.S_2} \right)^2 - 1 = 0 \right]$$

Luego:  $\boxed{\theta_3 = \arcsen(S_3)}$

Por último conocidos  $\theta_2$  y  $\theta_3$  se despeja  $\theta_1$  de la ecuación de  $p_{y4}$ :

$$pm_y = -l_3.C_2.C_3.S_1 - l_3.C_1.S_3 - l_2.C_2.S_1.S_3 + l_2.C_1.C_3 + l_1.C_1 = S_1.(-l_3.C_2.C_3 - l_2.C_2.S_3) + C_1.(-l_3.S_3 + l_2.C_3 + l_1)$$

$$pm_y + S_1 \cdot \frac{l_3.C_2.C_3 + l_2.C_2.S_3}{-l_3.S_3 + l_2.C_3 + l_1} = C_1 = \sqrt{1-S_1^2}$$

$$(pm_y)^2 + 2 \cdot pm_y \cdot S_1 \cdot \frac{l_3.C_2.C_3 + l_2.C_2.S_3}{-l_3.S_3 + l_2.C_3 + l_1} + S_1^2 \cdot \left( \frac{l_3.C_2.C_3 + l_2.C_2.S_3}{-l_3.S_3 + l_2.C_3 + l_1} \right)^2 = 1 - S_1^2$$

$$S_1^2 \cdot \left[ \left( \frac{l_3.C_2.C_3 + l_2.C_2.S_3}{-l_3.S_3 + l_2.C_3 + l_1} \right)^2 + 1 \right] + 2 \cdot pm_y \cdot \frac{l_3.C_2.C_3 + l_2.C_2.S_3}{-l_3.S_3 + l_2.C_3 + l_1} \cdot S_1 + (pm_y^2 - 1) = 0$$

Luego:  $\boxed{\theta_1 = \arcsen(S_1)}$

Una vez obtenidos los parámetros de los primeros grados de libertad se despejan las incógnitas restantes de la submatriz de rotación de T:

$$R = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = {}^0R_3 \cdot {}^3R_4 \cdot {}^4R_5 \cdot {}^5R_6$$

$$\left[ {}^0R_3 \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = {}^3R_4 \cdot {}^4R_5 \cdot {}^5R_6$$

$$\begin{bmatrix} C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 + S_1 \cdot C_3 & C_1 \cdot S_2 & -C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + S_1 \cdot S_3 \\ S_1 \cdot C_2 \cdot S_3 - C_1 \cdot C_3 & S_1 \cdot S_2 & -S_1 \cdot C_2 \cdot C_3 - C_1 \cdot S_3 \\ -S_2 \cdot S_3 & C_2 & S_2 \cdot C_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = {}^3R_4 \cdot {}^4R_5 \cdot {}^5R_6$$

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 + S_1 \cdot C_3 & S_1 \cdot C_2 \cdot S_3 - C_1 \cdot C_3 & -S_2 \cdot S_3 \\ C_1 \cdot S_2 & S_1 \cdot S_2 & C_2 \\ -C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + S_1 \cdot S_3 & -S_1 \cdot C_2 \cdot C_3 - C_1 \cdot S_3 & S_2 \cdot C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = (C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 + S_1 \cdot C_3) \cdot n_x + (S_1 \cdot C_2 \cdot S_3 - C_1 \cdot C_3) \cdot n_y + (-S_2 \cdot S_3) \cdot n_z$$

$$r_{12} = (C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 + S_1 \cdot C_3) \cdot o_x + (S_1 \cdot C_2 \cdot S_3 - C_1 \cdot C_3) \cdot o_y + (-S_2 \cdot S_3) \cdot o_z$$

$$r_{13} = (C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 + S_1 \cdot C_3) \cdot a_x + (S_1 \cdot C_2 \cdot S_3 - C_1 \cdot C_3) \cdot a_y + (-S_2 \cdot S_3) \cdot a_z$$

$$r_{21} = (C_1 \cdot S_2) \cdot n_x + (S_1 \cdot S_2) \cdot n_y + (C_2) \cdot n_z$$

$$r_{22} = (C_1 \cdot S_2) \cdot o_x + (S_1 \cdot S_2) \cdot o_y + (C_2) \cdot o_z$$

$$r_{23} = (C_1 \cdot S_2) \cdot a_x + (S_1 \cdot S_2) \cdot a_y + (C_2) \cdot a_z$$

$$r_{31} = (-C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + S_1 \cdot S_3) \cdot n_x + (-S_1 \cdot C_2 \cdot C_3 - C_1 \cdot S_3) \cdot n_y + (S_2 \cdot C_3) \cdot n_z$$

$$r_{32} = (-C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + S_1 \cdot S_3) \cdot o_x + (-S_1 \cdot C_2 \cdot C_3 - C_1 \cdot S_3) \cdot o_y + (S_2 \cdot C_3) \cdot o_z$$

$$r_{33} = (-C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + S_1 \cdot S_3) \cdot a_x + (-S_1 \cdot C_2 \cdot C_3 - C_1 \cdot S_3) \cdot a_y + (S_2 \cdot C_3) \cdot a_z$$

Luego de los cálculos correspondientes todos los valores de  $r_{ij}$  son conocidos, por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 \\ S_4 & 0 & C_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 \\ S_5 & 0 & -C_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_4 \cdot C_5 & -S_4 & C_4 \cdot S_5 \\ S_4 \cdot C_5 & C_4 & S_4 \cdot S_5 \\ -S_5 & 0 & C_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_4 \cdot C_5 \cdot C_6 - S_4 \cdot S_6 & -C_4 \cdot C_5 \cdot S_6 - C_6 \cdot S_4 & C_4 \cdot S_5 \\ S_4 \cdot C_5 \cdot C_6 + C_4 \cdot S_6 & -S_4 \cdot C_5 \cdot S_6 + C_4 \cdot C_6 & S_4 \cdot S_5 \\ -S_5 \cdot C_6 & S_5 \cdot S_6 & C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Despejando de  $r_{32}$ ,  $r_{23}$  y  $r_{33}$ :

$$\theta_5 = \arccos(r_{33})$$

$$\theta_4 = \arcsen\left(\frac{r_{23}}{S_5}\right)$$

$$\theta_6 = \arcsen\left(\frac{r_{32}}{S_5}\right)$$

Nuevamente se corroboran los valores con los esperados en la posición de reposo (inicial):

$$\text{Siendo } T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -(l_3 + l_4) \\ -1 & 0 & 0 & l_1 + l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$pm = \begin{bmatrix} pm_x \\ pm_y \\ pm_z \end{bmatrix} = pr - l_4 \cdot z_6 = \begin{bmatrix} -(l_3 + l_4) \\ l_1 + l_2 \\ 0 \end{bmatrix} - l_4 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 \\ l_1 + l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$\theta_2 = \arctg \frac{pm_x}{pm_z} + 90^\circ = \arctg \frac{-l_3}{0} + 90^\circ = -90^\circ + 90^\circ = 0^\circ \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} pm_x &= -l_3 = -l_3 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + l_3 \cdot S_1 \cdot S_3 - l_2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 - l_2 \cdot C_3 \cdot S_1 - l_1 \cdot S_1 \\ pm_y &= l_1 + l_2 = -l_3 \cdot C_2 \cdot C_3 \cdot S_1 - l_3 \cdot C_1 \cdot S_3 - l_2 \cdot C_2 \cdot S_1 \cdot S_3 + l_2 \cdot C_1 \cdot C_3 + l_1 \cdot C_1 \\ pm_z &= 0 = l_3 \cdot C_3 \cdot S_2 + l_2 \cdot S_2 \cdot S_3 = S_2 \cdot (l_3 \cdot C_3 + l_2 \cdot S_3) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -l_3 &= -l_3 \cdot C_1 \cdot C_3 + l_3 \cdot S_1 \cdot S_3 - l_2 \cdot C_1 \cdot S_3 - l_2 \cdot C_3 \cdot S_1 - l_1 \cdot S_1 \\ l_1 + l_2 &= -l_3 \cdot C_3 \cdot S_1 - l_3 \cdot C_1 \cdot S_3 - l_2 \cdot S_1 \cdot S_3 + l_2 \cdot C_1 \cdot C_3 + l_1 \cdot C_1 \end{aligned}$$

En las ecuaciones mostradas se puede observar que  $\theta_1 = \theta_3 = 0$  es solución del sistema. ✓

$$r_{11} = (C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 + S_1 \cdot C_3) \cdot 0 + (S_1 \cdot C_2 \cdot S_3 - C_1 \cdot C_3) \cdot (-1) + (-S_2 \cdot S_3) \cdot 0 = 1$$

$$r_{12} = (C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 + S_1 \cdot C_3) \cdot 0 + (S_1 \cdot C_2 \cdot S_3 - C_1 \cdot C_3) \cdot 0 + (-S_2 \cdot S_3) \cdot 1 = 0$$

$$r_{13} = (C_1 \cdot C_2 \cdot S_3 + S_1 \cdot C_3) \cdot (-1) + (S_1 \cdot C_2 \cdot S_3 - C_1 \cdot C_3) \cdot 0 + (-S_2 \cdot S_3) \cdot 0 = 0$$

$$r_{21} = (C_1 \cdot S_2) \cdot 0 + (S_1 \cdot S_2) \cdot (-1) + (C_2) \cdot 0 = 0$$

$$r_{22} = (C_1 \cdot S_2) \cdot 0 + (S_1 \cdot S_2) \cdot 0 + (C_2) \cdot 1 = 1$$

$$r_{23} = (C_1 \cdot S_2) \cdot (-1) + (S_1 \cdot S_2) \cdot 0 + (C_2) \cdot 0 = 0$$

$$r_{31} = (-C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + S_1 \cdot S_3) \cdot 0 + (-S_1 \cdot C_2 \cdot C_3 - C_1 \cdot S_3) \cdot (-1) + (S_2 \cdot C_3) \cdot 0 = 0$$

$$r_{32} = (-C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + S_1 \cdot S_3) \cdot 0 + (-S_1 \cdot C_2 \cdot C_3 - C_1 \cdot S_3) \cdot 0 + (S_2 \cdot C_3) \cdot 1 = 0$$

$$r_{33} = (-C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 + S_1 \cdot S_3) \cdot (-1) + (-S_1 \cdot C_2 \cdot C_3 - C_1 \cdot S_3) \cdot 0 + (S_2 \cdot C_3) \cdot 0 = 1$$

$$\begin{bmatrix} C_4.C_5.C_6 - S_4.S_6 & -C_4.C_5.S_6 - C_6.S_4 & C_4.S_5 \\ S_4.C_5.C_6 + C_4.S_6 & -S_4.C_5.S_6 + C_4.C_6 & S_4.S_5 \\ -S_5.C_6 & S_5.S_6 & C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta_5 = \arccos(r_{33}) = \arccos(1) = 0 \quad \checkmark$$

$$-C_4.C_5.S_6 - C_6.S_4 = r_{12} = 0$$

$$C_4.C_5.S_6 = -C_6.S_4$$

$$\boxed{Tg_6 = -\frac{Tg_4}{C_5}}$$

$$-S_4.C_5.S_6 + C_4.C_6 = r_{22} = 1$$

$$\begin{aligned} -Tg_4.C_5.Tg_6 + 1 &= 1 \\ Tg_4^2 &= 0 \Rightarrow \theta_4 = \theta_6 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Con la comprobación anterior se confirma que  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0$  es solución del sistema en reposo según lo esperado.

## 5. Simulación en Matlab

Para realizar la simulación y definir el área de trabajo del robot se realizan las siguientes suposiciones sobre la geometría del robot y los límites de sus articulaciones:

Articulación	$\theta$	$d$	$a$	$\alpha$
1	-45° a 45°	0	0	-90°
2	0 a 360°	1m	0	90°
3	-45° a 45°	0	-1m	90°
4	0 a 360°	1m	0	-90°
5	-90° a 90°	0	0	90°
6	0 a 360°	1m	0	0

### 5.1 Código fuente

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% UTN FRBA - Robótica (2009)
% Tesis Final
% Alumnos: Canale, Llanos, Sanchez
%
% Prof.: Ing. Hernán Giannetta
%
% Script que grafica la superficie de trabajo del RT2 - Apolo de 6 GDL
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Configuración de parámetros geométricos y límites de articulaciones
q1min=-pi/4;
q1max=pi/4;
q2min=-pi;
q2max=pi;
q3min=-pi/4;
q3max=pi/4;
q4min=-pi;
q4max=pi;
q5min=-pi/2;
q5max=pi/2;
L1=1;
L2=1;
L3=1;
L4=1;
X=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]';
Y=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]';
Z=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]';
Q6=0;
%Cálculo de valores posibles del área de trabajo
Q2=(q2min:(q2max-q2min)/11:q2max)';
for Q1=q1min:(q1max-q1min)/5:q1max
for Q3=q3min:(q3max-q3min)/7:q3max;
for Q4=q4min:(q4max-q4min)/7:q4max;
for Q5=q5min:(q5max-q5min)/7:q5max;

```



**Título:** Tesis Final – RT2 Apolo Cinemática

**Curso:** R6055    **Código:** 950482

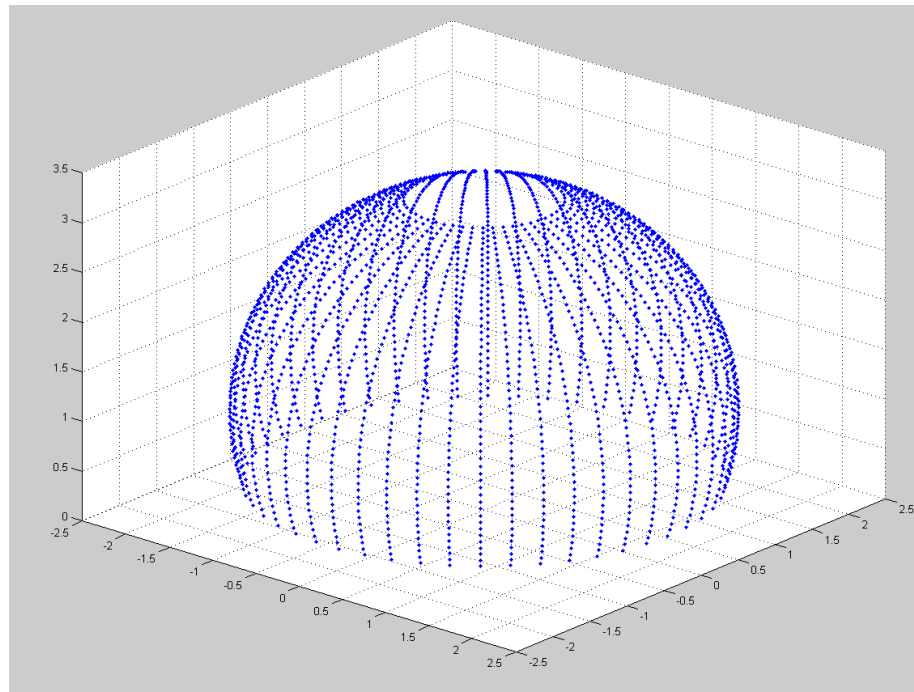
Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires

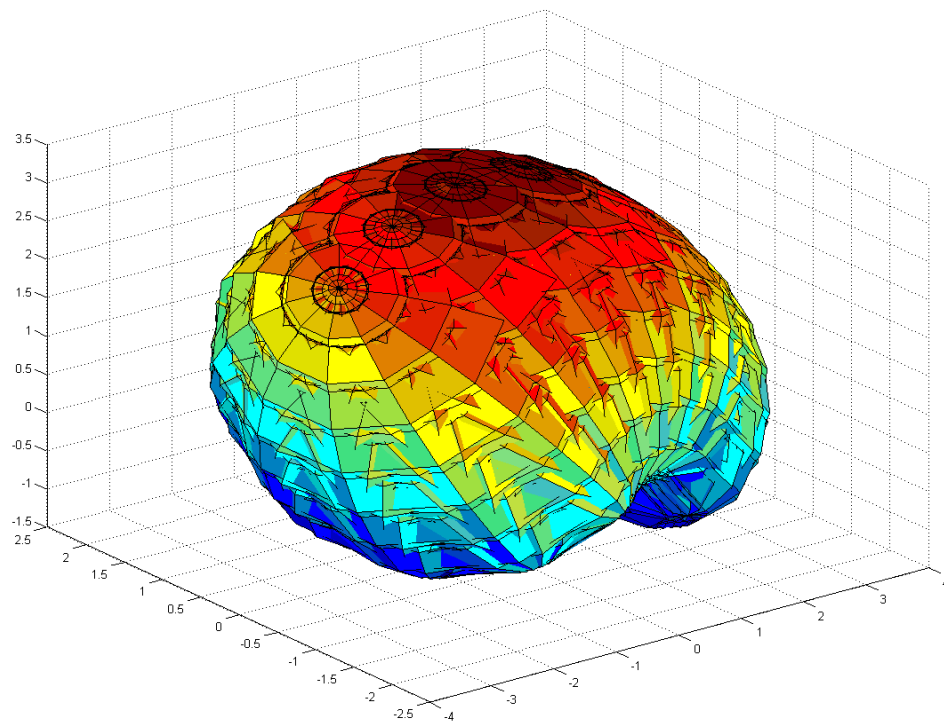
```
C1=cos(Q1);
C2=cos(Q2);
C3=cos(Q3);
C4=cos(Q4);
C5=cos(Q5);
C6=cos(Q6);
S1=sin(Q1);
S2=sin(Q2);
S3=sin(Q3);
S4=sin(Q4);
S5=sin(Q5);
S6=sin(Q6);
px=L4*(C1*C2*C4*S3*S5+C3*C4*S1*S5+C1*S2*S4*S5-C1*C2*C3*C5+C5*S1*S3)+L3*(-
C1*C2*C3+S1*S3)+L2*(-C1*C2*S3-C3*S1)-L1*S1;
py=L4*(C2*C4*S1*S3*S5-C1*C3*C4*S5+S1*S2*S4*S5-C2*C3*C5*S1-C1*C5*S3)+L3*(-C2*C3*S1-
C1*S3)+L2*(-C2*S1*S3+C1*C3)+L1*C1;
pz=L4*(-C4*S2*S3*S5+C2*S4*S5+C3*C5*S2)+L3*C3*S2+L2*S2*S3;
X=cat(2,X,px);
Y=cat(2,Y,py);
Z=cat(2,Z,pz);
end
end
end
end
surf(X,Z,Y)
axis square
```



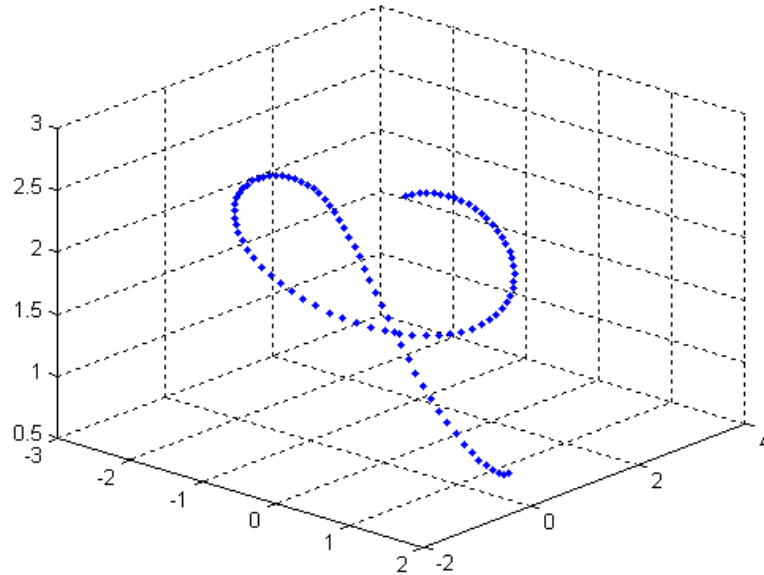
## 5.2 Figuras



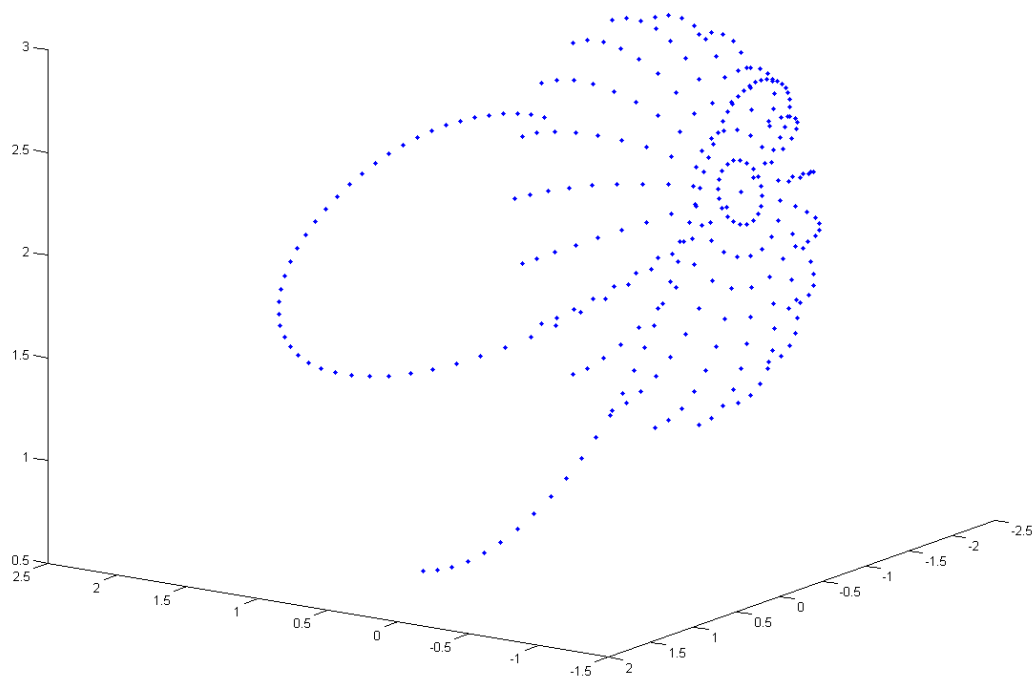
Área de trabajo por rotación de  $\theta_2$  y  $\theta_3$



Área de trabajo por rotación de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  y  $\theta_6$



Recorrido realizado al barrer todas las posiciones desde su posición mínima hasta la máxima



Orientaciones de la muñeca del robot para  $\theta_1=\theta_2=\theta_3=0$



## **6. Conclusiones**

Por medio del trabajo realizado se pudo verificar la validez de las teorías de análisis de las cadenas cinemática directa e inversa tanto analíticamente como gráficamente mediante Matlab. También se observa el potencial uso de esta metodología de trabajo para poder programar los recorridos deseados de un robot manipulador o conocer cuál será el efecto final del extremo del mismo para cada posición o movimiento en sus articulaciones.

Por otro lado mediante la gráfica de todos los valores posibles del extremo del robot en la simulación de Matlab se obtuvo el espacio de trabajo o workspace del robot que permite corroborar si podrá satisfacer las necesidades en la aplicación en que se lo utilice.

## **7. Bibliografía y referencias**

- Barrientos, A.; Peñín, L.; Balaguer, C. & Aracil, R. "Fundamentos de Robótica". 2da Edición. McGraw Hill, 2007.
- Presentación de Clase - Unidad Temática 3
- [http://www.angelfire.com/extreme/greynosom/archivos/Cinemática\\_Robot.pdf](http://www.angelfire.com/extreme/greynosom/archivos/Cinemática_Robot.pdf)
- [http://icaro.eii.us.es/descargas/Tema4\\_parte3.pdf](http://icaro.eii.us.es/descargas/Tema4_parte3.pdf)
- [http://jestrugooglepages.com/Cinemática\\_del\\_robot.pdf](http://jestrugooglepages.com/Cinemática_del_robot.pdf)
- [http://www.uhu.es/omar\\_sanchez/](http://www.uhu.es/omar_sanchez/)
- <http://www.monografias.com/trabajos-pdf/cinetica-cuerpo-rigido/cinetica-cuerpo-rigido.pdf>