# 1. Lista 1

### 1.1.

### 1.2.

### 1.3.

### 1.4.

### 1.5.

### 1.6.

treść

### 1.7.

treść

### 1.8.

treść

### 1.9.

### 1.10.

treść

### 1.11.

### 1.12.

### 1.13.

treść

### 1.14.

Pokaż, że dla dowolnego $x \leqslant 0$:

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor$$

*Dowód.* $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = n$ gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 0$. Z definicji podłogi:

$$n \leqslant \sqrt{\lfloor x \rfloor} < n + 1 \Leftrightarrow n^2 \leqslant \lfloor x \rfloor < (n+1)^2$$

Ponieważ $n^2$ i $(n+1)^2$ są liczbami naturalnymi to w oczywisty sposób zachodzi:

$n^2 \leqslant \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow n^2 \leqslant x$, oraz: $\lfloor x \rfloor < (n+1)^2 \Leftrightarrow x < (n+1)^2$
Zatem:

$$n^2 \leqslant x < (n+1)^2$$

Ponieważ $x > 0$ i $n > 0$, oraz korzystając z definicji podłogi:

$$n \leqslant \sqrt{x} < n+1 \Leftrightarrow \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = n$$

Zatem:

$$n \leqslant \sqrt{\lfloor x \rfloor} < n+1 \Leftrightarrow n^2 \leqslant \lfloor x \rfloor < (n+1)^2$$

$\square$

## 1.15.