

Элементы криптографического анализа

Автор курса: Тимонина Елена Евгеньевна
Составитель: Смирнов Дмитрий Константинович

2022 г.

Оглавление

1	Домашние задания	1
1.1	Введение	1
1.2	Определение шифра. Простейшие примеры.	1
1.3	Стойкость шифров. Метод полного перебора.	2

Часть 1

Домашние задания

1.1 Введение

1.2 Определение шифра. Простейшие примеры.

Задача 2.1 Что такое подстановка? Подстановка — это взаимно однозначная функция, которая переводит буквы алфавита в буквы того же самого алфавита.

Задача 2.2 Что такое группа, и почему множество S_m из примера 2.1 образует группу? Множество $G \neq \emptyset$ с бинарной операцией " \circ ", называется *группой*, если выполнены условия:

1. $\forall a, b \in G \quad a \circ b \in G$;
2. $\forall a, b, c \in G \quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$;
3. $\exists e \in G: \forall a \in G \quad e \circ a = a \circ e = a$;
4. $\forall a \in G \quad \exists b \in G: a \circ b = b \circ a = e$

Множество S_m вводится как множество всех подстановок на конечном алфавите $A = \{a_1, \dots, a_m\}$. Проверим выполнение аксиом группы:

1. Подстановка $k \in S_m$ — отображение $k: A \rightarrow A$. $\forall k_1, k_2 \in S_m$ рассмотрим суперпозицию $k_1 \circ k_2$. Так как $k_1 \circ k_2: A \rightarrow A \rightarrow A$, то $k_1 \circ k_2 \in S_m$ и первая аксиома верна.

2. $\forall k_1, k_2, k_3 \in S_m \quad k_1 \circ (k_2 \circ k_3) = k_1 \circ k_2(k_3(a)) = k_1(k_2(k_3(a))) = k_1(k_2(a)) \circ k_3(a) = (k_1 \circ k_2) \circ k_3$.

3. Поскольку S_m — множество всех подстановок, то найдётся тождественная подстановка: $\exists e \in S_m: \forall a \in A \quad e(a) = a$. Тогда $\forall k \in S_m$ верно $e \circ k = e(k(a)) = k(a) = k(e(a)) = k \circ e$.

4. Так как подстановка — взаимно однозначная функция, то $\forall k \in S_m$ существует обратная функция: $\exists k^{-1}: A \rightarrow A \Rightarrow k^{-1} \in S_m$, для которой

будет выполнено равенство $k \circ k^{-1} = k(k^{-1}(a)) = k^{-1}(k(a)) = k^{-1} \circ k$. При этом, $\forall a \in A \quad k^{-1}(k(a)) = a = e(a)$.

Выполнены все аксиомы группы, следовательно S_m – группа.

Задача 2.3 Почему группа S_n из примера 2.2 является симметрической? Симметрической группой n -го порядка называется множество $S(X)$ всех биективных отображений $f: X \rightarrow X$, где X – конечное множество из n элементов. Группа S_n в примере 2.2 определяется как группа подстановок на множестве $X = \{1, \dots, n\}$. Подстановка – это биективное отображение, X – конечное множество из n элементов. Следовательно, по определению, группа S_n является симметрической.

Задача 2.4 Что такое кольцо? Что такое кольцо вычетов по модулю m ?

Множество K называется *кольцом*, если в K определены две операции $+$ (сложение) и \cdot (умножение) и выполняются следующие условия $\forall a, b, c \in K$:

1. $a + b \in K, a \cdot b \in K$;
2. $a + (b + c) = (a + b) + c, a(bc) = (ab)c$;
3. $a + b = b + a$;
4. $(a + b)c = ac + bc$;
5. $\exists 0 \in K: a + 0 = a$.

Кольцом вычетов по модулю m называется такое кольцо

$\mathbb{Z}/m = \{C_0, C_1, \dots, C_{m-1}\}$ (C_r – смежный класс вычетов по модулю m), в котором операции сложения и умножения определяются следующими правилами:

1. $C_a + C_b = C_r$, где $r \equiv (a + b) \pmod{m}$;
2. $C_a C_b = C_r$, где $r \equiv ab \pmod{m}$

То есть, $C_a + C_b$ – это класс, в который входит число $a + b$, а $C_a C_b$ – класс, в который входит число ab .

Задача 2.5 Какую алгебраическую структуру представляет собой кольцо \mathbb{Z}/m при $m = 2$?

Теорема 1. Если p – простое число и $p \geq 2$, то \mathbb{Z}/p – поле характеристики p .

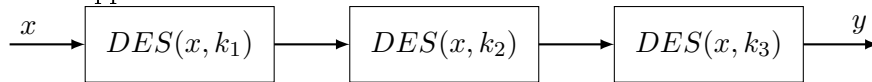
По теореме 1 кольцо $\mathbb{Z}/2$ является полем характеристики 2.

1.3 Стойкость шифров. Метод полного перебора.

Задача 3.1 Дан алфавит $A = \{1, 2, \dots, n\}$, x – открытый текст в алфавите A . Ключ шифрования (T_1, T_2, T_3) , где T_i – случайные подстановки.

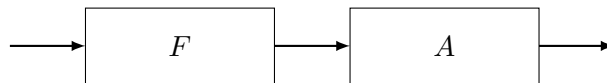
Алгоритм шифрования: $T_3(T_2(T_1(x))) = y$. Какова формула для рас-
шифрования? Мощность пространства различных ключей? Сложность
МПП?

Задача 3.2 Найти минимальную среднюю трудоёмкость в следующей
схеме шифрования:



Задача 3.3 В сообщении каждая буква записывается два раза. Для
шифрования используется шифр перестановки длины $2n$. Сложность
МПП?

Задача 3.4



В данной схеме байт ОТ $x = x_1x_2...x_8$ шифруется с помощью функ-
ции F следующим образом:

$$x'_1 = x_1;$$

$$x'_2 = x_2 + f_1(x_1);$$

...

$$x'_8 = x_8 + f_8(x_1, x_2, \dots, x_7),$$

где f_1, \dots, f_7 – случайные булевы функции. A – невырожденная матри-
ца. Ключом являются F и A . Оценить сложность нахождения ключа с
помощью МПП.

Задача 3.5 Ключ шифрования k – многочлен Жегалкина степени 2.
Мощность пространства различных ключей? Сложность МПП?

Задача 3.6 Ключ шифрования k – многочлен Жегалкина степени не
выше m . Мощность пространства различных ключей? Сложность МПП?

Задача 3.7 Ключ шифрования k – многочлен вида:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j, a_{ij} \in \{0, 1\}.$$

Мощность пространства различных ключей? Сложность МПП?