Математические основы криптологии

Автор курса: Применко Эдуард Андреевич
Составитель: Смирнов Дмитрий Константинович

Версия от 15:51, 15 мая 2022 г.

Оглавление

Часть 1

Домашние задания

1.1 Теоретико-числовые методы и алгоритмы

Задачи в этом разделе решаются со следующими параметрами:

p	g	k
23	-8	22

Задача 1.1 Убедиться, что $g \in \mathbb{Z}_p^*$ – примитивный элемент $\mathbb{Z}_p$.
Решение.

Так как $p = 23$ – простое число, то $\phi(p) = p - 1 = 22$. Разложим это число на простые множители: $\phi(p) = 2 \cdot 11$. Тогда достаточно проверить следующие 2 неравенства:

$$g^{\frac{\phi(p)}{2}} = (-8)^{11} = 15 \cdot 15^{10} = 15 \cdot 18^5 = 17 \cdot 2^2 = 22 \not\equiv 1 \pmod{p},$$

$$g^{\frac{\phi(p)}{11}} = (-8)^2 = 18 \not\equiv 1 \pmod{p},$$

Делаем вывод, что g действительно является примитивным элементом $\mathbb{Z}_p$.

Задача 1.2 Найти образующий элемент h группы $\mathbb{Z}_{p^2}^*$
Решение.

Образующий элемент группы $\mathbb{Z}_{p^n}^*, n \geq 2$ имеет вид:

$$h = g + t_0 p,\ t_0 \not\equiv g\nu \pmod{p};\ \nu = (\frac{g^{\frac{p-1}{2}} + 1}{p})(\text{mod } p) \cdot (-2)(\text{mod } p)$$

Таким образом,

$$\nu = (\frac{(-8)^{\frac{23-1}{2}} + 1}{23})(\text{mod } 23) \cdot (-2)(\text{mod } 23) = (1 \cdot (-2))(\text{mod } 23) = 21$$

$$t_0 \not\equiv (-8) \cdot 21 \pmod{23} = 16 \pmod{23}$$

$$t_1 = 1 \Rightarrow h = (-8) + 1 * 23 = 15$$

Следовательно, $h = 15$ – образующий элемент группы $\mathbb{Z}_{23^2}^*$

Задача 1.3 Подсчитать число образующих группы $\mathbb{Z}_{p^3}^*$
Решение.

Число образующих группы $\mathbb{Z}_{23^3}^*$ равно $\phi(23^3) = (23-1)23^{3-1} = 11638$.

Задача 1.4 Найти элемент a группы $\mathbb{Z}_{p^2}^*$ порядка k
Решение.

Так как $\forall$ натурального $k > 1$ и простого $p \geq 3$ группа $\mathbb{Z}_{p^k}^*$ является циклической, то $\mathbb{Z}_{23^2}^*$ – циклическая группа. Элемент порядка k в циклической группе порядка N имеет вид h^r, где $r = \frac{N}{k}$. Таким образом,

$$a = h^{\frac{\phi(p^2)}{k}} = 15^{\frac{22*23}{22}} = 15^{23} = 130$$

Задача 1.5 Решить сравнение $a^x \equiv b \pmod p$
Решение.

p	**a**	**b**
701	2	163

I. Алгоритм согласования

1. Убедимся в том, что $a = 2$ – примитивный элемент группы $\mathbb{Z}_{701}$.

$$\phi(701) = 700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$g^{\frac{\phi(p)}{2}} = 2^{350} = 700 \not\equiv 1 \pmod p,$$

$$g^{\frac{\phi(p)}{5}} = 2^{140} = 210 \not\equiv 1 \pmod p,$$

$$g^{\frac{\phi(p)}{7}} = 2^{100} = 19 \not\equiv 1 \pmod p,$$

$$g^{\phi(p)} = 2^{700} = 1 \equiv 1 \pmod p,$$

Таким образом, порядок элемента a равен $ord(a) = 700$.

2. Выбираем минимальное m: $m^2 \geq ord(a) \Rightarrow m = 27$.

3. Вычисляем $c = a^m = 2^{27} = 62$.

4. Составляем два множества:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
c^i	62	339	689	658	138	144	516	447	375	117	244	407	699	577

i	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
c^i	23	24	86	425	413	370	508	652	467	213	588	4	248

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ba^j	163	326	652	603	505	309	618	535	369	37	74	148	296	592

j	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
ba^j	483	265	530	359	17	34	68	136	272	544	387	73	146

В таблицах совпадают элементы под номерами $i = 22$ и $j = 2$.

5. Таким образом, $x = mi - j = 27 \cdot 22 - 2 = 592$.

Ответ: $x = 592$.

II. Алгоритм Полига-Хеллмана

Порядок поля $\mathbb{Z}_{701}$ равен $N = \phi(701) = 700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. Количество простых множителей в разложении этого числа $t = 3$.

1. Вычисляем матрицу с элементами $(i, j) = a^{j\frac{N}{p_i}}$, $i = \overline{1, t}$, $j = \overline{0, p_i - 1}$:

p_i \ j	0	1	2	3	4	5	6
2	$2^{0\cdot\frac{700}{2}}$	$2^{1\cdot\frac{700}{2}}$	-	-	-	-	-
5	$2^{0\cdot\frac{700}{5}}$	$2^{1\cdot\frac{700}{5}}$	$2^{2\cdot\frac{700}{5}}$	$2^{3\cdot\frac{700}{5}}$	$2^{4\cdot\frac{700}{5}}$	-	-
7	$2^{0\cdot\frac{700}{7}}$	$2^{1\cdot\frac{700}{7}}$	$2^{2\cdot\frac{700}{7}}$	$2^{3\cdot\frac{700}{7}}$	$2^{4\cdot\frac{700}{7}}$	$2^{5\cdot\frac{700}{7}}$	$2^{6\cdot\frac{700}{7}}$

p_i \ j	0	1	2	3	4	5	6
2	1	700	-	-	-	-	-
5	1	210	638	89	464	-	-
7	1	19	361	550	636	167	369

2. Далее находим $x_i = \log_a b \pmod{p_i^{k_i}} = \gamma_0+\gamma_1 p_i+...+\gamma_{k_i-1}p_i^{k_i-1}, \gamma_j \in \mathbb{Z}_p$. Последовательно находим γ_j из $M(p,\gamma_j) = b_j^{\frac{N}{p^{j+1}}}$, где $b_j = ba^{-\gamma_0-\gamma_1 p-...-\gamma_{j-1}p^{j-1}}$, а M – определённая выше матрица.

а) $x_1 = \log_2 163 \pmod{2^2},\ p=2,\ k=2$

$M(p,\gamma_0) = b^{\frac{N}{p}} = 163^{\frac{700}{2}} = 1 \Rightarrow \gamma_0 = 0,\ b_1 = ba^{-\gamma_0} = 163\cdot 2^{-0} = 163$

$M(p,\gamma_1) = b_1^{\frac{N}{p^2}} = 163^{\frac{700}{4}} = 1 \Rightarrow \gamma_1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = \gamma_0 + \gamma_1 p = 0 + 0\cdot 2 = 0$

б) $x_2 = \log_2 163 \pmod{5^2},\ p=5,\ k=2$

$M(p,\gamma_0) = b^{\frac{N}{p}} = 163^{\frac{700}{5}} = 638 \Rightarrow \gamma_0 = 2,\ b_1 = ba^{-\gamma_0} = 163\cdot 2^{-2} = 216$

$M(p,\gamma_1) = b_1^{\frac{N}{p^2}} = 216^{\frac{700}{25}} = 89 \Rightarrow \gamma_1 = 3$

$\Rightarrow x_2 = \gamma_0 + \gamma_1 p = 2 + 3\cdot 5 = 17$

в) $x_3 = \log_2 163 \pmod 7,\ p=7,\ k=1$

$M(p,\gamma_0) = b^{\frac{N}{p}} = 163^{\frac{700}{7}} = 636 \Rightarrow \gamma_0 = 4$

$\Rightarrow x_3 = \gamma_0 = 4$

3. На основе вычисленных выше значений $x_1, x_2, ..., x_t$ и китайской теоремы об остатках находим искомый логарифм:

$$x = \sum x_i \frac{N}{p_i^{k_i}}[(\frac{N}{p_i^{k_i}})^{-1} \pmod{p_i^{k_i}}] \pmod N = 0\cdot\frac{700}{2^2}[(\frac{700}{2^2})^{-1} \pmod{2^2}]+$$

$$+17\cdot\frac{700}{5^2}[(\frac{700}{5^2})^{-1} \pmod{5^2}] + 4\cdot\frac{700}{7}[(\frac{700}{7})^{-1} \pmod 7] \pmod{700} =$$

$$= 476\cdot[28^{-1} \pmod{25}] + 400\cdot[100^{-1} \pmod 7] \pmod{700} =$$

$$= 476\cdot 17 + 400\cdot 4 \pmod{700} = 592$$

Ответ: $x = 592$.

1.2 Квадратичные вычеты, сравнения, символ Лежандра.

Докажем вспомогательные леммы.

Лемма 2.1 Если $p = 2^m + 1$ – простое и $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, то $\langle a \rangle = \mathbb{Z}_p^*$.

◪ По определению первообразного корня достаточно доказать два утверждения: $a^{\phi(p)} = a^{2^m} \equiv 1 \pmod{p}$ и $a^{\frac{\phi(p)}{2}} = a^{2^{m-1}} \not\equiv 1 \pmod{p}$.

$$a^{2^{m-1}} = a^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{a}{p}\right) = -1 \not\equiv 1 \pmod{p},$$

$$a^{2^m} = (a^{2^{m-1}})^2 = (-1)^2 = 1 \equiv 1 \pmod{p}.$$

◪

Лемма 2.2 Если число $p = 2^m + 1$ – простое, $m > 1$, то $p \equiv 2 \pmod{3}$.

◪ По теореме о делении с остатком, число p представимо в виде:

$$p = 3k + t, 0 \leq t < 3.$$

Рассмотрим данное равенство при различных t.

а) $t = 0 \Rightarrow p = 3k$, то есть, p не является простым числом при $k > 1$ (а значит, при $m > 1$). Противоречие $\Rightarrow t \neq 0$.

б) $t = 1 \Rightarrow 2^m = 3k$ – этого не может быть ни при каком целом k по лемме Евклида (по крайней мере один из сомножителей числа 2^m должен делиться на 3). Следовательно, $t \neq 1$.

Тогда $t = 2$ – единственный вариант, $p = 3k + 2$.

◪

Лемма 2.3 Если $p = 2^{2^n} + 1$, $n > 1$, то $p \equiv 2 \pmod{5}$.

◪ Докажем по индукции.

1) При $n = 2$ утверждение верно: $2^{2^2} + 1 = 17 \equiv 2 \pmod{5}$.

2) Пусть для $n = m$ верно, докажем для $n = m + 1$:

$$2^{2^{m+1}} + 1 = (2^{2^m} + 1 - 1)^2 + 1 = (2 - 1)^2 + 1 = 2 \equiv 2 \pmod{5}.$$

◪

Лемма 2.4 Если $p = 2^{2^n} + 1$, $n = 2k$, то $p \equiv 3 \pmod 7$.

◪ Докажем по индукции.

1) При $k = 0$ утверждение верно: $2^{2^0} + 1 = 3 \equiv 3 \pmod 7$.

2) Пусть для $k = m$ верно, докажем для $k = m + 1$:

$$2^{2^{2(m+1)}} + 1 = (2^{2^{2m}} + 1 - 1)^4 + 1 = (3-1)^4 + 1 = 17 \equiv 3 \pmod 7$$

◪

Лемма 2.5 Если $p = 2^{2^n} + 1$, $n = 2k + 1$, то $p \equiv 5 \pmod 7$.

◪ Докажем по индукции.

1) При $k = 0$ утверждение верно: $2^{2^1} + 1 = 5 \equiv 5 \pmod 7$.

2) Пусть для $k = m$ верно, докажем для $k = m + 1$:

$$2^{2^{2(m+1)+1}} + 1 = (2^{2^{2m+1}} + 1 - 1)^4 + 1 = (5-1)^4 + 1 = 257 \equiv 5 \pmod 7$$

◪

Задача 2.1 Доказать, что сравнение $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$ разрешимо тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod 4$.

Решение.

$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$ – разрешимо $\Leftrightarrow \left(\frac{-1}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$
$\Leftrightarrow \frac{p-1}{2} = 2k \Leftrightarrow p = 4k + 1 \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod 4$

Задача 2.2 Доказать, что сравнение $x^2 + 2 \equiv 0 \pmod p$ разрешимо тогда и только тогда, когда $p = 1, 3 \pmod 8$.

Решение.

$x^2 + 2 \equiv 0 \pmod p$ – разрешимо $\Leftrightarrow \left(\frac{-2}{p}\right) = 1. \Leftrightarrow \left\{ \left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \right.$
$\left. \cdot \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \right\} \Leftrightarrow \frac{p-1}{2} + \frac{p^2-1}{8} = 2k \Leftrightarrow p^2 + 4p - 16k - 5 = 0.$

Представим p, используя теорему о делении с остатком, в следующем виде: $p = 8m + t,\ 0 \le t < 8$. Решим полученную систему относительно t.

$(8m + t)^2 + 4(8m + t) - 16k - 5 = 0$

$t^2 + (16k + 4)t + 64k^2 + 32k - 16m - 5 = 0$

$t_{1,2} = -8k - 2 \pm \sqrt{16m + 9} \pmod 8 = -2 \pm 3 \pmod 8 \Rightarrow t = 1, 3$

Тогда $p^2 + 4p - 16k - 5 = 0 \Leftrightarrow p = 1, 3 \pmod 8$.

Задача 2.3 Доказать, что сравнение $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod p$ разрешимо тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod 6$.

Решение.

Пусть $p = 3k + t, t < 3$.

$x^2 + 3 \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow \left(\frac{-3}{p}\right) = 1$.

$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{3-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{3k+t-1}\left(\frac{t}{3}\right)$

а) $t = 0 \Rightarrow \left(\frac{0}{3}\right) = 0, (-1)^{3k+t-1}\left(\frac{t}{3}\right) = 0 \neq 1$

б) $t = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right) = 1, (-1)^{3k+t-1}\left(\frac{t}{3}\right) = (-1)^{3k} \cdot 1 = (-1)^{3k}$.

в) $t = 2 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right) = -1, (-1)^{3k+t-1}\left(\frac{t}{3}\right) = (-1)^{3k+1} \cdot (-1) = (-1)^{3k}$

$(-1)^{3k} = 1 \Leftrightarrow k = 2m \Leftrightarrow p = 6m + 1 \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod 6$

Задача 2.4 Доказать, что если $p = 2^n + 1$ – простое, $n > 2$, то $\left(\frac{3}{p}\right) = -1$ и $\langle 3\rangle = \mathbb{Z}_p^*$.

Решение.

$p = 3k + 2$ по лемме 2.2.

$\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2}\cdot\frac{2^n+1-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{2^{n-1}}\left(\frac{2}{3}\right) = -1$

Выполнены все условия леммы 2.1 $\Rightarrow \langle 3\rangle = \mathbb{Z}_p^*$.

Задача 2.5 Доказать, что если $p = 2^n + 1$ – простое и $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, то $\langle a\rangle = \mathbb{Z}_p^*$.

Решение.

Доказано в качестве леммы 2.1.

Задача 2.6 Доказать, что если $p = 4q + 1$, p и q – простые, то $\langle 2\rangle = \mathbb{Z}_p^*$.

Решение.

По определению первообразного корня достаточно доказать три утверждения:

1) $2^{\phi(p)} = 2^{4q} \equiv 1 \pmod p$,

2) $2^{\frac{\phi(p)}{2}} = 2^{2q} \not\equiv 1 \pmod p$,

3) $2^{\frac{\phi(p)}{q}} = 2^4 \not\equiv 1 \pmod p$.

Начнём с третьего. Представим 2^4 в следующем виде: $2^4 = pk + t$, $0 \leq t < p$. Значит, нам нужно доказать, что $t \neq 1$. Предположим, что это не так, тогда $pk = 2^4 - 1 = 15$. Обратим внимание на условие: если и p, и q – простые числа, то p не может быть ни 3, ни 5. Значит, в левой части равенства содержится простой множитель, которого нет в правой части. Мы получили противоречие, а значит, $t \neq 1 \Rightarrow 2^{\frac{\phi(p)}{q}} = 2^4 \not\equiv 1 \pmod p$.

Рассмотрим теперь второе утверждение. Заметим, что:

$$\left(\frac{2}{4q+1}\right) = 2^{\frac{4q+1-1}{2}} = 2^{2q} \pmod{4q+1}.$$

Вычислим $\left(\frac{2}{4q+1}\right) = (-1)^{\frac{(4q+1)^2-1}{8}} = (-1)^{2q^2+q} = \{q - \text{нечет}\} = -1$. Тем самым мы доказали второе утверждение.

Поскольку $2^{4q} = (2^{2q})^2 = (-1)^2 = 1 \pmod{4q+1}$, то первое утверждение становится следствием второго.

Задача 2.7 Доказать, что если $p = 2^{2^n} + 1$ – простое и $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, то $\langle a \rangle = \mathbb{Z}_p^*$.

Решение.

Приняв $m = 2^n$ в лемме 2.1, получим справедливость данного утверждения.

Задача 2.8 Доказать, что если $p = 2^{2^n} + 1$ – простое, $n > 2$, то $\langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle = \langle 7 \rangle = \mathbb{Z}_p^*$.

Решение.

Покажем $\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{7}{p}\right) = -1$.

$2^{2^n} + 1 = 3k + 2$ по лемме 2.2.

$$\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2}\cdot\frac{2^{2^n}+1-1}{2}} \left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{2^{2^n}-1} \left(\frac{3k+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = 2^{\frac{3-1}{2}} \pmod 3 = -1$$

$2^{2^n} + 1 = 5k + 2$ по лемме 2.3.

$$\left(\frac{5}{p}\right) = (-1)^{\frac{5-1}{2}\cdot\frac{2^{2^n}+1-1}{2}} \left(\frac{p}{5}\right) = (-1)^{2^{2^n}} \left(\frac{5k+2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = 2^{\frac{5-1}{2}} \pmod 5 = -1$$

$2^{2^n} + 1 = 7k + 3,\ n = 2t$ по лемме 2.4.

$$\left(\frac{7}{p}\right) = (-1)^{\frac{7-1}{2}\cdot\frac{2^{2^n}+1-1}{2}} \left(\frac{p}{7}\right) = (-1)^{2^{2^n}} \left(\frac{7k+3}{7}\right) = \left(\frac{3}{7}\right) = 3^{\frac{7-1}{2}} \pmod 7 = -1$$

$2^{2^n} + 1 = 7k + 5,\ n = 2t + 1$ по лемме 2.5.

$$\left(\frac{7}{p}\right) = \left(\frac{5}{7}\right) = 5^{\frac{7-1}{2}} \pmod 7 = -1.$$

Осталось применить лемму 2.1, и исходное утверждение будет доказано.

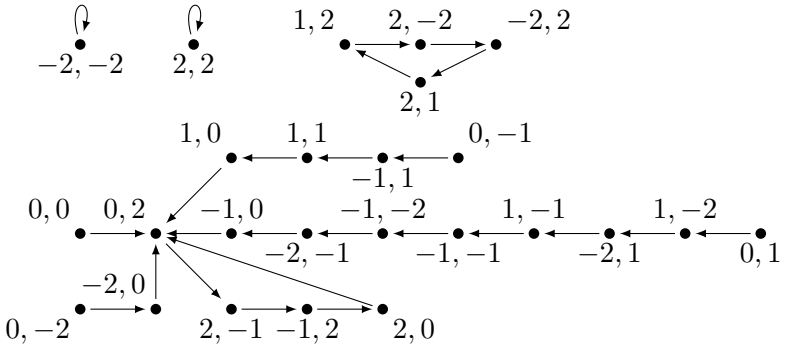
1.3 Рекуррентные последовательности.

Задача 3.1 $F = GF(5)$. Построить граф отображения и найти период РП, заданной характеритической функцией:

$$x_i = x_{i-1} + 2x_{i-2}x_{i-1} + 2.$$

Начальное заполнение: $12 = \gamma_1 + 5\gamma_2$ ($\gamma = (2, 2)$).

Решение.



В случае $\gamma = (2, 2)$ последовательность оказывается полностью состоящей из двоек, поэтому период такой последовательности будет равен единице.

Задача 3.2 Над полем $GF(2)$ построить ЛРП периода T и ранга n и указать начальное заполнение.

$T = 84, n = 8$.

Решение.

Разложим T на множители: $T = 84 = 4 \cdot 3 \cdot 7$.

ЛРП$_1$ с периодом 4 соответствует минимальный многочлен

$$f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1,\ x_i = x_{i-1} + x_{i-2} + x_{i-3}.$$

ЛРП$_2$ с периодом 3 соответствует минимальный многочлен

$$f_2(x) = x^2 + x + 1,\ x_i = x_{i-1} + x_{i-2}.$$

ЛРП$_3$ с периодом 7 соответствует минимальный многочлен

$$f_3(x) = x^3 + x + 1,\ x_i = x_{i-2} + x_{i-3}$$

Искомый характеристический многочлен

$$f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1) = x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$x_i = x_{i-4} + x_{i-5} + x_{i-6} + x_{i-7} + x_{i-8}.$$

Выберем начальные заполнения для ЛРП$_{1-3}$, отличные от нуля, и получим первые начальные отрезки ЛРП длины $n = 8$:

$$\widetilde{\alpha}_1 = 001 \Rightarrow \widetilde{\beta}_1 = 00110011$$

$$\widetilde{\alpha}_2 = 01 \Rightarrow \widetilde{\beta}_2 = 01101101$$

$$\widetilde{\alpha}_3 = 001 \Rightarrow \widetilde{\beta}_3 = 00101110$$

Искомое начальное заполнение:

$$\widetilde{\beta} = \widetilde{\beta}_1 \oplus \widetilde{\beta}_2 \oplus \widetilde{\beta}_3 = 01110000.$$

Ответ: $f(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $\widetilde{\beta} = 01110000$.

1.4 Шифр гаммирования

Задача 4.1 Зашифровать свою фамилию, используя шифр гаммирования с ЛРП из задачи 3.2.

Решение.

Кодирование алфавита приведено в следующей таблице:

А	00000	И	01000	Р	10000	Ш	11000
Б	00001	Й	01001	С	10001	Щ	11001
В	00010	К	01010	Т	10010	Ъ	11010
Г	00011	Л	01011	У	10011	Ы	11011
Д	00100	М	01100	Ф	10100	Ь	11100
Е	00101	Н	01101	Х	10101	Э	11101
Ж	00110	О	01110	Ц	10110	Ю	11110
З	00111	П	01111	Ч	10111	Я	11111

ЛРП задана многочленом $f(x) = x^8+x^4+x^3+x^2+x+1$, $\widetilde{k} = 01110000$, $M =$ СМИРНОВ. Согласно кодовой таблице получим:

$$\widetilde{M} = 10001\ 01100\ 01000\ 10000\ 01101\ 01110\ 00010$$

Получаем гамму:

$$\widetilde{\Gamma} = 01110\ 00011\ 01100\ 10101\ 00010\ 01011\ 00011$$

Получим шифротекст:

$$\widetilde{T} = 11111\ 01111\ 00100\ 00101\ 01111\ 00101\ 00001$$

Представим его в буквенном виде.

Ответ: $T =$ ЯПДЕПЕБ.

1.5 Теория групп

Задача 5.1 Определить структуру группы $\mathbb{Z}_n^*$, разложить её в прямое произведение циклических подгрупп и подсчитать число элементов различного порядка, $n = 84$.

Решение.

$|G| = \phi(84) = \phi(2^2) \cdot \phi(3) \cdot \phi(7) = (4-2)(3-1)(7-1) = 24 = 2^3 \cdot 3$. Следовательно, $G \cong S_1(8) \times S_2(3)$.

1. Определим структуру примарной группы $S_1(8)$. Для этого нужно решить сравнение:

$$x^2 \equiv 1 \pmod{84}.$$

По КТО это равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod 3 \\ x^2 \equiv 1 \pmod 4 \\ x^2 \equiv 1 \pmod 7 \end{cases}$$

$p = 3 = 4 \cdot 0 + 3 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right) = 1$ – два решения: $x_1 \equiv \pm 1^{0+1} \pmod 3$.
$p = 4 = 2^2,\ a = 1 \Rightarrow$ два решения: $x_2 = \pm 1 \pmod 4$.
$p = 7 = 4 \cdot 1 + 3 \Rightarrow \left(\frac{1}{7}\right) = 1$ – два решения: $x_3 \equiv \pm 1^{1+1} \pmod 7$.
Общее решение системы по КТО будет равно:

$$X = x_1(4\cdot 7)[(4\cdot 7)^{-1} \pmod 3] + x_2(3\cdot 7)[(3\cdot 7)^{-1} \pmod 4] +$$
$$+ x_3(3\cdot 4)[(3\cdot 4)^{-1} \pmod 7] \pmod{84} = 28x_1 + 21x_2 + 36x_3 \pmod{84}$$

Таким образом, множество элементов второго порядка группы G это:

$$M_2 = \{13, 43, 55, 29, 41, 71, 83\}.$$

Обозначим за $A_i = \langle M_{2,i} \rangle$, где $M_{2,i}$ – i-тый элемент множества M_2. Тогда $S_1(8) \cong A_i \times A_j \times A_k$, $i, j, k = \overline{1,7}$.

2. Определим структуру примарной группы $S_2(3)$. Для этого нужно решить сравнение:

$$x^3 \equiv 1 \pmod{84}.$$

По КТО это равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^3 \equiv 1 \pmod 3 \\ x^3 \equiv 1 \pmod 4 \\ x^3 \equiv 1 \pmod 7 \end{cases}$$

Первые два сравнения, очевидно, имеют единственные решения $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Последнее сравнение имеет 3 решения: $x_3 = \{1, 2, 4\}$. Общее решение исходного сравнения будет равно:

$$X = 28x_1 + 21x_2 + 36x_3 \pmod{84} = 49 + 36x_3 \pmod{84}$$

Множество элементов третьего порядка группы G это:

$$M_3 = \{25, 37\}$$

Таким образом, $S_2(3) = \langle 25 \rangle = \langle 37 \rangle$.

Ответ: $G \cong A_i \times A_j \times A_k \times \langle 25 \rangle = A_i \times A_j \times A_k \times \langle 37 \rangle$, $i, j, k = \overline{1, 7}$.

Задача 5.2 Доказать, что $y = x^3$ – подстановка над $\mathbb{Z}_p$, если $p \equiv 2 \pmod 3$, то есть,

$$x_1^3 \equiv x_2^3 \pmod p \Rightarrow x_1 \equiv x_2 \pmod p.$$

Решение.

Поле $\mathbb{Z}_p$ имеет порядок $\phi(p) = p - 1$. Из $x_1^3 \equiv x_2^3 \pmod p$ получим, что $(x_1 x_2^{-1})^3 \equiv 1 \pmod p$. Тогда порядок $x_1 x_2^{-1}$ является делителем 3. Существует два варианта:

1. $\mathrm{Ord}(x_1 x_2^{-1}) = 1$. Это означает, что $x_1 \equiv x_2 \pmod p$.

2. $\mathrm{Ord}(x_1 x_2^{-1}) = 3$. Так как $p = 3m+2$, то $\phi(p) = 3m+1$. То есть, порядок элемента не является делителем порядка группы, что противоречит теореме Лагранжа.

Следовательно, $x_1 \equiv x_2 \pmod p$. А значит, $y = x^3$ – подстановка над $\mathbb{Z}_p$.

Задача 5.3 Найти порядок и цикловое представление подстановки $y = x^3$, $p = 11$.

Решение.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10

Получим 5 циклов: (0), (1), (2, 8, 6, 7), (3, 5, 4, 9), (10). Порядок подстановки равен НОК длины циклов: $\mathrm{НОК}(1, 1, 4, 4, 1) = 4$.

Ответ: Порядок подстановки (0)(1)(2, 8, 6, 7)(3, 5, 4, 9)(10) равен 4.

Задача 5.4 Найти порядок подстановки $y = 5x + 3 \pmod{12}$

Решение.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	3	8	1	6	11	4	9	2	7	0	5	10

Получим 3 цикла: (0, 3, 6, 9), (1, 8, 7, 2), (4, 11, 10, 5). Порядок подстановки равен НОК длины циклов: $\text{НОК}(4, 4, 4) = 4$.

Ответ: Порядок подстановки равен 4.