

Математические основы криптологии

Автор курса: Применко Эдуард Андреевич
Составитель: Смирнов Дмитрий Константинович

Версия от 11:48, 16 июня 2022 г.

Оглавление

1	Домашние задания	1
1.1	Теоретико-числовые методы и алгоритмы	2
1.2	Квадратичные вычеты, сравнения, символ Лежандра. . . .	5
1.3	Рекуррентные последовательности.	9
1.4	Шифр гаммирования	11
1.5	Теория групп	12

Часть 1

Домашние задания

1.1 Теоретико-числовые методы и алгоритмы

Задачи в этом разделе решаются со следующими параметрами:

p	g	k
23	-8	22

Задача 1.1 Убедиться, что $g \in \mathbb{Z}_p^*$ – примитивный элемент \mathbb{Z}_p .

Решение.

Так как $p = 23$ – простое число, то $\phi(p) = p - 1 = 22$. Разложим это число на простые множители: $\phi(p) = 2 \cdot 11$. Тогда достаточно проверить следующие 2 неравенства:

$$g^{\frac{\phi(p)}{2}} = (-8)^{11} = 15 \cdot 15^{10} = 15 \cdot 18^5 = 17 \cdot 2^2 = 22 \not\equiv 1 \pmod{p},$$

$$g^{\frac{\phi(p)}{11}} = (-8)^2 = 18 \not\equiv 1 \pmod{p},$$

Делаем вывод, что g действительно является примитивным элементом \mathbb{Z}_p .

Задача 1.2 Найти образующий элемент h группы $\mathbb{Z}_{p^2}^*$

Решение.

Образующий элемент группы $\mathbb{Z}_{p^n}^*, n \geq 2$ имеет вид:

$$h = g + t_0 p, \quad t_0 \not\equiv g^\nu \pmod{p}; \quad \nu = \left(\frac{g^{\frac{p-1}{2}} + 1}{p} \right) \pmod{p} \cdot (-2) \pmod{p}$$

Таким образом,

$$\nu = \left(\frac{(-8)^{\frac{23-1}{2}} + 1}{23} \right) \pmod{23} \cdot (-2) \pmod{23} = (1 \cdot (-2)) \pmod{23} = 21$$

$$t_0 \not\equiv (-8) \cdot 21 \pmod{23} = 16 \pmod{23}$$

$$t_1 = 1 \Rightarrow h = (-8) + 1 \cdot 23 = 15$$

Следовательно, $h = 15$ – образующий элемент группы $\mathbb{Z}_{23^2}^*$

Задача 1.3 Подсчитать число образующих группы $\mathbb{Z}_{p^3}^*$

Решение.

Число образующих группы $\mathbb{Z}_{23^3}^*$ равно $\phi(23^3) = (23-1)23^{3-1} = 11638$.

Задача 1.4 Найти элемент a группы $\mathbb{Z}_{p^2}^*$ порядка k

Решение.

Так как \forall натурального $k > 1$ и простого $p \geq 3$ группа $\mathbb{Z}_{p^k}^*$ является циклической, то $\mathbb{Z}_{23^2}^*$ – циклическая группа. Элемент порядка k в циклической группе порядка N имеет вид h^r , где $r = \frac{N}{k}$. Таким образом,

$$a = h^{\frac{\phi(p^2)}{k}} = 15^{\frac{22 \cdot 23}{22}} = 15^{23} = 130$$

Задача 1.5 Решить сравнение $a^x \equiv b \pmod{p}$

Решение.

p	a	b
701	2	163

I. Алгоритм согласования

1. Убедимся в том, что $a = 2$ – примитивный элемент группы \mathbb{Z}_{701} .

$$\phi(701) = 700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$g^{\frac{\phi(p)}{2}} = 2^{350} = 700 \not\equiv 1 \pmod{p},$$

$$g^{\frac{\phi(p)}{5}} = 2^{140} = 210 \not\equiv 1 \pmod{p},$$

$$g^{\frac{\phi(p)}{7}} = 2^{100} = 19 \not\equiv 1 \pmod{p},$$

$$g^{\phi(p)} = 2^{700} = 1 \equiv 1 \pmod{p},$$

Таким образом, порядок элемента a равен $\text{ord}(a) = 700$.

2. Выбираем минимальное m : $m^2 \geq \text{ord}(a) \Rightarrow m = 27$.

3. Вычисляем $c = a^m = 2^{27} = 62$.

4. Составляем два множества:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
c^i	62	339	689	658	138	144	516	447	375	117	244	407	699	577

i	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
c^i	23	24	86	425	413	370	508	652	467	213	588	4	248

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ba^j	163	326	652	603	505	309	618	535	369	37	74	148	296	592

j	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
ba^j	483	265	530	359	17	34	68	136	272	544	387	73	146

В таблицах совпадают элементы под номерами $i = 22$ и $j = 2$.

5. Таким образом, $x = mi - j = 27 \cdot 22 - 2 = 592$.

Ответ: $x = 592$.

II. Алгоритм Полига-Хеллмана

Порядок поля \mathbb{Z}_{701} равен $N = \phi(701) = 700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. Количество простых множителей в разложении этого числа $t = 3$.

1. Вычисляем матрицу с элементами $(i, j) = a^{j \frac{N}{p_i}}, i = \overline{1, t}, j = \overline{0, p_i - 1}$:

$\begin{matrix} j \\ p_i \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6
2	$2^{0 \cdot \frac{700}{2}}$	$2^{1 \cdot \frac{700}{2}}$	-	-	-	-	-
5	$2^{0 \cdot \frac{700}{5}}$	$2^{1 \cdot \frac{700}{5}}$	$2^{2 \cdot \frac{700}{5}}$	$2^{3 \cdot \frac{700}{5}}$	$2^{4 \cdot \frac{700}{5}}$	-	-
7	$2^{0 \cdot \frac{700}{7}}$	$2^{1 \cdot \frac{700}{7}}$	$2^{2 \cdot \frac{700}{7}}$	$2^{3 \cdot \frac{700}{7}}$	$2^{4 \cdot \frac{700}{7}}$	$2^{5 \cdot \frac{700}{7}}$	$2^{6 \cdot \frac{700}{7}}$

$\begin{matrix} j \\ p_i \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6
2	1	700	-	-	-	-	-
5	1	210	638	89	464	-	-
7	1	19	361	550	636	167	369

2. Далее находим $x_i = \log_a b \pmod{p_i^{k_i}} = \gamma_0 + \gamma_1 p_i + \dots + \gamma_{k_i-1} p_i^{k_i-1}, \gamma_j \in \mathbb{Z}_p$.

Последовательно находим γ_j из $M(p, \gamma_j) = b_j^{\frac{N}{p^{j+1}}}$, где $b_j = ba^{-\gamma_0 - \gamma_1 p - \dots - \gamma_{j-1} p^{j-1}}$, а M – определённая выше матрица.

а) $x_1 = \log_2 163 \pmod{2^2}$, $p = 2$, $k = 2$

$$M(p, \gamma_0) = b^{\frac{N}{p}} = 163^{\frac{700}{2}} = 1 \Rightarrow \gamma_0 = 0, \quad b_1 = ba^{-\gamma_0} = 163 \cdot 2^{-0} = 163$$

$$M(p, \gamma_1) = b_1^{\frac{N}{p^2}} = 163^{\frac{700}{4}} = 1 \Rightarrow \gamma_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \gamma_0 + \gamma_1 p = 0 + 0 \cdot 2 = 0$$

б) $x_2 = \log_2 163 \pmod{5^2}$, $p = 5$, $k = 2$

$$M(p, \gamma_0) = b^{\frac{N}{p}} = 163^{\frac{700}{5}} = 638 \Rightarrow \gamma_0 = 2, \quad b_1 = ba^{-\gamma_0} = 163 \cdot 2^{-2} = 216$$

$$M(p, \gamma_1) = b_1^{\frac{N}{p^2}} = 216^{\frac{700}{25}} = 89 \Rightarrow \gamma_1 = 3$$

$$\Rightarrow x_2 = \gamma_0 + \gamma_1 p = 2 + 3 \cdot 5 = 17$$

в) $x_3 = \log_2 163 \pmod{7}$, $p = 7$, $k = 1$

$$M(p, \gamma_0) = b^{\frac{N}{p}} = 163^{\frac{700}{7}} = 636 \Rightarrow \gamma_0 = 4$$

$$\Rightarrow x_3 = \gamma_0 = 4$$

3. На основе вычисленных выше значений x_1, x_2, \dots, x_t и китайской теоремы об остатках находим искомым логарифм:

$$\begin{aligned} x &= \sum x_i \frac{N}{p_i^{k_i}} \left[\left(\frac{N}{p_i^{k_i}} \right)^{-1} \pmod{p_i^{k_i}} \right] \pmod{N} = 0 \cdot \frac{700}{2^2} \left[\left(\frac{700}{2^2} \right)^{-1} \pmod{2^2} \right] + \\ &+ 17 \cdot \frac{700}{5^2} \left[\left(\frac{700}{5^2} \right)^{-1} \pmod{5^2} \right] + 4 \cdot \frac{700}{7} \left[\left(\frac{700}{7} \right)^{-1} \pmod{7} \right] \pmod{700} = \\ &= 476 \cdot [28^{-1} \pmod{25}] + 400 \cdot [100^{-1} \pmod{7}] \pmod{700} = \\ &= 476 \cdot 17 + 400 \cdot 4 \pmod{700} = 592 \end{aligned}$$

Ответ: $x = 592$.

1.2 Квадратичные вычеты, сравнения, символ Лежандра.

Докажем вспомогательные леммы.

Лемма 2.1 Если $p = 2^m + 1$ – простое и $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, то $\langle a \rangle = \mathbb{Z}_p^*$.

■ По определению первообразного корня достаточно доказать два утверждения: $a^{\phi(p)} = a^{2^m} \equiv 1 \pmod{p}$ и $a^{\frac{\phi(p)}{2}} = a^{2^{m-1}} \not\equiv 1 \pmod{p}$.

$$a^{2^{m-1}} = a^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{a}{p}\right) = -1 \not\equiv 1 \pmod{p},$$

$$a^{2^m} = (a^{2^{m-1}})^2 = (-1)^2 = 1 \equiv 1 \pmod{p}.$$

■

Лемма 2.2 Если число $p = 2^m + 1$ – простое, $m > 1$, то $p \equiv 2 \pmod{3}$.

■ По теореме о делении с остатком, число p представимо в виде:

$$p = 3k + t, 0 \leq t < 3.$$

Рассмотрим данное равенство при различных t .

а) $t = 0 \Rightarrow p = 3k$, то есть, p не является простым числом при $k > 1$ (а значит, при $m > 1$). Противоречие $\Rightarrow t \neq 0$.

б) $t = 1 \Rightarrow 2^m = 3k$ – этого не может быть ни при каком целом k по лемме Евклида (по крайней мере один из сомножителей числа 2^m должен делиться на 3). Следовательно, $t \neq 1$.

Тогда $t = 2$ – единственный вариант, $p = 3k + 2$.

■

Лемма 2.3 Если $p = 2^{2^n} + 1$, $n > 1$, то $p \equiv 2 \pmod{5}$.

■ Докажем по индукции.

1) При $n = 2$ утверждение верно: $2^{2^2} + 1 = 17 \equiv 2 \pmod{5}$.

2) Пусть для $n = m$ верно, докажем для $n = m + 1$:

$$2^{2^{m+1}} + 1 = (2^{2^m} + 1 - 1)^2 + 1 = (2 - 1)^2 + 1 = 2 \equiv 2 \pmod{5}.$$

■

Лемма 2.4 Если $p = 2^{2^n} + 1$, $n = 2k$, то $p \equiv 3 \pmod{7}$.

■ Докажем по индукции.

- 1) При $k = 0$ утверждение верно: $2^{2^0} + 1 = 3 \equiv 3 \pmod{7}$.
- 2) Пусть для $k = m$ верно, докажем для $k = m + 1$:

$$2^{2^{2(m+1)}} + 1 = (2^{2^{2m}} + 1 - 1)^4 + 1 = (3 - 1)^4 + 1 = 17 \equiv 3 \pmod{7}$$

■

Лемма 2.5 Если $p = 2^{2^n} + 1$, $n = 2k + 1$, то $p \equiv 5 \pmod{7}$.

■ Докажем по индукции.

- 1) При $k = 0$ утверждение верно: $2^{2^1} + 1 = 5 \equiv 5 \pmod{7}$.
- 2) Пусть для $k = m$ верно, докажем для $k = m + 1$:

$$2^{2^{2(m+1)+1}} + 1 = (2^{2^{2m+1}} + 1 - 1)^4 + 1 = (5 - 1)^4 + 1 = 257 \equiv 5 \pmod{7}$$

■

Задача 2.1 Доказать, что сравнение $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ разрешимо тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Решение.

$$\begin{aligned} x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p} - \text{разрешимо} &\Leftrightarrow \left(\frac{-1}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{p-1}{2} = 2k \Leftrightarrow p = 4k + 1 \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{4} \end{aligned}$$

Задача 2.2 Доказать, что сравнение $x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{p}$ разрешимо тогда и только тогда, когда $p \equiv 1, 3 \pmod{8}$.

Решение.

$$\begin{aligned} x^2 + 2 \equiv 0 \pmod{p} - \text{разрешимо} &\Leftrightarrow \left(\frac{-2}{p}\right) = 1. \Leftrightarrow \left\{ \left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \left(\frac{2}{p}\right) \right\} \\ &= (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \Leftrightarrow \frac{p-1}{2} + \frac{p^2-1}{8} = 2k \Leftrightarrow p^2 + 4p - 16k - 5 = 0. \end{aligned}$$

Представим p , используя теорему о делении с остатком, в следующем виде: $p = 8m + t$, $0 \leq t < 8$. Решим полученную систему относительно t .

$$(8m + t)^2 + 4(8m + t) - 16k - 5 = 0$$

$$t^2 + (16k + 4)t + 64k^2 + 32k - 16m - 5 = 0$$

$$t_{1,2} = -8k - 2 \pm \sqrt{16m + 9} \pmod{8} = -2 \pm 3 \pmod{8} \Rightarrow t = 1, 3$$

Тогда $p^2 + 4p - 16k - 5 = 0 \Leftrightarrow p \equiv 1, 3 \pmod{8}$.

Задача 2.3 Доказать, что сравнение $x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ разрешимо тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod{6}$.

Решение.

Пусть $p = 3k + t, t < 3$.

$$x^2 + 3 \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow \left(\frac{-3}{p}\right) = 1.$$

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{3-1}{2}} \left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{3k+t-1} \left(\frac{t}{3}\right)$$

$$\text{а) } t = 0 \Rightarrow \left(\frac{0}{3}\right) = 0, (-1)^{3k+t-1} \left(\frac{t}{3}\right) = 0 \neq 1$$

$$\text{б) } t = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right) = 1, (-1)^{3k+t-1} \left(\frac{t}{3}\right) = (-1)^{3k} \cdot 1 = (-1)^{3k}.$$

$$\text{в) } t = 2 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right) = -1, (-1)^{3k+t-1} \left(\frac{t}{3}\right) = (-1)^{3k+1} \cdot (-1) = (-1)^{3k}$$

$$(-1)^{3k} = 1 \Leftrightarrow k = 2m \Leftrightarrow p = 6m + 1 \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{6}$$

Задача 2.4 Доказать, что если $p = 2^n + 1$ – простое, $n > 2$, то $\left(\frac{3}{p}\right) = -1$ и $\langle 3 \rangle = \mathbb{Z}_p^*$.

Решение.

$p = 3k + 2$ по лемме 2.2.

$$\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2} \cdot \frac{2^n+1-1}{2}} \left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{2^{n-1}} \left(\frac{2}{3}\right) = -1$$

Выполнены все условия леммы 2.1 $\Rightarrow \langle 3 \rangle = \mathbb{Z}_p^*$.

Задача 2.5 Доказать, что если $p = 2^n + 1$ – простое и $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, то $\langle a \rangle = \mathbb{Z}_p^*$.

Решение.

Доказано в качестве леммы 2.1.

Задача 2.6 Доказать, что если $p = 4q + 1$, p и q – простые, то $\langle 2 \rangle = \mathbb{Z}_p^*$.

Решение.

По определению первообразного корня достаточно доказать три утверждения:

$$1) 2^{\phi(p)} = 2^{4q} \equiv 1 \pmod{p},$$

$$2) 2^{\frac{\phi(p)}{2}} = 2^{2q} \not\equiv 1 \pmod{p},$$

$$3) 2^{\frac{\phi(p)}{q}} = 2^4 \not\equiv 1 \pmod{p}.$$

Начнём с третьего. Представим 2^4 в следующем виде: $2^4 = pk + t$, $0 \leq t < p$. Значит, нам нужно доказать, что $t \neq 1$. Предположим, что это не так, тогда $pk = 2^4 - 1 = 15$. Обратим внимание на условие: если p и q – простые числа, то p не может быть ни 3, ни 5. Значит, в левой части равенства содержится простой множитель, которого нет в правой части. Мы получили противоречие, а значит, $t \neq 1 \Rightarrow 2^{\frac{\phi(p)}{q}} = 2^4 \not\equiv 1 \pmod{p}$.

Рассмотрим теперь второе утверждение. Заметим, что:

$$\left(\frac{2}{4q+1}\right) = 2^{\frac{4q+1-1}{2}} = 2^{2q} \pmod{4q+1}.$$

Вычислим $\left(\frac{2}{4q+1}\right) = (-1)^{\frac{(4q+1)^2-1}{8}} = (-1)^{2q^2+q} = \{q - \text{нечет}\} = -1$.
Тем самым мы доказали второе утверждение.

Поскольку $2^{4q} = (2^{2q})^2 = (-1)^2 = 1 \pmod{4q+1}$, то первое утверждение становится следствием второго.

Задача 2.7 Доказать, что если $p = 2^{2^n} + 1$ – простое и $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, то $\langle a \rangle = \mathbb{Z}_p^*$.

Решение.

Приняв $m = 2^n$ в лемме 2.1, получим справедливость данного утверждения.

Задача 2.8 Доказать, что если $p = 2^{2^n} + 1$ – простое, $n > 2$, то $\langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle = \langle 7 \rangle = \mathbb{Z}_p^*$.

Решение.

Покажем $\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{7}{p}\right) = -1$.

$2^{2^n} + 1 = 3k + 2$ по лемме 2.2.

$$\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{3-1}{2} \cdot \frac{2^{2^n}+1-1}{2}} \left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{2^{2^n-1}} \left(\frac{3k+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = 2^{\frac{3-1}{2}} \pmod{3} = -1$$

$2^{2^n} + 1 = 5k + 2$ по лемме 2.3.

$$\left(\frac{5}{p}\right) = (-1)^{\frac{5-1}{2} \cdot \frac{2^{2^n}+1-1}{2}} \left(\frac{p}{5}\right) = (-1)^{2^{2^n}} \left(\frac{5k+2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = 2^{\frac{5-1}{2}} \pmod{5} = -1$$

$2^{2^n} + 1 = 7k + 3$, $n = 2t$ по лемме 2.4.

$$\left(\frac{7}{p}\right) = (-1)^{\frac{7-1}{2} \cdot \frac{2^{2^n}+1-1}{2}} \left(\frac{p}{7}\right) = (-1)^{2^{2^n}} \left(\frac{7k+3}{7}\right) = \left(\frac{3}{7}\right) = 3^{\frac{7-1}{2}} \pmod{7} = -1$$

$2^{2^n} + 1 = 7k + 5$, $n = 2t + 1$ по лемме 2.5.

$$\left(\frac{7}{p}\right) = \left(\frac{5}{7}\right) = 5^{\frac{7-1}{2}} \pmod{7} = -1.$$

Осталось применить лемму 2.1, и исходное утверждение будет доказано.

$$x_i = x_{i-4} + x_{i-5} + x_{i-6} + x_{i-7} + x_{i-8}.$$

Выберем начальные заполнения для ЛРП₁₋₃, отличные от нуля, и получим первые начальные отрезки ЛРП длины $n = 8$:

$$\tilde{\alpha}_1 = 001 \Rightarrow \tilde{\beta}_1 = 00110011$$

$$\tilde{\alpha}_2 = 01 \Rightarrow \tilde{\beta}_2 = 01101101$$

$$\tilde{\alpha}_3 = 001 \Rightarrow \tilde{\beta}_3 = 00101110$$

Искомое начальное заполнение:

$$\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_1 \oplus \tilde{\beta}_2 \oplus \tilde{\beta}_3 = 01110000.$$

Ответ: $f(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $\tilde{\beta} = 01110000$.

1.4 Шифр гаммирования

Задача 4.1 Зашифровать свою фамилию, используя шифр гаммирования с ЛРП из задачи 3.2.

Решение.

Кодирование алфавита приведено в следующей таблице:

А	00000	И	01000	Р	10000	Ш	11000
Б	00001	Й	01001	С	10001	Щ	11001
В	00010	К	01010	Т	10010	Ъ	11010
Г	00011	Л	01011	У	10011	Ы	11011
Д	00100	М	01100	Ф	10100	Ь	11100
Е	00101	Н	01101	Х	10101	Э	11101
Ж	00110	О	01110	Ц	10110	Ю	11110
З	00111	П	01111	Ч	10111	Я	11111

ЛРП задана многочленом $f(x) = x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $\tilde{k} = 01110000$, $M = \text{СМИРНОВ}$. Согласно кодовой таблице получим:

$$\tilde{M} = 10001 \ 01100 \ 01000 \ 10000 \ 01101 \ 01110 \ 00010$$

Получаем гамму:

$$\tilde{\Gamma} = 01110 \ 00011 \ 01100 \ 10101 \ 00010 \ 01011 \ 00011$$

Получим шифротекст:

$$\tilde{T} = 11111 \ 01111 \ 00100 \ 00101 \ 01111 \ 00101 \ 00001$$

Представим его в буквенном виде.

Ответ: $T = \text{ЯПДЕПЕБ}$.

1.5 Теория групп

Задача 5.1 Определить структуру группы \mathbb{Z}_n^* , разложить её в прямое произведение циклических подгрупп и подсчитать число элементов различного порядка, $n = 84$.

Решение.

$|G| = \phi(84) = \phi(2^2) \cdot \phi(3) \cdot \phi(7) = (4-2)(3-1)(7-1) = 24 = 2^3 \cdot 3$.
Следовательно, $G \cong S_1(8) \times S_2(3)$.

1. Определим структуру примарной группы $S_1(8)$. Для этого нужно решить сравнение:

$$x^2 \equiv 1 \pmod{84}.$$

По КТО это равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2 \equiv 1 \pmod{3} \\ x^2 \equiv 1 \pmod{4} \\ x^2 \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$$

$$p = 3 = 4 \cdot 0 + 3 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \text{два решения: } x_1 \equiv \pm 1^{0+1} \pmod{3}.$$

$$p = 4 = 2^2, a = 1 \Rightarrow \text{два решения: } x_2 \equiv \pm 1 \pmod{4}.$$

$$p = 7 = 4 \cdot 1 + 3 \Rightarrow \left(\frac{1}{7}\right) = 1 - \text{два решения: } x_3 \equiv \pm 1^{1+1} \pmod{7}.$$

Общее решение системы по КТО будет равно:

$$X = x_1(4 \cdot 7)[(4 \cdot 7)^{-1} \pmod{3}] + x_2(3 \cdot 7)[(3 \cdot 7)^{-1} \pmod{4}] + x_3(3 \cdot 4)[(3 \cdot 4)^{-1} \pmod{7}] \pmod{84} = 28x_1 + 21x_2 + 36x_3 \pmod{84}$$

Таким образом, множество элементов второго порядка группы G это:

$$M_2 = \{13, 43, 55, 29, 41, 71, 83\}.$$

Обозначим за $A_i = \langle M_{2,i} \rangle$, где $M_{2,i}$ — i -тый элемент множества M_2 . Тогда $S_1(8) \cong A_i \times A_j \times A_k$, $i, j, k = \overline{1, 7}$.

2. Определим структуру примарной группы $S_2(3)$. Для этого нужно решить сравнение:

$$x^3 \equiv 1 \pmod{84}.$$

По КТО это равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^3 \equiv 1 \pmod{3} \\ x^3 \equiv 1 \pmod{4} \\ x^3 \equiv 1 \pmod{7} \end{cases}$$

Первые два сравнения, очевидно, имеют единственные решения $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Последнее сравнение имеет 3 решения: $x_3 = \{1, 2, 4\}$. Общее решение исходного сравнения будет равно:

$$X = 28x_1 + 21x_2 + 36x_3 \pmod{84} = 49 + 36x_3 \pmod{84}$$

Множество элементов третьего порядка группы G это:

$$M_3 = \{25, 37\}$$

Таким образом, $S_2(3) = \langle 25 \rangle = \langle 37 \rangle$.

Ответ: $G \cong A_i \times A_j \times A_k \times \langle 25 \rangle = A_i \times A_j \times A_k \times \langle 37 \rangle$, $i, j, k = \overline{1, 7}$.

Задача 5.2 Доказать, что $y = x^3$ – подстановка над \mathbb{Z}_p , если $p \equiv 2 \pmod{3}$, то есть,

$$x_1^3 \equiv x_2^3 \pmod{p} \Rightarrow x_1 \equiv x_2 \pmod{p}.$$

Решение.

Поле \mathbb{Z}_p имеет порядок $\phi(p) = p - 1$. Из $x_1^3 \equiv x_2^3 \pmod{p}$ получим, что $(x_1 x_2^{-1})^3 \equiv 1 \pmod{p}$. Тогда порядок $x_1 x_2^{-1}$ является делителем 3. Существует два варианта:

1. $\text{Ord}(x_1 x_2^{-1}) = 1$. Это означает, что $x_1 \equiv x_2 \pmod{p}$.

2. $\text{Ord}(x_1 x_2^{-1}) = 3$. Так как $p = 3m + 2$, то $\phi(p) = 3m + 1$. То есть, порядок элемента не является делителем порядка группы, что противоречит теореме Лагранжа.

Следовательно, $x_1 \equiv x_2 \pmod{p}$. А значит, $y = x^3$ – подстановка над \mathbb{Z}_p .

Задача 5.3 Найти порядок и цикловое представление подстановки $y = x^3$, $p = 11$.

Решение.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10

Получим 5 циклов: (0) , (1) , $(2, 8, 6, 7)$, $(3, 5, 4, 9)$, (10) . Порядок подстановки равен НОК длины циклов: $\text{НОК}(1, 1, 4, 4, 1) = 4$.

Ответ: Порядок подстановки $(0)(1)(2, 8, 6, 7)(3, 5, 4, 9)(10)$ равен 4.

Задача 5.4 Найти порядок подстановки $y = 5x + 3 \pmod{12}$

Решение.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	3	8	1	6	11	4	9	2	7	0	5	10

Получим 3 цикла: $(0, 3, 6, 9)$, $(1, 8, 7, 2)$, $(4, 11, 10, 5)$. Порядок подстановки равен НОК длины циклов: $\text{НОК}(4, 4, 4) = 4$.

Ответ: Порядок подстановки равен 4.