# Tipologia y ciclo de vida de los datos - $\ensuremath{\mathsf{PRA2}}$

Autor: Eduardo Diaz Villanueva e Ignasi Domingo González

#### Enero 2021

# ${\bf Contents}$

Descripción del dataset.	1
Integracion y seleccion de los datos de interes  Elementos duplicados	2 4 5
Comprobación de la normalidad y homogeneidad de la varianza	18 29 34 41
Representación de los resultados	44
Resolución del problema	44
Descripción del dataset.	
library(stringr) library(dplyr)	
## ## Attaching package: 'dplyr'	
<pre>## The following objects are masked from 'package:stats': ##</pre>	
## filter, lag	
<pre>## The following objects are masked from 'package:base': ##</pre>	
## intersect, setdiff, setequal, union	
library(ggplot2) library(corrplot)	
## corrplot 0.84 loaded	
<pre># Limpiamos la aplicacion de datos anteriores y cargo el fichero. rm(list = ls())</pre>	
<pre>datos &lt;- read.csv("winequality-red.csv", sep=",") datos_originales &lt;- datos #shape(datos)</pre>	

# #describe(datos) head(datos,5)

```
##
     fixed.acidity volatile.acidity citric.acid residual.sugar chlorides
## 1
                7.4
                                  0.70
                                               0.00
                                                                1.9
                                                                         0.076
## 2
                7.8
                                  0.88
                                               0.00
                                                                2.6
                                                                         0.098
## 3
                7.8
                                  0.76
                                               0.04
                                                                2.3
                                                                         0.092
## 4
               11.2
                                  0.28
                                              0.56
                                                                1.9
                                                                         0.075
## 5
                7.4
                                  0.70
                                              0.00
                                                                1.9
                                                                         0.076
##
     free.sulfur.dioxide total.sulfur.dioxide density
                                                             pH sulphates alcohol
                                                   0.9978 3.51
                                                                      0.56
## 1
                        11
                                               34
## 2
                        25
                                                   0.9968 3.20
                                                                      0.68
                                                                               9.8
## 3
                        15
                                                   0.9970 3.26
                                                                      0.65
                                                                               9.8
## 4
                                                  0.9980 3.16
                        17
                                               60
                                                                      0.58
                                                                               9.8
## 5
                                                  0.9978 3.51
                        11
                                                                      0.56
                                                                               9.4
##
     quality
## 1
            5
## 2
           5
## 3
           5
           6
## 4
## 5
            5
```

El dataset seleccionado contiene 11 variables que describen las propiedades químicas de un vino, como puede ser la acidez, ph nivel de azúcar, etc... estas variables tendrán influencia en la calidad final del vino. Además contiene un atributo que es la calidad del vino, como ha sido clasificado.

Con este ejercicio queremos estudiar que variables son mas representativas y encontrar modelos que puedan predecir la calidad del vino.

Si pensamos por ejemplo en una industria, podríamos reducir el tiempo y coste reduciendo el numero de pruebas de calidad a las variables mas significativas. Incluso mejorar la calidad del producto final, focalizando esfuerzos y recursos a reducir la variabilidad de las variables que mas contribuyan a la calidad final.

#### Integracion y seleccion de los datos de interes

Realizaremos un primer análisis estadístico para familiarizarnos con las variables y sus tipos de datos.

```
#Resumen del conjunto de datos summary(datos)
```

```
volatile.acidity
                                        citric.acid
    fixed.acidity
                                                         residual.sugar
##
    Min.
           : 4.60
                             :0.1200
                                       Min.
                                               :0.000
                                                                : 0.900
                     Min.
                                                         Min.
    1st Qu.: 7.10
                     1st Qu.:0.3900
                                       1st Qu.:0.090
                                                         1st Qu.: 1.900
                                       Median :0.260
    Median : 7.90
                                                         Median : 2.200
##
                     Median : 0.5200
##
    Mean
           : 8.32
                     Mean
                             :0.5278
                                       Mean
                                               :0.271
                                                         Mean
                                                                : 2.539
##
    3rd Qu.: 9.20
                                                         3rd Qu.: 2.600
                     3rd Qu.:0.6400
                                       3rd Qu.:0.420
##
    Max.
            :15.90
                     Max.
                             :1.5800
                                       Max.
                                               :1.000
                                                         Max.
                                                                :15.500
                                                                       density
##
      chlorides
                       free.sulfur.dioxide total.sulfur.dioxide
##
            :0.01200
                       Min.
                               : 1.00
                                                       6.00
                                                                           :0.9901
    Min.
                                             Min.
                                                                   Min.
##
    1st Qu.:0.07000
                       1st Qu.: 7.00
                                             1st Qu.: 22.00
                                                                   1st Qu.:0.9956
##
    Median :0.07900
                       Median :14.00
                                             Median: 38.00
                                                                   Median :0.9968
##
    Mean
            :0.08747
                       Mean
                               :15.87
                                             Mean
                                                     : 46.47
                                                                   Mean
                                                                           :0.9967
##
    3rd Qu.:0.09000
                       3rd Qu.:21.00
                                             3rd Qu.: 62.00
                                                                   3rd Qu.:0.9978
##
    Max.
            :0.61100
                       Max.
                               :72.00
                                             Max.
                                                     :289.00
                                                                   Max.
                                                                           :1.0037
##
                                           alcohol
          рН
                       sulphates
                                                            quality
```

```
Min.
           :2.740
                             :0.3300
                                               : 8.40
                                                                :3.000
                     Min.
                                       Min.
    1st Qu.:3.210
                                       1st Qu.: 9.50
##
                     1st Qu.:0.5500
                                                        1st Qu.:5.000
   Median :3.310
                     Median :0.6200
                                                        Median :6.000
                                       Median :10.20
           :3.311
                             :0.6581
                                               :10.42
##
   Mean
                     Mean
                                       Mean
                                                        Mean
                                                                :5.636
##
    3rd Qu.:3.400
                     3rd Qu.:0.7300
                                       3rd Qu.:11.10
                                                        3rd Qu.:6.000
##
   Max.
           :4.010
                     Max.
                             :2.0000
                                       Max.
                                               :14.90
                                                                :8.000
                                                        Max.
```

# str(datos)

```
'data.frame':
                    1599 obs. of 12 variables:
                                 7.4 7.8 7.8 11.2 7.4 7.4 7.9 7.3 7.8 7.5 ...
##
   $ fixed.acidity
                          : num
   $ volatile.acidity
                                 0.7 0.88 0.76 0.28 0.7 0.66 0.6 0.65 0.58 0.5 ...
                          : num
                                 0 0 0.04 0.56 0 0 0.06 0 0.02 0.36 ...
##
   $ citric.acid
                           num
   $ residual.sugar
##
                          : num
                                 1.9 2.6 2.3 1.9 1.9 1.8 1.6 1.2 2 6.1 ...
##
   $ chlorides
                                 0.076 0.098 0.092 0.075 0.076 0.075 0.069 0.065 0.073 0.071 ...
                           num
                                 11 25 15 17 11 13 15 15 9 17 ...
##
   $ free.sulfur.dioxide : num
##
   $ total.sulfur.dioxide: num
                                 34 67 54 60 34 40 59 21 18 102 ...
##
   $ density
                                 0.998 0.997 0.997 0.998 0.998 ...
                          : num
##
                           num
                                 3.51 3.2 3.26 3.16 3.51 3.51 3.3 3.39 3.36 3.35 ...
##
   $ sulphates
                          : num
                                 0.56 0.68 0.65 0.58 0.56 0.56 0.46 0.47 0.57 0.8 ...
   $ alcohol
                                 9.4 9.8 9.8 9.8 9.4 9.4 9.4 10 9.5 10.5 ...
##
                          : num
##
   $ quality
                          : int 555655775 ...
```

# sapply(datos, function(x) class(x))

```
##
          fixed.acidity
                                                          citric.acid
                              volatile.acidity
##
               "numeric"
                                     "numeric"
                                                            "numeric"
##
         residual.sugar
                                     chlorides free.sulfur.dioxide
##
               "numeric"
                                     "numeric"
                                                            "numeric"
  total.sulfur.dioxide
                                        density
##
                                                                    pН
##
               "numeric"
                                      "numeric"
                                                            "numeric"
##
               sulphates
                                        alcohol
                                                              quality
               "numeric"
                                     "numeric"
                                                            "integer"
```

Observamos que los tipos de datos asignados a las variables corresponden con las variables que representan. # Limpieza de los datos ## Elementos vacios Analizamos los valores de las variables para detectar falta o ausencia de datos

# colSums(is.na(datos))

citric.acid	volatile.acidity	fixed.acidity	##
0	0	0	##
free.sulfur.dioxide	chlorides	residual.sugar	##
0	0	0	##
Нд	density	total.sulfur.dioxide	##
0	0	0	##
quality	alcohol	sulphates	##
0	0	0	##

# colSums(datos=="")

```
##
          fixed.acidity
                             volatile.acidity
                                                         citric.acid
##
                                             0
                                     chlorides free.sulfur.dioxide
##
         residual.sugar
```

```
## 0 0 0 0
## total.sulfur.dioxide density pH
## 0 0 0 0
## sulphates alcohol quality
## 0 0 0
```

# Analizamos la existencia de datos con valor 0
colSums(datos==0)

##	fixed.acidity	volatile.acidity	citric.acid
##	0	0	132
##	residual.sugar	chlorides	free.sulfur.dioxide
##	0	0	0
##	total.sulfur.dioxide	density	Нд
##	0	0	0
##	sulphates	alcohol	quality
##	0	0	0

Observamos la variable "Citric.acid" con una gran cantidad de valores 0. Tras realizar una pequeña investigación, (https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81cidos\_en\_el\_vino#%C3%81cido\_c%C3%ADtrico) podemos deducir que en la uva, el ácido cítrico es un componente presente de forma natural pero con muy baja presencia, lo que si no se añade posteriormente puede presentar valores de 0. Consideramos que dicha variable tiene valores correctos y no requiere de ninguna acción.

#### Elementos duplicados

Dado que no hay presentes registros con elementos vacios, vamos a verificar si hay registros duplicados.

```
# Analizamos la existencia de registros duplicados.
sum(duplicated(datos))
```

```
## [1] 240
```

Algunas filas están duplicadas. A modo de ejemplo, la fila 1 y la fila 5 son la misma.

```
# Ejemplo de registro duplicado
a <- datos %>% filter(row_number() == 1)
b <- datos %>% filter(row_number() == 5)
a == b
```

```
##
        fixed.acidity volatile.acidity citric.acid residual.sugar chlorides
## [1,]
                                   TRUE
                                                TRUE
                                                               TRUE
##
        free.sulfur.dioxide total.sulfur.dioxide density
                                                             pH sulphates alcohol
## [1,]
                        TRUE
                                              TRUE
                                                      TRUE TRUE
                                                                      TRUE
                                                                              TRUE
##
        quality
## [1,]
           TRUE
```

Los registros duplicados no nos dan más información sobre la muestra, por lo que vamos a eliminar las filas duplicadas.

```
# Eliminamos los registros duplicados
datos <- datos[!duplicated(datos), ]</pre>
```

```
# Revisamos el tamaño de nuestro nuevo dataset dim(datos)
```

```
## [1] 1359 12
```

#### Valores extremos

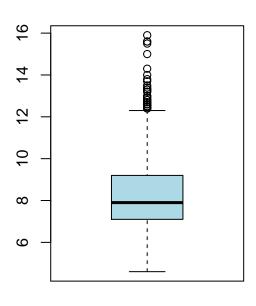
Analizaremos individualmente cada una de las variables focalizándonos en la distribución de los datos y sus valores extremos.

```
par(mfrow=c(1,2))
hist(datos$fixed.acidity, breaks = 30)
boxplot(datos$fixed.acidity,main="fixed.acidity", col="lightblue")
```

#### Histogram of datos\$fixed.acidity

# Freduency 200 100 120 500 100 120 500 100 120 500 140 datos\$fixed.acidity

#### fixed.acidity



#### boxplot.stats(datos\$fixed.acidity)\$out

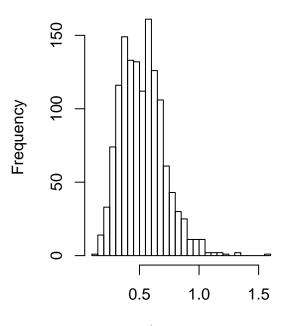
```
## [1] 12.8 15.0 12.5 13.3 13.4 12.4 12.5 13.8 13.5 12.6 12.5 12.8 14.0 13.7 12.7 ## [16] 12.5 12.8 12.6 15.6 12.5 13.0 12.5 13.3 12.4 12.5 12.9 14.3 12.4 15.5 15.6 ## [31] 13.0 12.7 12.4 12.7 13.2 13.2 15.9 13.3 12.9 12.6 12.6
```

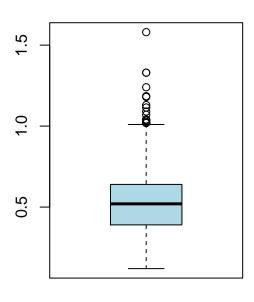
Observamos como el atributo "fixed.acidity" tiene 41 valores extremos, distribuidos entre 12.4 y 16

```
par(mfrow=c(1,2))
hist(datos$volatile.acidity, breaks = 30)
boxplot(datos$volatile.acidity,main="volatile.acidity", col="lightblue")
```

# Histogram of datos\$volatile.acidi

# volatile.acidity





datos\$volatile.acidity

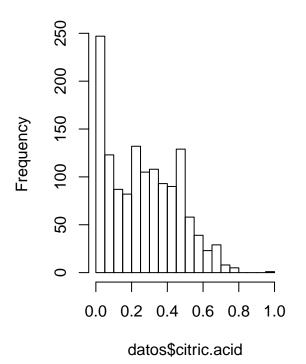
#### boxplot.stats(datos\$volatile.acidity)\$out

```
## [1] 1.130 1.020 1.070 1.330 1.330 1.040 1.090 1.040 1.240 1.185 1.020 1.035 ## [13] 1.025 1.115 1.020 1.020 1.580 1.180 1.040
```

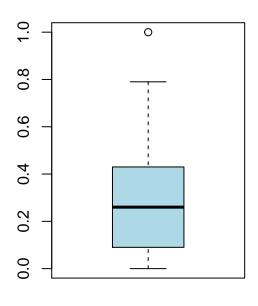
Observamos como el atributo "volatile.acidity" tiene 19 valores extremos, distribuidos entre 1 y 1.6

```
par(mfrow=c(1,2))
hist(datos$citric.acid , breaks = 30)
boxplot(datos$citric.acid ,main="citric.acid ", col="lightblue")
```

# Histogram of datos\$citric.acid



#### citric.acid



#### boxplot.stats(datos\$citric.acid )\$out

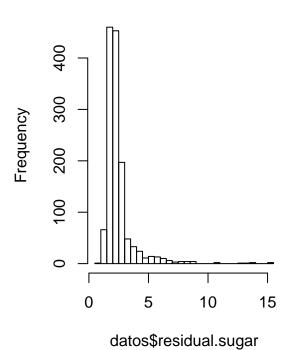
#### ## [1] 1

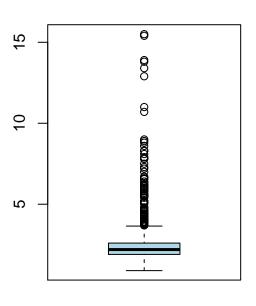
Observamos como el atributo "citric.acid" tiene un valor extremo de valor 1.

```
par(mfrow=c(1,2))
hist(datos$residual.sugar, breaks = 30)
boxplot(datos$residual.sugar,main="residual.sugar", col="lightblue")
```

#### Histogram of datos\$residual.sug

#### residual.sugar





# boxplot.stats(datos\$residual.sugar)\$out

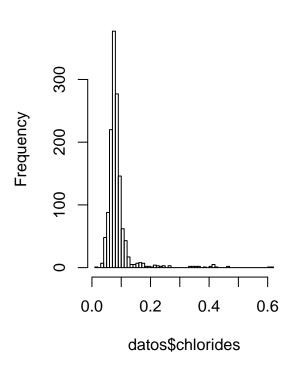
```
##
                       3.90
                             4.40 10.70
                                          5.50
                                                 5.90
     [1]
          6.10
                3.80
                                                       3.80
                                                             5.10
                                                                    4.65
                                                                          5.50
##
    [13]
          7.30
                7.20
                       3.80
                             5.60
                                    4.00
                                          4.00
                                                 4.00
                                                       7.00
                                                             6.40
                                                                    5.60 11.00
                                                                                 4.50
          4.80
                5.80
                       3.80
                             4.40
                                                 7.90
                                                              4.50
                                                                          6.60
                                                                                 3.70
##
    [25]
                                    6.20
                                          4.20
                                                       3.70
                                                                    6.70
          5.20 15.50
                       4.10
                             8.30
##
    [37]
                                    6.55
                                          4.60
                                                 6.10
                                                       4.30
                                                             5.80
                                                                    5.15
                                                                          6.30
    [49]
          4.60
                4.20
                       4.30
                             7.90
                                    4.60
                                          5.10
                                                 5.60
                                                       6.00
                                                             8.60
                                                                    7.50
                                                                          4.40
                                                                                 4.25
##
    [61]
          6.00
                3.90
                       4.20
                             4.00
                                                       3.80
##
                                    4.00
                                          6.60
                                                 6.00
                                                             9.00
                                                                    4.60
                                                                          8.80
                                                                                 5.00
          3.80
                4.10
                       5.90
                                                                                8.30
##
    [73]
                             4.10
                                    6.20
                                          8.90
                                                 4.00
                                                       3.90
                                                             8.10
                                                                    6.40
                                                                          8.30
                5.50
                       4.30
    [85]
          4.70
                             5.50
                                    3.70
                                          6.20
                                                 5.60
                                                       7.80
                                                              4.60
                                                                    5.80
                                                                          4.10 12.90
    [97]
          4.30 13.40
                       4.80
                             6.30
                                    4.50
                                          4.30
                                                 3.90
                                                       3.80
                                                             5.40
                                                                    3.80
                                                                                3.90
##
                                                                          6.10
## [109]
          5.10
                3.90 15.40 4.80
                                   5.20
                                          5.20
                                                 3.75 13.80
                                                             5.70
                                                                    4.30
                                                                          4.10
                                                                                4.10
  [121]
          4.40
                3.70 6.70 13.90
                                   5.10
                                          7.80
```

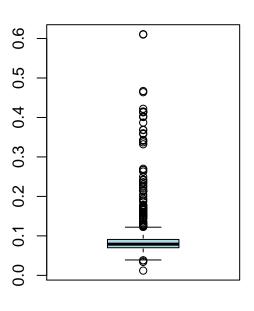
Observamos como el atributo "residual.sugar" tiene 126 valores extremos, distribuidos entre 4 y 16

```
par(mfrow=c(1,2))
hist(datos$chlorides, breaks = 50)
boxplot(datos$chlorides,main="chlorides", col="lightblue")
```

#### Histogram of datos\$chlorides

#### chlorides





#### boxplot.stats(datos\$chlorides)\$out

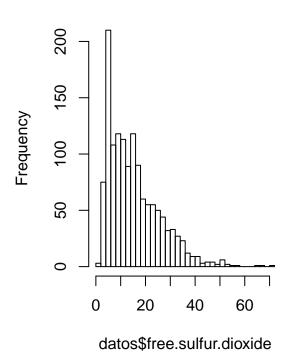
```
## [1] 0.176 0.170 0.368 0.341 0.172 0.332 0.464 0.401 0.467 0.178 0.146 0.236 ## [13] 0.610 0.360 0.270 0.337 0.263 0.611 0.358 0.343 0.186 0.213 0.214 0.128 ## [25] 0.159 0.124 0.174 0.127 0.413 0.152 0.152 0.125 0.200 0.171 0.226 0.250 ## [37] 0.148 0.124 0.143 0.222 0.157 0.422 0.034 0.387 0.415 0.157 0.157 0.243 ## [49] 0.241 0.190 0.132 0.126 0.038 0.165 0.145 0.147 0.012 0.194 0.132 0.161 ## [61] 0.123 0.414 0.216 0.171 0.178 0.369 0.166 0.166 0.136 0.132 0.123 0.123 ## [73] 0.403 0.137 0.414 0.166 0.168 0.415 0.153 0.267 0.123 0.214 0.169 0.205 ## [85] 0.235 0.230 0.038
```

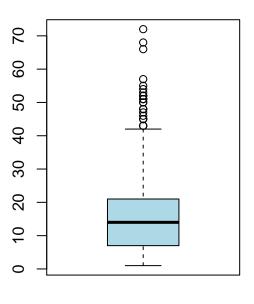
Observamos como el atributo "chlorides" tiene 87 valores extremos, distribuidos entre 0 y 0.05 por la parte inferior y entre 0.12 y 0.6 por la parte superior.

```
par(mfrow=c(1,2))
hist(datos$free.sulfur.dioxide, breaks = 30)
boxplot(datos$free.sulfur.dioxide,main="free.sulfur.dioxide", col="lightblue")
```

# Histogram of datos\$free.sulfur.dio

#### free.sulfur.dioxide





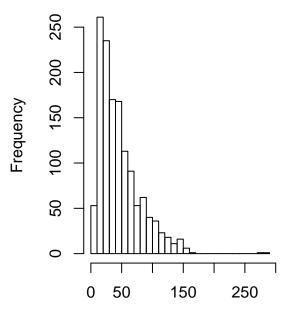
#### boxplot.stats(datos\$free.sulfur.dioxide)\$out

## [1] 52 51 50 68 43 47 54 46 45 53 52 51 45 57 50 45 48 43 48 72 43 51 52 55 48 ## [26] 66

Observamos como el atributo "free.sulfur.dioxide" tiene 26 valores extremos, distribuidos entre el 43 y el 60

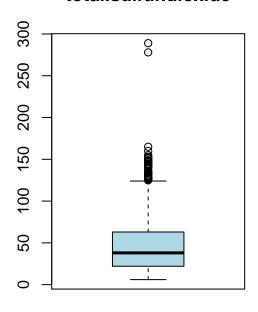
par(mfrow=c(1,2))
hist(datos\$total.sulfur.dioxide, breaks = 30)
boxplot(datos\$total.sulfur.dioxide,main="total.sulfur.dioxide", col="lightblue")

# Histogram of datos\$total.sulfur.dio



datos\$total.sulfur.dioxide

#### total.sulfur.dioxide



#### boxplot.stats(datos\$total.sulfur.dioxide)\$out

```
[1] 145 148 136 125 140 133 153 134 141 129 128 143 144 127 126 145 144 135 165
## [20] 134 129 151 133 142 149 147 145 148 155 151 152 125 127 139 143 144 130 278
## [39] 289 135 160 141 133 147 131
```

Observamos como el atributo "total.sulfur.dioxide" tiene 45 valores extremos, distribuidos entre el 120 y el 300.

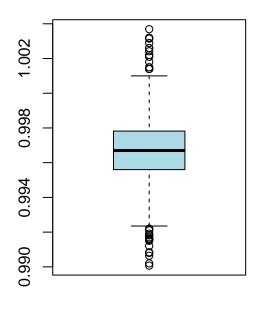
```
par(mfrow=c(1,2))
hist(datos$density, breaks = 30)
boxplot(datos$density,main="density", col="lightblue")
```

# Histogram of datos\$density

# Fredneucy 0.990 0.996 1.002

datos\$density

# density

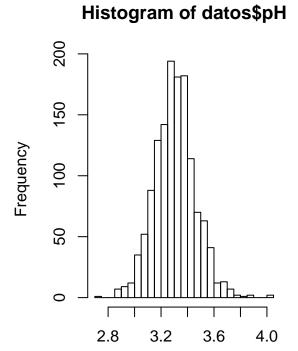


#### boxplot.stats(datos\$density)\$out

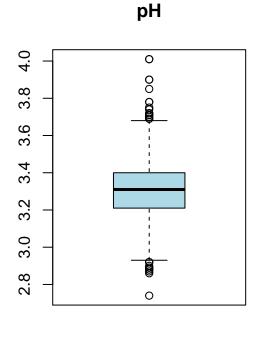
```
## [1] 0.99160 1.00140 1.00150 1.00180 0.99120 1.00220 1.00140 1.00140 1.00140 ## [10] 1.00320 1.00260 1.00140 1.00315 1.00315 1.00210 0.99170 0.99220 1.00260 ## [19] 0.99210 0.99154 0.99064 1.00289 0.99162 0.99007 0.99020 0.99220 0.99150 ## [28] 0.99157 0.99080 0.99084 0.99191 1.00369 1.00242 0.99182 0.99182
```

Observamos como el atributo "density" tiene 35 valores extremos, distribuidos entre 0.990 y 0.992 por la parte inferior y entre 1.001 y 1.004 por la parte superior.

```
par(mfrow=c(1,2))
hist(datos$pH, breaks = 30)
boxplot(datos$pH,main="pH", col="lightblue")
```



datos\$pH



#### boxplot.stats(datos\$pH)\$out

```
## [1] 3.90 3.75 3.85 2.74 3.69 2.88 2.86 3.74 2.92 2.92 3.72 2.87 2.89 2.92 3.90 ## [16] 3.71 3.69 3.71 2.89 3.78 3.70 3.78 4.01 2.90 4.01 3.71 2.88 3.72
```

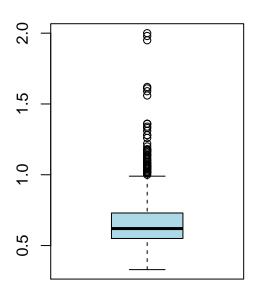
Observamos como el atributo "pH" tiene 28 valores extremos, distribuidos entre 2.7 y 2.9 por la parte inferior y entre 3.7 y 4 por la parte superior.

```
par(mfrow=c(1,2))
hist(datos$sulphates, breaks = 30)
boxplot(datos$sulphates,main="sulphates", col="lightblue")
```

# Histogram of datos\$sulphates

# Ledneucy 200 750 0 1.5 2.0 datos\$sulphates

# sulphates



#### boxplot.stats(datos\$sulphates)\$out

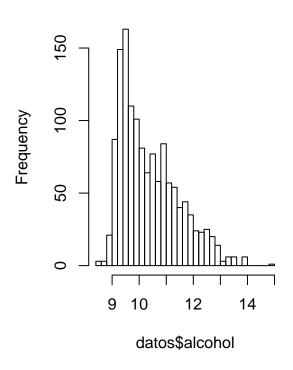
```
## [1] 1.56 1.28 1.08 1.20 1.12 1.28 1.14 1.95 1.22 1.98 1.31 2.00 1.08 1.59 1.02 ## [16] 1.03 1.61 1.09 1.26 1.08 1.00 1.36 1.18 1.13 1.04 1.11 1.07 1.06 1.06 1.05 ## [31] 1.06 1.04 1.05 1.02 1.14 1.02 1.36 1.36 1.05 1.17 1.62 1.06 1.18 1.07 1.34 ## [46] 1.16 1.10 1.15 1.17 1.33 1.18 1.17 1.03 1.10 1.01
```

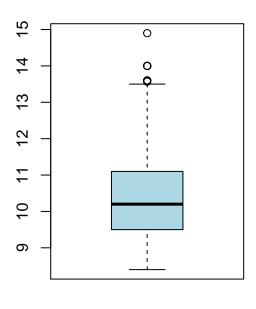
Observamos como el atributo "sulphates" tiene 55 valores extremos, distribuidos entre 1 y 2.

```
par(mfrow=c(1,2))
hist(datos$alcohol, breaks = 30)
boxplot(datos$alcohol,main="alcohol", col="lightblue")
```

# Histogram of datos\$alcohol

# alcohol





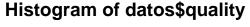
#### boxplot.stats(datos\$alcohol)\$out

```
## [1] 14.00000 14.00000 14.00000 14.90000 14.00000 13.60000 13.60000
```

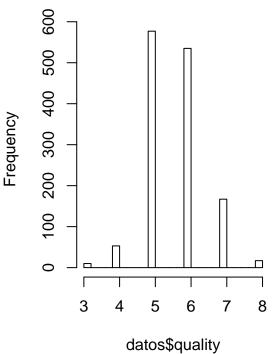
## [9] 14.00000 14.00000 13.56667 13.60000

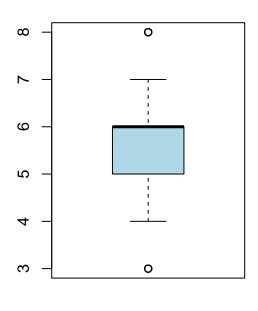
Observamos como el atributo "alcohol" tiene 12 valores extremos, distribuidos entre el 13.5 y el 14.

```
par(mfrow=c(1,2))
hist(datos$quality, breaks = 30)
boxplot(datos$quality,main="quality", col="lightblue")
```



# quality





#### boxplot.stats(datos\$quality)\$out

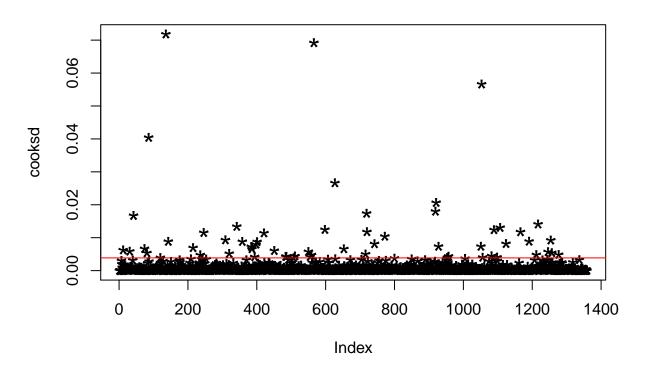
#### 

Observamos como el atributo "quality" tiene 27 valores extremos, distribuidos entre el 3 por la parte inferior, y el 8 en la parte superior. Este valor es una valoración del vino, por lo que estos valores no se pueden considerar extremos.

En conclusión, con el análisis realizado para cada variable, el número de valores extremos es muy dispar, siendo bajo en algunas variables y relativamente alto en otras. Como es posible que algunos valores extremos de una variable coincidan en registro con los de otra, para identificar correctamente los valores extremos vamos a utilizar la distancia de Cook, estimando el grado de influencia de cada uno de los valores al realizar un análisis de regresión por mínimos cuadrados. Para realizarlo, tendremos en cuenta todos los atributos a excepción de "quality".

```
# Câlculo y visualización de resultados de aplicar la distancia de Cook a nuestros datos.
outliers = c()
for ( i in 1:11 ) {
    stats = boxplot.stats(datos[[i]])$stats
    bottom_outlier_rows = which(datos[[i]] < stats[1])
    top_outlier_rows = which(datos[[i]] > stats[5])
    outliers = c(outliers , top_outlier_rows[ !top_outlier_rows %in% outliers ] )
    outliers = c(outliers , bottom_outlier_rows[ !bottom_outlier_rows %in% outliers ] )
}
mod = lm(quality ~ ., data = datos)
cooksd = cooks.distance(mod)
plot(cooksd, pch = "*", cex = 2, main = "Observaciones relevantes en función de la distancia de Cook")
abline(h = 4*mean(cooksd, na.rm = T), col = "red")
```

#### Observaciones relevantes en función de la distancia de Cook



# Obtenemos el listado de los valores extremos que afectan sensiblemente a los datos.
head(datos[cooksd > 4 \* mean(cooksd, na.rm=T), ])

##		fixed.acidity	volati	le.acidity	citric.ac	id residu	ıal.sı	ıgar	chlori	des	
##	14	7.8		0.610	0.2	29		1.6	0.	114	
##	34	6.9		0.605	0.3	12	1	10.7	0.	073	
##	46	4.6		0.520	0.3	15		2.1	0.	054	
##	80	8.3		0.625	0.2	20		1.5	0.	080	
##	87	8.6		0.490	0.2	28		1.9	0.	110	
##	93	8.6		0.490	0.2	29		2.0	0.	110	
##		free.sulfur.di	oxide	total.sulfu	ır.dioxide	${\tt density}$	pН	sulp	hates	alcohol	
##	14		9		29	0.9974	3.26		1.56	9.1	
##	34		40		83	0.9993	3.45		0.52	9.4	
##	46		8		65	0.9934	3.90		0.56	13.1	
##	80		27		119	0.9972	3.16		1.12	9.1	
##	87		20		136	0.9972	2.93		1.95	9.9	
##	93		19		133	0.9972	2.93		1.98	9.8	
##		quality									
##	14	5									
##	34	6									
##	46	4									
##	80	4									
##	87	6									
##	93	5									

Si visualizamos las primeras entradas, todos ellos tienen valores atípicos en una o más variables. El registro 14 tiene los "chlorides" y los "sulphates" muy altos. El registro 34 tiene el "residual.sugar" muy alto. El

registro 46 tiene el "pH" muy alto. El registro 80 tiene los "sulphates" altos. El registro 87 y 93 tienen los "chlorides", los "sulphates" y el "total.sulfur.dioxide" altos.

Vamos a eliminar los valores extremos detectados.

```
# Identificamos los registros a eliminar
coutliers = as.numeric(rownames(datos[cooksd > 4 * mean(cooksd, na.rm=T), ]))
outliers = c(outliers , coutliers[ !coutliers %in% outliers ] )

# Eliminamos los elementos detectados como extremos.
datos_clean = datos[-outliers, ]

# Visualizamos el tamaño y los valores básicos de nuestro nuevo conjunto de datos.
dim(datos_clean)
```

#### ## [1] 980 12

```
summary(datos_clean)
```

```
##
    fixed.acidity
                      volatile.acidity citric.acid
                                                        residual.sugar
          : 5.100
                             :0.1200
                                       Min.
                                              :0.000
                                                               :1.200
                                                        Min.
                     1st Qu.:0.3900
  1st Qu.: 7.100
                                                        1st Qu.:1.900
                                       1st Qu.:0.080
##
   Median : 7.800
                     Median :0.5200
                                       Median :0.240
                                                        Median :2.100
##
                                                               :2.196
##
  Mean
           : 8.155
                     Mean
                             :0.5216
                                       Mean
                                               :0.249
                                                        Mean
    3rd Qu.: 9.000
                      3rd Qu.:0.6300
                                       3rd Qu.:0.400
                                                        3rd Qu.:2.500
##
   Max.
           :12.300
                             :1.0100
                                               :0.730
                                                               :3.650
                     {\tt Max.}
                                       Max.
                                                        Max.
##
      chlorides
                      free.sulfur.dioxide total.sulfur.dioxide
                                                                    density
                                                                         :0.9923
##
           :0.03900
                      Min. : 1.00
                                           Min.
                                                  : 6.00
  \mathtt{Min}.
                                                                 \mathtt{Min}.
   1st Qu.:0.06900
                      1st Qu.: 8.00
                                           1st Qu.: 22.00
                                                                 1st Qu.:0.9955
## Median :0.07800
                      Median :13.00
                                           Median : 36.00
                                                                 Median :0.9965
## Mean
           :0.07841
                      Mean
                              :15.01
                                           Mean
                                                  : 42.38
                                                                 Mean
                                                                         :0.9965
  3rd Qu.:0.08700
                      3rd Qu.:20.00
##
                                           3rd Qu.: 56.00
                                                                 3rd Qu.:0.9976
                              :42.00
  Max.
                      Max.
                                                   :124.00
                                                                         :1.0010
##
           :0.12200
                                           Max.
                                                                 Max.
##
          Нq
                      sulphates
                                         alcohol
                                                          quality
##
  Min.
           :2.940
                    Min.
                            :0.3700
                                      Min.
                                             : 8.70
                                                       Min.
                                                              :3.00
   1st Qu.:3.230
                    1st Qu.:0.5500
                                      1st Qu.: 9.50
                                                       1st Qu.:5.00
## Median :3.320
                    Median :0.6100
                                      Median :10.10
                                                       Median:6.00
##
   Mean
           :3.322
                    Mean
                            :0.6313
                                      Mean
                                              :10.39
                                                       Mean
                                                              :5.64
##
    3rd Qu.:3.400
                    3rd Qu.:0.7000
                                      3rd Qu.:11.00
                                                       3rd Qu.:6.00
   Max.
           :3.680
                    Max.
                            :0.9800
                                      Max.
                                              :13.40
                                                       Max.
                                                              :8.00
```

#### Análisis de los datos

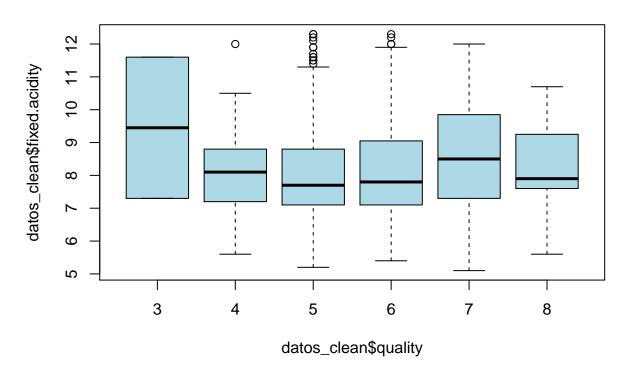
Antes de comenzar con el análisis guardaremos una copia de los datos después del proceso de limpieza

```
# Exportación de los datos limpios en .csv write.csv(datos_clean, "winequality-red-clean.csv")
```

Analizaremos las variables frente a la calidad para decidir cuales utilizar en el resto del análisis

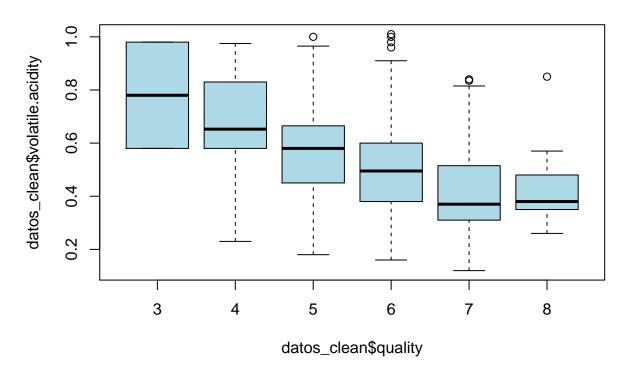
```
#boxplot(datos$pH,main="quality", col="gray")
boxplot(formula = datos_clean$fixed.acidity ~ datos_clean$quality, main="fixed.acidity vs quality", col
```

# fixed.acidity vs quality



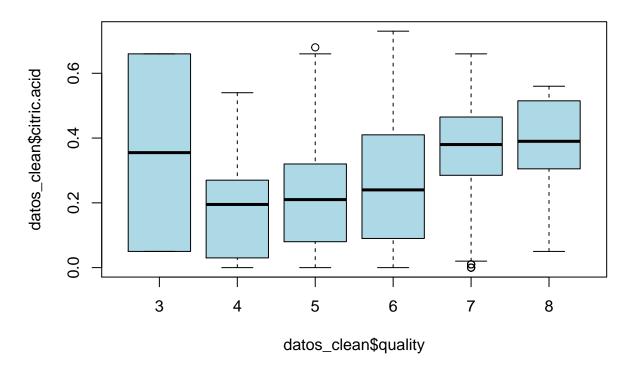
boxplot(formula = datos\_clean\$volatile.acidity ~ datos\_clean\$quality, main="volatile.acidity vs quality

# volatile.acidity vs quality



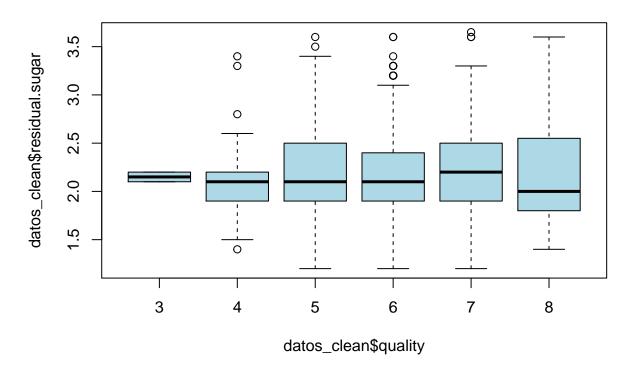
boxplot(formula = datos\_clean\$citric.acid ~ datos\_clean\$quality, main="citric.acid vs quality", col="li

# citric.acid vs quality



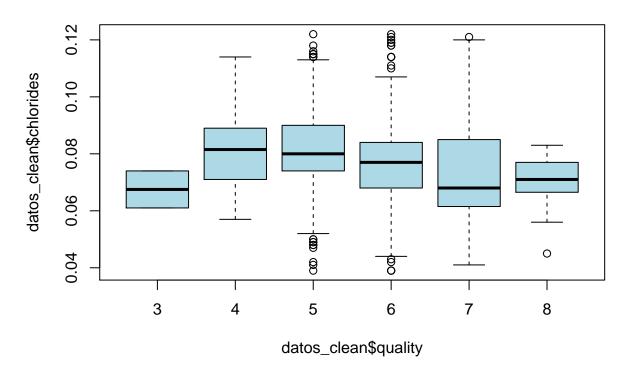
boxplot(formula = datos\_clean\$residual.sugar ~ datos\_clean\$quality, main="residual.sugar vs quality", c

# residual.sugar vs quality



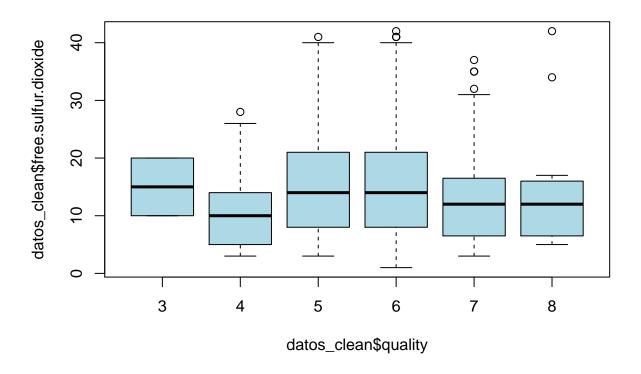
boxplot(formula = datos\_clean\$chlorides ~ datos\_clean\$quality, main="chlorides vs quality", col="lig

# chlorides vs quality



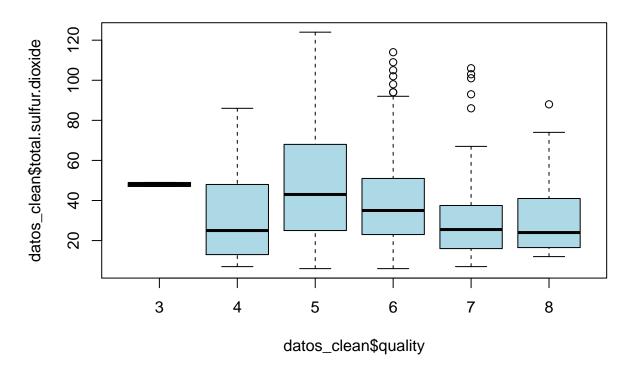
boxplot(formula = datos\_clean\$free.sulfur.dioxide ~ datos\_clean\$quality, main="free.sulfur.dioxide vs q

# free.sulfur.dioxide vs quality



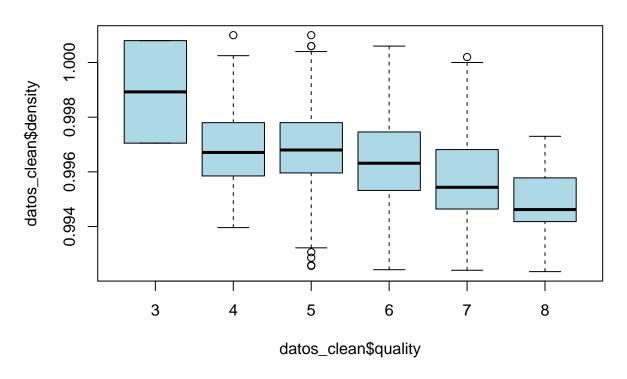
boxplot(formula = datos\_clean\$total.sulfur.dioxide ~ datos\_clean\$quality, main="total.sulfur.dioxide vs

# total.sulfur.dioxide vs quality



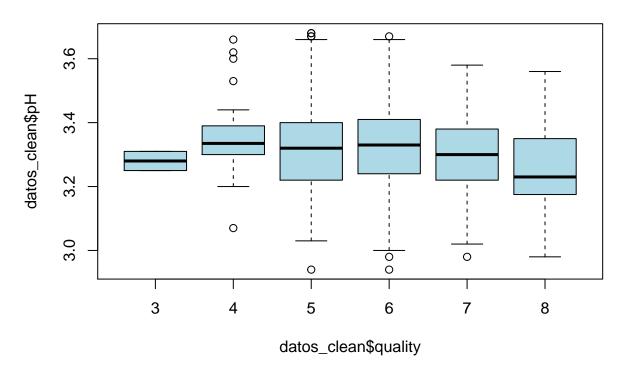
boxplot(formula = datos\_clean\$density ~ datos\_clean\$quality, main="density vs quality", col="lightblue"

# density vs quality



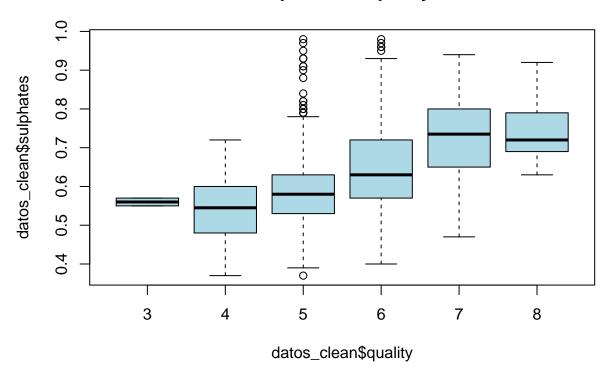
boxplot(formula = datos\_clean\$pH ~ datos\_clean\$quality, main="pH vs quality", col="lightblue")

# pH vs quality



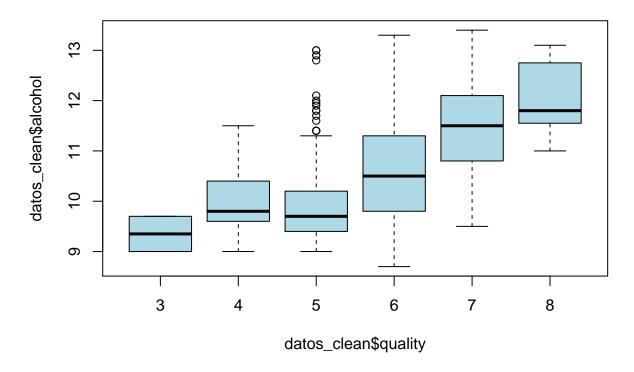
boxplot(formula = datos\_clean\$sulphates ~ datos\_clean\$quality, main="sulphates vs quality", col="light"

# sulphates vs quality



boxplot(formula = datos\_clean\$alcohol ~ datos\_clean\$quality, main="alcohol vs quality", col="lightblue"

#### alcohol vs quality



## Seleccion grupo de datos

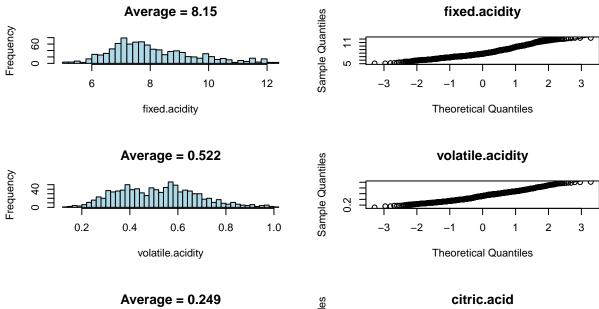
De la observación del grupo de datos nos interesa seleccionar los que pudieran tener una mayor relación con el resultado de calidad. Por ello vamos a seleccionar las que se intuye una cierta relación lineal para poder aplicar modelos de predicción. Las variables "fixed acidity", "citrix acid", "alcohol" y "sulphates", conforme aumentan, aumenta el valor de la calidad. Por el contrario para que aumente el valor de la calidad es necesario que disminuyan "volatile acidity", "density" y "pH". Crearemos un subconjunto de datos con estas cinco variables

subdatos <- select(datos\_clean, fixed.acidity, volatile.acidity, citric.acid, sulphates, alcohol)

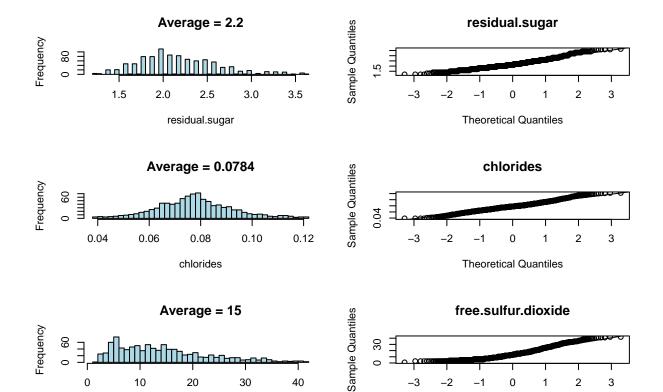
#### Comprobación de la normalidad y homogeneidad de la varianza.

Existen diferentes maneras de comprobar la normalidad de los datos, la del test de Shapiro es la más habitual, pero también es posible realizar dicha comprobación de forma visual mediante los histogramas y las gráficas quantilie-quantile. Este método nos permite identificar más fácilmente las distribuciones que se alejan de la normalidad.

```
# Gráficas QQ de comprobación de normalidad
par(mfrow=c(3,2))
for (i in 1:(ncol(datos_clean)-1)) {
   hist(datos_clean[[i]], xlab = names(datos_clean)[i], col = 'lightblue', main = paste("Average =", sig qqnorm(datos_clean[,i], main = colnames(datos_clean[i]))
   qqline(datos_clean[,i])
}
```



Frequency

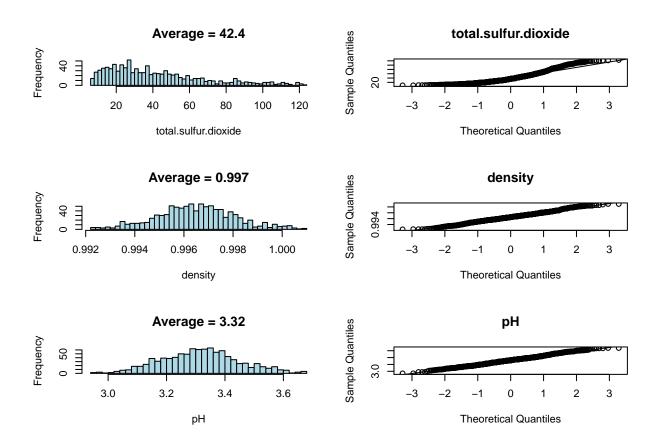


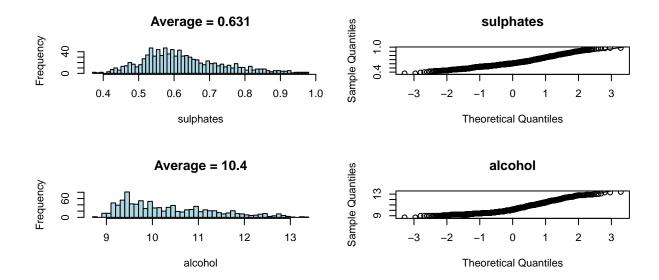
-3

-2

Theoretical Quantiles

free.sulfur.dioxide



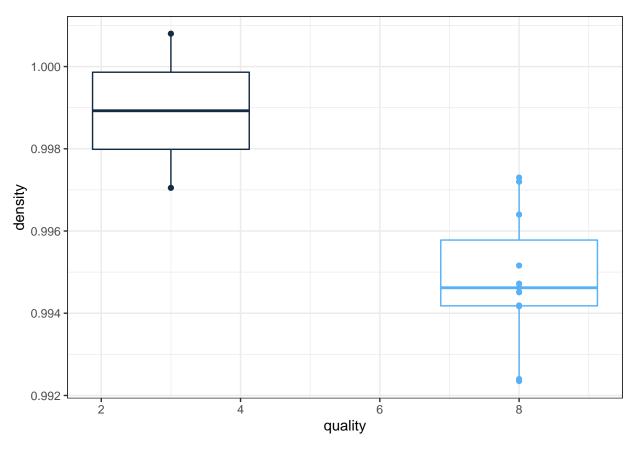


Los resultados gráficos nos indican que la mayoría de los atributos se acercan mucho a una distribución normal. \*Agrupación de los resultados. + "fixed.acidity", "volatile.acidity", residual.sugar", "chlorides", "density" y "pH" tienen una distribución normal. + "citric.acid", free.sulfur" y "total.sulfur.dioxide" están ligeramente desviados en su parte superior de la gráfica de quantiles. + "alcohol" está desviado ligeramente en su parte inferior de la gráfica de quantiles.

Una vez comprobada la normalidad de los datos, comentaremos el análisis de la varianza.

Algunos test de análisis estadístico requieren de la homogeneidad de la varianza como premisa, por lo que en el caso de intentar responder preguntas concretas, sería necesario realizar dicho análisis. Si quisiéramos comparar la densidad entre calidades de vino, podríamos analizar la distribución de datos entre dos calidades concretas. Para ello utilizaremos primero una revisión visual, y posteriormente le pasaremos un Shariro Test, al tener los datos de densidad una distribución normal.

```
# Visualización de las distribuciones de datos de densidad en función de la calidad del vino.
calidad <- filter(.data = datos_clean, quality %in% c("3", "8"))
ggplot(data = calidad, aes(x = quality, y = density, colour = quality, group=quality)) +
   geom_boxplot() +
   geom_point() +
   theme_bw() +
   theme(legend.position = "none")</pre>
```



# Test que nos permite comprobar si se observan diferencias estadísticamente significativa<mark>s de la densitt.test(density ~ quality, data = calidad)</mark>

```
##
## Welch Two Sample t-test
##
## data: density by quality
## t = 2.1158, df = 1.1459, p-value = 0.2552
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## -0.01423867  0.02244867
## sample estimates:
## mean in group 3 mean in group 8
##  0.998925  0.994820
```

En este caso tenemos un valor de p-value mayor al nivel de significancia, lo que significa que no se observan diferencias estadísticamente significativas entre los grupos de datos de la calidad del vino para la variable densidad. En este escenario podríamos aplicar los diferentes test para responder las preguntas que nos planteamos sobre este subconjunto de datos.

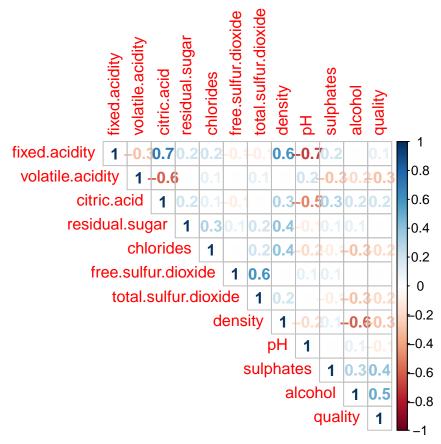
Nuestro objetivo es la predicción de la calidad del vino con los diferentes parámetros de sus componentes, por lo que que vamos a proseguir con el análisis de correlación de los datos.

#### Aplicación de pruebas estadísticas para comparar los grupos de datos

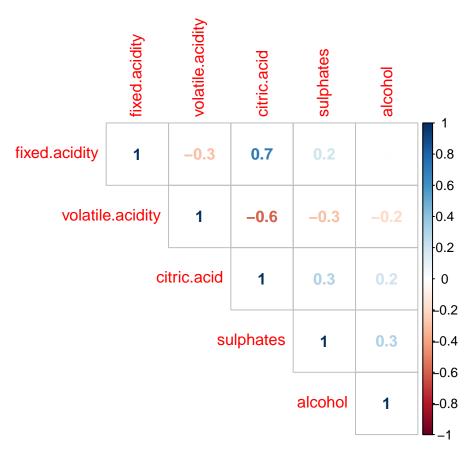
Aplicaremos diversas pruebas estadísticas para analizar la relación de los datos y poder crear el modelo de predicción de la calidad. Comenzaremos por analizar los valores de correlación de las variables con la variable "quality"

#### Correlacion

```
# Visualizaremos la matriz de correlacion de variables
correlacion<-round(cor(datos_clean), 1)
corrplot(correlacion, method="number", type="upper")</pre>
```



# Visualizaremos la matriz de correlacion de las variables seleccionadas anteriormente
correlacion<-round(cor(subdatos), 1)
correlacion, method="number", type="upper")</pre>



Guardaremos los datos de correlación en una matriz ordenada para decir que variables utilizar en siguientes estudios. Dado que hemos observado que no siempre se cumple el criterio de homocedasticidad, vamos a utilizar la correlación de Spearman, ya que este método no conlleva ninguna suposición sobre la distribución de datos.

```
# Creamos la matriz para almacenar los datos
matrixcor <- matrix(nc = 2, nr = 0)
colnames(matrixcor) <- c("Variable","correlacion")
# Recorremos el dataset ejecutando el test
for (i in 1:(ncol(datos_clean)-1)) {

   coef <- cor(x=datos_clean$quality, y = datos_clean[,i], method="spearman")
    # Añadimos los datos a la matriz
   pair = matrix(ncol = 2, nrow = 1)
   pair[1][1] = colnames(datos_clean[i])
   pair[2][1] = coef
   matrixcor <- rbind(matrixcor, pair)
}
# Ordenamos por el valor de correlacion
matrixcor[order(matrixcor[,"correlacion"]), ]</pre>
```

```
##
         Variable
                                 correlacion
##
    [1,] "free.sulfur.dioxide"
                                 "-0.0142302868915794"
##
    [2,] "pH"
                                 "-0.0336994262981316"
    [3,] "total.sulfur.dioxide" "-0.196540695857558"
##
##
    [4,] "chlorides"
                                 "-0.21414601254306"
    [5,] "density"
                                 "-0.24034979639258"
```

```
## [6,] "volatile.acidity" "-0.349885983236109"
## [7,] "residual.sugar" "0.0185028181151302"
## [8,] "fixed.acidity" "0.0885265391003716"
## [9,] "citric.acid" "0.204129810206267"
## [10,] "sulphates" "0.424537224897477"
## [11,] "alcohol" "0.508513759148933"
```

Observamos como algunos valores tiene una correlación positiva importante con la calidad del vino. Igualmente podemos observar como existen valores con una relevante correlación negativa, que también deben ser considerados.

#### Regresion lineal

Con este grupo de datos y las relaciones observadas tanto en las gráficas de caja como los datos de correlación estimaremos por mínimos cuadrados ordinarios un modelo lineal que explique la variable "quality". Vamos a tener en cuenta todas las variables que tengan un valor de correlación superior a 0.2, tanto positivas como negativas.

```
##
## Call:
## lm(formula = quality ~ alcohol + sulphates + citric.acid + volatile.acidity +
##
       density + chlorides, data = datos_clean)
##
## Residuals:
       Min
                  1Q
                      Median
                                    3Q
                                            Max
## -1.97648 -0.37168 -0.07193 0.44973
                                       2.02904
##
## Coefficients:
##
                     Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
                                           1.262
## (Intercept)
                     23.03247
                              18.25796
                                                    0.207
                                                 < 2e-16 ***
## alcohol
                     0.29089
                                 0.02724 10.677
## sulphates
                     1.79791
                                 0.19154
                                           9.387
                                                 < 2e-16 ***
## citric.acid
                     -0.09148
                                 0.15907 - 0.575
                                                    0.565
## volatile.acidity -0.88556
                                 0.16137
                                         -5.488 5.19e-08 ***
## density
                    -21.06388
                                18.25105
                                         -1.154
                                                    0.249
## chlorides
                     -0.95104
                                1.45430 -0.654
                                                    0.513
## ---
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.6119 on 973 degrees of freedom
## Multiple R-squared: 0.3803, Adjusted R-squared: 0.3765
## F-statistic: 99.52 on 6 and 973 DF, p-value: < 2.2e-16
```

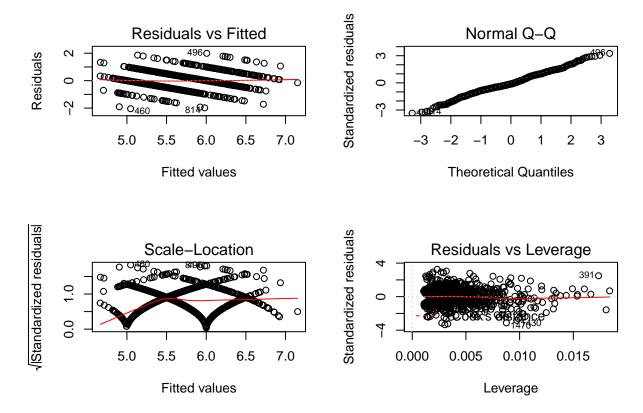
Podemos observar que las variables "citric.acid", "density" y "chlorides" son variables poco significativas para el modelo. Con un valor de R cuadraddo ajustado del 37.65%. Si lo comparamos con la tabla de correlación,

solo se han considerado las variables con un valor de correlación superior a 0.3

```
# Creamos un modelo reducido
modelo_reducido <- (lm(formula = quality ~</pre>
                                 alcohol +
                                 sulphates +
                                 volatile.acidity,
                                 data = datos_clean))
summary(modelo_reducido)
##
## Call:
## lm(formula = quality ~ alcohol + sulphates + volatile.acidity,
##
       data = datos_clean)
##
## Residuals:
##
       Min
                  1Q
                      Median
                                    3Q
                                            Max
## -2.04685 -0.37443 -0.07396 0.45867 1.99324
##
## Coefficients:
##
                    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)
                    1.70257
                               0.24707
                                         6.891 9.93e-12 ***
                                0.02068 15.309 < 2e-16 ***
## alcohol
                     0.31658
## sulphates
                     1.70920
                                0.18341
                                         9.319 < 2e-16 ***
## volatile.acidity -0.82619
                                0.12447 -6.638 5.28e-11 ***
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.6123 on 976 degrees of freedom
## Multiple R-squared: 0.3775, Adjusted R-squared: 0.3755
## F-statistic: 197.3 on 3 and 976 DF, p-value: < 2.2e-16
```

Como podemos observar, todas las variables utilizadas se consideran significativas, y la exclusión de las tres variables no significativas respecto al modelo anterior no ha supuesto una merma relevante en la calidad del modelo, con estas tres variables podemos explicar el 37.55% de la clasificación de quality. Finalmente, analizamos estadísticamente el modelo.

```
par(mfrow=c(2,2))
plot(modelo_reducido)
```



La gráfica de residuos frente a Fitted muestra si los residuos tienen patrones no lineales. Los residuos alrededor de una línea horizontal sin patrones distintos indican que tenemos relaciones lineales. La gráfica QQ plot normal muestra los residuos que se ajustan a la línea normal distribuidos. La grafica Scale-Location muestra si los residuos se distribuyen por igual a lo largo de los rangos de predictores de forma que podemos verificar el supuesto de varianza igual (homocedasticidad). Podemos observar una linea horizontal con puntos de dispersión iguales. El gráfico de residuos verapalancamiento tiene un aspecto típico cuando hay algún caso influyente. .

#### Regresión logistica

Con el objetivo de tener un modelo que nos permitiera tener un control de calidad excluyente que nos permitiera decidir si el producto final es bueno o malo. Vamos a crear un modelo de regresión logística y compararemos resultados.

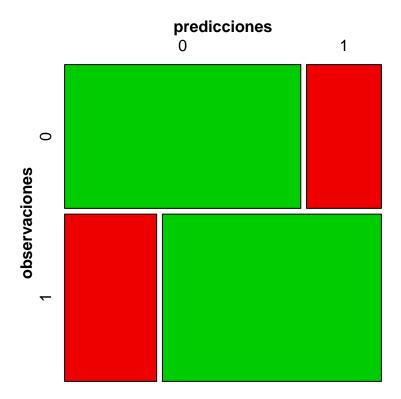
```
# Creamo una variable calidad de tipo factor
datos_clean$quality_factor <- as.factor(datos_clean$quality)

# Creamos un variable calidad binomial
datos_clean$category[datos_clean$quality <= 5] <- 0
datos_clean$category[datos_clean$quality > 5] <- 1
datos_clean$category <- as.factor(datos_clean$category)</pre>
```

```
# Generamos el modelo
modelo_log <- glm(category ~ alcohol + sulphates + volatile.acidity, data = datos_clean, family = "bino
summary(modelo_log)</pre>
```

## ## Call:

```
## glm(formula = category ~ alcohol + sulphates + volatile.acidity,
##
       family = "binomial", data = datos_clean)
##
## Deviance Residuals:
##
       Min
                 1Q
                     Median
                                   3Q
                                           Max
## -2.6924 -0.8389 0.2923 0.8382
                                        2.3321
## Coefficients:
##
                     Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)
                    -12.47164
                                1.11249 -11.211 < 2e-16 ***
## alcohol
                      1.02284
                                 0.09456 10.817 < 2e-16 ***
## sulphates
                      5.29518
                                 0.77638
                                          6.820 9.08e-12 ***
## volatile.acidity -2.29750
                                 0.49250 -4.665 3.09e-06 ***
## Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
       Null deviance: 1353.0 on 979 degrees of freedom
## Residual deviance: 1025.2 on 976 degrees of freedom
## AIC: 1033.2
## Number of Fisher Scoring iterations: 4
Creamos la tabla de confusión correspondiente al modelo.
library(vcd)
## Loading required package: grid
predicciones <- ifelse(test = modelo_log$fitted.values > 0.5, yes = 1, no = 0)
matriz_confusion <- table(modelo_log$model$category , predicciones, dnn = c("observaciones", "predicciones")
matriz_confusion
##
                predicciones
## observaciones 0 1
               0 344 109
##
##
               1 156 371
Visualizamos los resultados.
mosaic(matriz_confusion, shade = T, colorize = T, gp = gpar(fill = matrix(c("green3", "red2", "red2", "
```



El modelo de regresión logística nos ha dado un resultado de predicción de un 72% de acierto. Hemos de tener en cuenta que hemos simplificado la predicción a dos valores, considerando los vinos con puntuación de 5 o menos como malos y de más de 5 como buenos. En este caso, hemos entrenado el modelo con todos los datos y lo hemos evaluado sobre los mimos datos.

#### Modelos de clasificacion

También nos seria útil tener algún modelo de clasificación que pudiéramos determinar la calidad del vino en función de sus características. Podría agrupar los productos o producción en varios productos de venta, etc. . . Crearemos un modelo supervisado.

#### Arbol de decision

Necesitaremos prepara los datos para crear un grupo de datos de entrenamiento y de prueba.

```
# Copiamos los datos y eliminamos algunas columnas
datos_arbol <- datos_clean
datos_arbol$quality <- NULL
datos_arbol$quality_factor <- NULL
#datos_arbol$category <- NULL

# Creamos los conjuntos de datos de entrenamiento y de test.
set.seed(666)
datos_training <- sample_frac(datos_arbol, .7)
datos_test <- setdiff(datos_arbol, datos_training)</pre>
```

Entrenamos el modelo basandonos en la variable categoria

```
library(rpart)
library(rpart.plot)
arbol <- rpart(formula = category~ ., data = datos_training)</pre>
```

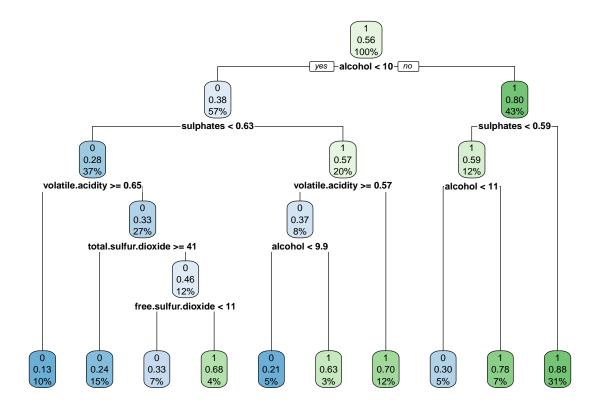
Evaluando el modelo

#### arbol

```
## n= 686
##
## node), split, n, loss, yval, (yprob)
##
        * denotes terminal node
##
  1) root 686 301 1 (0.4387755 0.5612245)
##
     2) alcohol< 10.45 388 147 0 (0.6211340 0.3788660)
##
##
       4) sulphates< 0.625 253 70 0 (0.7233202 0.2766798)
##
         ##
         9) volatile.acidity< 0.6525 183 61 0 (0.6666667 0.3333333)
##
         18) total.sulfur.dioxide>=41 104 25 0 (0.7596154 0.2403846) *
          19) total.sulfur.dioxide< 41 79 36 0 (0.5443038 0.4556962)
##
           38) free.sulfur.dioxide< 10.5 51 17 0 (0.6666667 0.3333333) *
##
           39) free.sulfur.dioxide>=10.5 28 9 1 (0.3214286 0.6785714) *
##
##
       5) sulphates>=0.625 135 58 1 (0.4296296 0.5703704)
##
        10) volatile.acidity>=0.565 52 19 0 (0.6346154 0.3653846)
          20) alcohol < 9.85 33 7 0 (0.7878788 0.2121212) *
##
         21) alcohol>=9.85 19 7 1 (0.3684211 0.6315789) *
##
##
        11) volatile.acidity< 0.565 83 25 1 (0.3012048 0.6987952) *
##
     3) alcohol>=10.45 298 60 1 (0.2013423 0.7986577)
##
       6) sulphates< 0.585 82 34 1 (0.4146341 0.5853659)
        12) alcohol< 11.1 33 10 0 (0.6969697 0.3030303) *
##
##
        7) sulphates>=0.585 216  26 1 (0.1203704 0.8796296) *
##
```

Mostramos el arbol de desicion con la funcion plot

rpart.plot(arbol)



Creamos la matrix de confusion para evaluar el arbol.

Sensitivity: 0.6908

Specificity: 0.7042

Pos Pred Value: 0.7143

Neg Pred Value: 0.6803

##

## ##

##

```
library(tidyverse)
library(caret)
prediccion <- predict(arbol, newdata = datos_test, type = "class")</pre>
confusionMatrix(prediccion, datos_test[["category"]])
  Confusion Matrix and Statistics
##
##
             Reference
##
                0
  Prediction
                    1
##
            0 105
            1 47 100
##
##
##
                   Accuracy : 0.6973
                     95% CI: (0.6413, 0.7493)
##
       No Information Rate: 0.517
##
##
       P-Value [Acc > NIR] : 2.484e-10
##
##
                      Kappa: 0.3946
##
    Mcnemar's Test P-Value: 0.6716
##
##
```

```
## Prevalence : 0.5170
## Detection Rate : 0.3571
## Detection Prevalence : 0.5000
## Balanced Accuracy : 0.6975
##
## 'Positive' Class : 0
##
```

Vemos que la presicion del modelo es 69.73%. Con un valor del factor Kappa de 0.3946  $^{\prime\prime\prime}$ 

# Representación de los resultados

# Resolución del problema