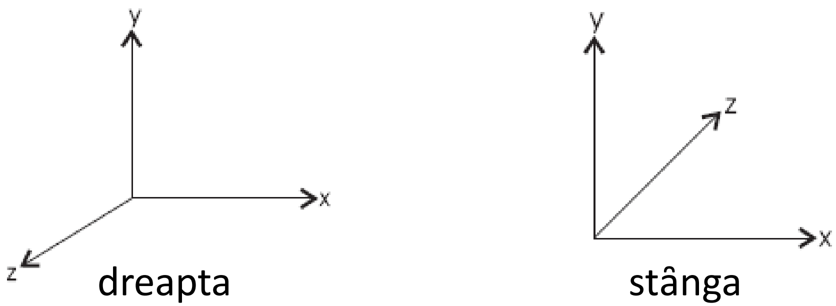
Transformari geometrice 3D

Prof. univ. dr. ing. Florica Moldoveanu
Conf. dr. ing. Anca Morar

Curs *Elemente de Grafică pe Calculator* – UPB, Automatică şi Calculatoare
2018-2019

Sisteme de coordonate carteziene 3D



Sisteme de coordonate carteziene 3D

i, j, k: versorii directiilor axelor sistemului de coordonate

dreapta: k = (i x j)/|i x j|

stanga: k = (j x i)/|j x i|

Sistemul de coordonate in care este descrisa scena intr-o aplicatie OpenGL: sistem de coordonate carteziene 3D dreapta.

Transformările geometrice 3D elementare

- Translaţia
- Scalarea faţă de origine
- Rotaţiile în jurul axelor principale ale sistemului de coordonate
- Oglindirea faţă de un plan al sistemului de coordonate
- Forfecarea faţă de originea sistemului de coordonate

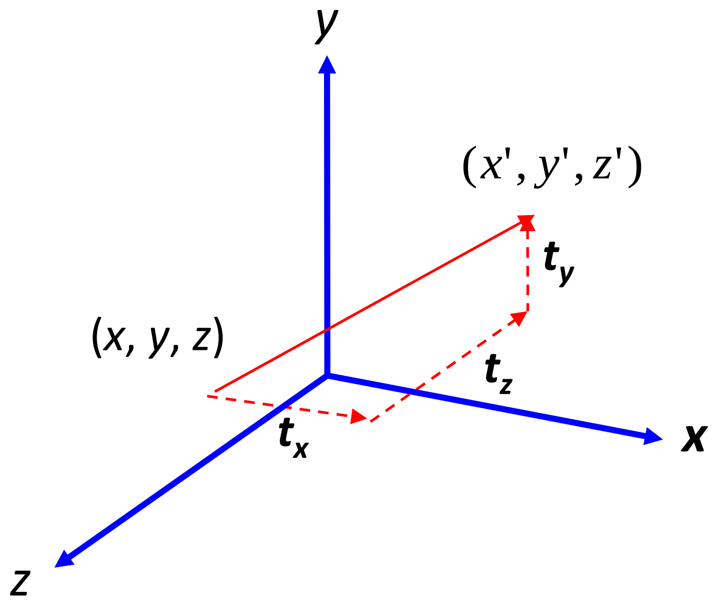
Considerăm punctele din spaţiu reprezentate prin vectori coloană, pentru a respecta conventia din OpenGL:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

M este matricea de transformare a punctului (x, y, z), in coordinate omogene

Translaţia

Definita printr-un vector T[tx,ty,tz]



$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

$$z' = z + t_z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

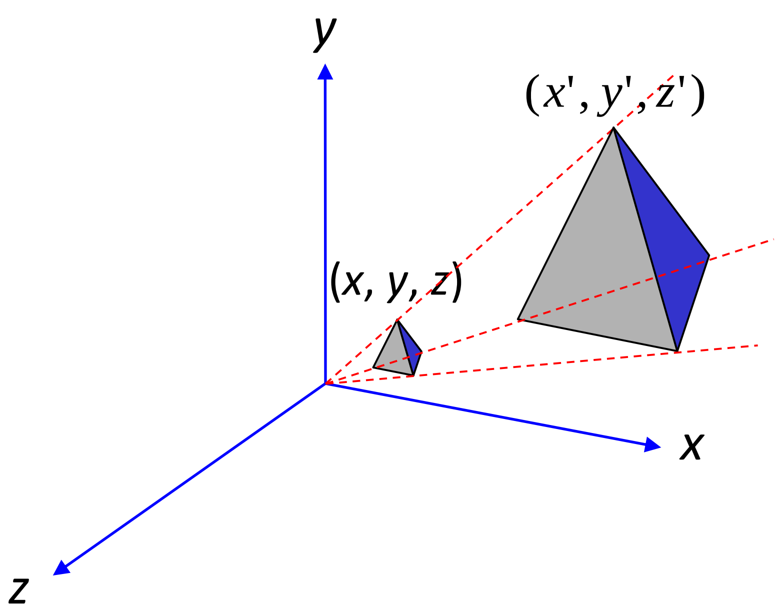
$T(t_x, t_y, t_z)$

Scalarea faţă de origine

Definita prin 3 numere reale: Sx,Sy, Sz – factorii de scalare pe cele 3 axe

$$S_x = S_y = S_z \quad \Rightarrow \quad \text{scalare uniforma}$$

altfel, scalare neuniforma

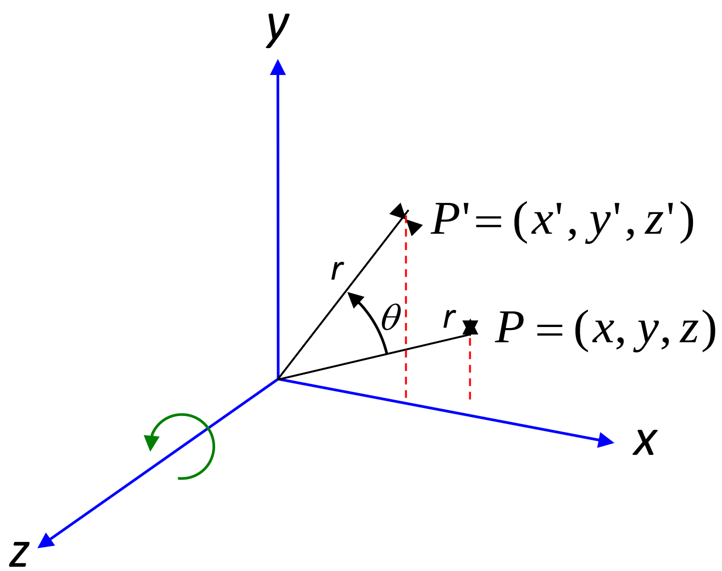


$$x' = x \cdot s_x$$
$$y' = y \cdot s_y$$
$$z' = z \cdot s_z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$S(s_x, s_y, s_z)$

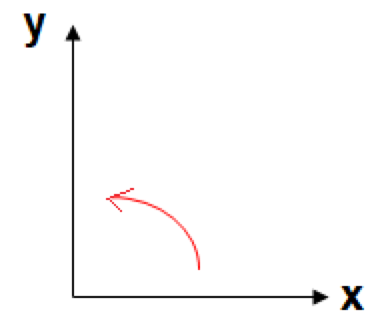
Rotaţia pozitivă (trigonometrica) în jurul axei oz



Este o rotaţie într-un plan de z constant (prin rotaţie nu se modifică coordonata z).

Rotatia in planul XOY:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z' = z = 0$$



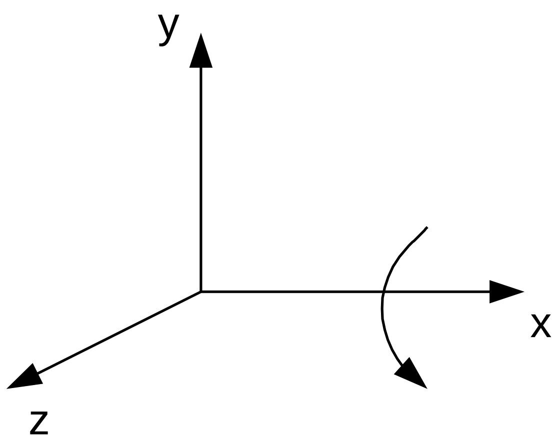
Rotatia punctului P(x,y,z) in jurul axei Oz cu unghiul θ:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$R_z(\theta)$

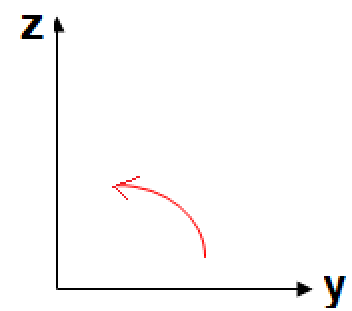
$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z' = z$$

Rotaţia pozitivă în jurul axei ox



Rotatia in planul Y0Z

$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$
$$x' = x = 0$$



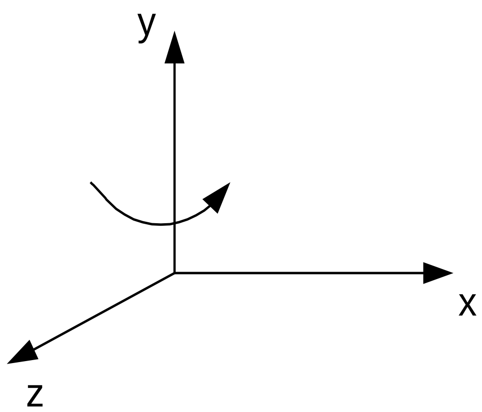
Rotatia punctului P(x,y,z) in jurul axei Ox cu unghiul θ:

$$x' = x$$
$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

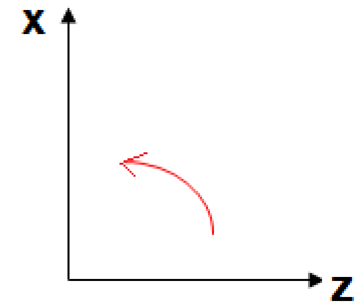
$R_x(\theta)$

Rotaţia pozitivă în jurul axei oy



Rotatia in planul ZOX

$$z' = z\cos\theta - x\sin\theta$$
$$x' = x\cos\theta + z\sin\theta$$
$$y' = y = 0$$



Rotatia punctului P(x,y,z) in jurul axei Oy cu unghiul θ:

$$x' = x\cos\theta + z\sin\theta$$
$$y' = y$$
$$z' = -x\sin\theta + z\cos\theta$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_y(\theta)$

Alte transformari geometrice 3D elementare

Oglindirea faţă de un plan al sistemului de coordonate

$$[O_z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

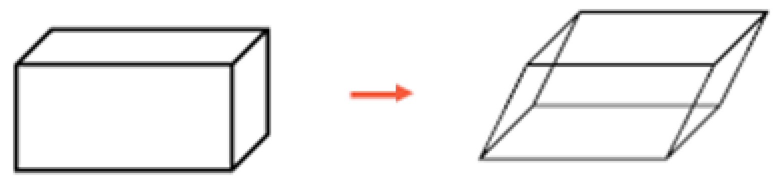
Forfecarea faţă de origine

- **De-a lungul axei OZ: modifica x si y proportional cu z**

  x’ = x + Fx*z

  y’ = y + Fy*z

  z’ = z



- **Analog pentru forfecarea de-a lungul axei OX si a axei OY**

- **Cazul general (forfecarea pe toate cele 3 axe):**

  x’ = x + y* d + z*g

  y’ = x*b + y + z*i

  z’ = x*c + y*f + z

$$[x' \;\; y' \;\; z' \;\; 1] = [x \;\; y \;\; z \;\; 1] * \begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Transformari geometrice 3D compuse

Exemple:

1. Scalarea faţă de un punct oarecare, F(xf, yf, zf):

T(xf,yf,xf)*S(sx,sy,sz)*T(-xf,-yf,-zf)

2. **Rotatia in jurul unei axe paralele cu o axa a sistemului de coordonate**:

1. Translatia obiectului astfel incat axa de rotatie sa se suprapuna peste o axa a sistemului de coordonate.
2. Rotatia obiectului in jurul axei sistemului de coordonate.
3. Translatia inversa celei din pasul 1.

Rezulta:

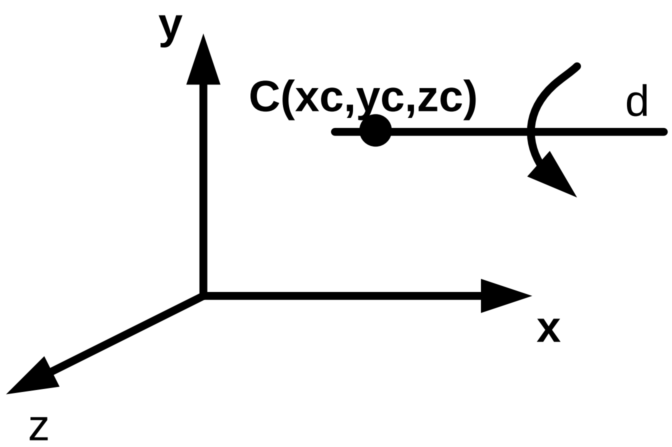
M = T(xd, yd, zd) * R(u) * T(-xd, -yd, -zd)

u : unghiul de rotatie

xd, yd, zd : un punct de pe axa de rotatie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'} \\ \mathbf{y'} \\ \mathbf{z'} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = M * \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Rotaţia în jurul unei drepte paralele cu axa OX



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = T(xc, yc, zc)\, R_X(u)\, T(-xc, -yc, -zc) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotatia cu în jurul unei drepte oarecare (1)

Se considera dreapta data printr-un punct (xd, yd, zd) si directia sa, D[a, b, c].

1. Translatie prin care dreapta va trece prin origine: T(-xd, -yd, -zd)
2. Alinierea dreptei cu una dintre axele principale, de ex. cu axa OZ:

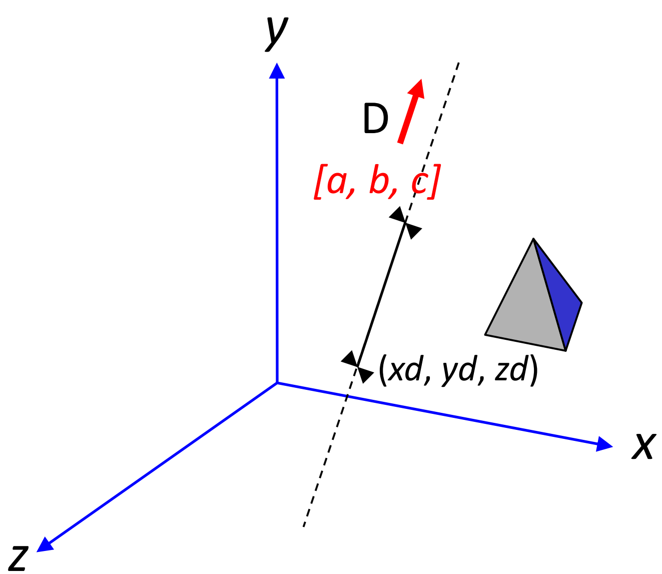
   2.1. Rotatie in jurul axei OX, cu un unghi ux, prin care dreapta ajunge in planul XOZ: Rox(ux)

   2.2. Rotatie in jurul axei OY, cu un unghi uy, prin care dreapta se suprapune pe axa OZ: Roy(uy)
3. Rotatia cu unghiul dat, u, in jurul axei pe care s-a aliniat dreapta: rotatie in jurul axei OZ : Roz(u)
4. Transformarea inversa celei din pasul 2:

   4.1. Rotatie in jurul axei OY, cu unghiul –uy: Roy(-uy)

   4.2. Rotatie in jurul axei OX, cu unghiul –ux: Rox(-ux)
5. Transformarea inversa celei de la pasul 1: T(xd, yd, zd)

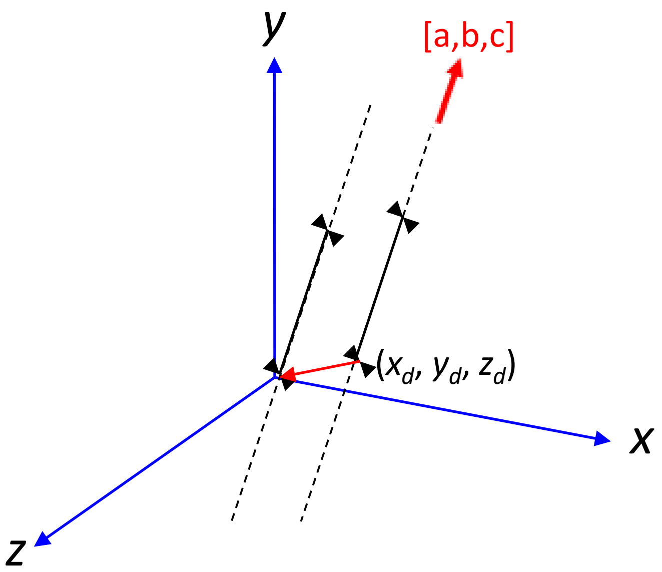
Rotatia in jurul unei drepte oarecare (2)



1. Translatie astfel incat dreapta sa treaca prin origine
2. Aliniere dreapta cu una din axe
3. Rotatia propriu-zisa.
4. Transformarea inversa de la punctul 2
5. Transformarea inversa de la punctul 1

Rotatia in jurul unei drepte oarecare (3)

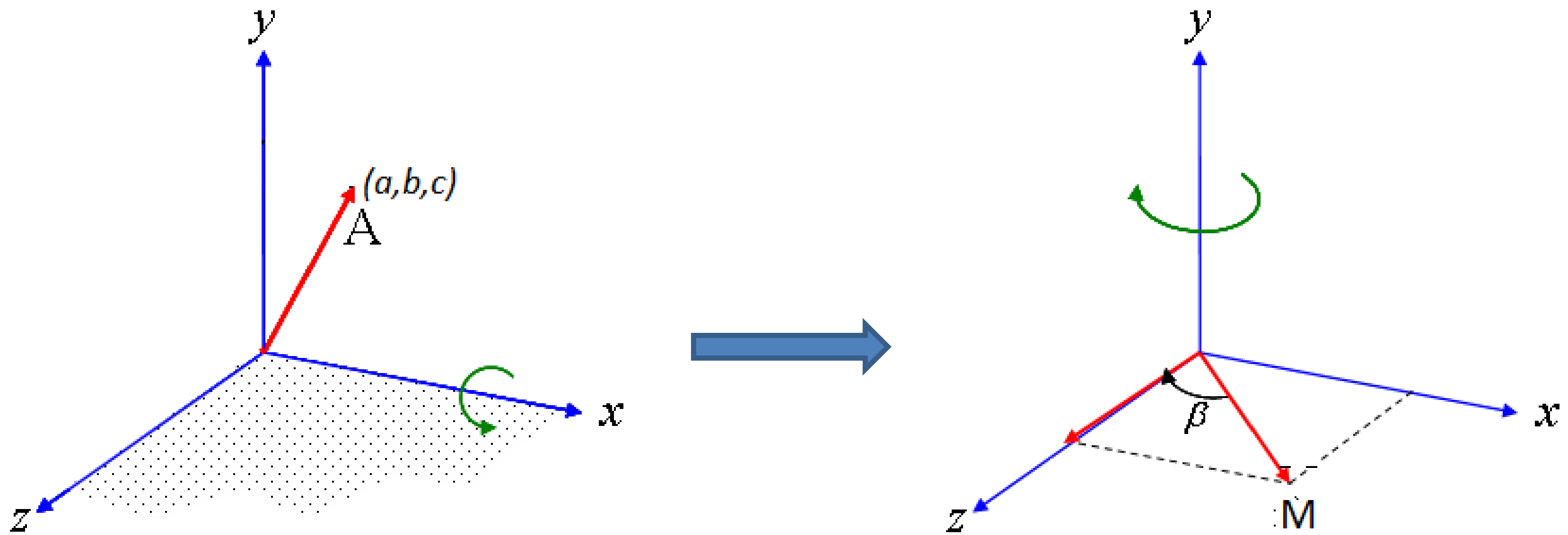
1. Translaţie



$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -xd \\ 0 & 1 & 0 & -yd \\ 0 & 0 & 1 & -zd \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotatia in jurul unei drepte oarecare (4)

2. Aliniere *D* cu axa OZ

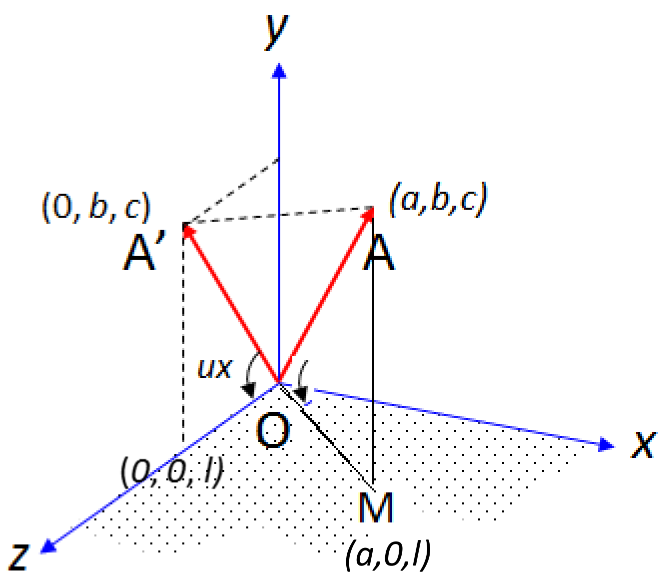


Rotatie in jurul axei OX cu un unghi ux, prin care dreapta ajunge in planul XOZ: Rox(ux)

Rotatie in jurul axei OY, cu un unghi uy, prin care dreapta se suprapune pe axa OZ: Roy(uy)

Rotatia in jurul unei drepte oarecare (5)

2. 1. Rotatia in jurul axei OX



A’ – proiectia lui A in planul YOZ

Lungime (OA) = L; lungime (OA’) = l;

$$\mathrm{L} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\mathrm{l} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

b = l*sin(ux)
c = l*cos(ux)

$$\sin(ux) = \frac{b}{l}$$

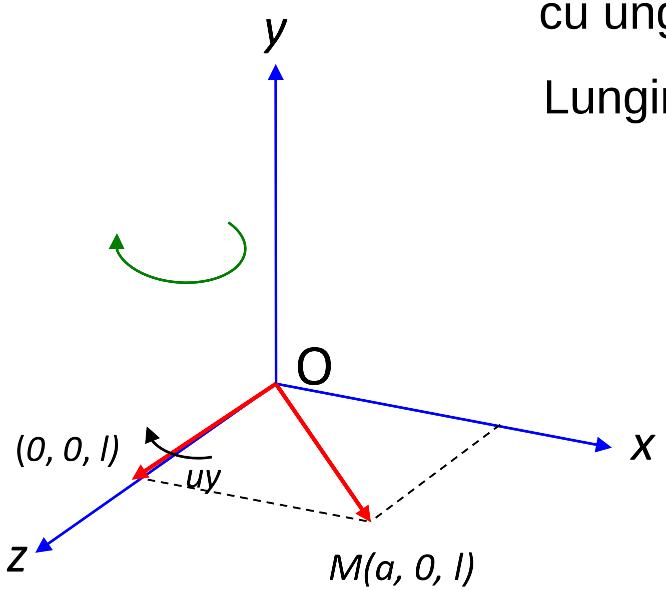
$$\cos(ux) = \frac{c}{l}$$

R_x(ux)

Prin rotatia lui OA in jurul axei Ox cu unghiul ux, acesta va ajunge in planul XOZ

Rotatia in jurul unei drepte oarecare (6)

2. 2. Rotatia in jurul axei OY



R_y(uy)

M este punctul obtinut prin rotatia lui A in jurul axei Ox, cu unghiul ux.

Lungime (OM) = Lungime (OA) = L

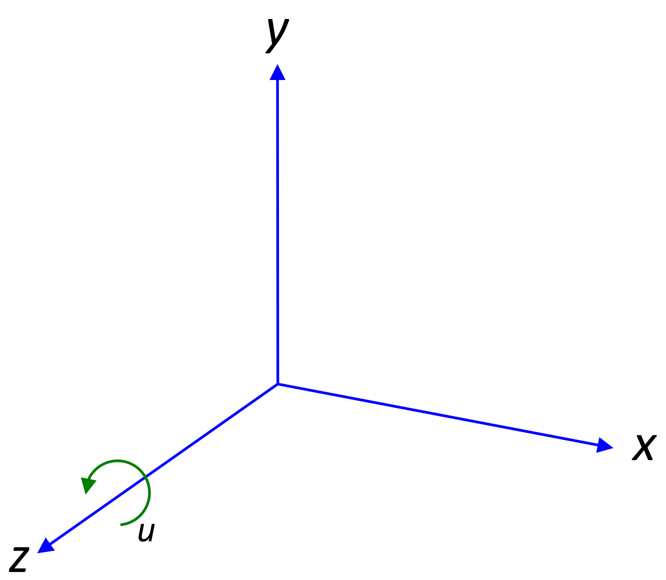
a = L*sin(-uy)

l = L*cos(-uy)

$$\sin(-uy) = a / L -> \sin(uy) = -a / L$$
$$\cos(-uy) = \cos(uy) = l / L$$

Rotatia in jurul unei drepte oarecare (7)

3. Rotatia in jurul axei OZ cu unghiul dat

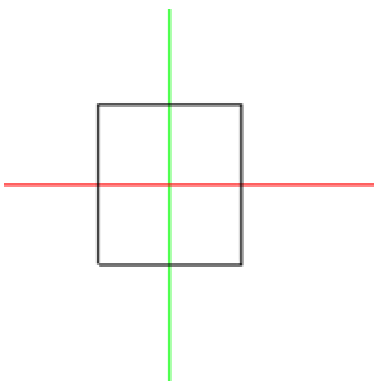


$$R_z(u) = \begin{bmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

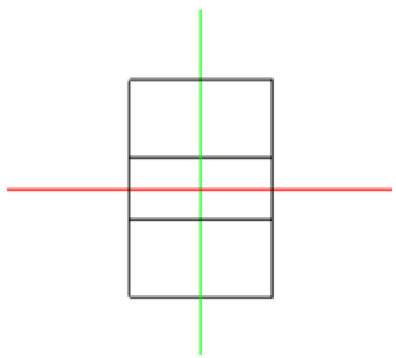
Exemplu: rotatia unui cub (1)

Cub centrat in originea sistemului de coordonate XYZ

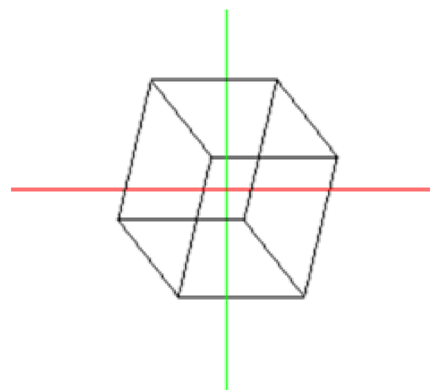
Proiectie ortografica in XOY: (x,y,z) → (x’ = x; y’ = y)



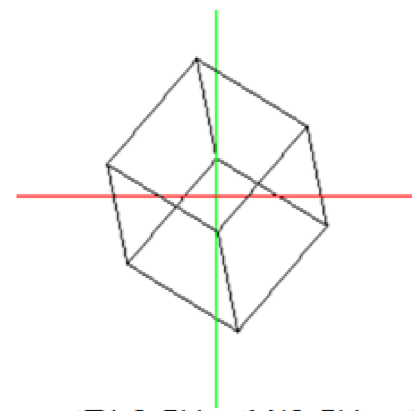
Pozitia initiala



rotX(-0.5)



rotY(0.5)* rotX(-0.5)

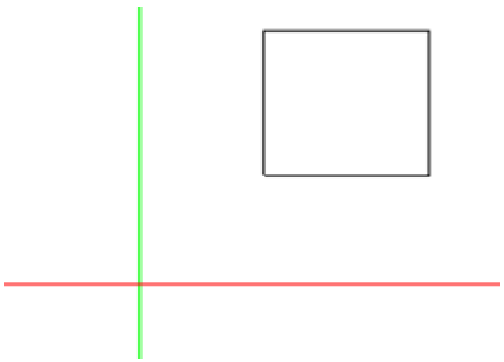


rotZ(-0.5)*rotY(0.5)* rotY(-0.5)

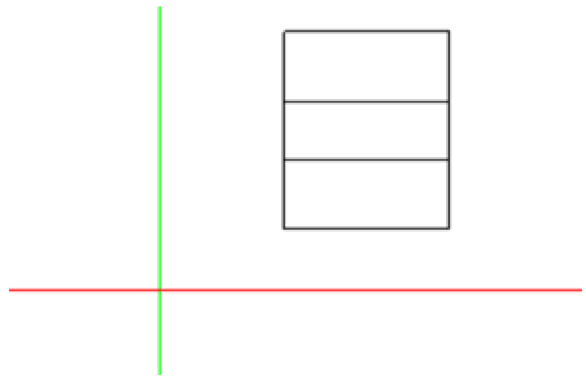
Exemplu: rotatia unui cub (2)

Cub cu centrul in (100, 100, 0)

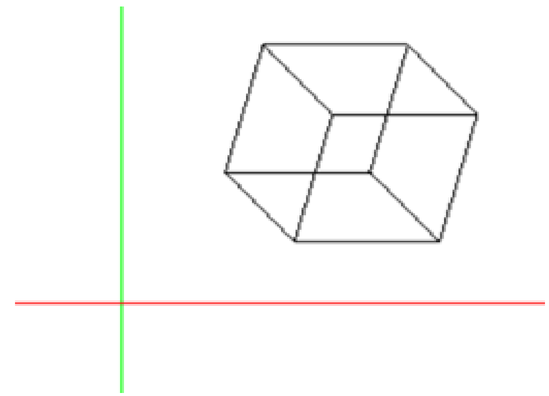
Proiectie ortografica in XOY



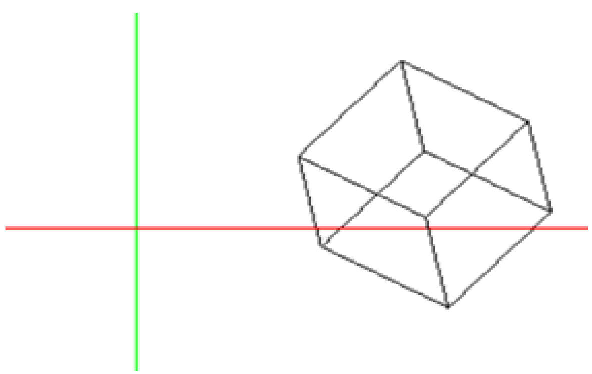
Pozitia initiala



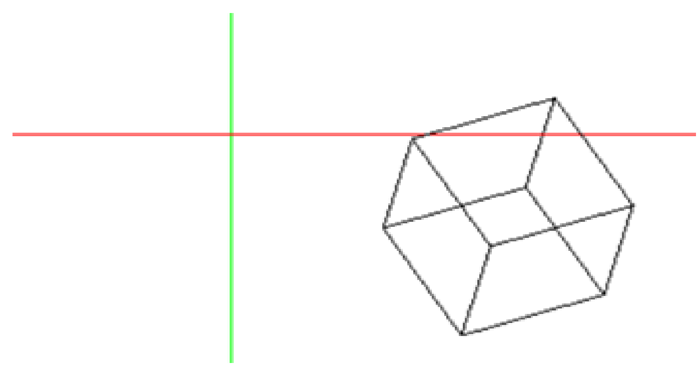
rotX(-0.5)



rotY(0.5)*rotX(-0.5)



rotZ(-0.5)*rotY(0.5)*rotX(-0.5)



rotZ(-0.5)*rotZ(-0.5)*rotY(0.5)*rotX(-0.5)