

Tema 5: Álgebra de Boole Funciones Lógicas

Escuela Politécnica Superior
Ingeniería Informática
Universidad Autónoma de Madrid



Escuela Politécnica Superior



Álgebra de Boole. Funciones Lógicas

O
B
J
E
T
I
V
O
S

- **Conocer** el Álgebra de Boole, sus teoremas y las funciones lógicas
- **Comprender** su aplicación a los circuitos digitales

TEMA 5: ÁLGEBRA DE BOOLE. FUNCIONES LÓGICAS

5.1 Variables Lógicas

Variables y funciones lógicas.

Teoremas del álgebra booleana.

Funciones lógicas básicas.

5.2 Funciones Lógicas

Forma canónica de una función lógica. Maxterms y Minterms.

Simplificación de funciones.

Diagramas de Karnaugh.

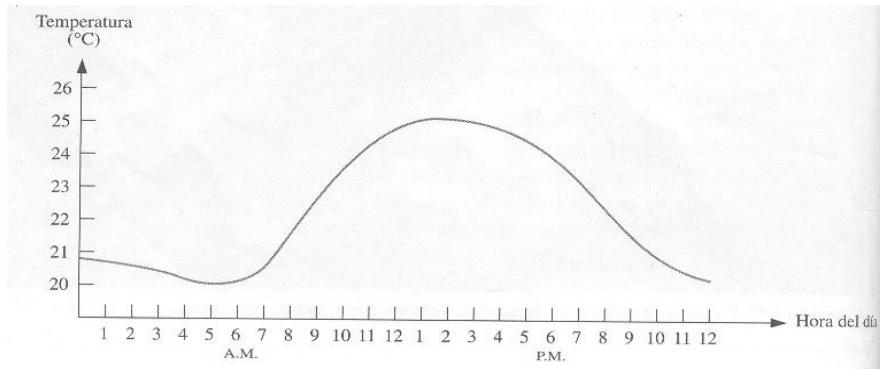
Bibliografía Tema 5:

- *Fundamentos de Sistemas Digitales*. T. L. FLOYD.
(Prentice Hall, 2000). Caps. 1, 3 y 4.

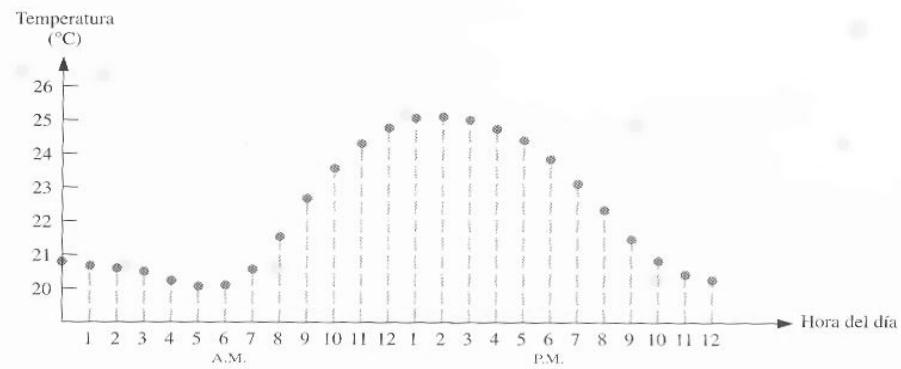


Magnitudes Analógicas y Digitales

- Los circuitos electrónicos se dividen en dos categorías: digitales y analógicos.
- La electrónica **digital** utiliza magnitudes digitales que toman **valores discretos**.
- La electrónica **analógica** emplea magnitudes analógicas que toman **valores continuos**.
- En las aplicaciones electrónicas, los datos digitales se pueden procesar de forma más fiable que los datos analógicos. Cuando es necesario su almacenamiento, el ruido (fluctuaciones de tensión no deseadas) no afecta a las señales digitales tanto como a las señales analógicas.



Gráfica de una función analógica (temperatura en función del tiempo)



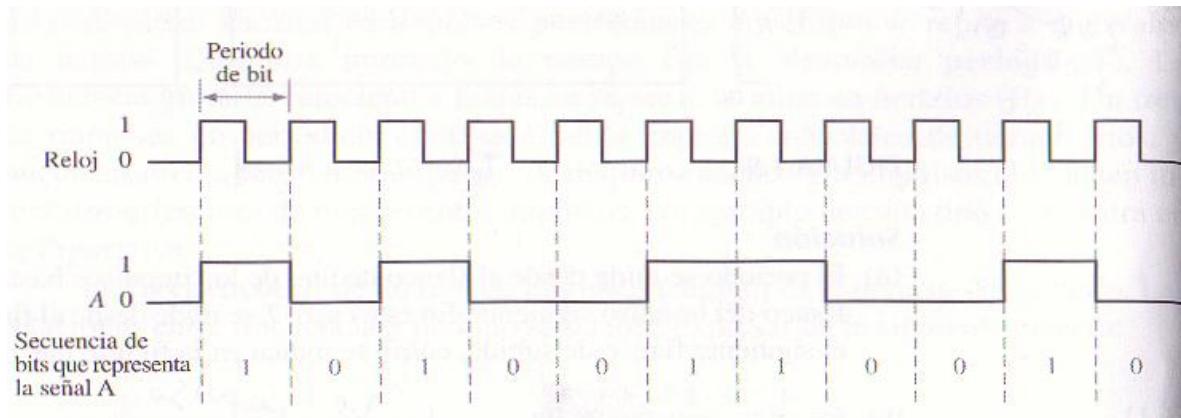
Representación de los valores muestrados (cuantificación) de la magnitud analógica temperatura. Cada valor representado por un punto puede digitalizarse, representándolo como un código digital que consta de una serie de 1s y 0s.



Señales Digitales

- La información binaria que manejan los sistemas digitales aparece en forma de señales digitales que representan secuencias de bits.
- Cuando la señal está a nivel ALTO, se representa con 1 binario, mientras que si la señal está a nivel BAJO, lo indica un 0 binario.
- Cada bit dentro de una secuencia ocupa un intervalo de tiempo definido denominado periodo del bit.
- En los sistemas digitales, todas las señales se sincronizan con una señal de temporización básica de reloj.
- El reloj es una señal periódica en la que cada intervalo entre impulsos (el periodo) equivale a la duración de 1 bit.

Ejemplo de una señal de reloj sincronizada con la señal A



Variables y Funciones Lógicas

• Variable Lógica

- Representa un suceso o magnitud que toma valores entre dos posibles.
- Los dos valores son excluyentes entre ellos.
- Los dos valores se expresan mediante proposiciones.
- Las proposiciones se pueden clasificar como verdaderas o como falsas.

• Funciones Lógicas

- Cuando se combinan proposiciones se forman funciones lógicas o proposiciones lógicas.
- Por ejemplo: "si la bombilla no está fundida y el interruptor está dado, la luz está encendida".
- Las dos primeras proposiciones son las condiciones de las que depende la proposición "la luz está encendida". Esta es cierta sólo si las dos primeras lo son.
- Por tanto, una función lógica calcula el valor de una variable (dependiente) a partir de otra u otras variables (independientes).



Variables y Funciones Lógicas

• Álgebra de Boole

- Hacia 1850, el matemático y lógico irlandés George Boole (1815 - 1864), desarrolló un sistema matemático para formular proposiciones lógicas con símbolos, de manera que los problemas pueden ser escritos y resueltos de una forma similar al álgebra tradicional.
- El Álgebra de Boole se aplica en el análisis y el diseño de los sistemas digitales.
- Una variable booleana es cualquier símbolo que en un instante determinado sólo puede tomar uno de dos valores: 0 y 1.
- Existen varios tipos de circuitos lógicos que se utilizan para implementar funciones lógicas u operaciones lógicas. Estos circuitos son los elementos básicos que constituyen los bloques sobre los que se construyen sistemas digitales más complejos, como por ejemplo una computadora.

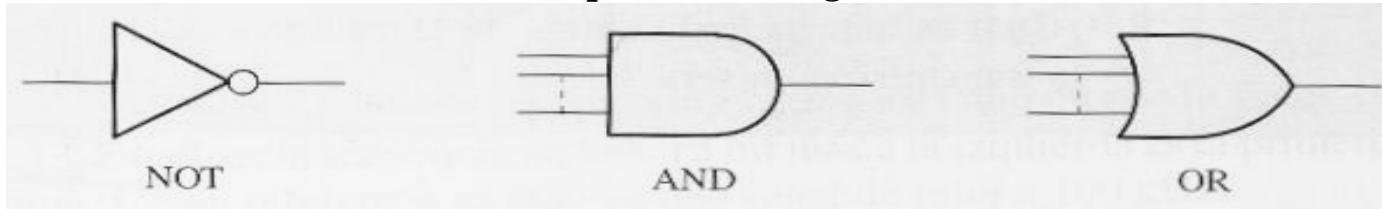


Operaciones Lógicas

• Funciones Lógicas

- Las operaciones lógicas pueden representarse a través de **símbolos gráficos** y de **tablas de verdad**.

Símbolos de las operaciones lógicas básicas



- Las líneas conectadas a la izquierda de cada símbolo son las **entradas (input)** y las líneas a la derecha son las **salidas (output)**.

Tablas de verdad de las operaciones lógicas básicas

A	X	A	B	X	A	B	X
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
		1	0	0	1	0	1
		1	1	1	1	1	1

NOT AND con dos entradas y una salida OR con dos entradas y una salida

- El funcionamiento de las puertas, operaciones y funciones lógicas se describe con las tablas de verdad.
- Son representaciones tabulares que especifican la salida de la puerta o función lógica para todas las posibles combinaciones de entradas.



Operaciones Lógicas

• Puertas Lógicas

- Puertas Lógicas: circuitos que aceptan valores lógicos a la entrada y producen valores lógicos a la salida. Un circuito que realiza una operación lógica determinada (NOT, AND, OR) se llama puerta lógica.
- Lógica Combinatoria: cuando en un circuito lógico el estado de las salidas depende sólo del estado de las entradas, es decir combinaciones de diferentes valores lógicos a la entrada de un circuito lógico hacen que aparezcan distintos valores lógicos a la salida. En este curso se tratará la Lógica Combinatoria.
- Lógica Secuencial: si el estado de la salida depende del estado de las entradas y también del estado anterior del circuito. Esta lógica no se tratará en este curso.



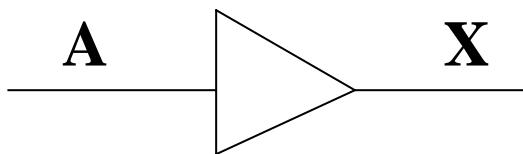
Puertas Lógicas

- Puerta Amplificador
- Puerta NOT o Inversor
- Puerta AND
- Puerta OR
- Puerta NAND
- Puerta NOR
- Puerta XOR
- Puerta XNOR



Puerta Amplificador

- Realiza la operación denominada amplificación.
- Mantiene un nivel lógico de una entrada (A) en la salida (X).
- En términos de bits mantiene:
 - Un 1 por un 1.
 - Un 0 por un 0.
- Se utiliza para retrasar la transmisión de una señal lógica y para distribuir la señal de salida a más componentes que la señal original.
- Símbolo lógico estándar:



Puerta Amplificador

- Tabla de verdad:

A	X
1	1
0	0

- Ecuación Lógica:

$$X = A$$



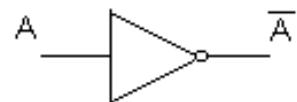
Puerta NOT o Inversor

- Realiza la operación denominada inversión o complementación.
- Cambia el nivel lógico al nivel opuesto.
- En términos de bits cambia:
 - Un 1 por un 0.
 - Un 0 por un 1.



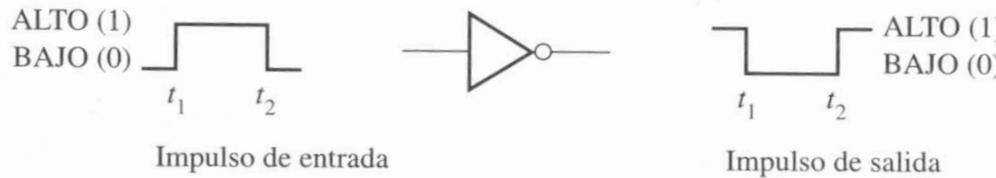
Puerta NOT: Símbolo y Funcionamiento

- Símbolo lógico estándar:



- Funcionamiento:

- Cuando la entrada está a nivel BAJO, la salida está a nivel ALTO.
- Cuando la entrada está a nivel ALTO, la salida está a nivel BAJO.



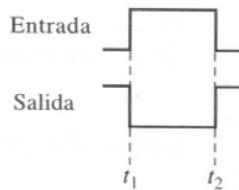
Puerta NOT: Tabla de Verdad y Diagrama de Tiempos

- Tabla de verdad:

Entrada A	Salida \bar{A}
0	1
1	0

- Diagrama de tiempos:

- Una gráfica que representa de forma precisa las relaciones de dos o más formas de onda en función del tiempo.



Puerta NOT: Ecuación Lógica

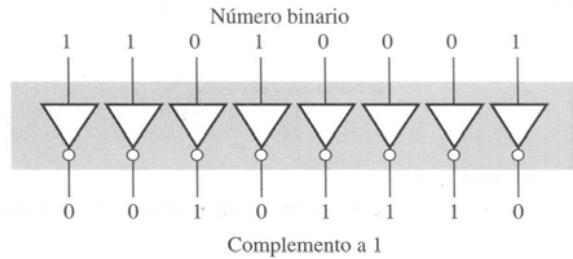
- En el álgebra booleana, una variable se designa mediante una letra.
- Las variables pueden tomar dos valores: 1 y 0.
- El complemento de una variable se designa mediante una barra encima de la letra.
- Si una variable dada es 1, su complemento es 0, y viceversa
- Ecuación lógica:

$$X = \overline{A}$$



Puerta NOT: Ejemplo de Aplicación

- Un circuito que genera el complemento a 1 de un número binario de 8 bits:
 - Los bits del número binario se aplican a las entradas del inversor.
 - El complemento a 1 del número se presenta en las salidas.



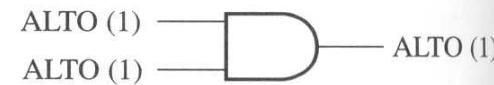
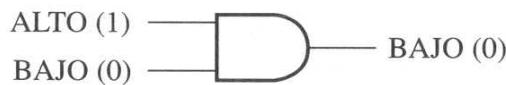
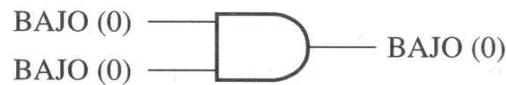
Puerta AND

- La puerta AND es una de las puertas básicas con la que se construyen todas las funciones lógicas.
- Tiene dos o más entradas y una única salida.
- Realiza la operación que se conoce como multiplicación lógica.
- Símbolo lógico estándar:



Puerta AND: Funcionamiento

- En una puerta AND de dos entradas:
 - La salida AB es un nivel ALTO si A y B están a nivel ALTO.
 - La salida AB es un nivel BAJO si:
 - A es un nivel BAJO
 - B es un nivel BAJO o
 - si A y B están a nivel BAJO



Puerta AND: Tabla de Verdad

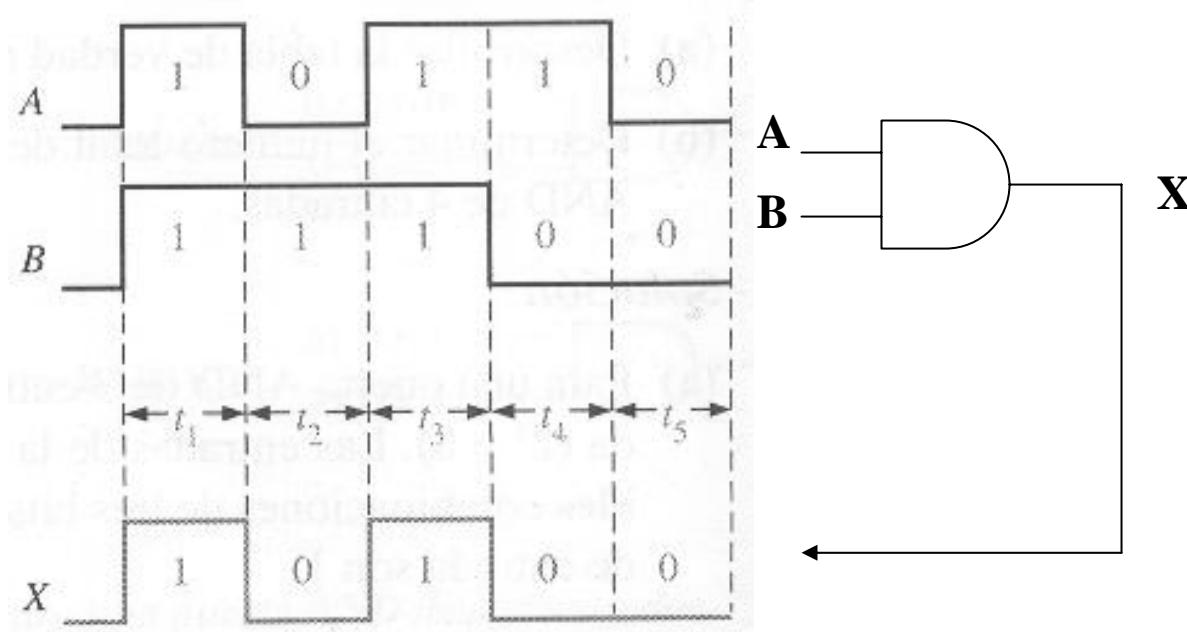
- Tabla de verdad:

Entrada A	Entrada B	Salida X=AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Puerta AND: Diagrama de Tiempos

- Diagrama de tiempos:



Puerta AND: Ecuación Lógica

- La ecuación lógica AND de dos variables se representa:
 - Colocando un punto entre las dos variables: $A \cdot B$
 - Escribiendo las letras juntas sin el punto: AB
- La multiplicación booleana sigue las mismas reglas básicas que la multiplicación binaria:

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

- Ecuación lógica o expresión booleana:

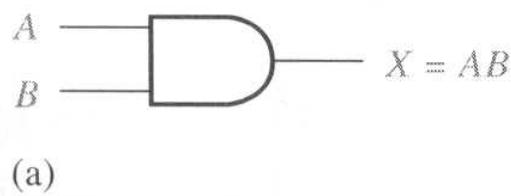
$$X = AB$$

$$X = A \cdot B$$

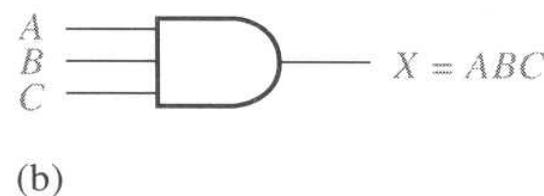


Puerta AND: Múltiples Entradas

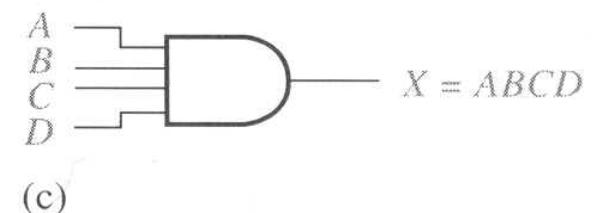
- Se utilizan nuevas letras para cada variable de entrada.



(a)



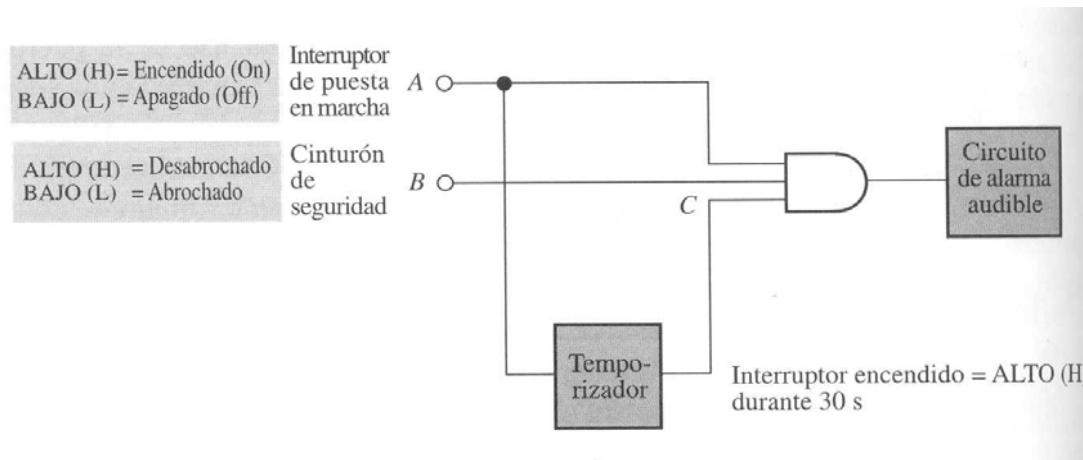
(b)



(c)

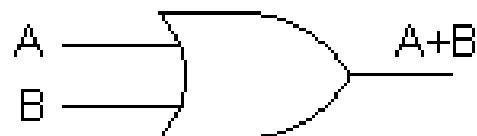
Puerta AND: Ejemplo de Aplicación

- Un sistema de alarma para el cinturón de seguridad:
 - Si el interruptor de puesta en marcha está activado y el cinturón está desabrochado, durante 30 segundos:
 - Se produce una alarma audible.



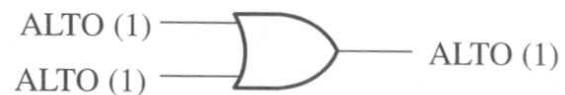
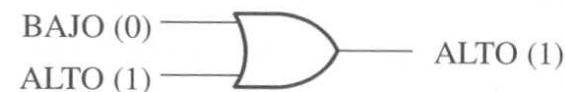
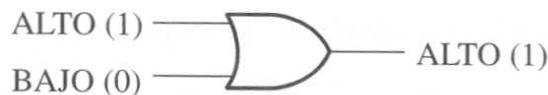
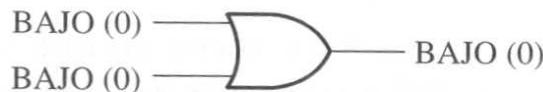
Puerta OR

- Es otra de las puertas básicas con las que se construyen todas las funciones lógicas.
- Tiene dos o más entradas y una única salida.
- Realiza la operación que se conoce como suma lógica.
- Símbolo lógico estándar:



Puerta OR: Funcionamiento

- En una puerta OR de dos entradas:
 - La salida es un nivel ALTO si cualquiera de las entradas, A o B, o ambas, están a nivel ALTO.
 - La salida es un nivel BAJO si ambas entradas, A y B, están a nivel BAJO.



Puerta OR: Tabla de Verdad

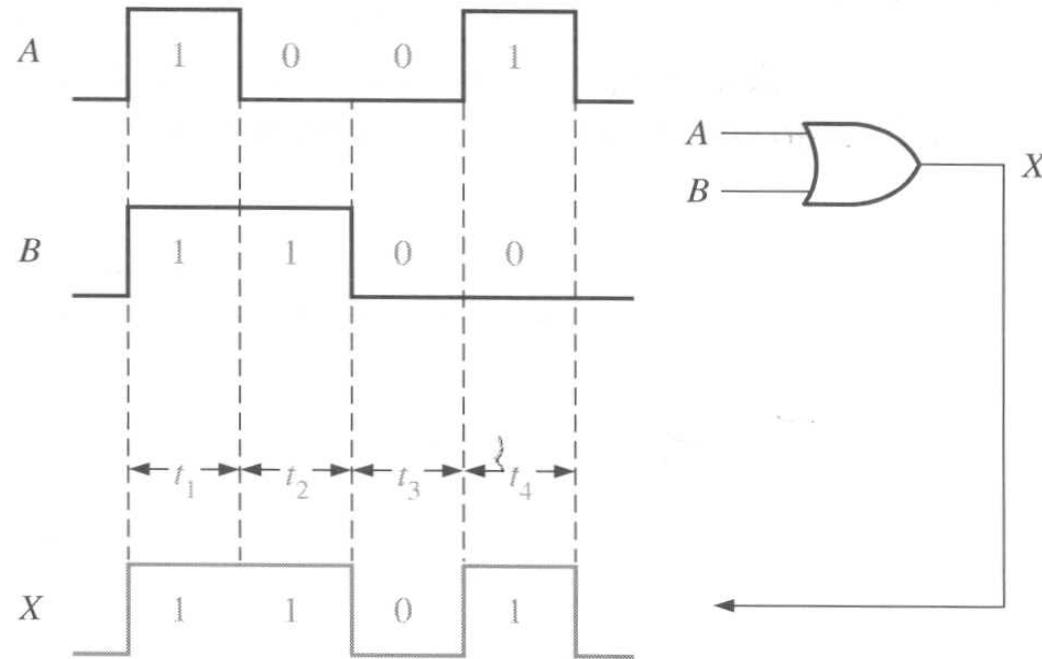
- Tabla de verdad:

Entrada A	Entrada B	Salida X=A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Puerta OR: Diagrama de Tiempos

- Diagrama de tiempos:



Puerta OR: Ecuación Lógica

- La ecuación lógica OR de dos variables se representa:
 - Colocando un + entre las dos variables: A+B

- La suma booleana es similar a la suma binaria, con la excepción de que no existe acarreo:

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

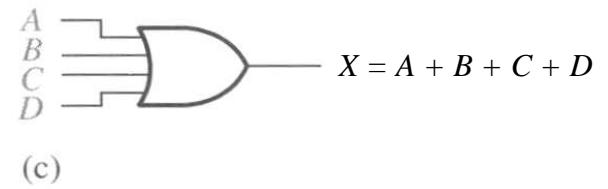
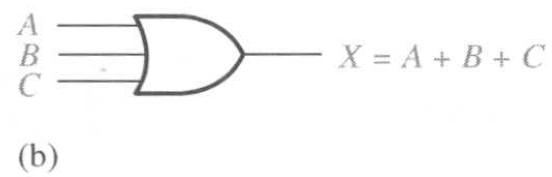
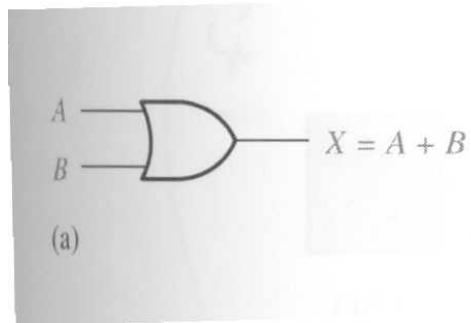
- Ecuación lógica o expresión booleana:

$$X = A+B$$



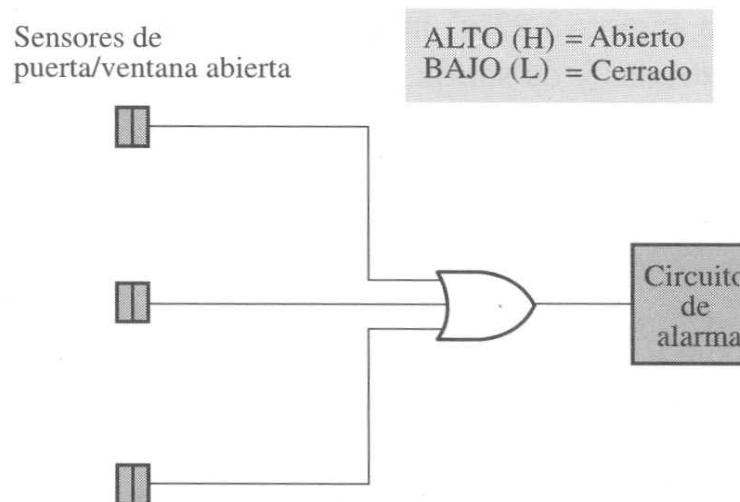
Puerta OR: Múltiples Entradas

- Se utilizan nuevas letras para cada variable de entrada.



Puerta OR: Ejemplo de Aplicación

- Sistema de alarma y detección de intrusión.
- Genera una alarma cuando la puerta o las ventanas están abiertas.



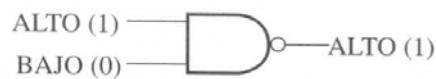
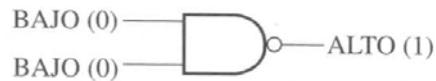
Puerta NAND

- Es un elemento lógico popular debido a que se puede utilizar como puerta universal:
 - Se pueden combinar para implementar las operaciones de las puertas AND, OR y del Inversor.
- El término NAND es una contracción de NOT-AND e implica:
 - Una función AND con la salida complementada (negada).
- Símbolo lógico estándar:



Puerta NAND: Funcionamiento

- En una puerta NAND de dos entradas:
 - La salida es un nivel BAJO, si las entradas A y B están a nivel ALTO.
 - La salida es un nivel ALTO, si A o B están a nivel BAJO o si ambas, A y B, están a nivel BAJO.
- Es la operación opuesta a la operación lógica AND.



Puerta NAND: Tabla de Verdad

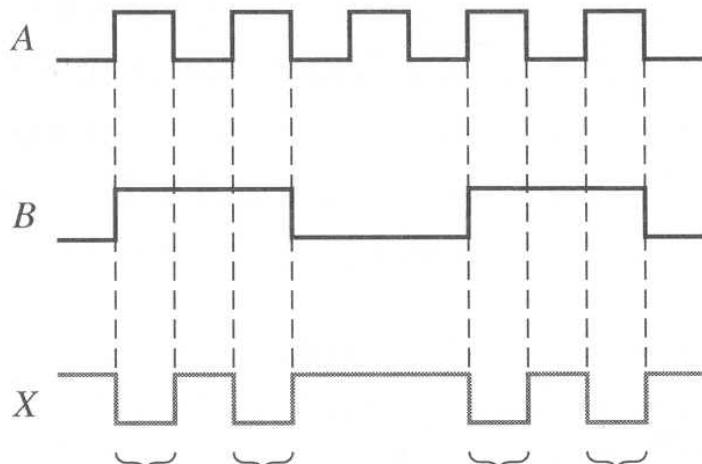
- Tabla de verdad:

Entrada A	Entrada B	Salida X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

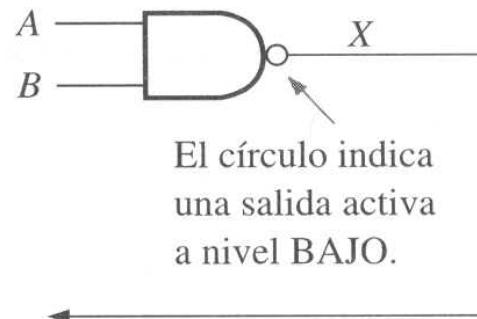


Puerta NAND: Diagrama de Tiempos

- Diagrama de tiempos:



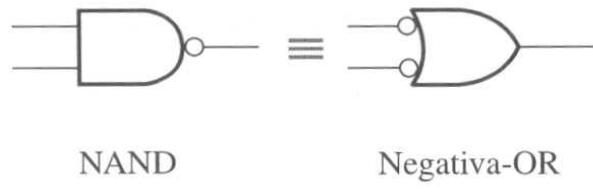
A y B están a nivel ALTO durante estos cuatro intervalos. Por tanto, X está a nivel BAJO.



El círculo indica una salida activa a nivel BAJO.

Puerta NAND: Equivalencia con Negativa-OR

- Se puede usar para realizar la operación OR que requiere una o más entradas a nivel BAJO, para generar una salida a nivel ALTO.
- Este modo de operación se denomina Negativa-OR.
- El término *negativa* significa que las entradas se definen para que su estado activo o verdadero sea un nivel BAJO.



Puerta NAND: Ecuación Lógica

- La ecuación lógica NAND de dos variables se representa:
 - Las dos variables de entrada, A y B, se multiplican (AND) primero y luego se complementan \overline{AB} .
- La operación booleana que se obtiene sería:

$$\overline{0 \cdot 0} = \overline{0} = 1$$

$$\overline{0 \cdot 1} = \overline{0} = 1$$

$$\overline{1 \cdot 0} = \overline{0} = 1$$

$$\overline{1 \cdot 1} = \overline{1} = 0$$

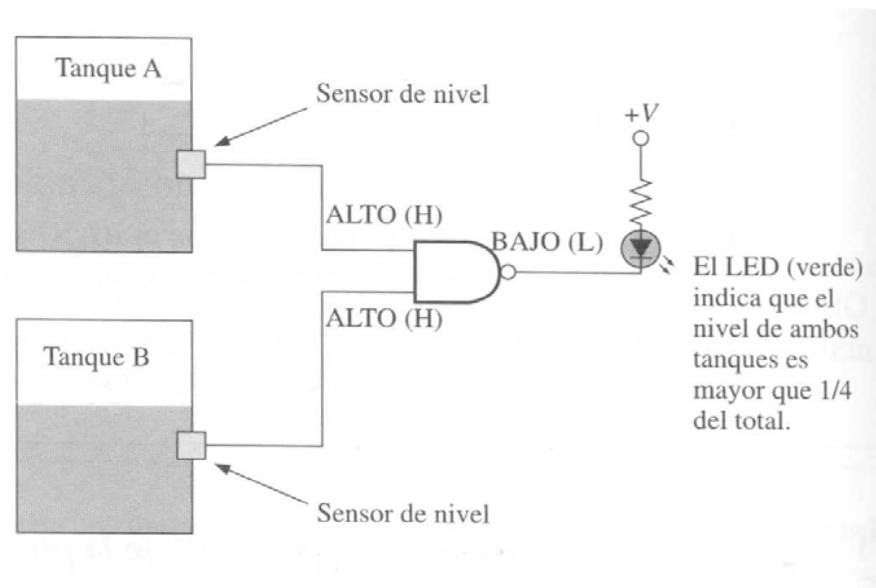
- Ecuación lógica:

$$X = \overline{AB} \qquad X = \overline{A \cdot B}$$



Puerta NAND: Ejemplo de Aplicación

- Un emisor de luz (LED) permanece encendido mientras el nivel de dos tanques sea superior a un 25%



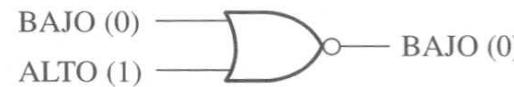
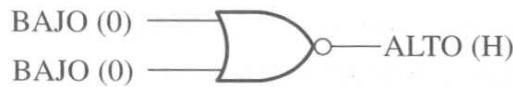
Puerta NOR

- Al igual que la puerta NAND, es un elemento lógico útil porque también se puede emplear como puerta universal:
 - Se pueden usar combinadas para implementar las operaciones AND, OR y del Inversor.
- El término NOR es una contracción de NOT-OR e implica:
 - Una función OR con la salida complementada (negada).
- Símbolo lógico estándar:



Puerta NOR: Funcionamiento

- En una puerta NOR de dos entradas:
 - La salida es un nivel BAJO, si cualquiera de sus entradas A o B está a nivel ALTO, o si ambas entradas A y B están a nivel ALTO.
 - La salida es un nivel ALTO, si A y B están a nivel BAJO.
- Es la operación opuesta a la operación lógica OR.



Puerta NOR: Tabla de Verdad

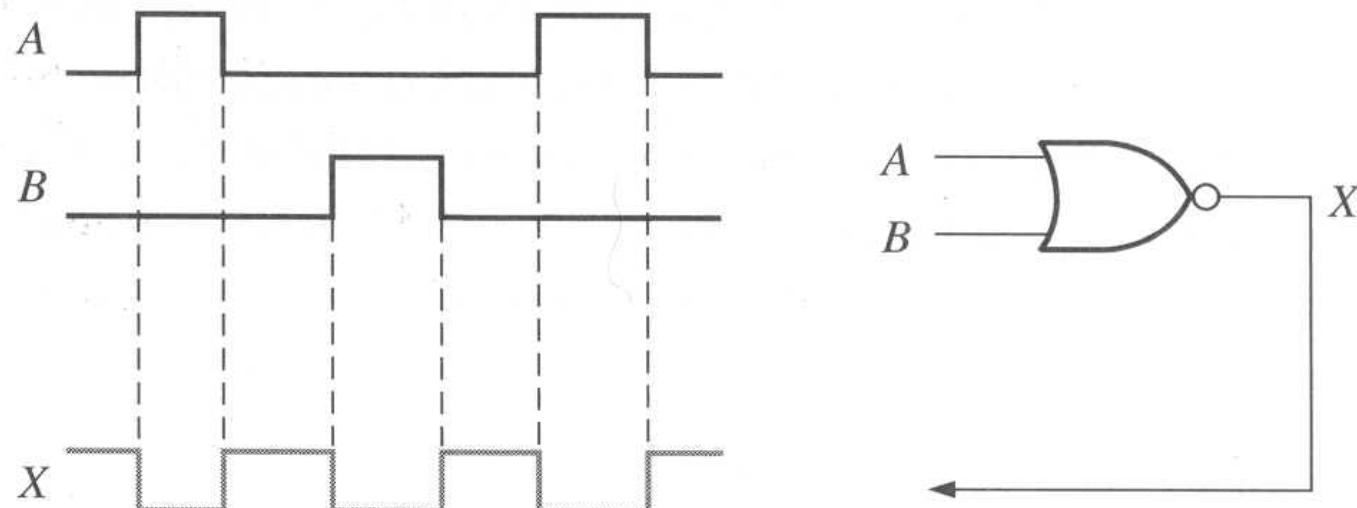
- Tabla de verdad:

Entrada A	Entrada B	Salida X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



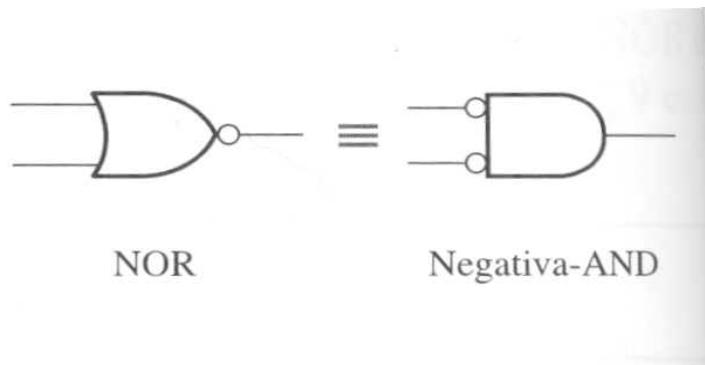
Puerta NOR: Diagrama de Tiempos

- Diagrama de tiempos:



Puerta NOR: Equivalencia con Negativa-AND

- Se puede usar para realizar la operación AND cuyas entradas están a nivel BAJO y generan una salida a nivel ALTO.
- Este modo de operación se denomina Negativa-AND.



Puerta NOR: Ecuación Lógica

- La ecuación lógica NOR de dos variables se representa:
 - Las dos variables de entrada, A y B, primero se suman (OR) y luego se complementan: $\overline{A+B}$.
- La operación booleana que se obtiene sería:

$$\overline{0+0} = \overline{0} = 1$$

$$\overline{0+1} = \overline{1} = 0$$

$$\overline{1+0} = \overline{1} = 0$$

$$\overline{1+1} = \overline{1} = 0$$

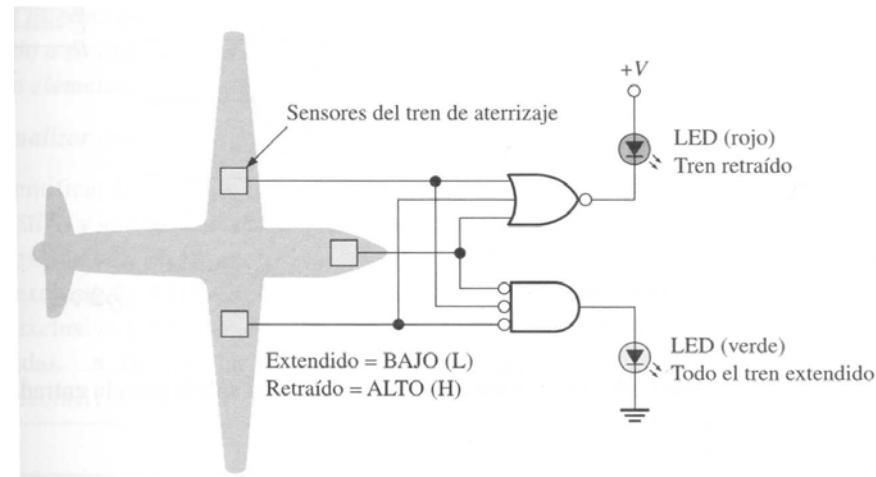
- Ecuación lógica:

$$X = \overline{A+B}$$



Puerta NOR: Ejemplo de Aplicación

- Controlar que los trenes de aterrizaje de un avión se encuentran desplegados.
- Cuando un tren de aterrizaje se extiende, el sensor correspondiente genera una tensión a nivel BAJO.
- Una salida a nivel ALTO enciende el LED verde.
- Una salida a BAJO nivel enciende el LED rojo.



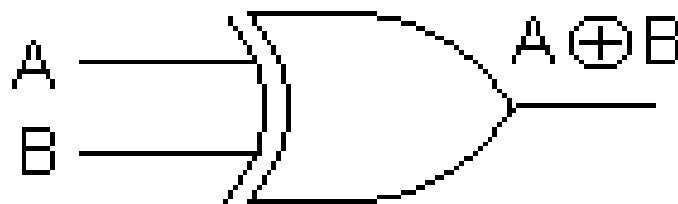
Puertas XOR y XNOR

- Las puertas OR-exclusiva (XOR) y NOR-exclusiva (XNOR) se forman mediante la combinación de otras puertas ya vistas.
- Debido a su importancia fundamental en muchas aplicaciones, estas puertas se tratan como elementos lógicos básicos con su propio símbolo único.



Puerta XOR

- La puerta XOR tiene sólo dos entradas.
- Símbolo lógico estándar:



Puerta XOR: Funcionamiento

- La salida es un nivel ALTO si:
 - la entrada A está a nivel BAJO y la entrada B está a nivel ALTO o
 - si la entrada A está a nivel ALTO y la entrada B está a nivel BAJO.
- La salida es un nivel BAJO si tanto A como B están ambas a nivel ALTO o BAJO.



Puerta XOR: Tabla de Verdad

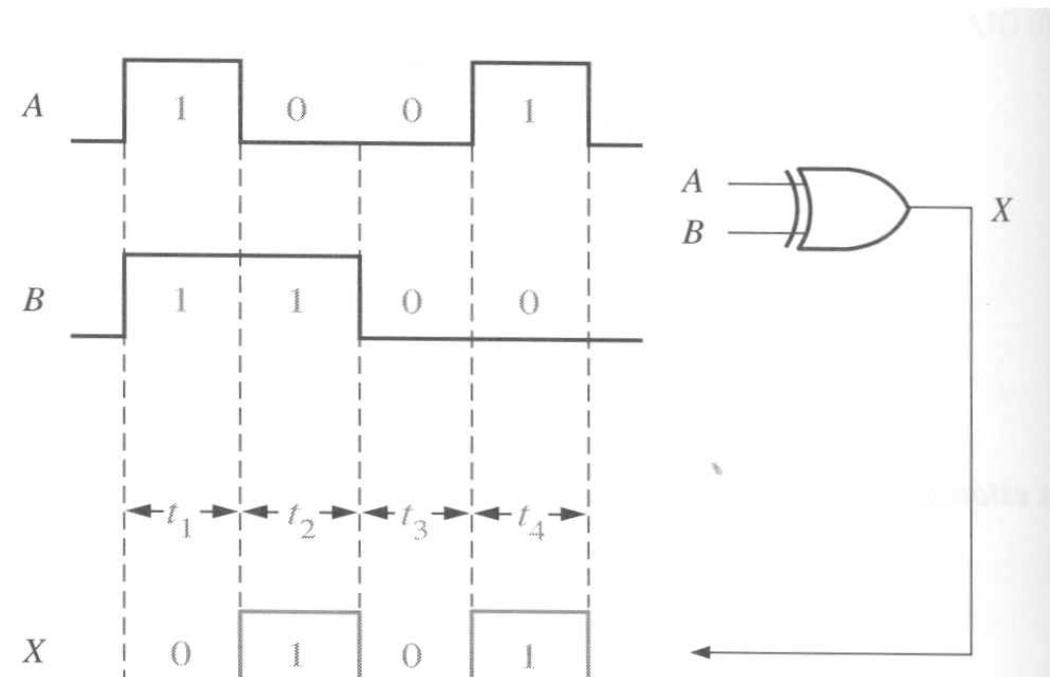
- Tabla de verdad:

Entrada A	Entrada B	Salida X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Puerta XOR: Diagrama de Tiempos

- Diagrama de tiempos:



Puerta XOR: Ejemplo de Aplicación

- Se puede utilizar como sumador de dos bits.

Bits de entrada		Salida (suma)
A	B	Σ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0 (sin acarreo de 1)



Puerta XOR: Equivalencia

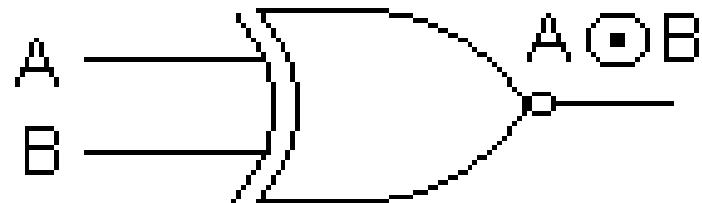
- Se puede sustituir por la combinación de puertas AND, OR y NOT.
- Ecuación lógica equivalente:

$$A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$$



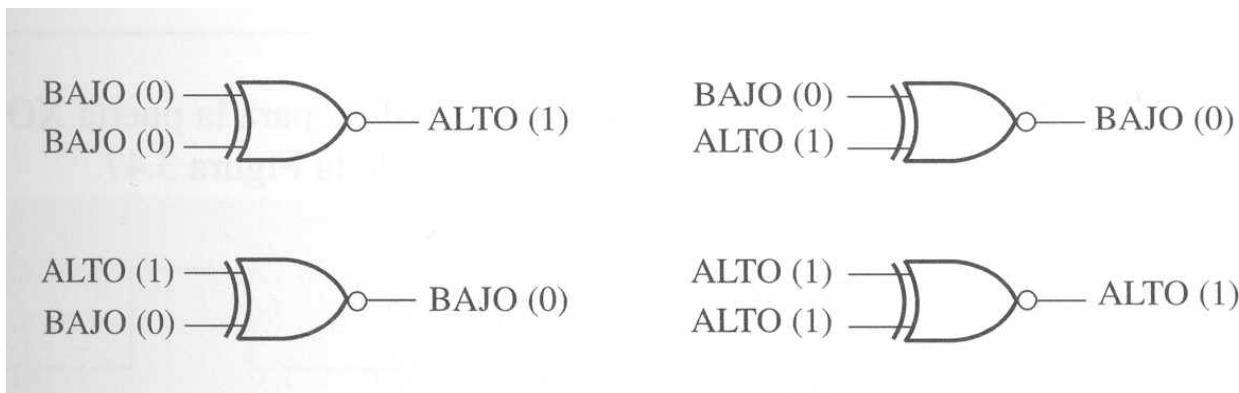
Puerta XNOR

- La puerta XNOR, al igual que la XOR, sólo tiene dos entradas.
- Símbolo lógico estándar:



Puerta XNOR: Funcionamiento

- La salida es un nivel BAJO si:
 - la entrada A está a nivel BAJO y la entrada B está a nivel ALTO o
 - si la entrada A está a nivel ALTO y la entrada B está a nivel BAJO.
- La salida es un nivel ALTO, si tanto A como B están ambas a nivel ALTO o BAJO.
- Es la operación opuesta a la operación lógica XOR.



Puerta XNOR: Tabla de Verdad

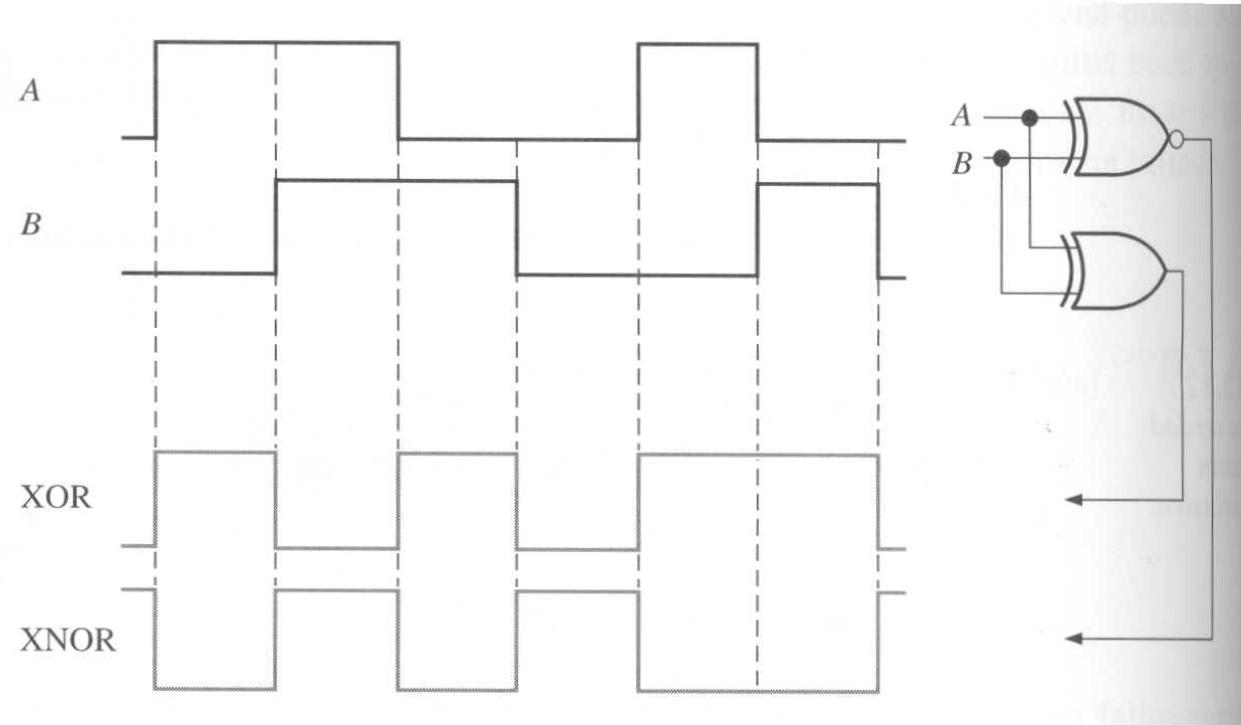
- Tabla de verdad:

Entrada A	Entrada B	Salida X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Puerta XNOR: Diagrama de Tiempos

- Diagrama de tiempos:



Puertas Lógicas Integradas

- Existen varias tecnologías de circuitos integrados digitales que se usan para implementar las puertas lógicas básicas.
- Las más extendidas:
 - CMOS
 - TTL
- Para aplicaciones más especializadas:
 - ECL
- La función de las puertas lógicas básicas es la misma independientemente de la tecnología de circuitos integrados que se utilice.



Puertas Lógicas Integradas: Características

- CMOS (Complementary Metal-Oxide Semiconductor) se implementa con un tipo de transistor de efecto de campo.
- TTL (Transistor-Transistor Logic) se implementa mediante transistores bipolares.
- ECL (Emitter-Coupled Logic) también se implementa mediante la tecnología bipolar.



Puertas Lógicas Integradas: CMOS y TTL

- CMOS y TTL sólo difieren en el tipo de componentes de circuito y los valores de los parámetros, y no en las operaciones lógicas básicas.
- Una puerta AND CMOS realiza la misma operación lógica que una puerta AND TTL.
- La diferencia entre ambas se encuentra en las características de funcionamiento, tales como:
 - La velocidad de conmutación (retardo de propagación).
 - La disipación de potencia.
 - La inmunidad al ruido.



CMOS

- Es la tecnología utilizada en los circuitos de gran escala de integración y microprocesadores.
- Es la más popular en la actualidad.
- Su mayor ventaja reside en ofrecer mucha menor disipación de potencia.



TTL

- Es una tecnología de circuitos integrados muy popular.
- Su mayor ventaja reside en las grandes velocidades de conmutación.
- También ofrece una enorme variedad de dispositivos.



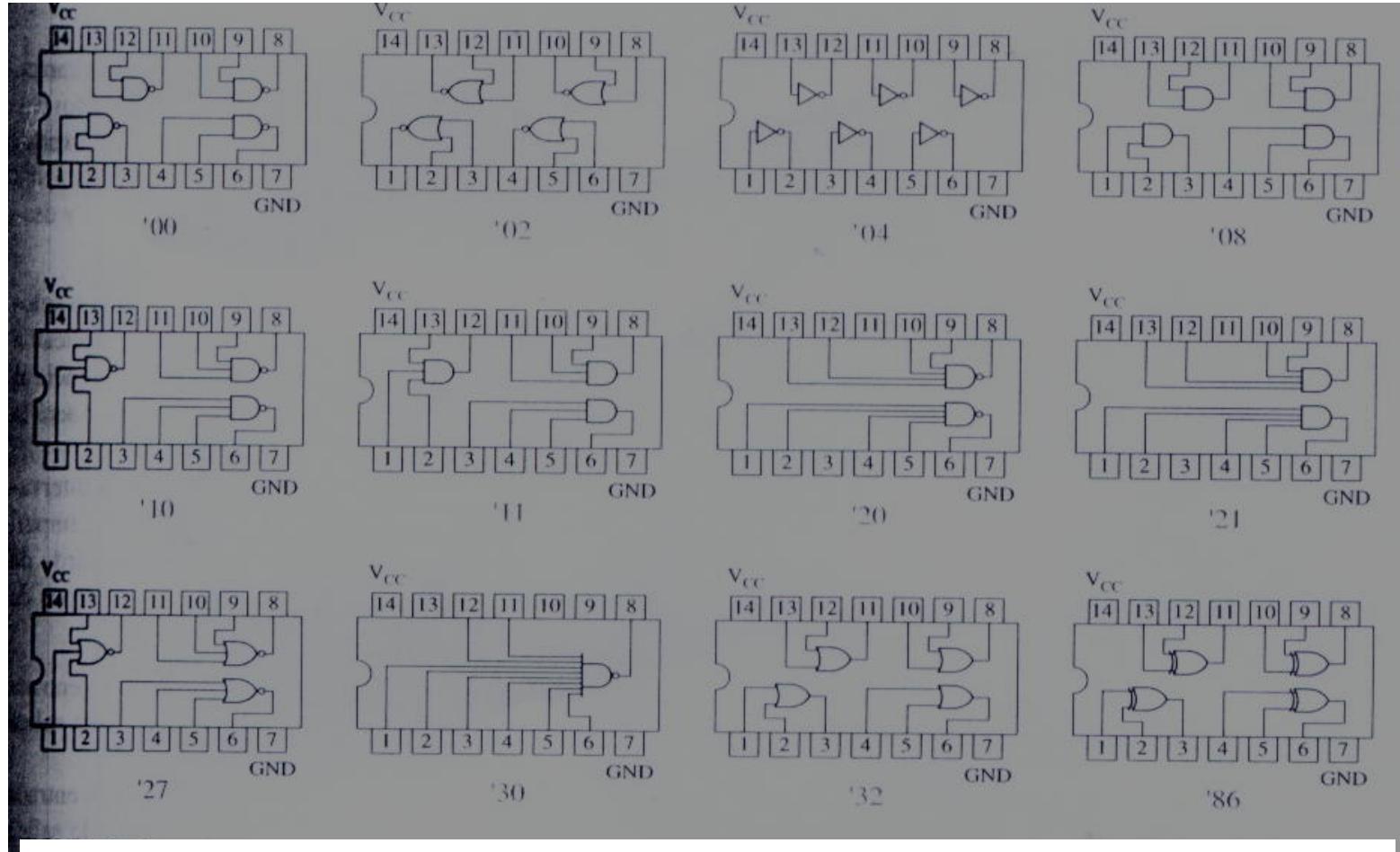
Tipos de Puertas Lógicas Integradas

- Todas las operaciones lógicas básicas: NOT, AND, OR, NAND, NOR y XOR están disponibles en las tecnologías de circuitos integrados.
- Los tipos de configuraciones de puerta normalmente disponibles en los circuitos integrados se indican mediante los dos o tres dígitos finales de la designación de la serie. Por ejemplo 74LS04 es un circuito integrado inversor séxtuple Schottky, de baja potencia de la serie básica TTL.
- Algunas configuraciones de puertas lógicas habituales y sus dígitos de identificación estándar son:
 - Cuádruple NAND de dos entradas: 00
 - Cuádruple NOR de dos entradas: 02
 - Inversor séxtuple: 04
 - Cuádruple AND de dos entradas: 08
 - Triple NAND de tres entradas: 10
 - Triple AND de tres entradas: 11
 - Doble NAND de cuatro entradas: 20
 - Doble AND de cuatro entradas: 21
 - Triple NOR de tres entradas: 27
 - NAND de ocho entradas: 30
 - Cuádruple OR de dos entradas: 32
 - Cuádruple XOR de dos entradas: 86
 - NAND única de trece entradas: 133



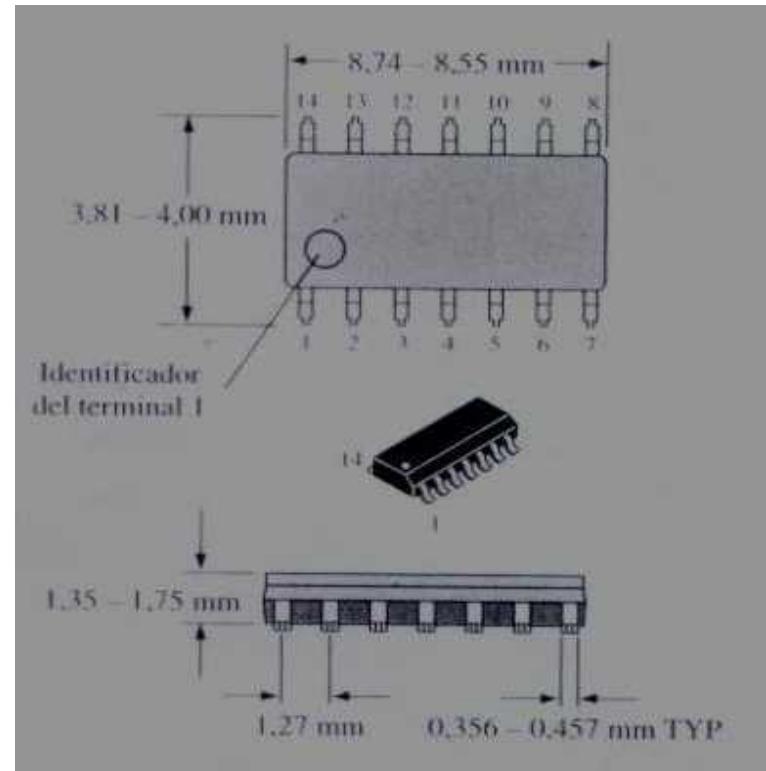
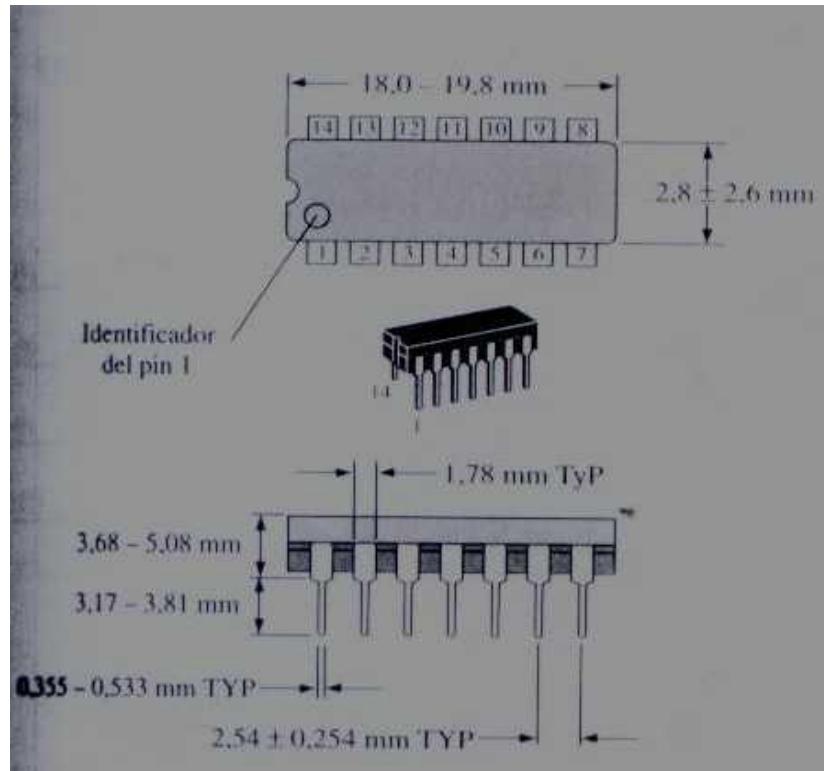
Tipos de Puertas Lógicas Integradas

Diagramas de configuración de los pines para algunas de las configuraciones de puertas integradas más comunes



Tipos de Puertas Lógicas Integradas

Encapsulados típicos DIP y SOIC con sus dimensiones básicas y la numeración de los pines



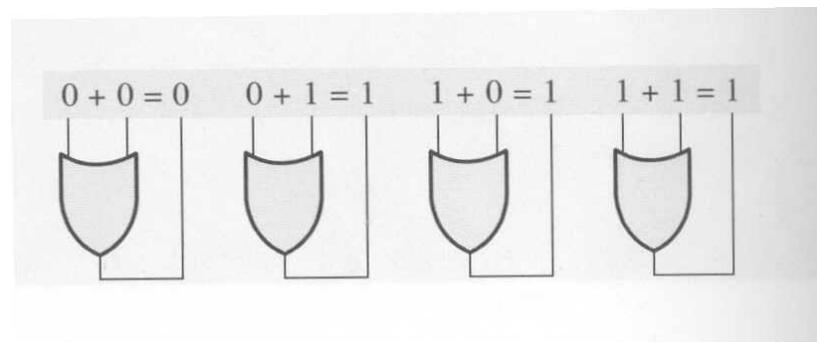
Álgebra de Boole

- El Álgebra de Boole es una forma muy adecuada para expresar y analizar las operaciones de los circuitos lógicos.
- Se puede considerar las matemáticas de los sistemas digitales.
- Operaciones básicas:
 - Adición booleana.
 - Multiplicación booleana.



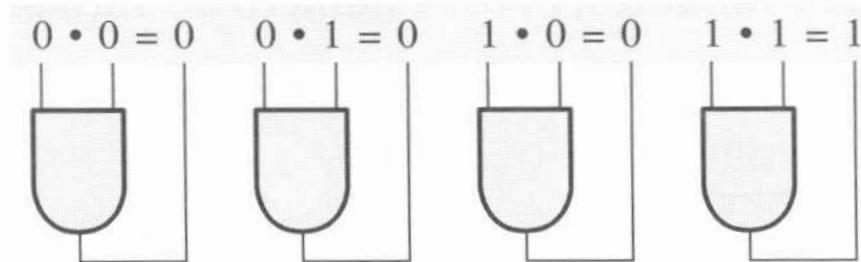
Adición Booleana

- La suma booleana es equivalente a la operación OR:
 - Un término suma es igual a 1 cuando uno o más de sus literales es un 1.
 - Un término suma es igual a 0 si y sólo si cada uno de sus literales es 0.



Multiplicación Booleana

- La multiplicación booleana es equivalente a la operación AND:
 - Un término producto es igual a 1 si y sólo si cada uno de sus literales es un 1.
 - Un término producto es igual a 0 si uno o más de sus literales es 0.



Leyes Básicas del Álgebra de Boole

- Leyes básicas del Álgebra de Boole:
 - Leyes conmutativas de la suma y multiplicación.
 - Leyes asociativas de la suma y multiplicación.
 - Ley distributiva.
- Son las mismas que las del álgebra ordinaria.

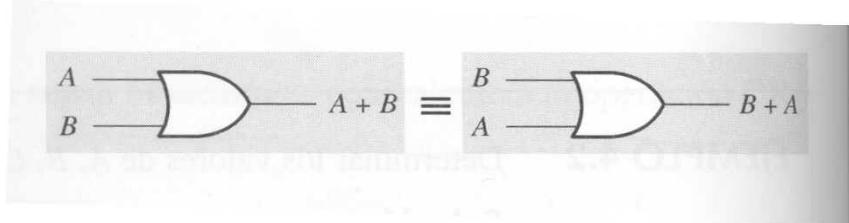


Leyes Comutativas

- El orden en que se aplica a las variables la operación OR es indiferente:

Ley comutativa de la suma para dos variables

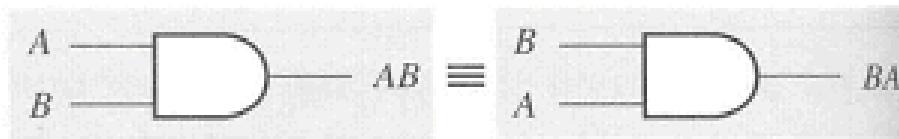
$$A+B = B+A$$



- El orden en que se aplica a las variables la operación AND es indiferente:

Ley comutativa de la multiplicación para dos variables

$$AB = BA$$

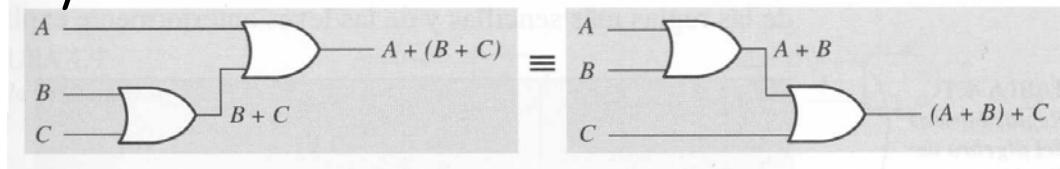


Leyes Asociativas

- Al aplicar la operación OR a más de dos variables, el resultado es el mismo independientemente de la forma en que se agrupen las variables:

Ley asociativa de la suma para tres variables

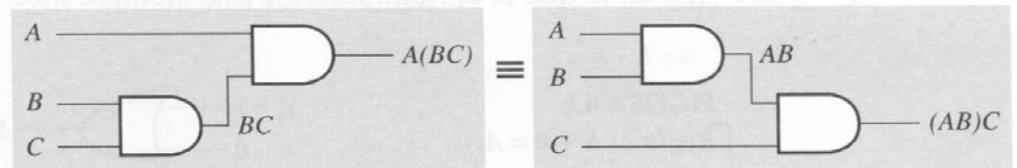
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$



- Al aplicar la operación AND a más de dos variables, el resultado es el mismo independientemente de la forma en que se agrupen las variables:

Ley asociativa de la multiplicación para tres variables

$$A(BC) = (AB)C$$

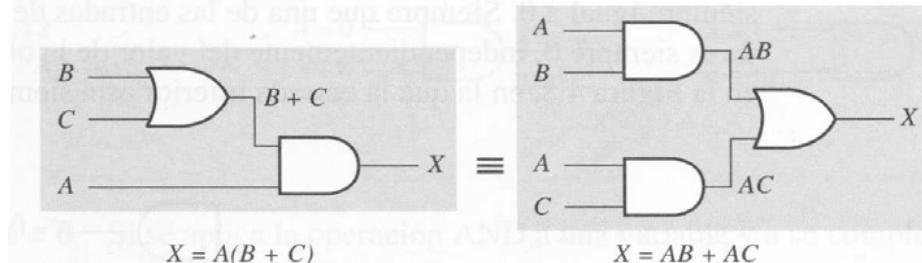


Ley Distributiva

- Aplicar la operación OR a dos o más variables y luego aplicar la operación AND al resultado de la operación y a otra variable aislada, es equivalente a aplicar la operación AND a la variable aislada con cada uno de los sumandos y luego aplicar la operación OR a los productos resultantes.
- Esta ley también expresa el proceso de sacar factor común, en el que la variable común se saca como factor de los productos parciales.

Ley distributiva para tres variables

$$A(B + C) = AB + AC$$



Reglas Básicas del Álgebra de Boole

- Muy útiles para la manipulación y simplificación de expresiones booleanas.

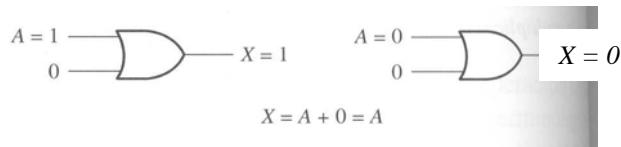
1. $A + 0 = A$	5. $A + A = A$	9. $\bar{\bar{A}} = A$
2. $A + 1 = 1$	6. $A + \bar{A} = 1$	10. $A + AB = A$
3. $A \cdot 0 = 0$	7. $A \cdot A = A$	11. $A + \bar{A}B = A + B$
4. $A \cdot 1 = A$	8. $A \cdot \bar{A} = 0$	12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

A, B, o C pueden representar una única variable o una combinación de variables.

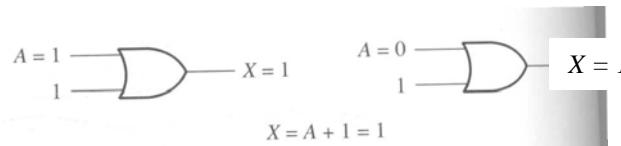


Reglas del Álgebra de Boole: Demostraciones (I)

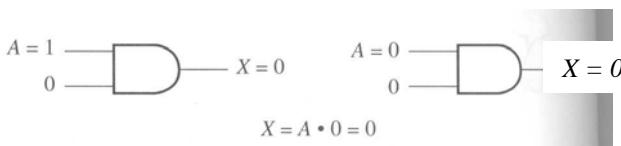
1. $A + 0 = A$



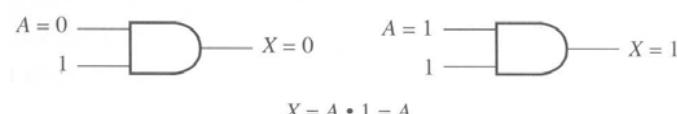
2. $A + 1 = 1$



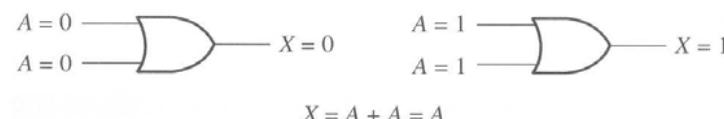
3. $A \cdot 0 = 0$



4. $A \cdot 1 = A$

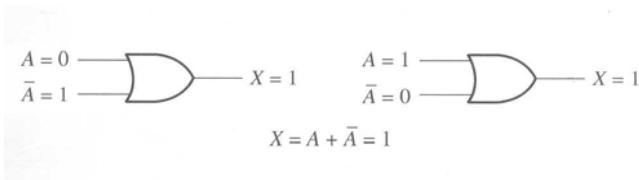


5. $A + A = A$

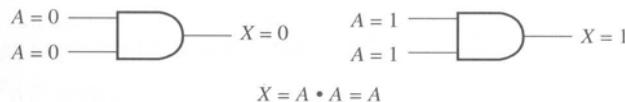


Reglas del Álgebra de Boole: Demostraciones (II)

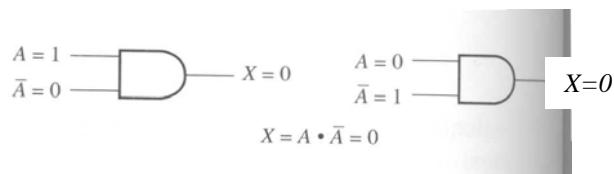
$$6. A + \bar{A} = 1$$



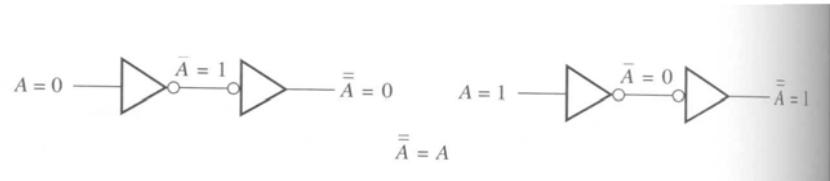
$$7. A \cdot A = A$$



$$8. A \cdot \bar{A} = 0$$



$$9. \bar{\bar{A}} = A$$



Reglas del Álgebra de Boole: Demostraciones (III)

10. $A + AB = A$

$$\begin{aligned}A + AB &= A(1 + B) \quad \text{Sacar factor común } A \text{ (ley distributiva)} \\&= A \cdot 1 \quad \text{Regla 2: } (1 + B) = 1 \\&= A \quad \text{Regla 4: } A \cdot 1 = A\end{aligned}$$

A	B	AB	$A + AB$	
0	0	0	0	
0	1	0	0	
1	0	0	1	
1	1	1	1	

Diagrama lógico que muestra la implementación de la expresión $A + AB$ usando una puerta OR y una puerta AND. La entrada A se conecta a la puerta AND y a la puerta OR. La otra entrada de la puerta AND es la salida de la puerta OR. La otra entrada de la puerta OR es la entrada B . La salida final es la señal A , que también se muestra directamente en la parte inferior.

Reglas del Álgebra de Boole: Demostraciones (IV)

11. $A + \bar{A}B = A + B$

$$\begin{aligned} A + \bar{A}B &= (A + AB) + \bar{A}B && \text{Regla 10: } A = A + AB \\ &= A + (A + \bar{A})B && \text{Sacar factor común} \\ &= A + 1 \cdot B && \text{Regla 6: } A + \bar{A} = 1 \\ &= A + B && \text{Regla 4: } A \cdot 1 = A \end{aligned}$$

A	B	$\bar{A}B$	$A + \bar{A}B$	$A + B$	
0	0	0	0	0	
0	1	1	1	1	
1	0	0	1	1	
1	1	0	1	1	

igual

Reglas del Álgebra de Boole: Demostraciones (V)

12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

$$\begin{aligned}(A + B)(A + C) &= AA + AC + AB + BC \\ &= A + AC + AB + BC \\ &= A + BC\end{aligned}$$

Ley distributiva

Regla 7: $AA = A$

Regla 10: $A + AB = A$
(aplicada 2 veces)

A	B	C	$A + B$	$A + C$	$(A + B)(A + C)$	BC	$A + BC$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1



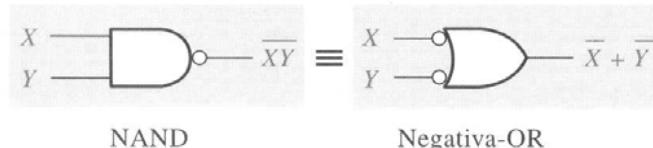
Teoremas de DeMorgan

- DeMorgan propuso dos teoremas que constituyen una parte muy importante del Álgebra de Boole.
- Estos teoremas nos demuestran la equivalencia entre:
 - Las puertas NAND y Negativa-OR
 - Las puertas NOR y Negativa-AND



Primer Teorema de DeMorgan

- El complemento de un producto de variables es igual a la suma de los complementos de las variables.
- De forma equivalente:
 - El complemento de dos o más variables a las que se aplica la operación AND es equivalente a aplicar la operación OR a los complementos de cada variable.
- Fórmula para expresar el teorema para dos variables:
$$\overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y}$$
- Puerta equivalente y tabla de verdad:

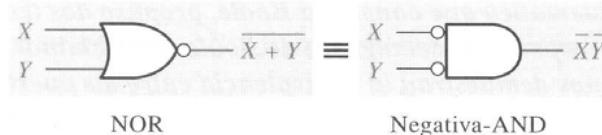


Entradas		Salida	
X	Y	\overline{XY}	$\overline{X} + \overline{Y}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0



Segundo Teorema de DeMorgan

- El complemento de una suma de variables es igual al producto de los complementos de las variables.
- De forma equivalente:
 - El complemento de dos o más variables a las que se aplica la operación OR es equivalente a aplicar la operación AND a los complementos de cada variable.
- Fórmula para expresar el teorema para dos variables:
$$\overline{X + Y} = \overline{X} \overline{Y}$$
- Puerta equivalente y tabla de verdad:



Entradas	Salida	
	$\overline{X + Y}$	\overline{XY}
0 0	1	1
0 1	0	0
1 0	0	0
1 1	0	0



Teoremas de DeMorgan para Más de Dos Variables

- Los Teoremas de DeMorgan se aplican también a expresiones en las que existen más de dos variables:

$$\overline{XYZ} = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$$

$$\overline{X + Y + Z} = \bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$$



Aplicación de las Leyes y Reglas del Álgebra de Boole y de los Teoremas de DeMorgan

- Solución:

$$\overline{A + B\bar{C}} + D(\overline{E + \bar{F}})$$

Paso 1. Identificar los términos a los que se puede aplicar los teoremas de DeMorgan y considerar cada término como una única variable. Definimos:

$$\overline{A + B\bar{C}} = X \text{ y } D(\overline{E + \bar{F}}) = Y$$

Paso 2. Dado que

$$\overline{X + Y} = \overline{X}\overline{Y}, \quad [\overline{A + B\bar{C}}] + [\overline{D(E + \bar{F})}] = [\overline{A + B\bar{C}}][\overline{D(E + \bar{F})}]$$

Paso 3. Utilizar la regla 9 ($\overline{\overline{A}} = A$) para eliminar la barra doble sobre el término de la izquierda (esta parte no tiene que ver con los teoremas de DeMorgan):

$$[\overline{A + B\bar{C}}][\overline{D(E + \bar{F})}] = [A + B\bar{C}][\overline{D(E + \bar{F})}]$$

Paso 4. En el término de la derecha definimos $Z = \overline{E + \bar{F}}$

$$[A + B\bar{C}][\overline{D(E + \bar{F})}] = [A + B\bar{C}][\overline{DZ}]$$

Paso 5. Como $\overline{DZ} = \overline{D} + \overline{Z}$, $[A + B\bar{C}][\overline{D(E + \bar{F})}] = (A + B\bar{C})(\overline{D} + (\overline{E + \bar{F}}))$

Paso 6. Utilizando la regla 9 $\overline{\overline{A}} = A$ para eliminar la barra doble del término $E + \bar{F}$

$$(A + B\bar{C})(\overline{D} + \overline{E + \bar{F}}) = (A + B\bar{C})(\overline{D} + E + \bar{F})$$

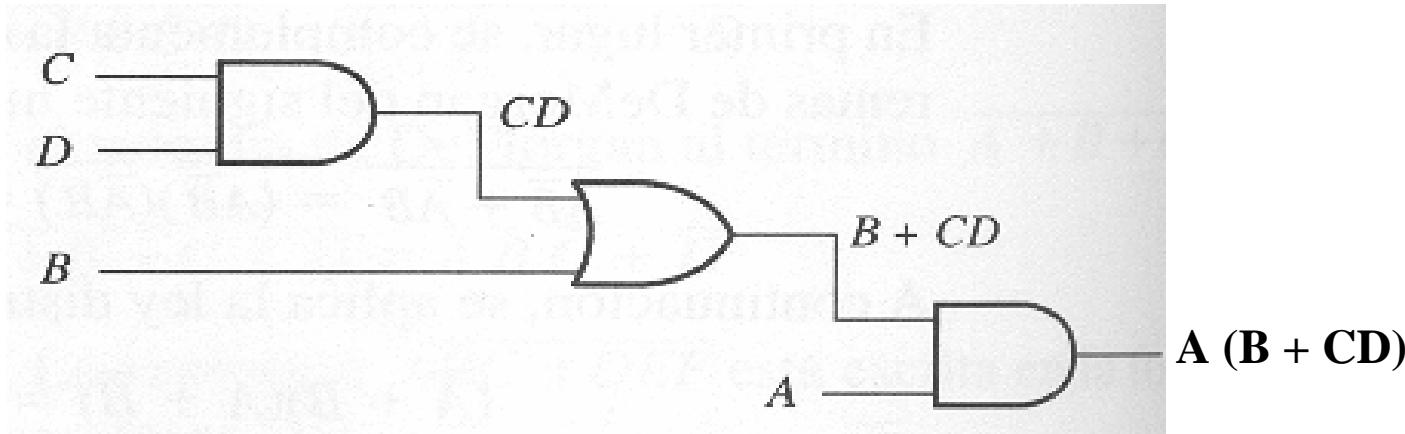


Análisis Booleano de los Circuitos Lógicos

- El Álgebra de Boole proporciona una manera concisa de expresar el funcionamiento de un circuito lógico formado por una combinación de puertas lógicas, de tal forma que la salida puede determinarse por la combinación de los valores de entrada.
- Para obtener la expresión booleana de un determinado circuito lógico, la manera de proceder consiste en:
 - Comenzar con las entradas situadas más a la izquierda.
 - Ir avanzando hasta las líneas de salida, escribiendo la expresión para cada puerta.



Expresión Booleana de un Circuito Lógico



- La expresión de la puerta AND situada más a la izquierda cuyas entradas son C y D es CD .
- La salida de la puerta AND situada más a la izquierda es una de las entradas de la puerta OR y B es su otra entrada. Por tanto, la expresión para la puerta OR es $B + CD$.
- La salida de la puerta OR es una de las entradas de la puerta AND situada más a la derecha, siendo A su otra entrada. Por lo tanto la expresión de esta puerta AND será $A (B + CD)$

Elaboración de la Tabla de Verdad de un Circuito Lógico

- Una vez determinada la expresión booleana de un circuito dado, puede desarrollarse una tabla de verdad que represente la salida del circuito lógico para todos los valores posibles de las variables de entrada.
- Esto requiere que se evalúe la expresión booleana para todas las posibles combinaciones de valores de las variables de entrada.



Evaluación de una Expresión (I)

- En el caso de la expresión $A(B + CD)$ hay cuatro variables de entrada (A , B , C y D) y, por tanto, hay $2^4 = 16$ posibles combinaciones de valores.
- Para evaluar esta expresión, en primer lugar, utilizando las reglas de la adición y multiplicación booleanas, se localizan los valores de las variables que hacen que la expresión sea igual a 1.
- En este caso, la expresión es igual a 1 sólo si $A = 1$ y $(B + CD) = 1$, ya que:

$$A(B + CD) = 1 \cdot 1 = 1$$



Evaluación de una Expresión (II)

- La expresión $B + CD$ es 1 si:
 - $B = 1$ $B + CD = 1 + 0 = 1$
 - $CD = 1$ $B + CD = 0 + 1 = 1$
 - Ambos son igual a 1 $B + CD = 1 + 1 = 1$
- El término CD es 1 sólo si:
 - C y D son 1.
- Conclusión:
 - $A(B + CD) = 1$ cuando:
 - $A = 1$ y $B = 1$, independientemente del valor de C y D
 - $A = 1$ y $C = 1$ y $D = 1$, independientemente del valor de B
 - $A(B + CD) = 0$ para el resto de combinaciones posibles.



Evaluación de una Expresión (III)

- Representación de los resultados en una tabla de verdad.

Tabla de Verdad del Circuito Lógico

Entradas				Salida $A(B + CD)$	Entradas				Salida $A(B + CD)$
A	B	C	D		A	B	C	D	
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1



Simplificación Mediante el Álgebra de Boole

- Muchas veces, a la hora de aplicar el álgebra booleana, hay que reducir una expresión a su forma más simple o cambiarla a una forma más conveniente para conseguir una implementación más eficiente.
- Este método de simplificación utiliza las reglas, leyes y teoremas del Álgebra de Boole para manipular y simplificar una expresión.



Simplificar una Expresión

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$

- Aplicar la ley distributiva al segundo y tercer término de la expresión del siguiente modo:

$$AB + AB + AC + BB + BC$$

- Aplicar la regla 7 ($BB = B$) al cuarto término:

$$AB + AB + AC + B + BC$$

- Aplicar la regla 5 ($AB + AB = AB$) a los dos primeros términos:

$$AB + AC + B + BC$$

- Aplicar la regla 10 ($B + BC = B$) a los dos últimos términos:

$$AB + AC + B$$

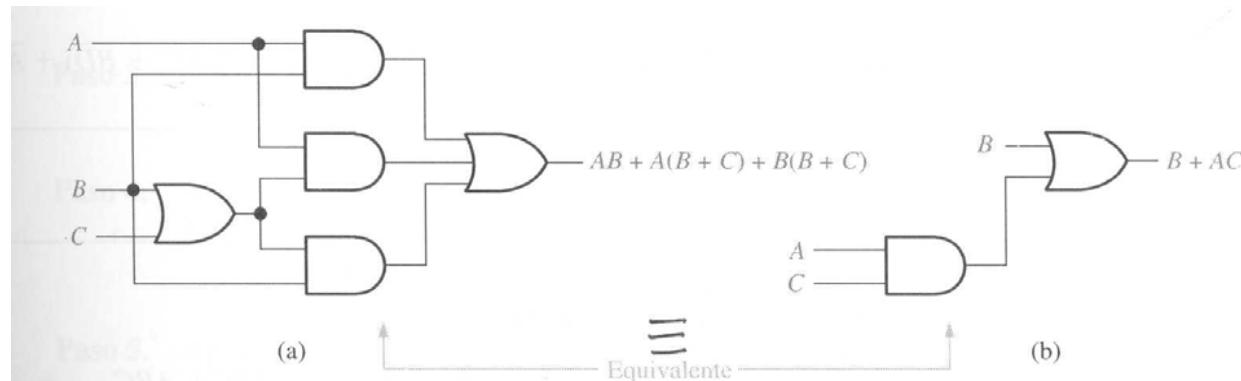
- Aplicar la regla 10 ($AB + B = B$) a los términos primero y tercero:

$$B + AC$$



Circuitos Lógicos Original y Simplificado

- A partir de la simplificación se obtienen dos redes de puertas equivalentes:
 - Se pasa de cinco a dos puertas necesarias para implementar la expresión.
 - Para cualquier combinación de valores de entrada A, B y C se obtiene siempre la misma salida.



Forma Estándar de las Expresiones Booleanas

- Función lógica es una expresión booleana que relaciona variables lógicas directas o complementadas por medio de operaciones AND y OR.
- Todas las expresiones booleanas, independientemente de su forma, pueden convertirse en cualquiera de las dos formas estándar:
 - Suma de productos o Suma de MinTerms.
 - Producto de sumas o Producto de MaxTerms.
- Esto posibilita que la evaluación, simplificación e implementación de las expresiones booleanas sea mucho más sistemática y sencilla.



Suma de Productos o Suma de Minterms (I)

- Es la suma de dos o más productos mediante la adición booleana.

$$\begin{aligned} & AB + ABC \\ & A + \overline{A}\overline{B}C + A\overline{C} \end{aligned}$$

- Una barra no puede extenderse sobre más de una variable:

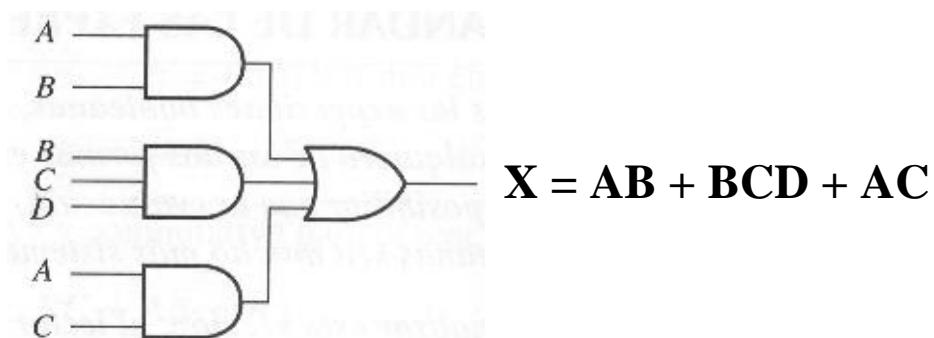
Válido: \overline{ABC}

No válido: \overline{ABC}



Suma de Productos o Suma de Minterms (II)

- El dominio de una expresión booleana es el conjunto de variables (o sus complementos) contenido en una expresión:
 - El dominio de $AB + ABC$ es el conjunto de variables A, B, C
- La implementación de una suma de productos simplemente requiere aplicar la operación OR a las salidas de dos o más puertas AND:



Conversión de una Expresión General a Formato Suma de Productos

- Cualquier expresión lógica puede ser transformada a una expresión suma de productos, aplicando el Álgebra de Boole.

$$A(B + CD) = AB + ACD$$

$$(A + B)(B + C + D) = AB + AC + AD + BB + BC + BD$$
$$\overline{(A + B)} + C = \overline{\overline{(A + B)}\overline{C}} = (A + B)\overline{C} = A\overline{C} + B\overline{C}$$



Forma Estándar de una Suma de Productos

- Es aquella en la que todas las variables del dominio aparecen en cada uno de los términos de la expresión:

$$A\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

- Cualquier suma de productos en forma no estándar puede convertirse al formato estándar utilizando el Álgebra de Boole.



Conversión de una Suma de Productos a su Forma Estándar (I)

- Cada término producto de una suma de productos que no contenga todas las variables del dominio, puede ser transformado a su forma estándar de manera que incluya todas las variables del dominio o sus complementos.
- Esta conversión se realiza mediante la regla 6 del álgebra booleana:

$$A + \bar{A} = 1$$



Conversión de una Suma de Productos a su Forma Estándar (II)

- **Pasos a seguir:**

- Multiplicar cada término producto no estándar por un término formado por la suma de la variable que falta y su complemento. Con esto se obtienen dos términos producto. Como se sabe, se puede multiplicar por 1 cualquier expresión sin que se altere su valor.
- Repetir el paso anterior hasta que todos los términos de la expresión contengan todas las variables (o sus complementos) del domino. Al convertir cada producto a su forma estándar, el número de términos producto se duplica por cada variable que falta.



Conversión de una Suma de Productos a su Forma Estándar (III)

- Ejemplo: Convertir la siguiente expresión booleana al formato suma de productos estándar: $A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B} + A\bar{B}\bar{C}D$

Solución. El dominio de esta suma de productos es A, B, C, D. Considerando cada término por separado, se comprueba que al primer término, $A\bar{B}C$, le falta la variable D o \bar{D} , por lo que lo multiplicamos por D o \bar{D} , obteniendo:

$$A\bar{B}C = A\bar{B}C(D + \bar{D}) = A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D}$$

En este caso, se obtienen dos productos estándar. En el segundo término, $\bar{A}\bar{B}$, faltan las variables C o \bar{C} y D o \bar{D} , de manera que multiplicamos primero por C + \bar{C} :

$$\bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{B}(C + \bar{C}) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

Los dos términos que obtenemos carecen de la variable D o \bar{D} , por lo que multiplicamos por D + \bar{D} :

$$\begin{aligned}\bar{A}\bar{B} &= \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} \\ &= \bar{A}\bar{B}C(D + \bar{D}) + \bar{A}\bar{B}\bar{C}(D + \bar{D}) \\ &= \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\end{aligned}$$

En este caso, el resultado son cuatro productos estándar. El tercer término $\bar{A}\bar{B}CD$, ya está en formato estándar. La suma de productos estándar que obtenemos es finalmente:

$$\begin{aligned}A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B} + A\bar{B}\bar{C}D &= A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D \\ &\quad + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D\end{aligned}$$



Representación Binaria de un Término Producto Estándar

- Un término producto est\'andar es igual a 1 s\'olo para una combinaci\'on de los valores de las variables.
- Por ejemplo, el t\'ermino $A\bar{B}C\bar{D}$ es igual a 1 cuando $A=1$, $B=0$, $C=1$ y $D=0$.
- Una suma de productos es igual a 1 si y s\'olo si uno o m\'as de los t\'erminos producto que forman la expresi\'on es igual a 1.



Producto de Sumas o Producto de Maxterms

- Es la multiplicación de dos o más términos suma.

$$(\bar{A} + B)(A + \bar{B} + C)$$

$$\bar{A}(A + \bar{B} + C)(\bar{B} + \bar{C} + D)$$

- Una barra no puede extenderse sobre más de una variable:

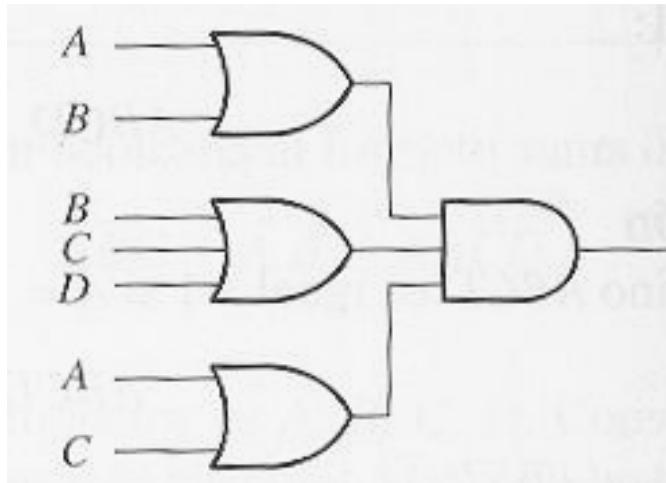
Válido: $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

No válido: ~~$\overline{A+B+C}$~~



Implementación de un Producto de Sumas

- La implementación de un producto de sumas requiere simplemente la aplicación de la operación AND a las salidas de dos o más puertas OR.



$$X = (A + B)(B + C + D)(A + C)$$

Forma Estándar del Producto de Sumas

- Es aquella en la que todas las variables del dominio aparecen en cada uno de los términos de la expresión:

$$(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D})(A+\bar{B}+C+D)(A+B+\bar{C}+D)$$

- Cualquier producto de sumas en forma no estándar puede convertirse al formato estándar utilizando el Álgebra de Boole.



Conversión de un Producto de Sumas a su Forma Estándar (I)

- Cada término suma de un producto de sumas que no contenga todas las variables del dominio, puede ser transformado a su forma estándar de manera que incluya todas las variables del dominio o sus complementos.
- Esta conversión se realiza mediante la regla 8 del álgebra booleana:

$$A \cdot \bar{A} = 0$$



Conversión de un Producto de Sumas a su Forma Estándar (II)

- **Pasos a seguir:**
 - Añadir a cada término suma no estándar un término consistente en el producto de la variable que falta y su complemento; esto da lugar a la aparición de dos sumandos en la expresión. Como se sabe, siempre se puede sumar 0 sin que se altere el valor de la expresión.
 - Aplicar la regla 12: $A + BC = (A + B)(A + C)$
 - Repetir el primer paso hasta que todos los sumandos resultantes contengan todas las variables del dominio o sus complementos.



Conversión de un Producto de Sumas a su Forma Estándar (III)

Convertir la siguiente expresión booleana a formato producto de sumas estándar:

$$(A + \bar{B} + C)(\bar{B} + C + \bar{D})(A + \bar{B} + \bar{C} + D)$$

Solución

El dominio de esta expresión es A, B, C , y D . Vamos a considerar término por término. El primero, $A + \bar{B} + C$, no contiene la variable D o \bar{D} , por lo que añadimos $D\bar{D}$ y aplicamos la regla 12 como sigue:

$$A + \bar{B} + C = A + \bar{B} + C + D\bar{D} = (A + \bar{B} + C + D)(A + \bar{B} + C + \bar{D})$$

El segundo término, $\bar{B} + C + \bar{D}$, carece de la variable A o \bar{A} , por lo que añadimos $A\bar{A}$ y aplicamos la regla 12 del siguiente modo:

$$\bar{B} + C + \bar{D} = \bar{B} + C + \bar{D} + A\bar{A} = (A + \bar{B} + C + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D})$$

El tercer término, $A + \bar{B} + \bar{C} + D$, ya está escrito en su forma estándar. El producto de sumas estándar de la expresión original es:

$$(A + \bar{B} + C)(\bar{B} + C + \bar{D})(A + \bar{B} + \bar{C} + D) =$$

$$(A + \bar{B} + C + D)(A + \bar{B} + C + \bar{D})(A + \bar{B} + C + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D})(A + \bar{B} + \bar{C} + D)$$

Problema relacionado. Convertir la expresión $(A + \bar{B})(B + C)$ a su forma producto de sumas estándar.



Representación Binaria de un Término

Suma Estándar

- Un término suma estándar es igual a 0 sólo para una combinación de los valores de las variables.
- Por ejemplo, el término $A+\bar{B}+C+\bar{D}$ es igual a 0 cuando $A=0$, $B=1$, $C=0$ y $D=1$.
- Un producto de sumas es igual a 0 si y sólo si uno o más términos suma de la expresión es igual a 0.



Expresiones Booleanas y Tablas de Verdad

- Todas las expresiones booleanas se pueden convertir fácilmente en tablas de verdad utilizando los valores binarios de cada término de la expresión.
- La tabla de verdad es una forma muy común de expresar el funcionamiento lógico de un circuito.
- Las tablas de verdad se pueden encontrar en las hojas de especificaciones y en otras documentaciones relativas al funcionamiento de los circuitos y sistemas digitales.
- Las expresiones suma de productos y producto de sumas pueden calcularse mediante tablas de verdad.



Conversión de una Suma de Productos a Tabla de Verdad (I)

- Una suma de productos es igual a 1 si y sólo si al menos uno de los productos es igual a 1.
- Para una expresión cuyo dominio es n variables, existen 2^n combinaciones distintas de estas variables.
- Pasos a seguir:
 - Enumerar todas las posibles combinaciones de los valores de las variables de la expresión.
 - Pasar la suma de productos a su formato estándar, si no lo está ya.
 - Escribir un 1 en la columna de salida para cada valor binario que hace que la suma de productos estándar sea 1, y un 0 para los restantes valores.



Conversión de una Suma de Productos a Tabla de Verdad (II)

- Desarrollar la tabla de verdad de la expresión suma de productos estándar: $\bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + ABC$

Nº	A	B	C	X	Minterms
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C)$
2	0	1	0	0	
3	0	1	1	0	
4	1	0	0	1	$(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C})$
5	1	0	1	0	
6	1	1	0	0	
7	1	1	1	1	$(A \cdot B \cdot C)$



Conversión de un Producto de Sumas a Tabla de Verdad (I)

- Un producto de sumas es igual a 0 si y sólo si al menos uno de los términos suma es igual a 0.
- Para una expresión cuyo dominio es n variables, existen 2^n combinaciones distintas de estas variables.
- Pasos a seguir:
 - Enumerar todas las posibles combinaciones de los valores de las variables de la expresión.
 - Pasar el producto de sumas a su formato estándar, si no lo está ya.
 - Escribir un 0 en la columna de salida para cada valor binario que hace que el producto de sumas estándar sea 0, y un 1 para los restantes valores.



Conversión de un Producto de Sumas a Tabla de Verdad (II)

$$(A+B+C)(A+\bar{B}+C)(A+\bar{B}+\bar{C})(\bar{A}+B+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+C)$$

Nº	A	B	C	X	Minterms	Maxterms
0	0	0	0	0		
1	0	0	1	1	$(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C)$	$(A + \bar{B} + C)$
2	0	1	0	0		
3	0	1	1	0		
4	1	0	0	1	$(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C})$	$(A + \bar{B} + \bar{C})$
5	1	0	1	0		
6	1	1	0	0		
7	1	1	1	1	$(A \cdot B \cdot C)$	$(\bar{A} + \bar{B} + C)$



Conversión de un Producto de Sumas a Tabla de Verdad (III)

- Las tablas de verdad del ejemplo anterior son las mismas.
- Esto significa que la suma de productos y el producto de sumas son equivalentes.
- Minterms

$$F(A, B, C) = (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C) + (A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}) + (A \cdot B \cdot C)$$

$$= m_1 + m_4 + m_7 = \sum(1, 4, 7)$$

- Maxterms

$$F(A, B, C) = (A + B + C) \cdot (A + \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C)$$

$$= M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_5 \cdot M_6 = \prod(0, 2, 3, 5, 6)$$



Determinar la Expresión de la Suma de Productos Estándar Representada por una Tabla de Verdad

- Se enumeran todos los valores de las variables de entrada para los que la salida es 1.
- Cada valor binario se convierte en el correspondiente término producto:
 - Se reemplaza cada 1 por la variable.
 - Se reemplaza 0 por la variable complementada.
- Por ejemplo, el valor binario 1010 se reemplaza por $A\bar{B}C\bar{D}$



Determinar la Expresión del Producto de Sumas Estándar Representada por una Tabla de Verdad

- Se enumeran todos los valores de las variables de entrada para los que la salida es 0.
- Cada valor binario se convierte en el correspondiente término suma:
 - Se reemplaza cada 1 por la variable complementada.
 - Se reemplaza 0 por la variable.
- Por ejemplo, el valor binario 1001 se reemplaza por $\bar{A}+B+C+\bar{D}$



Determinar las Expresiones Estándar a Partir de una Tabla de Verdad

A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$X = \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC + A\bar{B}C$$

$$X = (A+B+C)(A+B+\bar{C})(A+\bar{B}+C)(\bar{A}+B+\bar{C})$$



Conversión de una Suma de Productos Estándar a Producto de Sumas Estándar (I)

- Los valores binarios de los términos producto en una suma de productos estándar dada no aparecen en su producto de sumas estándar equivalente.
- Asimismo, los valores binarios que no están representados en una suma de productos sí aparecen en el producto de sumas equivalentes.



Conversión de una Suma de Productos Estándar a Producto de Sumas Estándar (II)

- Pasos para convertir una suma de productos estándar a un producto de sumas estándar:
 - Evaluar cada término de la expresión suma de productos, es decir, determinar los valores binarios que representan estos términos.
 - Determinar todos los números binarios no incluidos al realizar el cálculo del paso anterior.
 - Escribir los términos suma equivalentes para cada valor binario del paso anterior y expresarlos en forma de producto de sumas.



Conversión de una Suma de Productos Estándar a Producto de Sumas Estándar (III)

- Convertir la expresión $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C + ABC$ a su expresión equivalente como producto de sumas:
 - El resultado de la evaluación es 000+010+011+101+111
 - Puesto que son tres las variables que conforman el dominio de la expresión, existe un total de $2^3 = 8$ posibles combinaciones.
 - La expresión suma de productos o suma de minterms contiene cinco de estas combinaciones, luego la expresión producto de sumas o producto de maxterms debe contener las otras tres: 001, 100 y 110.
 - Como estos son los valores binarios que hacen que cada operación suma sea igual a cero, el producto de sumas equivalente es:

$$(A+B+\bar{C})(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+\bar{B}+C)$$



Mapas de Karnaugh (I)

- Un mapa de Karnaugh proporciona un método sistemático de simplificación de expresiones booleanas.
- Aplicado adecuadamente genera las expresiones suma de productos y producto de sumas más simples posibles.
- Un mapa de Karnaugh es similar a una tabla de verdad, ya que muestra todos los posibles valores de las variables de entrada y la salida resultante para cada valor.



Mapas de Karnaugh (II)

- El mapa de Karnaugh es una secuencia de celdas en la que cada celda representa un valor binario de las variables de entrada.
- Las celdas se disponen de tal manera que la simplificación de una determinada expresión consiste en agrupar adecuadamente las celdas.
- Los mapas de Karnaugh pueden utilizarse para expresiones de dos, tres, cuatro y cinco variables.
- El método de Quine-McClusky puede usarse para un número de variables mayor.
- Al igual que ocurría con el número de filas de una tabla de verdad, el número de celdas de un mapa de Karnaugh es igual al número total de combinaciones de las variables de entrada.
- Para tres variables, el número de celdas necesarias es $2^3=8$. Para cuatro variables, el número de celdas es $2^4=16$ celdas.



Mapas de Karnaugh de Tres Variables (I)

- Es un conjunto de 8 celdas.
- Se utilizan A , B y C para denominar las variables, aunque se podrían usar otras letras.
- Los valores binarios de A y B se encuentran en la parte izquierda y los valores de C en la parte superior.
- El valor de una determinada celda es:
 - el valor binario de A y B , en la parte izquierda de la misma fila
 - combinado con el valor de C en la parte superior de la misma columna.



Mapas de Karnaugh de Tres Variables (II)

- Representación de un mapa de Karnaugh de tres variables vacío (matriz de 8 celdas) y con los términos producto estándar representados para cada celda:

		C	0	1
		AB	00	
00	01	00	0	1
		01	2	3
11	10	11	6	7
		10	4	5

		C	0	1
		AB	00	
00	01	00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$
		01	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$
11	10	11	$A\bar{B}\bar{C}$	ABC
		10	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$

Mapas de Karnaugh de Cuatro Variables (I)

- Es un conjunto de 16 celdas.
- Se utilizan A , B , C y D para denominar las variables, aunque se podrían usar otras letras.
- Los valores binarios de A y B se encuentran en la parte izquierda y los valores de C y D en la parte superior.
- El valor de una determinada celda es:
 - el valor binario de A y B , en la parte izquierda de la misma fila
 - combinado con el valor de C y D en la parte superior de la misma columna.



Mapas de Karnaugh de Cuatro Variables (II)

- Representación de un mapa de Karnaugh de cuatro variables vacío (matriz de 16 celdas) y con los términos producto estándar representados para cada celda:

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
00	00		0	1	3	2
00	01		4	5	7	6
01	11		12	13	15	14
01	10		8	9	11	10

(a)

		CD	00	01	11	10
		AB	00	01	11	10
00	00		$A B C D$	$A B C D$	$A B C D$	$A B C D$
00	01		$\bar{A} B \bar{C} \bar{D}$	$\bar{A} B \bar{C} D$	$\bar{A} B C D$	$\bar{A} B C \bar{D}$
01	11		$A B \bar{C} \bar{D}$	$A B \bar{C} D$	$A B C D$	$A B C \bar{D}$
01	10		$\bar{A} B C D$	$\bar{A} B C D$	$\bar{A} B C D$	$\bar{A} B C \bar{D}$

Adyacencia de Celdas (I)

- Las celdas de un mapa de Karnaugh se disponen de manera que sólo cambia una única variable entre celdas adyacentes.
- Las celdas que difieren en una única variable son adyacentes.
- En el mapa de 3 variables, la celda 010 es adyacente a la celda 000, a la 011 y a la 110.
- Las celdas cuyos valores difieren en más de una variable no son adyacentes.
- En el mapa de 3 variables, la celda 010 NO es adyacente a la celda 001, a la 111, a la 100 ni a la 101.



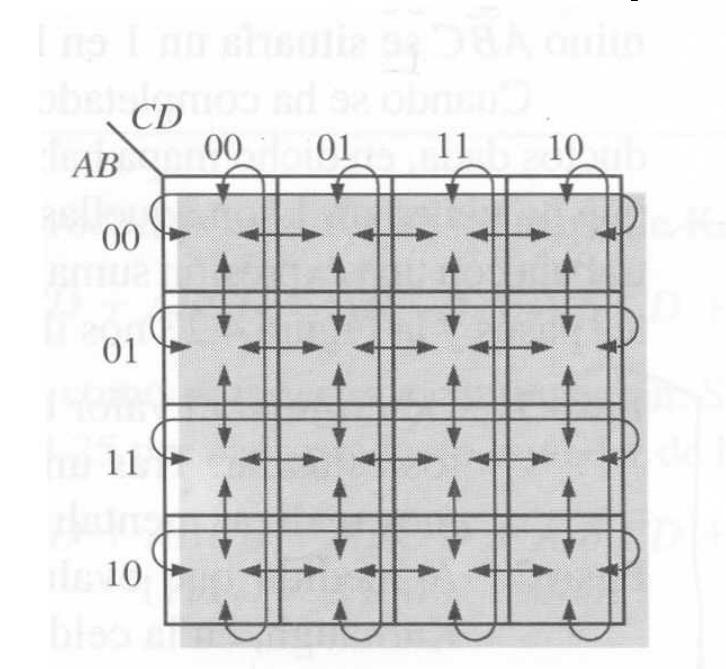
Adyacencia de Celdas (II)

- Físicamente, cada celda es adyacente a las celdas que están situadas inmediatas a ella por cualesquiera de sus cuatro lados.
- Una celda NO es adyacente a aquellas que tocan diagonalmente alguna de sus esquinas.
- Además, las celdas de la fila superior son adyacentes a las de la fila inferior y las celdas de la columna izquierda son adyacentes a las celdas situadas en la columna derecha.



Adyacencia de Celdas (III)

- Adyacencia de celdas en un mapa de Karnaugh de cuatro variables.
- Las flechas apuntan a las celdas adyacentes.



Minimización de una Suma de Productos Mediante el Mapa de Karnaugh

- El mapa de Karnaugh se utiliza para reducir expresiones booleanas a su mínima expresión, así los diseños lógicos de los circuitos que se construyan sean más económicos.
- Una expresión suma de productos minimizada está formada por el mínimo número de términos producto posibles con el mínimo número de variables por término.
- Generalmente, una expresión suma de productos minimizada se puede implementar mediante un número de puertas menor que su expresión estándar, lo cual constituye la finalidad del proceso de simplificación.



Mapa de Karnaugh de una Suma de Productos Estándar (I)

- Por cada término de la expresión suma de productos se coloca un 1 en el mapa de Karnaugh en la celda correspondiente al valor del producto.
- Las celdas que no tienen 1 son aquellas para las que la expresión es 0.



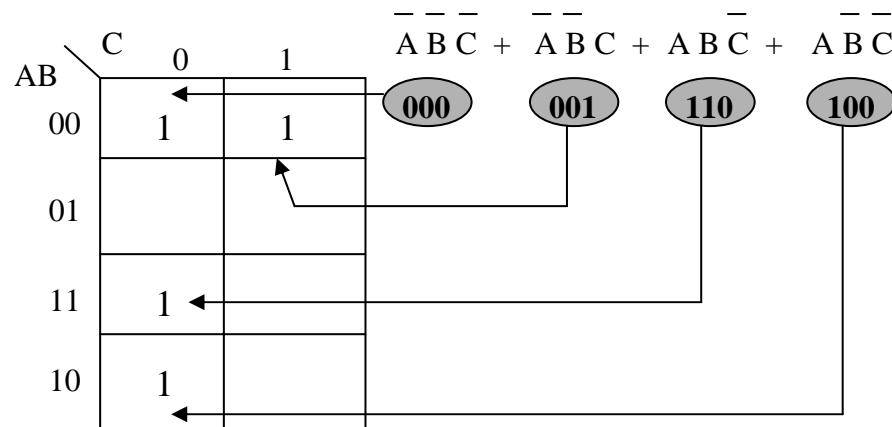
Mapa de Karnaugh de una Suma de Productos Estándar (II)

- Pasos para completar el mapa de Karnaugh:

Paso 1. Determinar el valor binario de cada término producto de la suma de productos estándar.

Paso 2. A medida que evaluamos cada término, colocamos un 1 en el mapa de Karnaugh, en la celda que tiene el mismo valor que dicho término.

Ejemplo de transformación a mapa de Karnaugh de una suma de productos estándar



Mapa de Karnaugh de una Suma de Productos No Estándar (I)

- Antes de poder utilizar un mapa de Karnaugh, las expresiones booleanas deben estar en su forma estándar.
- Si una expresión no lo está, se pasará al formato estándar.
- A un término en forma no estándar le faltan una o más variables en su expresión.
- Este término se puede desarrollar numéricamente para obtener una expresión estándar:
 - Se añaden todas las combinaciones de valores numéricos de las variables que faltan en la expresión.



Mapa de Karnaugh de una Suma de Productos No Estándar (II)

- Ejemplo: Transformar la siguiente expresión suma de productos en un mapa de Karnaugh: $A + AB + ABC$
Solución. Esta suma de productos no está en formato estándar, ya que cada término no contiene las tres variables. El primer término no posee dos de las tres variables; el segundo carece de una, mientras que el tercero sí que es estándar.

1. Desarrollamos los términos numéricamente de la forma:

$$\begin{array}{l} \bar{A} + A\bar{B} + A\bar{B}\bar{C} \\ \begin{array}{ccc} 000 & 100 & 110 \\ 001 & 101 & \\ 010 & 110 & \\ 011 & 111 & \end{array} \end{array}$$

2. Cada uno de los valores binarios resultantes se traslada al mapa, colocando un 1 en la celda apropiada del mapa de Karnaugh de 3 variables.

		C	0	1
AB	00	0	1	1
		1	1	1
01	0	1	1	1
	1	1	1	1
11	0	1	1	1
	1	1	1	1
10	0	1	1	1
	1	1	1	1

Simplificación de una Suma de Productos Mediante el Mapa de Karnaugh

- El proceso que genera una expresión que contiene el menor número posible de términos con el mínimo número de variables se denomina minimización.
- Después de haber obtenido el mapa de Karnaugh de una suma de productos, se deben seguir tres pasos para obtener la expresión suma de productos mínima:
 - Agrupar los 1s.
 - Determinar el término producto correspondiente a cada grupo.
 - Sumar los términos productos obtenidos.



Agrupación de 1s (I)

- La finalidad es maximizar el tamaño de los grupos y minimizar el número de estos grupos. Reglas:
 1. Un grupo tiene que contener 1, 2, 4, 8 ó 16 celdas.
 2. Cada celda de un grupo tiene que ser adyacente a una o más celdas del mismo grupo, pero no todas las celdas del grupo tienen que ser adyacentes entre sí.
 3. Incluir siempre en cada grupo el mayor número posible de 1s de acuerdo con la regla 1.
 4. Cada 1 del mapa tiene que estar incluido en al menos un grupo. Los 1s que ya pertenezcan a un grupo pueden estar incluidos en otro, siempre que los grupos que se solapen contengan 1s no comunes.



Agrupación de 1s (II)

	C	0	1
AB	00	1	
00	00	1	1
01	01	1	
11	11	1	1
10	10	1	1

	C	0	1
AB	00	1	
00	00	1	1
01	01	1	
11	11	1	
10	10	1	1

	C	0	1	CD
AB	00	00	01	11
00	00	1	1	
01	01	1	1	1
11	11			
10	10		1	1

	C	0	1	CD
AB	00	00	01	11
00	00	1		1
01	01	1		1
11	11	1	1	1
10	10	1		1

	C	0	1
AB	00	1	
00	00	1	1
01	01		1
11	11	1	1
10	10		

	C	0	1
AB	00	1	
00	00	1	1
01	01	1	
11	11		1
10	10	1	1

	C	0	1	CD
AB	00	00	01	11
00	00	1	1	
01	01	1	1	1
11	11			
10	10		1	1

	C	0	1	CD
AB	00	00	01	11
00	00	1		1
01	01	1		1
11	11	1	1	1
10	10	1		1



Determinar el Término Producto Correspondiente a Cada Grupo (I)

1. Cada grupo de celdas que contiene 1s da lugar a un término producto compuesto por todas las variables que aparecen en el grupo en sólo una forma (no complementada o complementada). Las variables que aparecen complementadas y sin complementar dentro del mismo grupo se eliminan. A éstas se las denomina *variables contradictorias*.
2. Determinar la operación producto mínima para cada grupo.



Determinar el Término Producto Correspondiente a Cada Grupo (II)

- a) Determinar la operación producto mínima para un mapa de 3 variables.
- I. Un grupo formado por una única celda da lugar a un término producto de tres variables.
 - II. Un grupo formado por 2 celdas da lugar a un término producto de dos variables.
 - III. Un grupo formado por 4 celdas da lugar a un término de una variable.
 - IV. Un grupo formado por 8 celdas indica que la expresión vale 1.



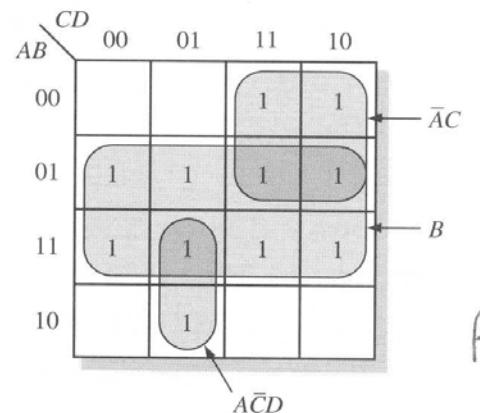
Determinar el Término Producto Correspondiente a Cada Grupo (III)

- b) Determinar la operación producto mínima para un mapa de 4 variables.
- I. Un grupo formado por una única celda da lugar a un término producto de cuatro variables.
 - II. Un grupo formado por 2 celdas da lugar a un término producto de tres variables.
 - III. Un grupo formado por 4 celdas da lugar a un término producto de dos variables.
 - IV. Un grupo formado por 8 celdas da lugar a un término de una variable.
 - V. Un grupo formado por 16 celdas indica que la expresión vale 1.



Sumar los Términos Productos Obtenidos (I)

- Cuando se han obtenido todos los términos mínimos, se suman para obtener la expresión suma de productos mínima.



$$B + \bar{A}C + \bar{A}\bar{C}\bar{D}$$

Sumar los Términos Productos Obtenidos (II)

- Ejemplo: Determinar los productos para cada uno de los mapas de Karnaugh y escribir las correspondientes expresiones suma de productos mínima resultante.

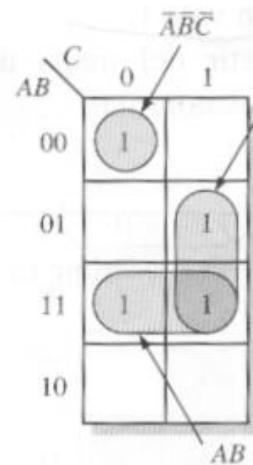
Solución. La expresión suma de productos mínima para cada uno de los mapas de Karnaugh es:

(a) $AB + BC + \overline{A} \overline{B} C$

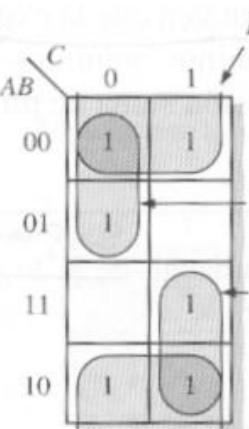
(b) $\overline{B} + \overline{A} \overline{C} + AC$

(c) $\overline{A} \overline{B} + \overline{A} \overline{C} + ABD$

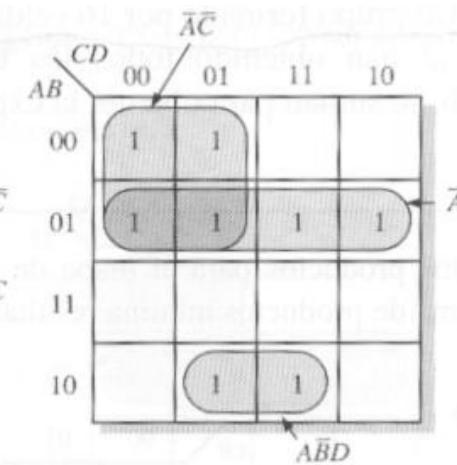
(d) $\overline{D} + \overline{ABC} + B\overline{C}$



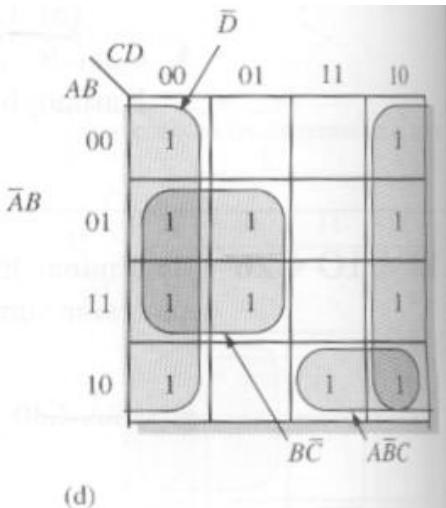
(a)



(b)



(c)

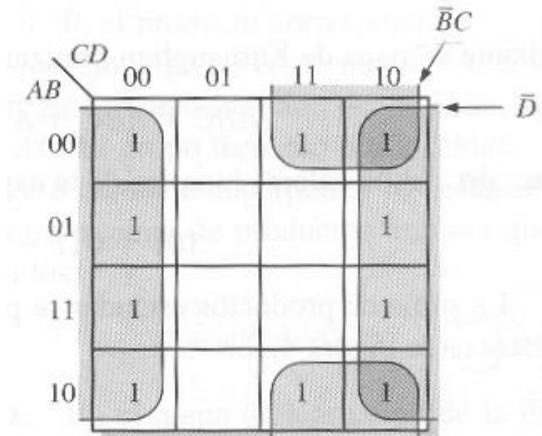


(d)

Sumar los Términos Productos Obtenidos (III)

- Ejemplo: Mediante un mapa de Karnaugh minimizar la expresión suma de productos siguiente:

$$\overline{B} \overline{C} D + A \overline{B} C D + A B \overline{C} D + A \overline{B} \overline{C} D + A \overline{B} C \overline{D} + A B \overline{C} \overline{D} + A B \overline{C} D + A B \overline{C} \overline{D}$$



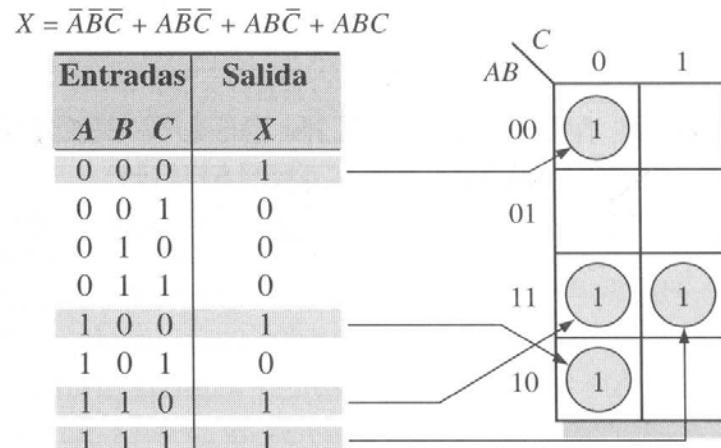
Se indica el término producto para cada grupo y la expresión suma de productos mínima resultante es:

$$\overline{D} + \overline{B} C$$

Nota: esta expresión mínima es equivalente a la expresión estándar original.

Obtención Directa del Mapa de Karnaugh a Partir de la Tabla de Verdad

- Los 1s de la columna de salida de la tabla de verdad se trasladan directamente al mapa de Karnaugh, a las celdas correspondientes a los valores asociados de las combinaciones de variables de entrada.



Condiciones Indiferentes (I)

- Algunas veces se producen situaciones en las que algunas combinaciones de las variables de entrada no están permitidas.
- Por ejemplo, en el código BCD existían seis combinaciones no válidas: 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 y 1111.
- Estos pueden considerarse términos indiferentes con respecto a su efecto en la salida.
- Esto significa que a estos términos se les puede asignar tanto un 1 como un 0 en la salida; realmente no son importantes dado que nunca van a generarse.

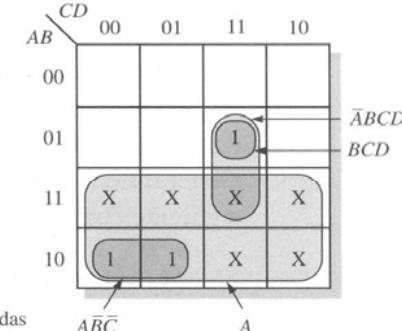


Condiciones Indiferentes (II)

- Para cada término indiferente, se escribe una X en la celda.
- Cuando se agrupan los 1s, las X se pueden considerar también como 1s para agrandar los grupos, o como 0s si no obtenemos ninguna ventaja.
- Cuanto mayor sea el grupo más sencillo será el término resultante.

Entradas	Salida
$ABCD$	Y
0 0 0 0	0
0 0 0 1	0
0 0 1 0	0
0 0 1 1	0
0 1 0 0	0
0 1 0 1	0
0 1 1 0	0
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	X
1 0 1 1	X
1 1 0 0	X
1 1 0 1	X
1 1 1 0	X
1 1 1 1	X

(a) Tabla de verdad



No permitidas
"indiferentes"

(b) Sin condiciones "indiferentes" $Y = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BCD$
Con condiciones "indiferentes" $Y = A + BCD$



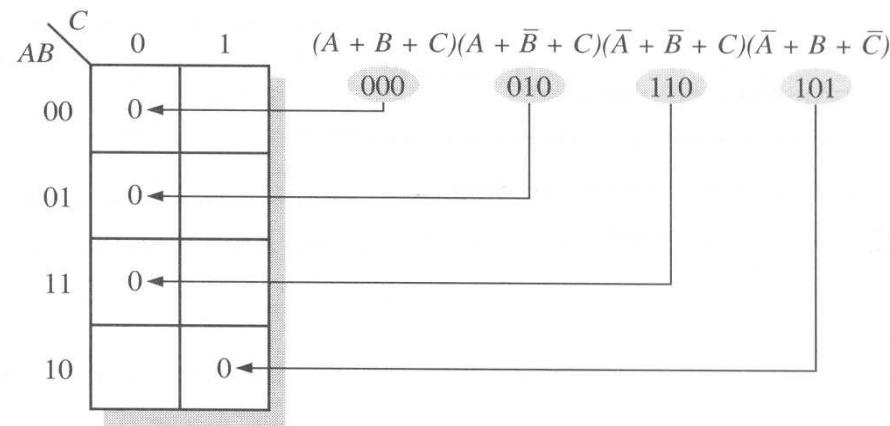
Minimización de un Producto de Sumas Mediante el Mapa de Karnaugh

- Este método es similar al de la minimización de una expresión suma de productos mediante los mapas de Karnaugh.
- En esta ocasión, los 0s representan las operaciones de suma estándar y se colocan en el mapa de Karnaugh en lugar de los 1s.



Mapa de Karnaugh de un Producto de Sumas Estándar

- Por cada término suma de la expresión producto de sumas se coloca un 0 en el mapa de Karnaugh en la celda correspondiente al valor de la suma.
- Las celdas que no tienen 0 son aquellas para las que la expresión es 1.

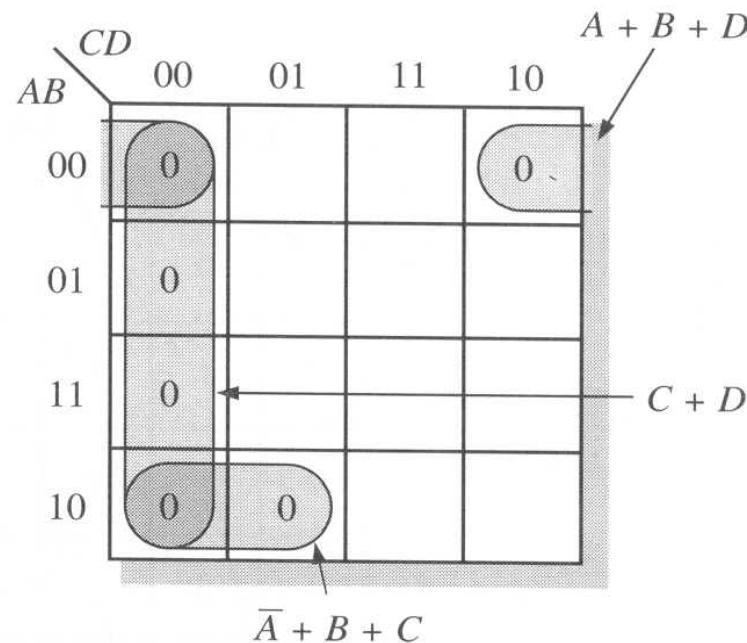


Simplificación Mediante el Mapa de Karnaugh de Expresiones Producto de Sumas (I)

- El proceso de minimización de un producto de sumas es básicamente el mismo que para una expresión suma de productos, excepto que ahora hay que agrupar los 0s para generar el mínimo número de términos suma.
- Las reglas para agrupar los 0s son las mismas que para agrupar los 1s.



Simplificación Mediante el Mapa de Karnaugh de Expresiones Producto de Sumas (II)



$$(C + D)(A + B + D)(\bar{A} + B + C)$$

Conversión entre Suma de Productos y Producto de Sumas Mediante el Mapa de Karnaugh (I)

- Cuando un producto de sumas se traslada a un mapa de Karnaugh, puede fácilmente pasarse a la suma de productos equivalente.
- También, dado un mapa de Karnaugh de una suma de productos, el producto de sumas equivalente puede obtenerse directamente a partir del mapa.
- Esto proporciona una excelente manera de comparar ambas formas mínimas de una expresión, para determinar si una de ellas puede implementarse con menos puertas que la otra.



Conversión entre Suma de Productos y Producto de Sumas Mediante el Mapa de Karnaugh (II)

- Para un producto de sumas, todas las celdas que no contienen 0s contienen 1s, de lo que se deriva su expresión suma de productos.
- De igual manera, para una suma de productos, todas las celdas que no contienen 1s contendrán 0s, de los que se obtiene la expresión producto de sumas.

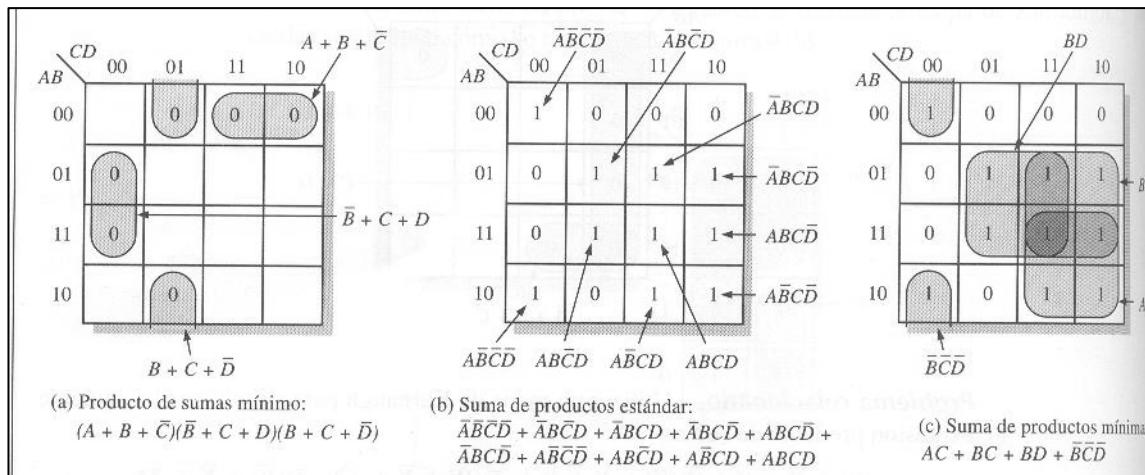


Conversión entre Suma de Productos y Producto de Sumas Mediante el Mapa de Karnaugh (III)

- Ejemplo: Utilizando un mapa de Karnaugh, convertir el siguiente producto de sumas estándar en: un producto de sumas mínimo, una suma de productos estándar y una suma de productos mínima.

$$(\bar{A} + \bar{B} + C + D)(A + \bar{B} + C + D)(A + B + C + \bar{D})(A + B + \bar{C} + \bar{D})(\bar{A} + B + C + \bar{D})(A + B + \bar{C} + D)$$

Solución. En (a) los Os de la expresión producto de sumas estándar se transforman y agrupan para obtener el producto de sumas mínimo. En (b) se añaden 1s en las celdas que no contienen Os. De cada celda que contenga un 1, se obtiene un término producto estándar. Estos términos producto forman la expresión suma de productos estándar. En (c) se agrupan los 1s y se obtiene una expresión suma de productos mínima.



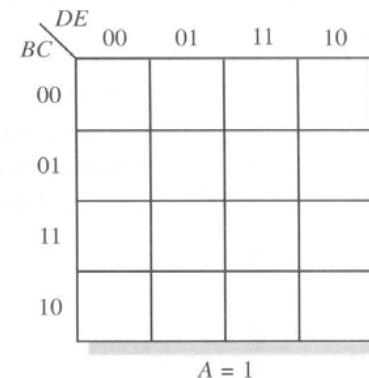
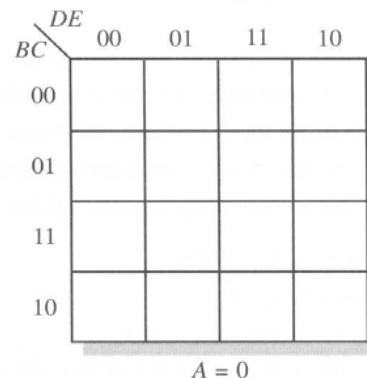
Mapa de Karnaugh de Cinco Variables (I)

- Las funciones booleanas de cinco variables pueden simplificarse mediante un mapa de Karnaugh de 32 celdas.
- Para construir un mapa de 5 variables se utilizan dos mapas de 4 variables (con 16 celdas cada uno).



Mapa de Karnaugh de Cinco Variables (II)

- Cada mapa contiene 16 celdas con todas las posibles combinaciones de las variables B, C, D y E:
 - Un mapa es para $A = 0$
 - Otro es para $A = 1$



Adyacencia de Celdas (I)

- La mejor manera de visualizar la adyacencia de celdas entre los dos mapas de 16 celdas consiste en imaginar que el mapa $A=0$ está colocado encima del mapa $A=1$.
- Cada celda del mapa $A=0$ es adyacente con la celda que está justo debajo en el mapa $A=1$.



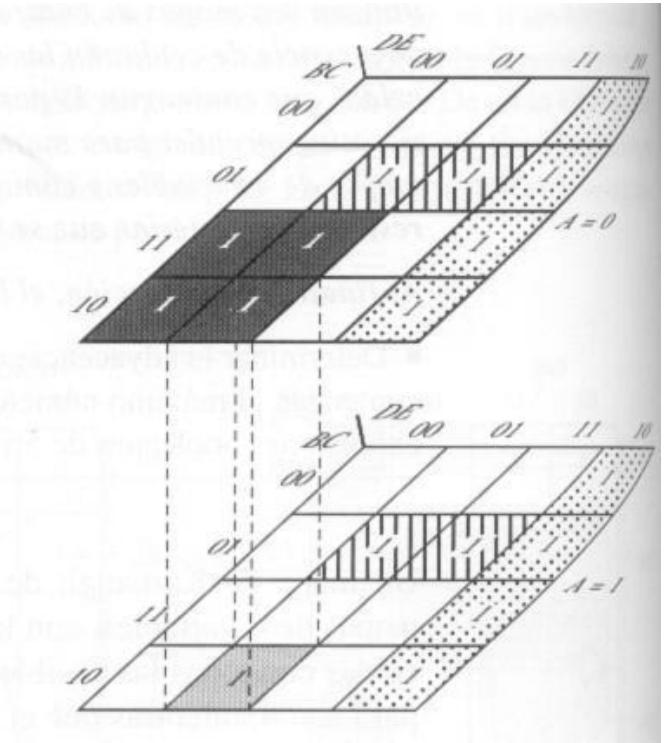
Adyacencia de Celdas (II)

Agrupación de 1s en celdas adyacentes de un mapa de 5 variables

Determinación de los términos producto correspondientes a cada grupo

- El término del grupo punteado es: $D\bar{E}$
 - El término del grupo rayado es $\bar{B}CE$
 - El término del grupo gris oscuro es: $\bar{A}\bar{B}\bar{D}$
 - El término de la celda gris claro junto con la celda gris oscuro es: $\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$
- $$X = D\bar{E} + \bar{B}CE + \bar{A}\bar{B}\bar{D} + \bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$$

Suma de productos simplificada



Adyacencia de Celdas (III)

- Ejemplo: Utilizar un mapa de Karnaugh para minimizar la siguiente expresión estándar de la suma de productos de 5 variables:

$$X = \overline{ABCDE} + \overline{ABC\bar{D}} + \overline{ABC\bar{D}\bar{E}} + \overline{ABC\bar{D}E} + \overline{ABC\bar{D}\bar{E}} + \overline{ABC\bar{D}E} + \overline{ABC\bar{D}\bar{E}} + \overline{ABC\bar{D}\bar{E}} + ABC\bar{D}\bar{E} + ABC\bar{D}\bar{E}$$

- Se traslada la suma de productos al mapa de Karnaugh y se realizan las agrupaciones indicando los términos correspondientes.
- Combinando estos términos se obtiene la siguiente expresión suma de productos minimizada:

$$X = \overline{ADE} + \overline{BCD} + BCE + ACDE$$

