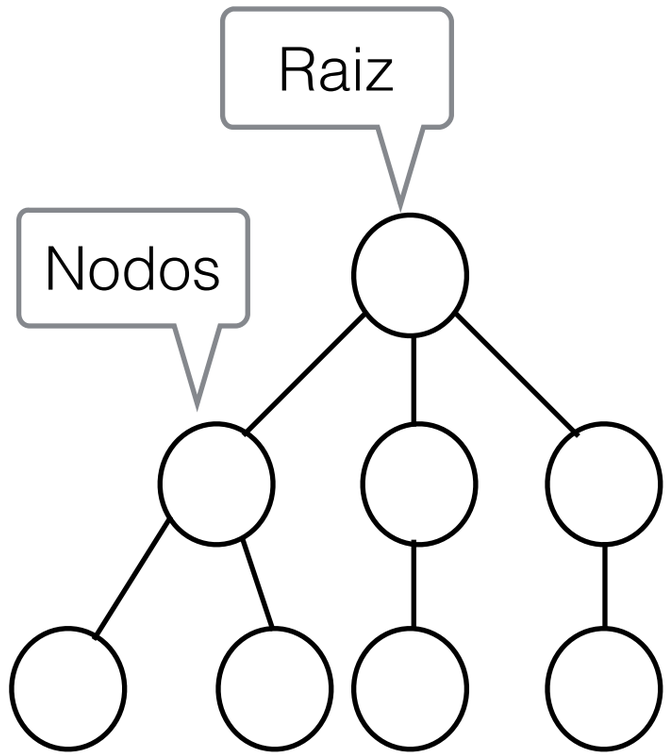
Árboles

Pablo Castro
Algoritmos I - UNRC

Árboles

Los árboles tienen las siguientes características:

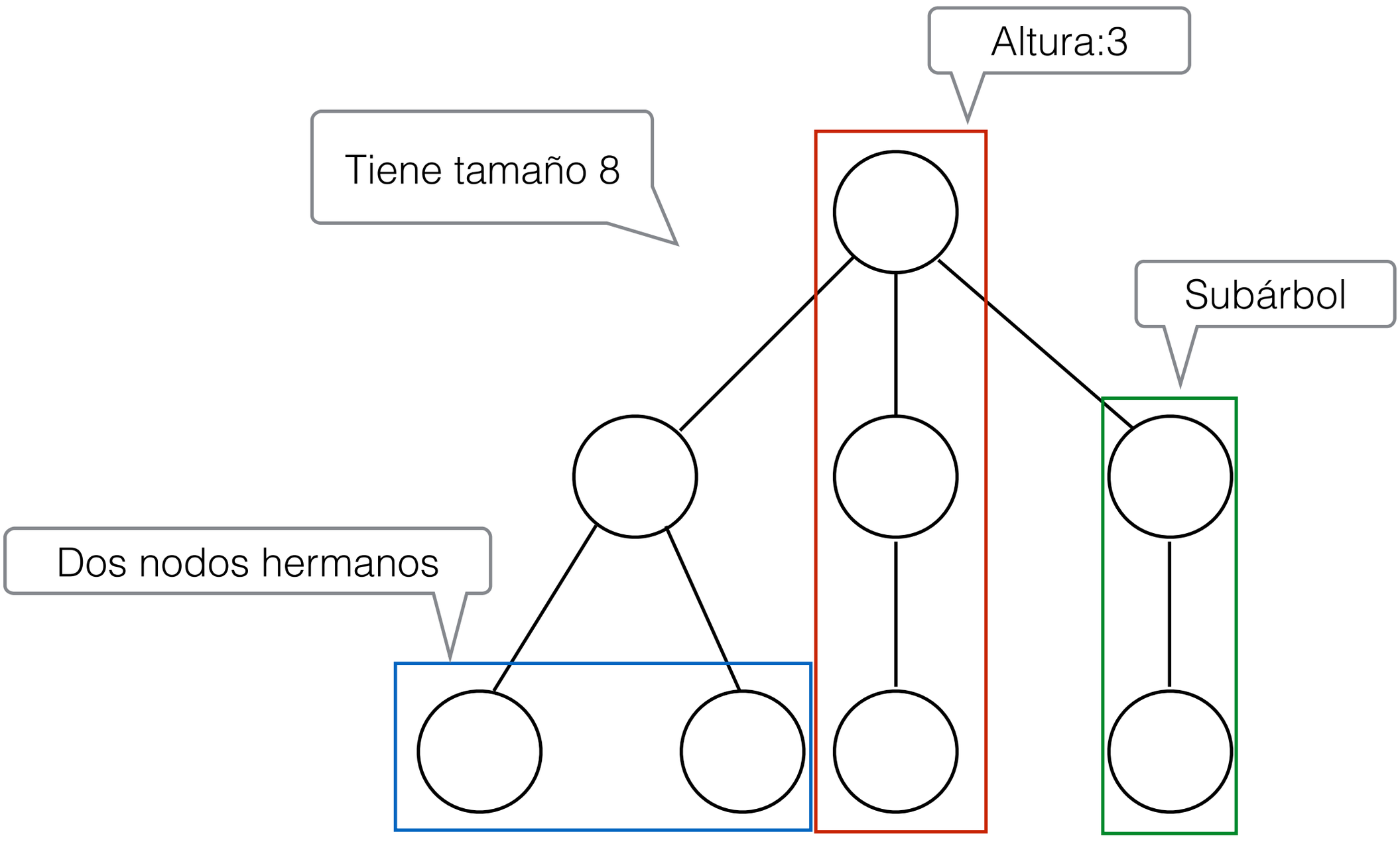
- No poseen una organización lineal,
- Tenemos una raíz,
- Cada nodo tiene un padre, excepto la raíz,
- Un nodo puede tener 0 ó muchos hijos



Definiciones

- **Hermanos:** Nodos con el mismo padre,
- **Hojas:** Nodos sin hijos,
- **Altura:** Longitud del camino más largo desde la raíz a una hoja,
- **Tamaño:** Cantidad de nodos,
- **Subárbol:** Es un nodo del árbol junto con todos sus descendientes

Ejemplo



Árboles Binarios

Los árboles binarios son aquellos que:

- Cada nodo tiene a lo sumo dos hijos,
- Cada hijo de un nodo es llamado hijo izq. o hijo derecho.

En Haskell se definen recursivamente:

```
data Tree a = Nil | Node a (Tree a) (Tree a)
```

TAD Árbol Binario

El TAD árbol binario consta de las siguientes operaciones:

- raiz: Retorna la raíz del árbol,
- hi: retorna el subárbol izquierdo,
- hd: retorna el subárbol derecho,
- preorder: recorrido preorder,
- inorder: recorrido inorder,
- posorder: recorrido posorder.

Implementación JAVA

Primero definimos una interface con operaciones básicas:

```
// Ejemplo de una interfaz basica para arboles contiene la funcionalidad minima para este tipo
// de estructuras, puede ser enriquecidad con mas operaciones
public interface BinaryTreeBasis{

   // Devuelve el elemento de la raiz
   public Object getRoot();

   // Setea la raiz
   public void setRoot(Object item);

   // Dice si el arbol es vacio
   public boolean isEmpty();

   //Remueve todo los nodos del arbol
   public void makeEmpty();

   // recorrido preOrder
   public void printPreOrder();

   // recorrido postOrder
   public void printPostOrder();

   // recorrido inOrder
   public void printInOrder();
}
```

Implementación con Memoria Dinámica

Una posible implementación con memoria dinámica:

```
public class TreeNode{
   private Object element; // elemento del nodo
   private TreeNode left;  // hijo izquierdo
   private TreeNode right; // hijo derecho

   // constructor del NodoArbol por defecto
   public  TreeNode(){
    element = null;
    left = null;
    right = null;
   }
// implementar el resto..
}
```

Parecida Node de LinkedLIst

Los recorridos preorder, inorder, posorder deben ser implementados acá

```
public class LinkedBinaryTree implements BinaryTreeBasis{
   // raiz del arbol
   private TreeNode root;

   public  LinkedBinaryTree(){
    root = null;
   }
// Implementar el resto…
}
```

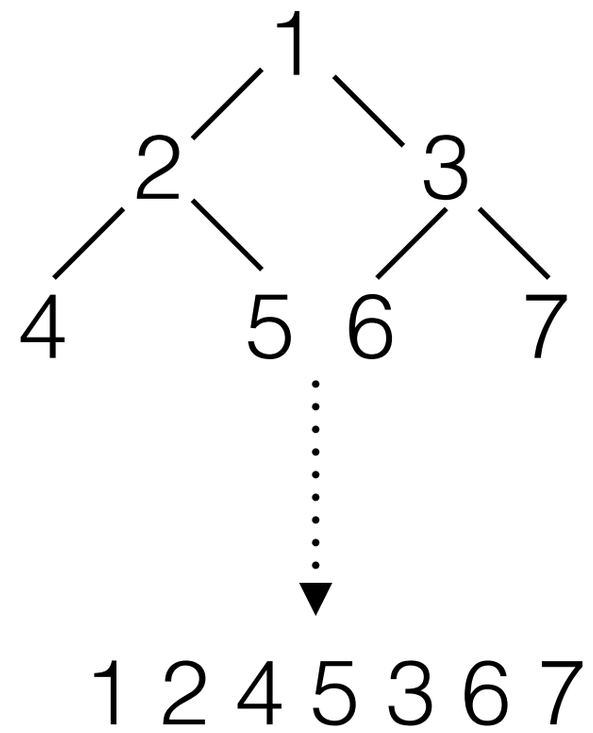
Un LinkedBinaryTree tiene como raíz un TreeNode

Preorder

Con preorder se recorre primero la raíz, después el hi y finalmente el hd.

```
// Recorrido preorder
   public void printPreOrder(){
         // se imprime la raiz
    System.out.println(element);
         // se recorre el hi
    if (left != null){
        left.printPreOrder();
    }
         // se recorre el hd
    if (right != null){
        right.printPreOrder();
    }
  }
```

Implementado en TreeNode, se puede llamar desde LinkedBinaryTree



Este código solo imprime se puede modificar para hacer otras tareas

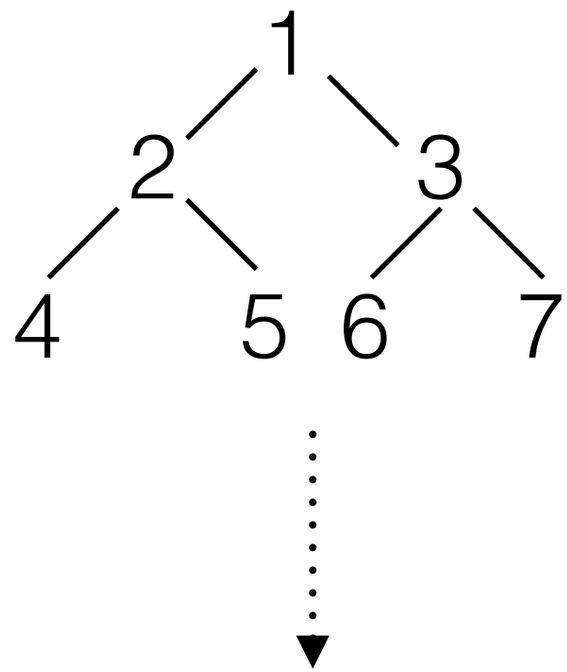
El Tiempo de ejecución es O(n)

Inorder

Primero el hi, después la raíz y finalmente el hd.

```
 // Recorrido inorder
public void printInOrder(){
 // se recorre el hi
 if (left != null){
     left.printInOrder();
 }
      // se imprime la raíz
 System.out.println(element);
      // se imprime el hd
 if (right != null){
     right.printInOrder();
 }
}
```

El Tiempo de ejecución es O(n)

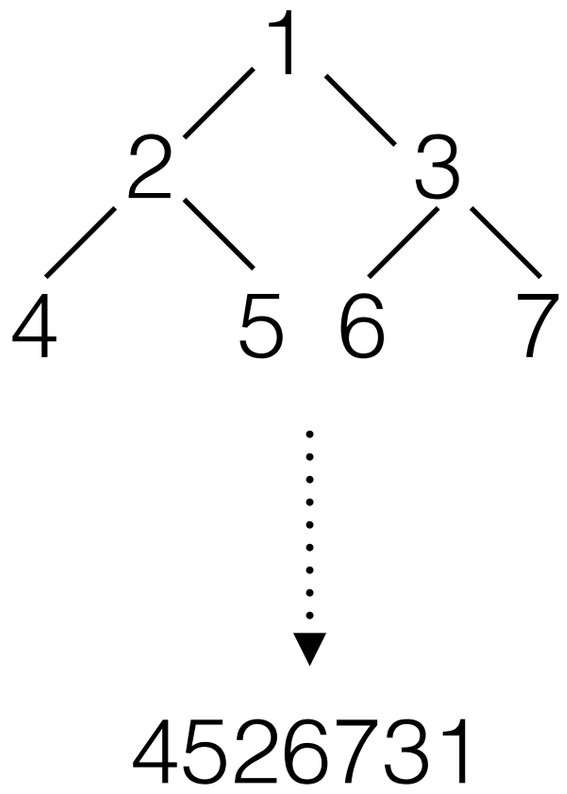


Posorder

La raíz se recorre al último:

```
// Recorrido posorder
   public void printPostOrder(){
         // se recorre hi
    if (left != null){
        left.printPostOrder();
    }
         // se recorre hd
    if (right != null){
        right.printPostOrder();
    }
         // se imprime la raiz
    System.out.println(element);
  }
```

El Tiempo de ejecución es O(n) (n cantidad de nodos)



Propiedades…

Sea *t* un árbol binario, en donde *size(t)* es su tamaño, *alt(t)* su altura. y *full(t)* dice si el árbol está lleno, entonces:

Propiedad 1: $size(t) \leq 2^{alt(t)} - 1$

Propiedad 2: $log_2\ size(t) \leq alt(t)$

Propiedad 3: $full(t) \Rightarrow size(t) = 2^{alt(t)} - 1$

Propiedad 4: $full(t) \Rightarrow alt(t) = log_2\ size(t) + 1$

un árbol se dice full (o lleno) cuando la altura de sus hijos es igual, y ambos hijos son full (o llenos)

Aplicaciones

Los árboles tienen diversas aplicaciones, por ejemplo:

- Representación de expresiones (aritméticas, booleanas, etc),
- Implementación eficiente de colecciones de datos (bases de datos),
- Organización de datos (sistema de archivos),
- Varios algoritmos importantes usan árboles para obtener una implementación elegante y eficiente.

Codificación de Huffman

La idea es codificar datos tal que la cantidad de bits usados es la menor posible.

- En código Ascii tenemos 256 caracteres,
- Cada símbolo se codifica con 8 bits (2^8 = 256),
- Si el mensaje tiene n caracteres necesitamos, n*8 bits,
- Desperdiciamos espacio debido a que todos los símbolos se codifican con la misma cantidad de bits.

Codificación de Huffman

Idea: utilizar la frecuencia de los caracteres para asignándole una codificación más corta a aquellos símbolos que más veces aparecen.

- Si un carácter aparece más veces, tiene una frecuencia más alta, por lo tanto se le debe asignar una codificación más corta
- Por ejemplo, en castellano es más frecuente una “a” que una “x”,
- Esto permitir acorta la cantidad de bits de la información a codificar.

Huffman (cont.)

Supongamos que en el mensaje aparecen:

a,b,c,d,e

Necesitamos 3 bits, es decir, aproximadamente log 5 bits.

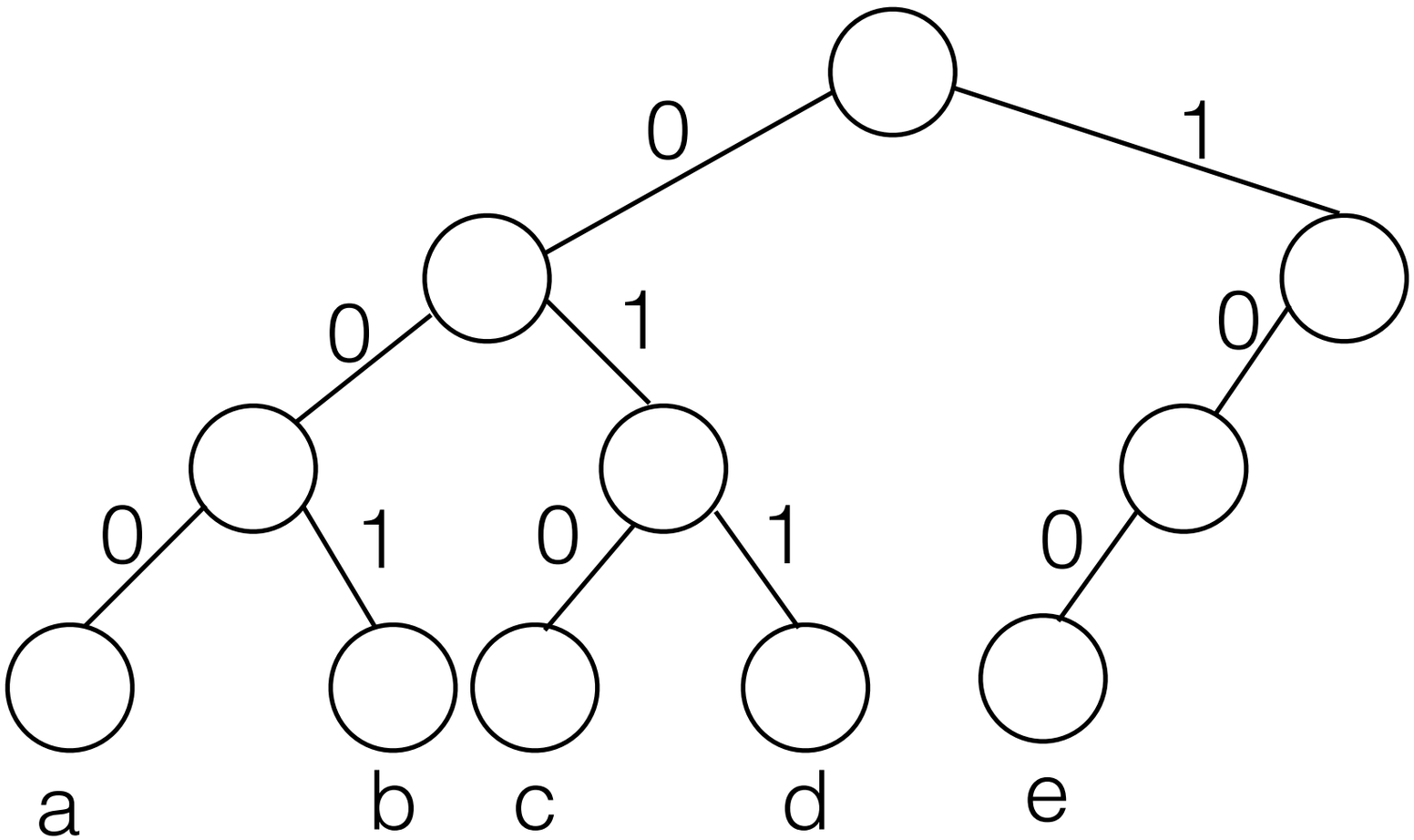
a	000
b	001
c	010
d	011
e	100

Una posible codificación

Si la ‘a’ aparece más veces que la ´b´ estamos desperdiciando espacio

Codificación de Huffman

Podemos representar cualquier codificación utilizando árboles:



Codificación de Huffman

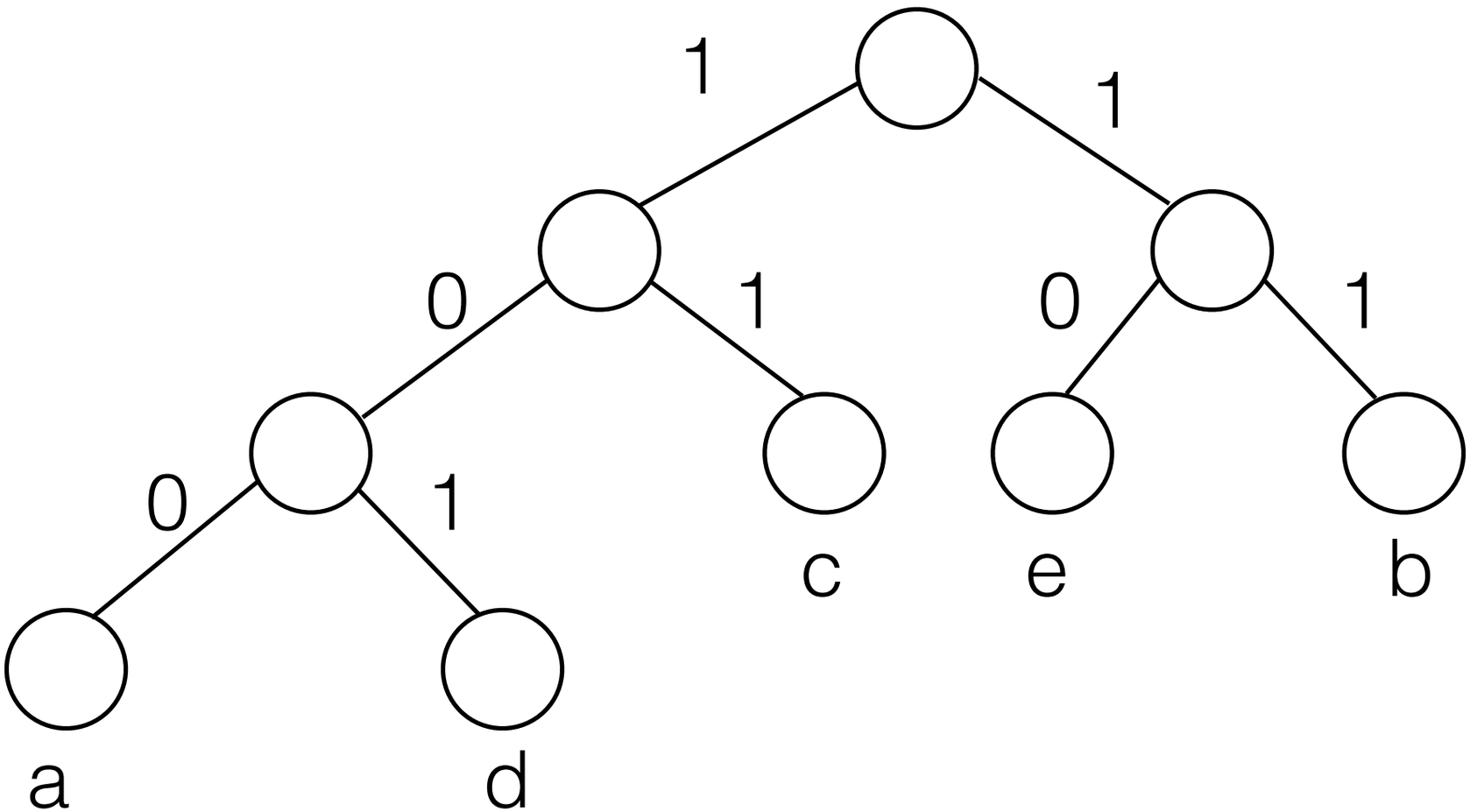
La codificación de Huffman aprovecha la frecuencia de la aparición de letras:

	Frecuencia
a	0.12
b	0.30
c	0.15
d	0.08
e	0.25

Supongamos que las letras tienen la siguiente probabilidad (frecuencia) de aparición

Codificación Huffman

Utilizando Huffman construimos el siguiente árbol:



Codificación Huffman

La codificación de Huffman posee la propiedad de que el código de ningún carácter es prefijo de otro.

Mensaje: “abbbeebbadcbbebacebebe”

Codificación sin Huffman:
00000100100110010000100100001101000100110000100000101000011000011100

Codificación Huffman:
00011111110101111000001011111101100001101110111 0

Idea del Algoritmo

- Creamos un árbol por cada símbolo,
- Cada árbol esta etiquetado con la frecuencia del símbolo que contiene,
- En cada paso se seleccionan los dos árboles con menor peso, y se unen, su peso es la suma de los pesos,
- Se repite este paso hasta que quede un solo árbol
- La codificación lograda no es ambigua y es óptima!