Digitales Video

Prof. Dr.-Ing. Klaus Diepold
Martin Rothbucher
Christian Keimel

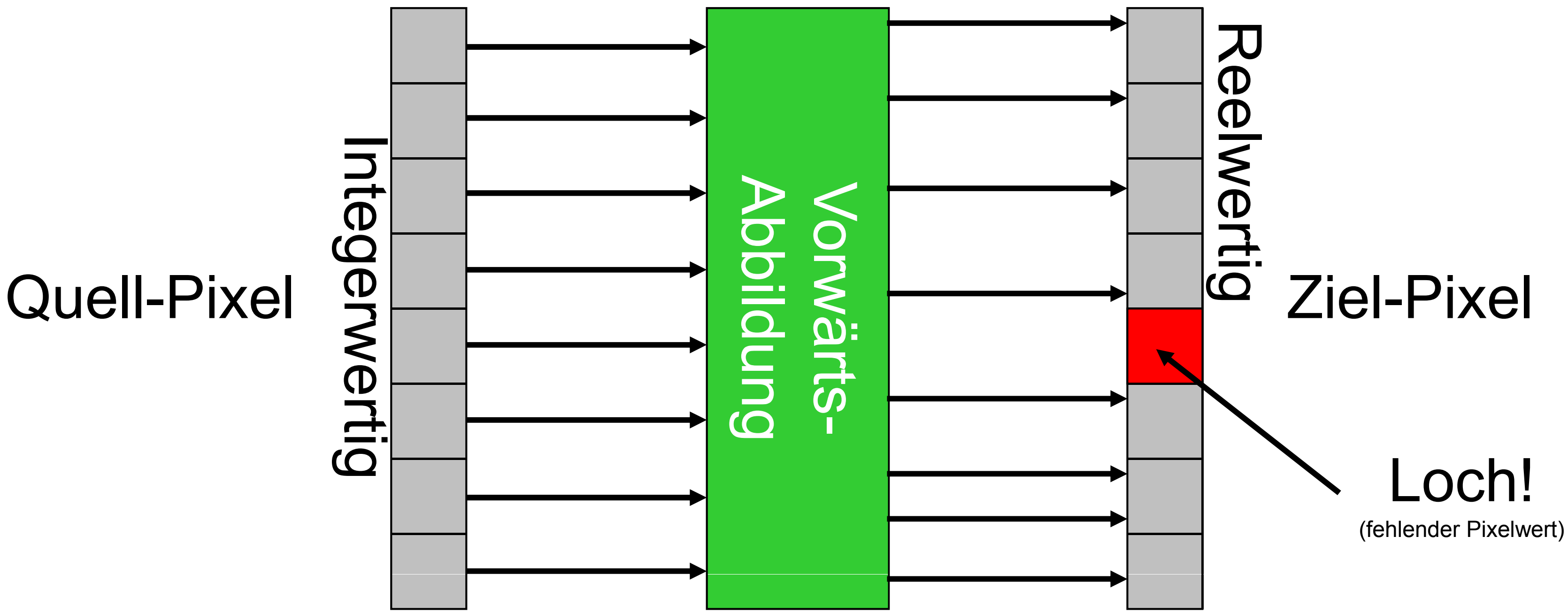
Bildtransformationen – Übersicht

- Vorwärts – Abbildung
- Rückwärts – Abbildung
- Homogene Koordinaten
- Translation
- Rotation
- Skalierung
- Scherung
- Transformationsmatrizen und zusammengesetzte Transformationen

Vorwärts - Abbildung

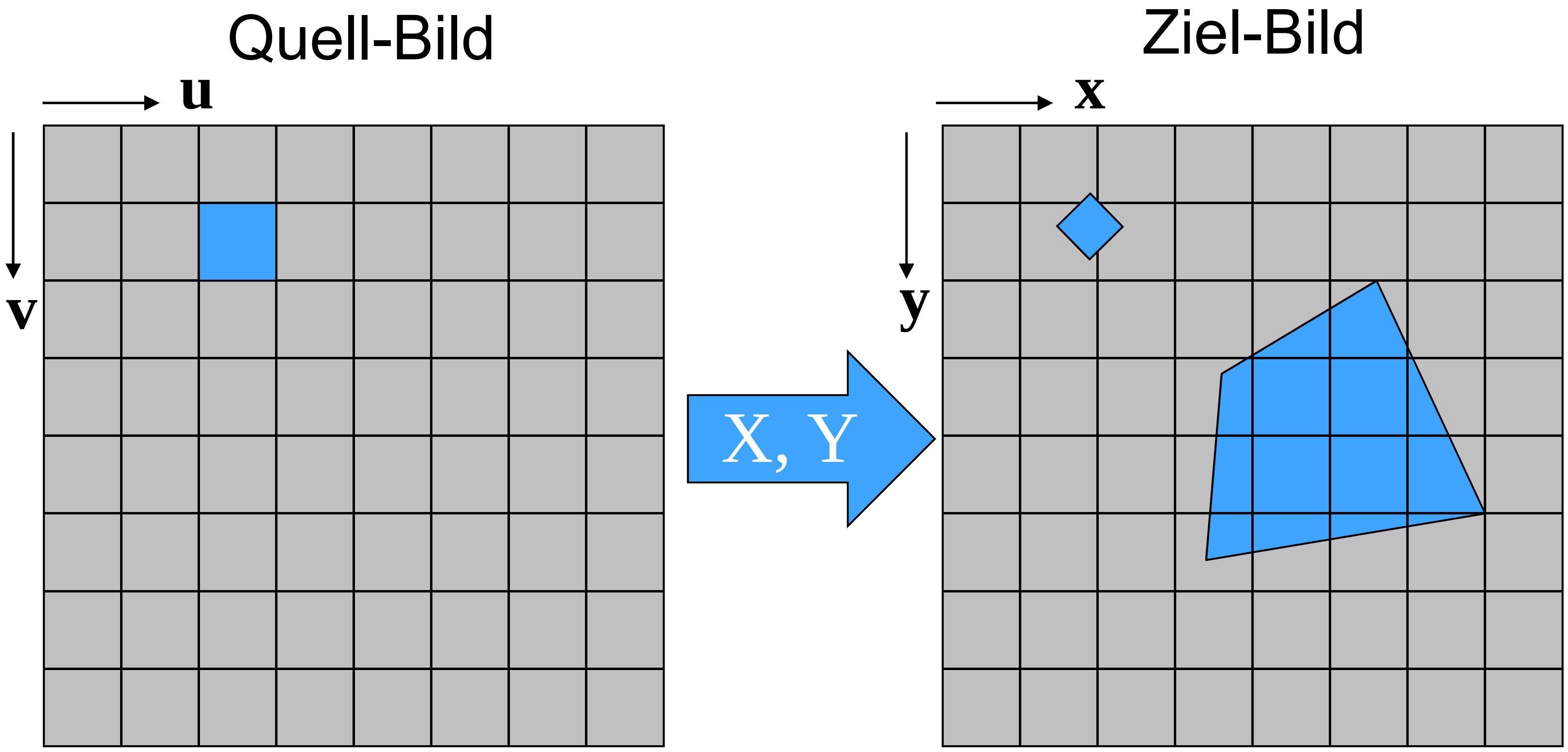
- [u,v] Koordinaten des Quellbildes
- [x,y] Koordinaten des Zielbildes
- Es entstehen Löcher im Zielbild auf Grund von reelwertigen Vektoren

$$[x,y]=[X(u,v),Y(u,v)]$$



Vorwärts - Abbildung

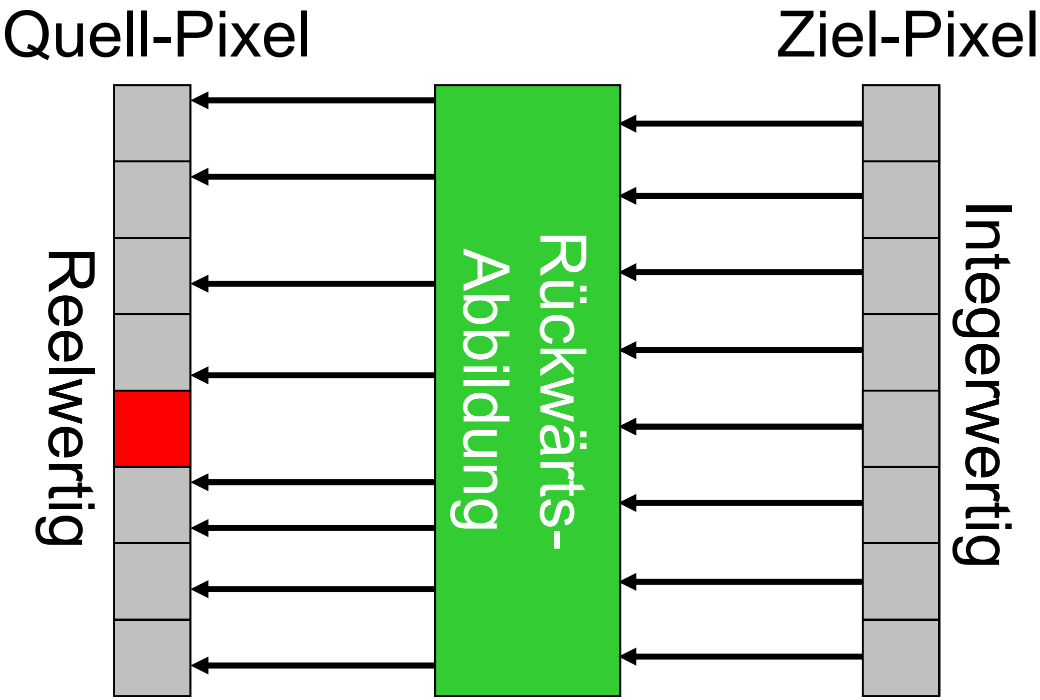
$$[x, y] = [X(u, v), Y(u, v)]$$



Rückwärts - Abbildung

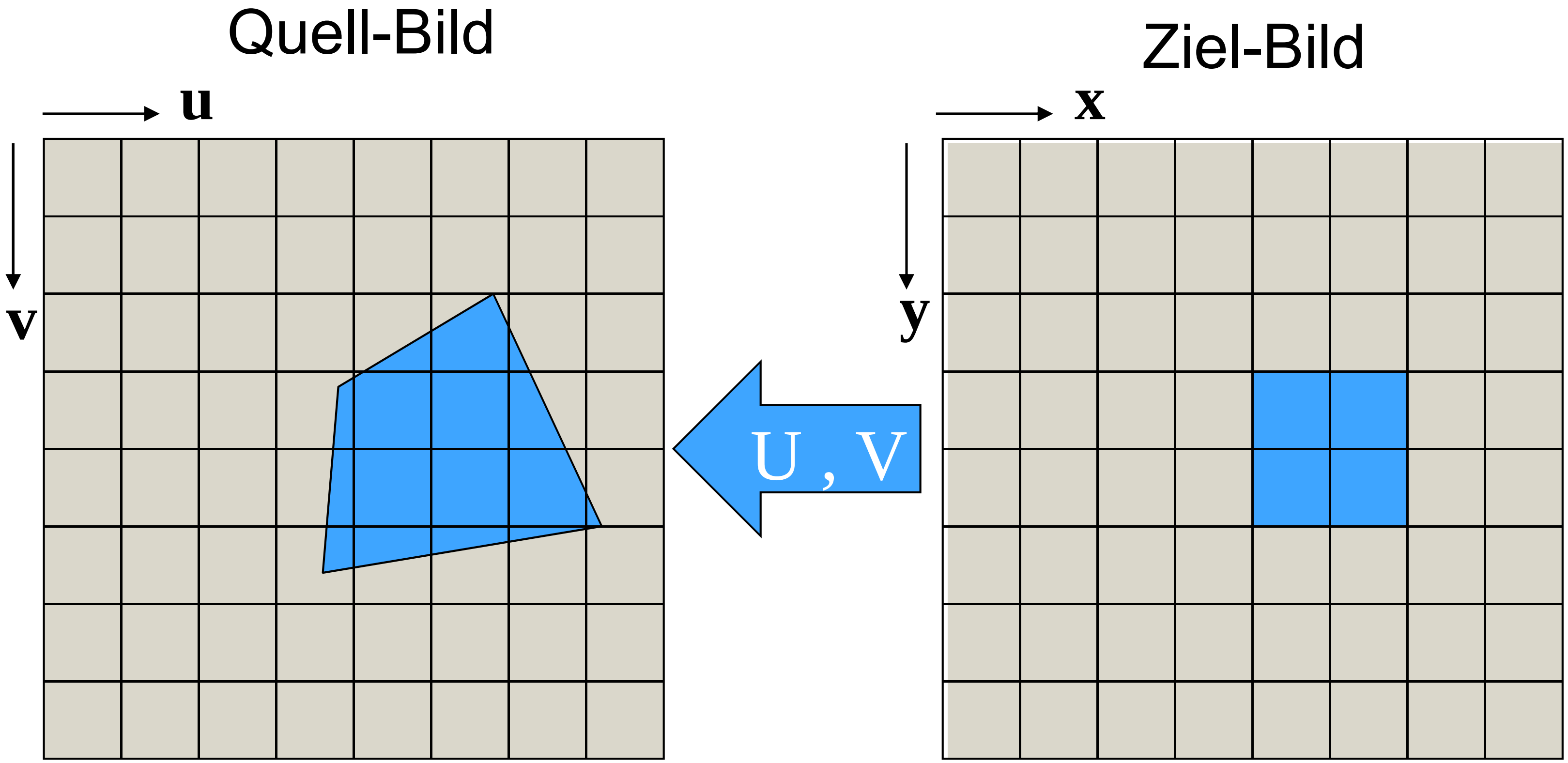
- [u,v] Koordinaten des Quellbildes
- [x,y] Koordinaten des Zielbildes
- Über Rundungsoperationen können zu jedem Ziel-Pixel Quellpixel gefunden werden.

$$[u,v] = [U(x,y), V(x,y)]$$



Rückwärts - Abbildung

$$[u, v] = [U(x, y), V(x, y)]$$



Homogene Koordinaten

- Erlauben die Darstellung jeglicher affiner Transformation als Matrixmultiplikation
- Beschleunigung der Berechnungen
- Nachteil: zusätzliche Koordinate

$$x = a_{11}u + a_{21}v + a_{31}$$

$$y = a_{12}u + a_{22}v + a_{32}$$

$$[x, y] = [u, v, 1] \cdot \mathbf{T}_3 \qquad T_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Affine Transformation

- Ergänzung der Matrix auf 3x3 Dimension (homogene Koordinaten)
- Nur in einer 3x3 Matrix lassen sich alle Transformationen darstellen (auch die Translation)

$$x = a_{11}u + a_{21}v + a_{31}$$

$$y = a_{12}u + a_{22}v + a_{32}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Transformation von 2D-Bildern

- Homogene Koordinaten
- 2D-Bilder werden im 3D transformiert
- Allgemeine 3x3 Transformationsmatrix T_1

$$T_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

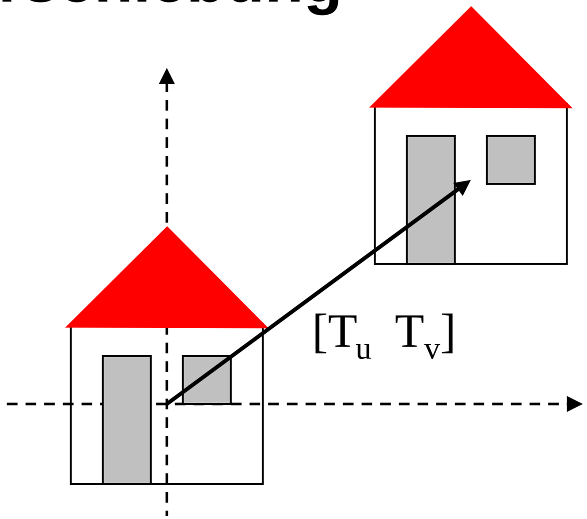
Transformation:

$$[x', y', w'] = [u, v, w] \cdot T_1$$

$$[x, y, w] = [x, y, w] \cdot k \quad \Rightarrow \quad [x, y, w] = [\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, 1]$$

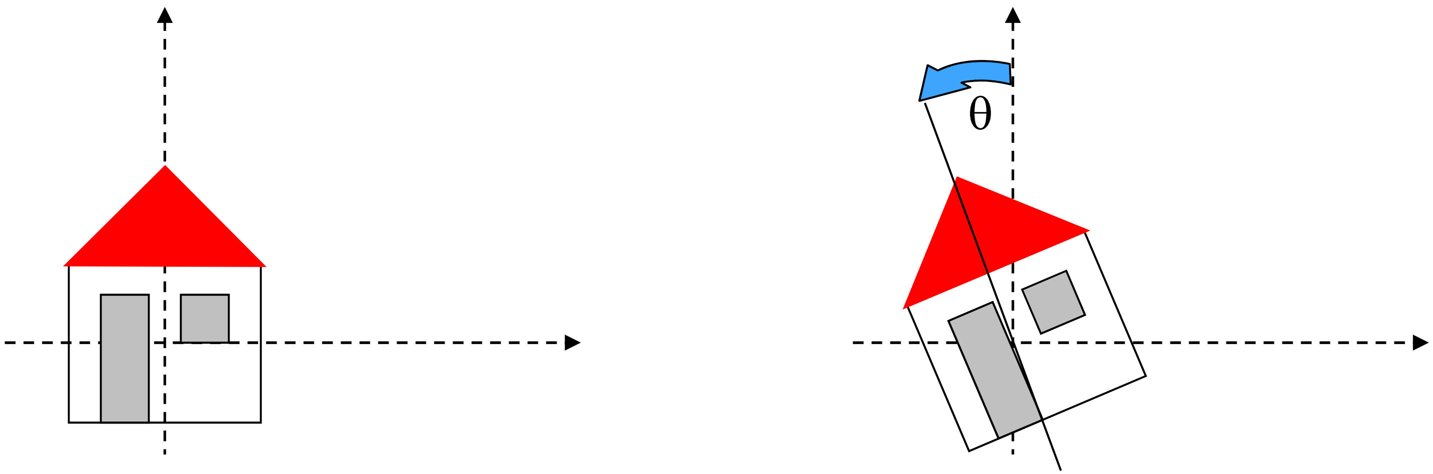
Inhomogene Koordinaten $\begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x'/w'} & \mathbf{y'/w'} \end{bmatrix}$

Translation - Verschiebung



$$[x \quad y \quad 1] = [u \quad v \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_u & T_v & 1 \end{bmatrix}$$

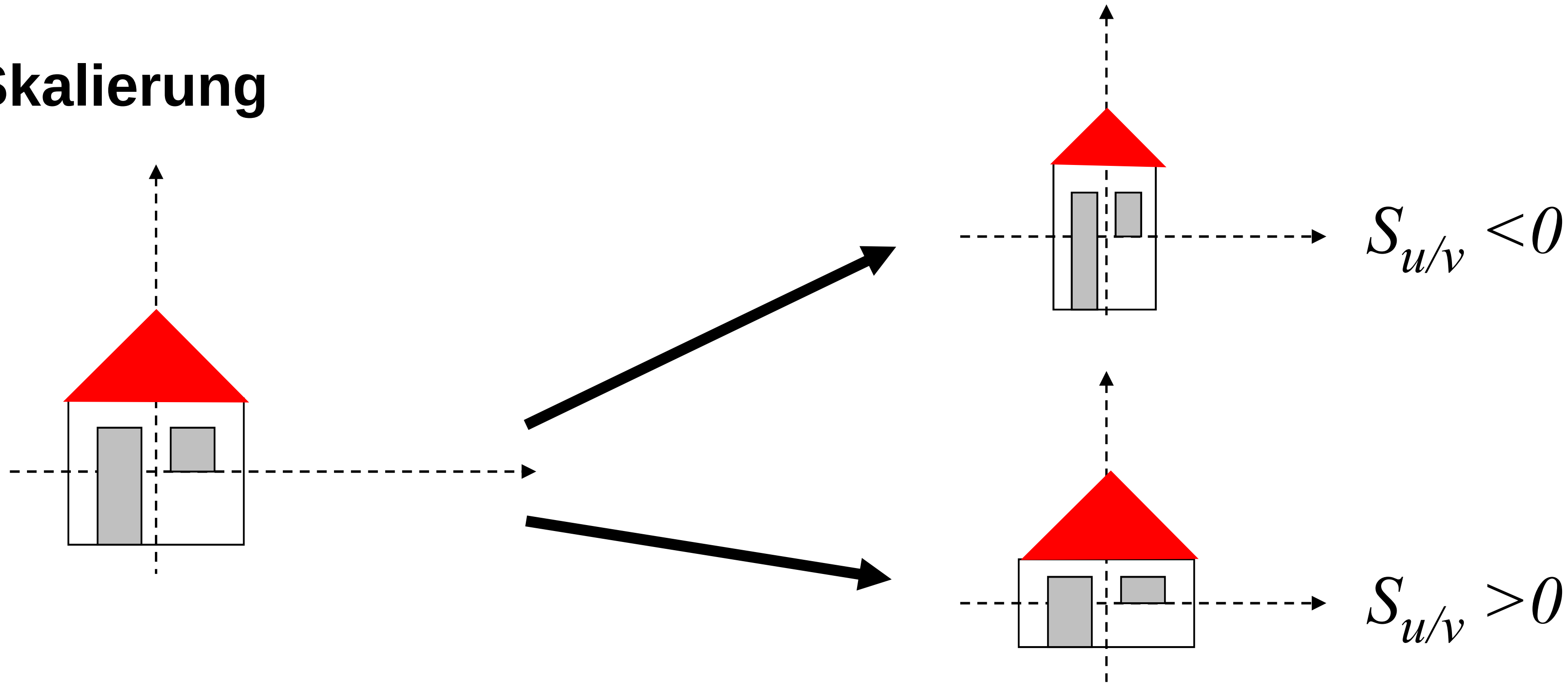
Rotation - Drehung



$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Linksdrehung, gegen den Uhrzeigersinn → mathematisch positiver Drehsinn (**Winkel ist positiv**)
Rechtsdrehung, mit dem Uhrzeigersinn → mathematisch negativer Drehsinn genannt (**Winkel ist negativ**)

Skalierung



$$[x \quad y \quad 1] = [u \quad v \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} S_u & 0 & 0 \\ 0 & S_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

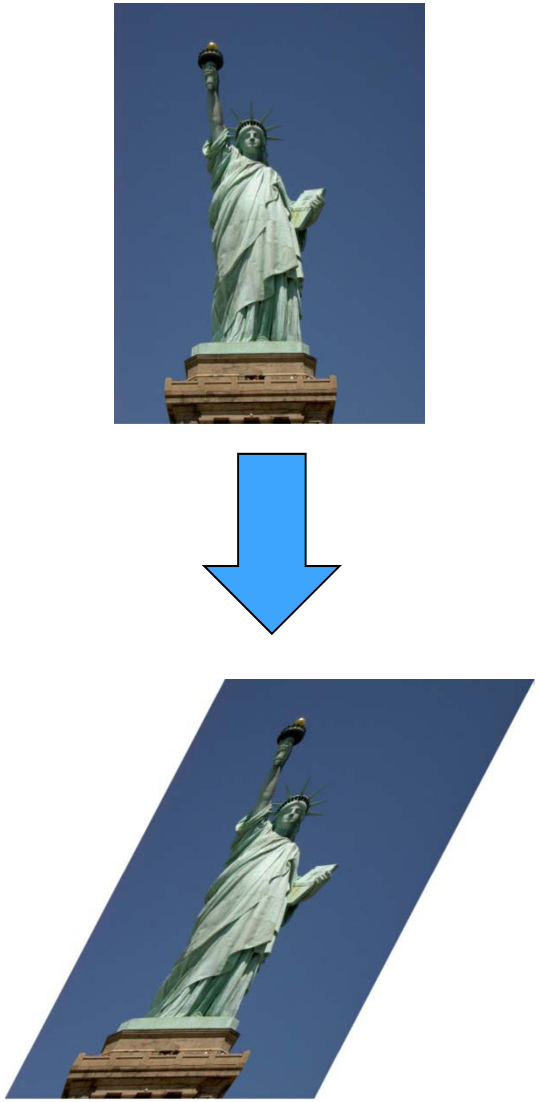
Scherung

in y-Richtung:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ H_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in x-Richtung:

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & H_u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

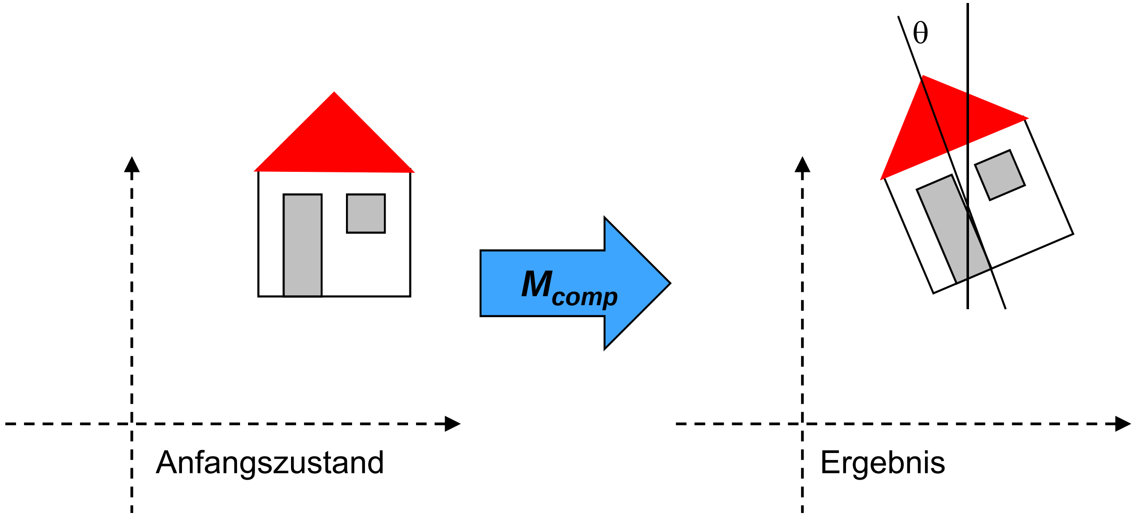


Zusammengesetzte Transformationen

Vorteil: Zusammenfassung der einzelnen Transformationsmatrizen zu einer einzigen beschleunigt die Berechnung und reduziert Rundungsfehler!

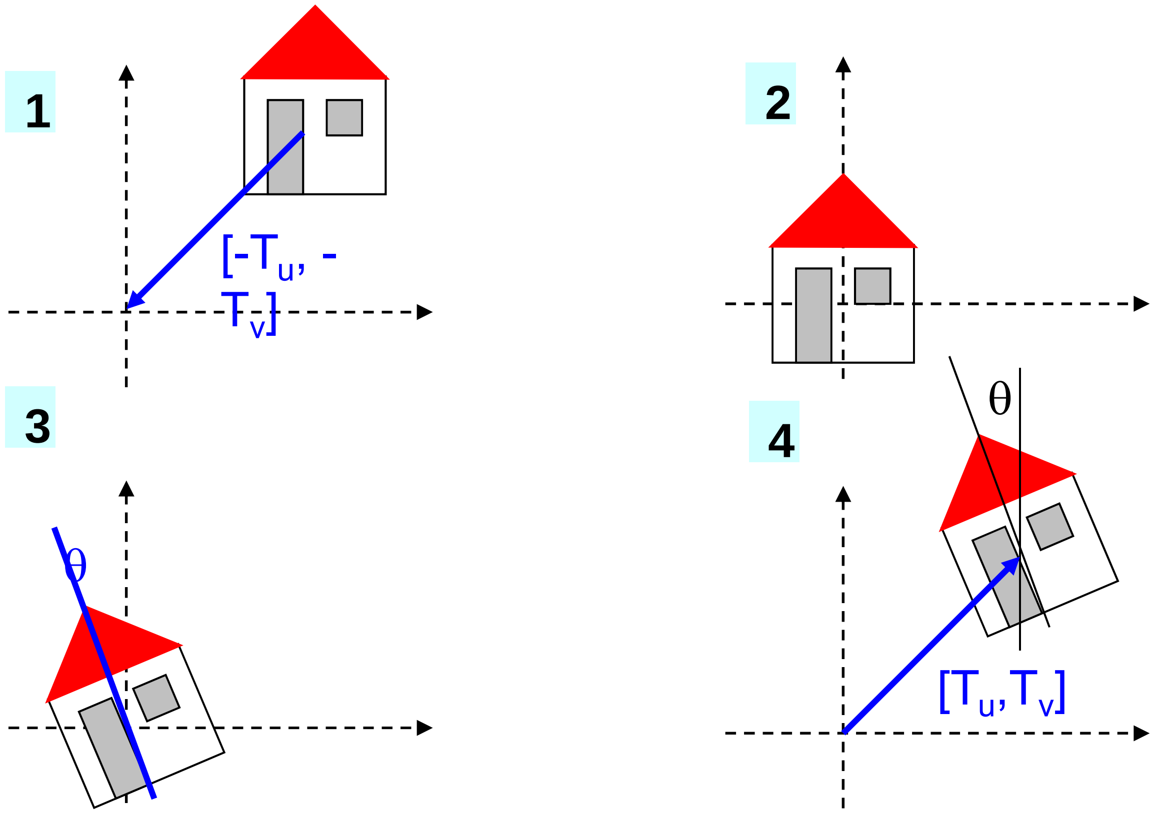
Beispiel:

$$[x', y', w'] = [u, v, w] \cdot M_{comp}$$



Zerlegung in Teilschritte

Entwurf entsprechender Einzeltransformationsmatrizen.



Einzeltransformationsmatrizen & zusammengesetzte Transformationsmatrix M_{comp}

1 → 2 **2 → 3** **3 → 4**

$$M_{comp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -T_u & -T_v & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_u & T_v & 1 \end{bmatrix}$$

1 → 4

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ T_u(1-\cos\theta)+T_v\sin\theta & T_v(1-\cos\theta)-T_u\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse Affine Transformation

Benutzung der Transformationsmatrizen bei der Rückwärtstransformation.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

mit

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = adj(T) / det(T)$$

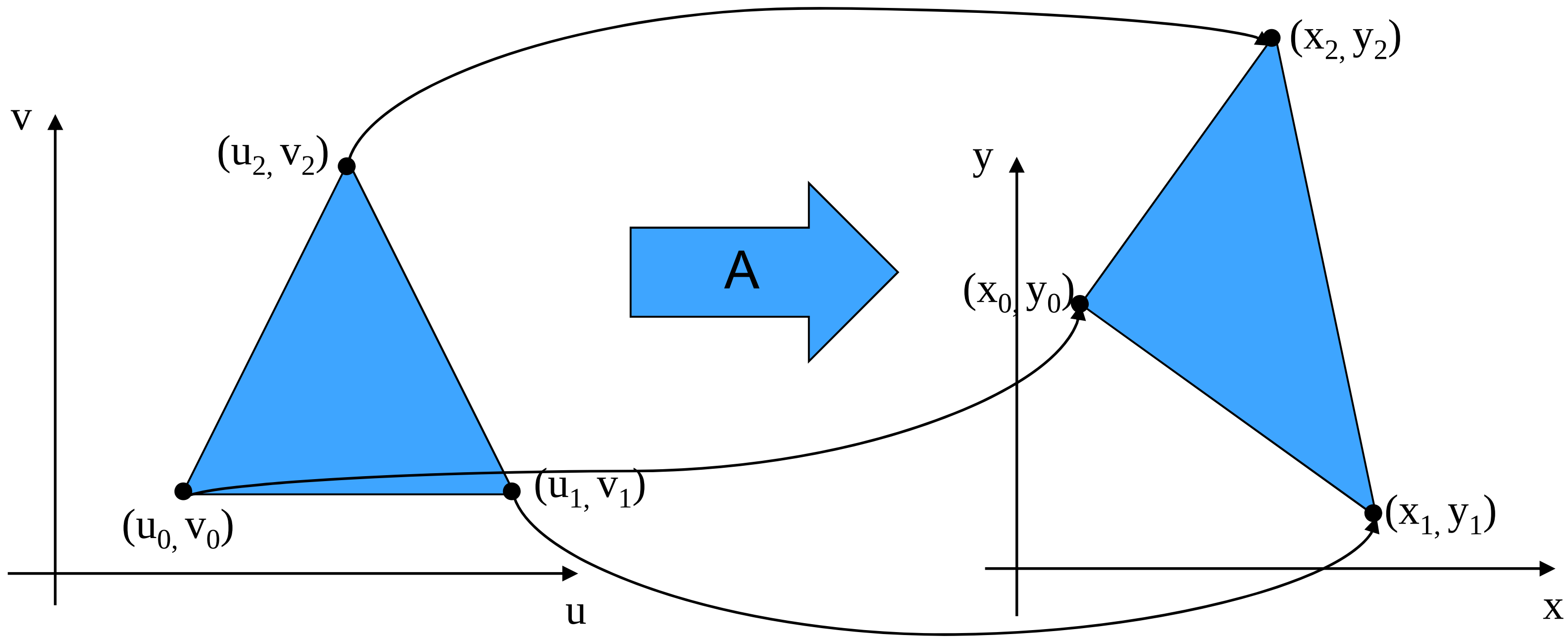
u,v – Koordinaten des Quellbildes

x,y – Koordinaten des Zielbildes

Hinweis:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & a_{11} & 0 \\ a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} & a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}$$

Bestimmung einer unbekannten affinen Transformation



Transformationsmatrix A besitzt 6 Freiheitsgrade, zur eindeutigen Bestimmung sind als 3 Punktpaare notwendig.

Berechnung einer affinen Transformation A

1. Problem

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Umformen

$$X = U \cdot A \quad \Rightarrow \quad A = U^{-1} \cdot X$$

3. Berechnen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(U)} \begin{bmatrix} v_1 - v_2 & v_2 - v_0 & v_0 - v_1 \\ u_2 - u_1 & u_0 - u_2 & u_1 - u_0 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_2 v_0 - u_0 v_2 & u_2 v_1 - u_1 v_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(U) = u_o (v_1 - v_2) - v_0 (u_1 - u_2) + (u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

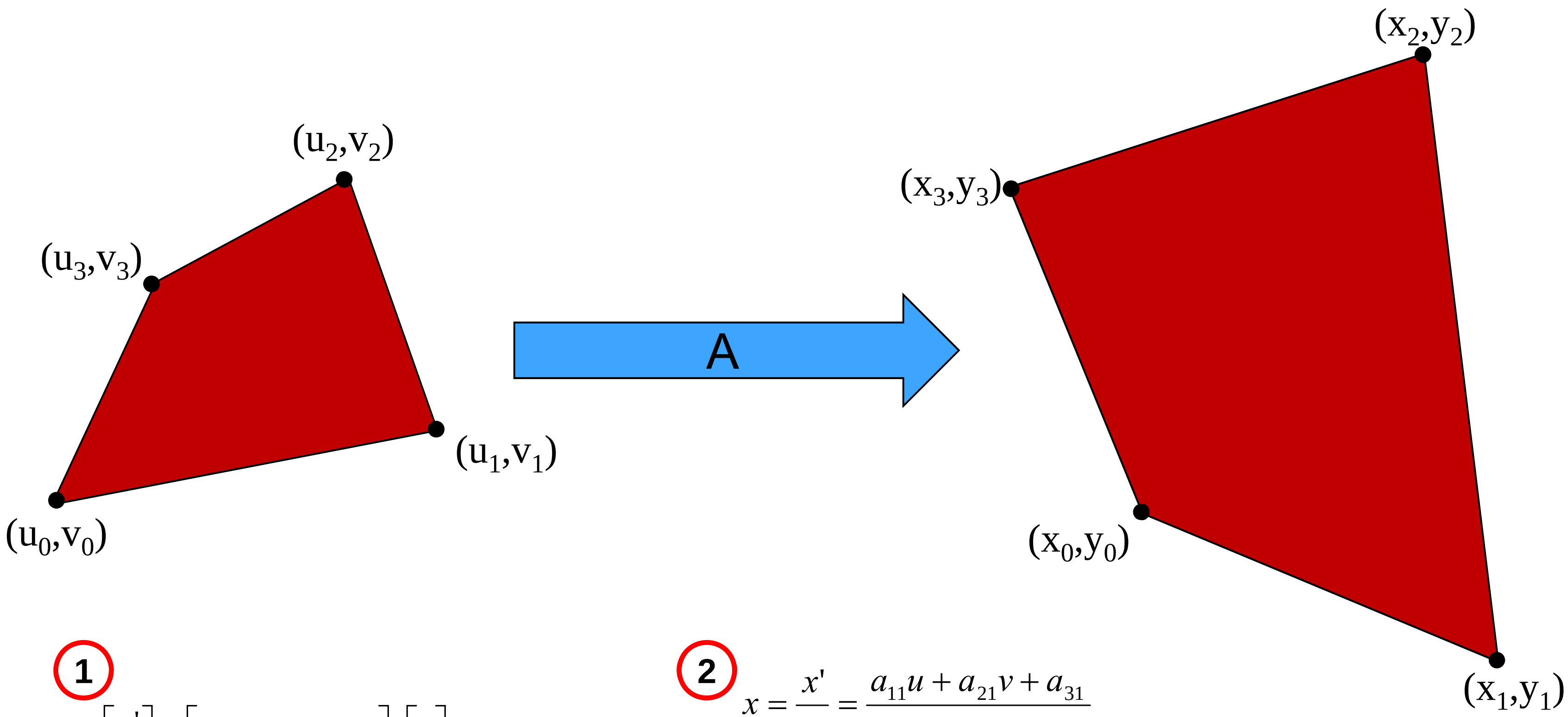
Perspektivische Transformation

Wie bereits kennengelernt, arbeitet die affine Transformation mit drei Punkten mit je zwei Koordinaten. Sie kann somit Dreiecke und Geraden ohne Probleme verwandeln.
Möchte man Vierecke beliebig verformen, so ist dies mit einer affin-linearen Transformation nicht möglich. Dafür wird die sogenannte perspektivische Transformation verwendet, die vier beliebige 2D-Punkte (also acht verschiedene Werte) überführt:

$$[x' \quad y' \quad w'] = [u \quad v \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{x'}{w'} = \frac{a_{11}u + a_{21}v + a_{31}}{a_{13}u + a_{23}v + a_{33}} \qquad y = \frac{y'}{w'} = \frac{a_{12}u + a_{22}v + a_{32}}{a_{13}u + a_{23}v + a_{33}}$$

Berechnung einer perspektivischen Transformation



1

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

2

$$x = \frac{x'}{w'} = \frac{a_{11}u + a_{21}v + a_{31}}{a_{13}u + a_{23}v + a_{33}}$$

$$y = \frac{y'}{w'} = \frac{a_{12}u + a_{22}v + a_{32}}{a_{13}u + a_{23}v + a_{33}}$$

Digitales Video

Prof. Dr.-Ing. Klaus Diepold

Martin Rothbucher

Christian Keimel