Reducerea unui sistem de forțe în raport cu un punct

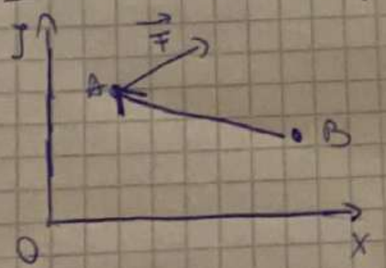
Fie $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \dots, \overline{F_n}$ - forțe

Prin torsorul de reducere al unui sistem de forțe în raport cu un punct ($\tau_O(\overline{R}, \overline{M_O})$) se înțelege calculul rezultantei și a sumei de momente a tuturor forțelor în raport cu acel punct.

1. Rezultanta

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \dots + \overline{F_n}$$

2. Momentul unei forțe în raport cu un punct.



$$\overline{F} = F_x\overline{i} + F_y\overline{j}$$

$$M_{OF} = \overline{OA} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ OA_x & OA_y & OA_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\overline{M_{BF}} = \overline{BA} \times \overline{F}}$$

3. Suma de momente a unui sistem de forțe în raport cu un punct.

$$\sum \overline{M_O} = \overline{M_{OF_1}} + \dots + \overline{M_{OF_n}}$$

$$\sum \overline{M_A} = \begin{cases} \text{Var1: } \sum \overline{M_A} = \overline{M_{AF_1}} + \dots + \overline{M_{AF_n}} \\ \text{Var2: } \overline{M_A} = \overline{M_O} - \overline{OA} \times \overline{R} \end{cases}$$

4. Momentul minimal

$$M_R = \frac{\overline{M_O} \cdot \overline{R}}{|\overline{R}|}$$

$$\overline{M_R} = \frac{\overline{M_O} \cdot \overline{R}}{|\overline{R}|} \cdot \frac{\overline{R}}{|\overline{R}|}$$

5. Ecuația axei centrale

$$\overline{R} = R_x \overline{i} + R_y \overline{j} + R_z \overline{k}$$

$$\overline{M_O} = M_{Ox} \overline{i} + M_{Oy} \overline{j} + M_{Oz} \overline{k}$$

ec axei centrale

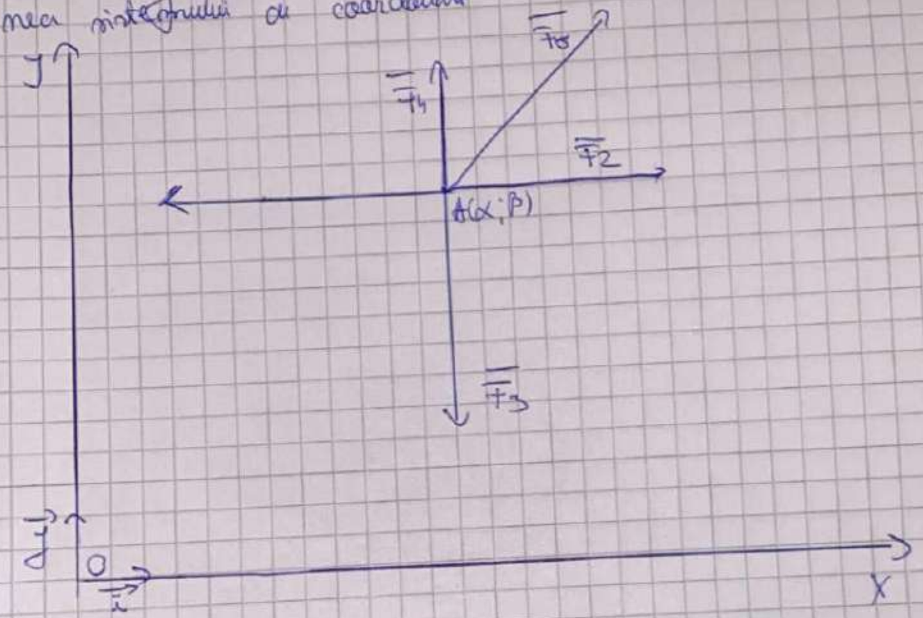
$$\frac{M_{Ox} - (y R_z - z R_y)}{R_x} = \frac{M_{Oy} - (z R_x - x R_z)}{R_y} = \frac{M_{Oz} - (x R_y - y R_x)}{R_z}$$

$$\begin{cases} f_1(x; y; z) = 0 \\ f_2(x; y; z) \end{cases}$$ ec axei centrale

În punctul $A(\alpha;\beta)$ acționează sistemul de 5 forțe având direcțiile ca în figură, iar mărimile lor sunt:

$F_1 = 6N$
$F_2 = 3N$
$F_3 = 5N$
$F_4 = 2N$
$F_5 = 3\sqrt{2}N$ (7,25)

Să se găsească elementele torsorului de reducere în raport cu originea sistemului de coordonate



Se cere:

- să se exprime analitic fiecare vector de forță $\overline{F_i}$
- să se determine elementele torsorului de reducere
  - rezultanta $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$
  - momentul rezultant $\overline{M_0} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \times \overline{F_i}$

$\overline{F_1} = |\overline{F_1}| \cdot \overline{u_{F_1}} = -6\overline{i}$

$\overline{F_2} = |\overline{F_2}| \cdot \overline{u_{F_2}} = 3\overline{i}$

$\overline{F_3} = |\overline{F_3}|\ \overline{u_{F_3}} = -5\vec{j}$

$\overline{F_4} = |\overline{F_4}| \cdot \overline{u_{F_4}} = 2\vec{j}$

$\overline{F_5} = F_{5x}\overline{i} + F_{5y}\cdot\vec{j} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$

$F_{5x} = \cos 45^\circ F_5 = 3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \quad F_{5y} = \sin 45^\circ F_5 = 3$

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \dots + \overline{F_5} = $$
$$= -6\overline{i} + 3\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{j} + 3\overline{i} + 3\overline{j} = 0\overline{i} + 0\overline{j} = 0$$

$$\overline{R} = 0$$

$$\overline{M_O}(\overline{F_1}) = \overline{OA} \times \overline{F_1} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 60\overline{k}$$

$$\overline{OA} = 10\overline{i} + 10\overline{j}$$

$$\overline{M_O}(\overline{F_2}) = \overline{OA} \times \overline{F_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -30\overline{k}$$

$$\overline{M_O}(\overline{F_3}) = \overline{OA} \times \overline{F_3} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -50\overline{k}$$

$$\overline{M_O}(\overline{F_4}) = \overline{OA} \times \overline{F_4} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 20\overline{k}$$

$$\overline{M_O}(\overline{F_5}) = \overline{OA} \times \overline{F_5} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Momentul rezultant

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^{5} \bar{r}_i \times \bar{F}_i = \bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) + \bar{M}_O(\bar{F}_3) + \bar{M}_O(\bar{F}_4) + \bar{M}_O(\bar{F}_5) =$$

$$= 60\bar{k} - 30\bar{k} - 50\bar{k} + 20\bar{k} + 0 = 0$$

Se consideră sistemul de 4 forțe având direcțiile ca în figura, iar mărimile lor și pct. lor de aplicație sunt:

$F_1 = 5N$ $A_1 = (2, \ )$

$F_2 = 3N$ $A_2 (18, \ )$

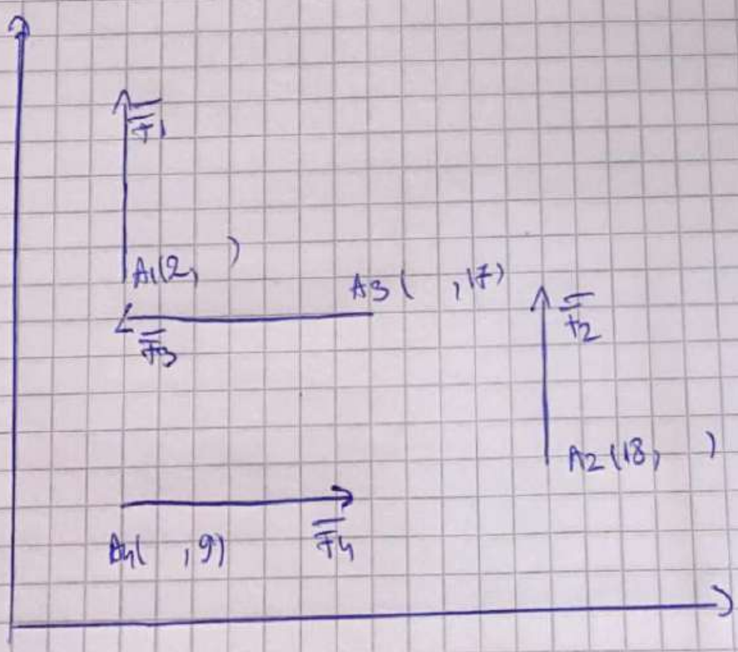
$F_3 = 5N$ $A_3 = (\ , 17)$

$F_4 = 5N$ $A_4 = (\ , 9)$

Să se găsească elementele torsorului de reducere în raport cu originea sistemului de coordonate

Se are

- să se exprime analitic fiecare vector forță $\bar{F}_i$
- să se determine elementele torsorului de reducere
  - Rezultanta $\bar{R} = \sum_{i=1}^{4} \bar{F}_i$
  - Momentul rezultant $\bar{M}_O = \sum_{i=1}^{4} \bar{r}_i \times \bar{F}_i$



$\overline{F_1} = |\overline{F_1}| \cdot \overline{u_{F_1}} = 5\overline{j}$

$\overline{F_2} = |\overline{F_2}| \cdot \overline{u_{F_2}} = 3\overline{j}$

$\overline{F_3} = |\overline{F_3}| \cdot \overline{u_{F_3}} = -5\overline{i}$

$\overline{F_4} = |\overline{F_4}| \cdot \overline{u_{F_4}} = 5\overline{i}$

$\overline{R} = \sum_{i=1}^{4} \overline{F_i} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \overline{F_4} = 5\overline{i} + 3\overline{j} - 5\overline{i} + 5\overline{j} = 8\overline{j}$

$\overline{M_O}(\overline{F_1}) = \overline{OA_1} \times \overline{F_1} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 18 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10\overline{k}$

$\overline{OA_1} = 2\overline{i} + 18\overline{j}$

$\overline{M_O}(\overline{F_2}) = \overline{OA_2} \times \overline{F_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 18 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 54\overline{k}$

$\overline{OA_2} = 18\overline{i} + 10\overline{j}$

$\overline{M_O}(\overline{F_3}) = \overline{OA_3} \times \overline{F_3}$

$\overline{OA_3} = 12\overline{i} + 17\overline{j} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 12 & 17 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 85\overline{k}$

$\overline{M_O}(\overline{F_4}) = \overline{OA_4} \times \overline{F_4} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -45\overline{k}$

$\overline{OA_4} = 2\overline{i} + 9\overline{j}$

momentul rezultant $\overline{\tau_O}: \begin{cases} \overline{R} = 8\overline{j} \\ \sum \overline{M_O} = 104\overline{k} \end{cases}$

$\overline{M_O} = \sum_{i=1}^{4} \overline{r_i} \times \overline{F_i}$

$= \overline{M_O}(\overline{F_1}) + \overline{M_O}(\overline{F_2}) + \overline{M_O}(\overline{F_3}) + \overline{M_O}(\overline{F_4}) =$

$= 10\overline{k} + 54\overline{k} + 85\overline{k} - 45\overline{k} = 104\overline{k}$

Asupra unui cub acț. sist. de forțe

$F_1 = 2\sqrt{3}F$ (dir. BO_1)

$F_2 = 2F$ (dir $B_1 B$)

$F_3 = 2\sqrt{2}F$ (dir AO_1)

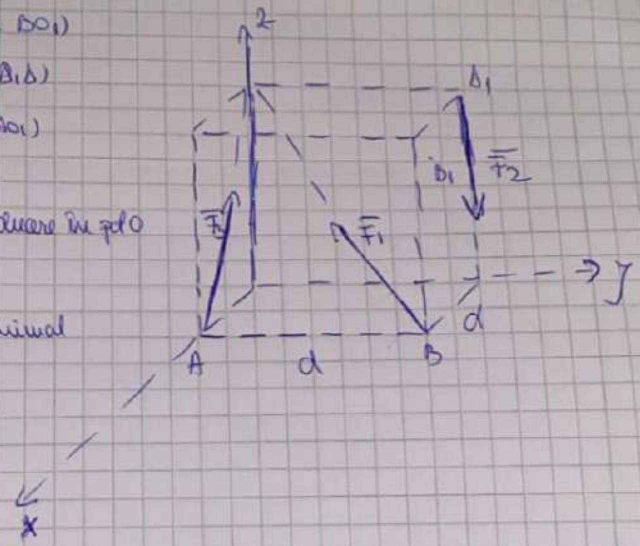
Să se determine

a) torsorul de reducere în pct O

b) torsorul în B

c) momentul minimal

d) axa centrală



$$\overline{F_1} = |\overline{F_1}|\,\overline{u}_{F_1} = \frac{\overline{BO_1}}{|\overline{BO_1}|} = F_1 \frac{\overline{BA} + \overline{AO} + \overline{OO_1}}{|\overline{BO_1}|} = 2\sqrt{3}F \frac{-d\overline{i} - d\overline{j} + d\overline{k}}{d\sqrt{3}} =$$

$$= -2F\overline{i} - 2F\overline{j} + 2F\overline{k}$$

$$\overline{F_2} = |\overline{F_2}| \cdot \overline{u}_{F_2} = -2F\overline{k}$$

$$\overline{F_3} = |\overline{F_3}| \cdot \overline{u}_{F_3} = |\overline{F_3}|\,\overline{u}_{AO_1} = F_3 \frac{\overline{AO_1}}{|\overline{AO_1}|} = F_3 \frac{\overline{AO} + \overline{OO_1}}{|\overline{AO_1}|} =$$

$$= 2\sqrt{2}F \frac{-d\overline{i} + d\overline{k}}{d\sqrt{2}} = -2F\overline{i} + 2F\overline{k}$$

Rezultanta

$$\overline{R} = \sum_{i=1}^{3} \overline{F_i} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} = -2\overline{Fi} - 2\overline{Fj} + 2\overline{Fk} - 2\overline{Fi} + 2\overline{Fk} - 2\overline{Fk} =$$

$$= -4\overline{Fi} - 2\overline{Fj} + 2\overline{Fk}$$

$$\overline{\tau_O} = \overline{M_{OF_1}} + \overline{M_{OF_2}} + \overline{M_{OF_3}}$$

$$\overline{M_{OF_1}} = \overline{OB} \times \overline{F_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ d & d & 0 \\ -2F & -2F & 2F \end{vmatrix} = 2dF\bar{i} - 2dF\bar{j}$$

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = d\bar{i} + d\bar{j}$$

$$\overline{M_{OF_2}} = \overline{OD_1} \times \overline{F_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & d & d \\ 0 & 0 & -2F \end{vmatrix} = -2dF\bar{i}$$

$$\overline{OD_1} = \overline{OD} + \overline{DD_1} = d\bar{j} + d\bar{k}$$

$$\overline{M_{OF_3}} = \overline{OA} \times \overline{F_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ d & 0 & 0 \\ -2F & 0 & 2F \end{vmatrix} = -2dF\bar{j}$$

$$\overline{OA} = d\bar{i}$$

$$\Sigma \overline{M_O} = \cancel{2dF\bar{i}} - 2dF\bar{j} \cancel{- 2dF\bar{i}} - 2dF\bar{j} = -4dF\bar{j}$$

$$\Rightarrow \tau_O : \begin{cases} \bar{R} = -4F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k} \\ \overline{M_O} = -4dF\bar{j} \end{cases}$$

- Elementele torsorului în punctul B sunt:

Aceeași: $\bar{R} = -4F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k}$

VAR1 Moment în raport cu pct B diferit $\overline{M_B} = \overline{M_O} - \overline{OB} \times \bar{R}$

$$= -4dF\bar{j} - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ d & d & 0 \\ -4F & -2F & 2F \end{vmatrix} =$$

$$= -2dF\bar{i} - 2dF\bar{j} - 2dF\bar{k}$$

VAR2 $\Sigma \overline{M_B} = \overline{M_{BF_1}} + \overline{M_{BF_2}} + \overline{M_{BF_3}}$

$\overline{M_{BF_1}} = \overline{BB} \times \overline{F_1} = 0$ (B ∈ dreapta suport a forței $\overline{F_1}$)

Obs !! În cazul în care pct față de care se calculează momentul unei forțe se află pe dreapta suport a acesteia, atunci momentul forței în raport cu acel pct este 0

$\overline{M_B F_2} = \overline{BD_1} \times \overline{F_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ d & 0 & d \\ 0 & 0 & -2F \end{vmatrix} = -2dF\bar{j}$ (2)

$\overline{BD_1} = \overline{BD} + \overline{DD_1} = d\bar{i} + d\bar{k}$

$\overline{M_B F_3} = \overline{BA} \times \overline{F_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & d & 0 \\ -2F & 0 & 2F \end{vmatrix} = -2dF\bar{i} - 2dF\bar{k}$ (3)

$\overline{BA} = -d\bar{j}$

$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum \overline{M_B} = 0 + (-2dF\bar{j}) - 2F\bar{i} - 2dF\bar{k} = -2dF\bar{i} - 2dF\bar{j} - 2dF\bar{k}$

$\Rightarrow \tau_B : \begin{cases} \bar{R} = -4F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k} \\ \overline{M_B} = -2dF\bar{i} - 2dF\bar{j} - 2dF\bar{k} \end{cases}$

Momentul minimal sau redus este

$M_r = \frac{\bar{R} \cdot \overline{M_O}}{|\bar{R}|} = \frac{(-4F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k}) \cdot (-4dF\bar{j})}{\sqrt{(4F)^2 + (2F)^2 + (2F)^2}} =$

$= \frac{8dF}{\sqrt{24}}$

$\overline{M_r} = \frac{\overline{M_O} \cdot \bar{R}}{|\bar{R}|} \cdot \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} = \frac{8d\cancel{F}}{\sqrt{24}} \cdot \frac{-4F\bar{i} - 2F\bar{j} + 2F\bar{k}}{\cancel{F}\sqrt{24}} =$

$= -\frac{4dF}{3}\bar{i} - \frac{2dF}{3}\bar{j} + \frac{2dF}{3}\bar{k}$

<u>centrală</u> $\frac{M_{Ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{Oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{Oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z}$

$$\frac{0-(y(2F)-z(-2F))}{-4F}=\frac{-4dF-(z(-4F)-x(2F))}{-2F}=\frac{0-(x(-2F)-y(-4F))}{2F}$$

$$\begin{cases} 16d-20z-8x-4y=0 \\ -4d+4x+4z-4y=0 \end{cases}$$

dacă $y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{d}{3} \\ z=\frac{2d}{3} \end{cases}$ deci există pct $P_1\left(\frac{d}{3};0;\frac{2d}{3}\right)$

dacă $z=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5d}{3} \\ y=\frac{2d}{3} \end{cases} \Rightarrow P_2\left(\frac{5d}{3};\frac{2d}{3};0\right)$