UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO PUNO

FACULTAD DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

Practica calificada

CURSO: MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

DOCENTE:

ING. Fred Torres Cruz

PRESENTADO POR:

Edilfonso Muñoz Anccori

SEMESTRE: V NIV

PUNO-PERÚ
2025

Resolución de los ejercicios

Ejercicio 1

Minimizar:

$$C(x, y) = 4x + 6y$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 100, \\ x &\geq 10, \\ y &\geq 5, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\text{Vértices: } (10, 5), (10, 90), (95, 5).$$

Evaluamos $C(x, y)$:

$$\begin{aligned} C(10, 5) &= 4(10) + 6(5) = 70, \\ C(10, 90) &= 4(10) + 6(90) = 580, \\ C(95, 5) &= 4(95) + 6(5) = 410. \end{aligned}$$

Respuesta: El costo mínimo es **S/70**, con $x = 10$, $y = 5$.

Ejercicio 2

Minimizar:

$$C(x, y) = 1500x + 3000y$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x + y &\geq 8, \\ y &\geq 3, \\ x + y &\leq 12, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\text{Vértices: } (5, 3), (9, 3), (0, 8).$$

Evaluamos $C(x, y)$:

$$\begin{aligned} C(5, 3) &= 1500(5) + 3000(3) = 16500, \\ C(9, 3) &= 1500(9) + 3000(3) = 22500, \\ C(0, 8) &= 1500(0) + 3000(8) = 24000. \end{aligned}$$

Respuesta: El costo mínimo es **S/16500**, con $x = 5$, $y = 3$.

Ejercicio 3

Maximizar:

$$S(x, y) = 50x + 65y$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &\leq 200, \\ x + y &\leq 40, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\text{Vértices: } (0,40), (40,0), (32,8).$$

Evaluamos $S(x,y)$:

$$S(0,40) = 50(0) + 65(40) = 2600,$$
$$S(40,0) = 50(40) + 65(0) = 2000,$$
$$S(32,8) = 50(32) + 65(8) = 2120.$$

Respuesta: La cobertura máxima es **2600** km$^{\mathbf{2}}$, con $x = 0$, $y = 40$.

Ejercicio 4

Resolver el sistema:

$$x + 2y = 40,$$
$$3x + y = 70.$$

Determinante del sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Determinantes para x y y:

$$D_x = \begin{vmatrix} 40 & 2 \\ 70 & 1 \end{vmatrix} = -100,$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 40 \\ 3 & 70 \end{vmatrix} = -50.$$

Soluciones:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-100}{-5} = 20,$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-50}{-5} = 10.$$

Respuesta: $x = 20$, $y = 10$.

Ejercicio 5

Resolver el sistema:

$$2x + y + 3z = 20,$$
$$x + 4y + 2z = 23,$$
$$3x + 2y + z = 16.$$

Paso 1: Representación en forma de matriz aumentada

Escribimos el sistema como una matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 20 \\ 1 & 4 & 2 & 23 \\ 3 & 2 & 1 & 16 \end{array}\right].$$

Paso 2: Escalonamiento por Gauss-Jordan

1. Dividimos la primera fila por 2 para obtener un 1 en la posición $(1,1)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 23 \\ 3 & 2 & 1 & 16 \end{array}\right].$$

2. Restamos la primera fila de la segunda y la tercera, respectivamente:

$$\text{F2} \to \text{F2} - \text{F1}, \quad \text{F3} \to \text{F3} - 3\text{F1}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 10 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 13 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -14 \end{array}\right].$$

3. Dividimos la segunda fila por $\frac{7}{2}$ para obtener un 1 en la posición $(2,2)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 10 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -14 \end{array}\right].$$

4. Eliminamos los términos en la posición $(1,2)$ y $(3,2)$ usando la segunda fila:

$$\text{F1} \to \text{F1} - \frac{1}{2}\text{F2}, \quad \text{F3} \to \text{F3} - \frac{1}{2}\text{F2}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{44}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{20}{7} & -\frac{80}{7} \end{array}\right].$$

5. Dividimos la tercera fila por $-\frac{20}{7}$ para obtener un 1 en la posición $(3,3)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{44}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

6. Eliminamos los términos en la posición $(1,3)$ y $(2,3)$ usando la tercera fila:

$$\text{F1} \to \text{F1} - \frac{10}{7}\text{F3}, \quad \text{F2} \to \text{F2} - \frac{1}{7}\text{F3}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{77}{25} \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Paso 3: Solución del sistema

De la matriz escalonada, obtenemos:

$$x = \frac{9}{5} = 1{,}8,$$
$$y = \frac{77}{25} = 3{,}08,$$
$$z = 4.$$

Respuesta: Los valores son:

$$x = 1{,}8,\ y = 3{,}08,\ z = 4.$$

¨

Ejercicio 6

Resolver el sistema:

$$x + 2y + z = 8,$$
$$2x - y + 4z = 12,$$
$$-x + 3y + 2z = 6.$$

Paso 1: Representación en forma de matriz aumentada

Escribimos el sistema como una matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 4 & 12 \\ -1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right].$$

Paso 2: Escalonamiento por Gauss-Jordan

1. Usamos la primera fila (F1) para obtener un 1 en la posición $(1, 1)$. La matriz queda igual porque ya tenemos un 1 en esa posición:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 4 & 12 \\ -1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right].$$

2. Eliminamos los términos en la columna x para las filas 2 y 3:

$$\text{F2} \to \text{F2} - 2\text{F1}, \quad \text{F3} \to \text{F3} + \text{F1}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 14 \end{array}\right].$$

3. Dividimos la segunda fila (F2) por -5 para obtener un 1 en la posición $(2, 2)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 5 & 3 & 14 \end{array}\right].$$

4. Eliminamos el término en la posición $(3, 2)$ usando la segunda fila:

$$\text{F3} \to \text{F3} - 5\text{F2}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right].$$

5. Dividimos la tercera fila (F3) por 5 para obtener un 1 en la posición $(3, 3)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

6. Eliminamos los términos en la columna z para las filas 1 y 2:

$$\text{F1} \to \text{F1} - \text{F3}, \quad \text{F2} \to \text{F2} + \frac{2}{5}\text{F3}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

7. Eliminamos el término en la posición $(1,2)$ usando la segunda fila:

$$\mathrm{F1} \to \mathrm{F1} - 2\mathrm{F2}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Paso 3: Solución del sistema

De la matriz escalonada, obtenemos:

$$x = 2,$$
$$y = 2,$$
$$z = 2.$$

Respuesta: Las soluciones son:

$$x = 2,\ y = 2,\ z = 2.$$

Ejercicio 7

Resolver el sistema:

$$x + y = 350,$$
$$2x - y = 100.$$

Paso 1: Representación en forma de matriz aumentada

Escribimos el sistema como una matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 350 \\ 2 & -1 & 100 \end{array}\right].$$

Paso 2: Escalonamiento por Gauss-Jordan

1. Usamos la primera fila (F1) para eliminar el término en la posición $(2,1)$:

$$\mathrm{F2} \to \mathrm{F2} - 2\mathrm{F1}.$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 350 \\ 0 & -3 & -600 \end{array}\right].$$

2. Dividimos la segunda fila (F2) por -3 para obtener un 1 en la posición $(2,2)$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 350 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right].$$

3. Eliminamos el término en la posición $(1,2)$ usando la segunda fila:

$$\mathrm{F1} \to \mathrm{F1} - \mathrm{F2}.$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right].$$

Paso 3: Solución del sistema

De la matriz escalonada, obtenemos:

$$x = 150,$$
$$y = 200.$$

Interpretación

- $x = 150$ mil turistas representa la cantidad proyectada de turistas en la estación de Ollantaytambo. - $y = 200$ mil turistas representa la cantidad proyectada de turistas en la estación de Poroy.

Respuesta: Las soluciones son:

$$x = 150,\ y = 200.$$

Ejercicio 8

Resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 80 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

Paso 1: Representación en forma de matriz aumentada

Escribimos el sistema como una matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 50 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 70 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 60 \end{array}\right].$$

Paso 2: Escalonamiento por Gauss-Jordan

1. Usamos la primera fila (F1) para eliminar los términos en la columna 1 de las filas 2 y 3:

$$\mathrm{F2} \to \mathrm{F2} - 2\mathrm{F1}, \quad \mathrm{F3} \to \mathrm{F3} - \mathrm{F1}.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -30 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 60 \end{array}\right].$$

2. Reemplazamos la segunda fila (F2) por su opuesto para obtener un 1 en la posición $(2, 2)$:

$$\mathrm{F2} \to -\mathrm{F2}.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 60 \end{array}\right].$$

3. Eliminamos los términos en la columna 2 de las filas 1, 3 y 4 usando la segunda fila:

$$\text{F1} \to \text{F1} - \text{F2}, \quad \text{F3} \to \text{F3} - \text{F2}, \quad \text{F4} \to \text{F4} - \text{F2}.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 30 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 30 \end{array}\right].$$

4. Dividimos la tercera fila (F3) por 2 para obtener un 1 en la posición $(3,3)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 30 \end{array}\right].$$

5. Eliminamos el término en la posición $(4,3)$ usando la tercera fila:

$$\text{F4} \to \text{F4} - 3\text{F3}.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 30 \end{array}\right].$$

6. Dividimos la cuarta fila (F4) por 2 para obtener un 1 en la posición $(4,4)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right].$$

7. Eliminamos los términos en la columna 4 de las filas 1, 2 y 3 usando la cuarta fila:

$$\text{F1} \to \text{F1} + \text{F4}, \quad \text{F2} \to \text{F2} - 2\text{F4}, \quad \text{F3} \to \text{F3} + \text{F4}.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right].$$

8. Eliminamos el término en la posición $(1,3)$ usando la tercera fila:

$$\text{F1} \to \text{F1} - \text{F3}.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right].$$

Paso 3: Solución del sistema

De la matriz escalonada, obtenemos:

$$A = 20,$$
$$B = 10,$$
$$C = 15,$$
$$w = 15.$$

Respuesta: Las soluciones son:

$$A = 20,\ B = 10,\ C = 15,\ w = 15.$$

Ejercicio 9

Se desea minimizar el costo diario:

$$C(x, y) = 400x + 700y$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 200x + 300y &\geq 4000, \\ 400x + 700y &\leq 7000, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Paso 1: Representación de las restricciones

Reescribimos las restricciones: 1. $\frac{200x+300y}{100} \geq \frac{4000}{100}$ simplifica a:

$$2x + 3y \geq 40.$$

2. $\frac{400x+700y}{100} \leq \frac{7000}{100}$ simplifica a:

$$4x + 7y \leq 70.$$

Paso 2: Vértices del área factible

Resolvemos las intersecciones de las restricciones: 1. Intersección de $2x + 3y = 40$ y $4x + 7y = 70$:

$$\text{Multiplicamos la primera ecuación por 2: } 4x + 6y = 80.$$

Restamos:

$$(4x + 7y) - (4x + 6y) = 70 - 80 \quad \Rightarrow \quad y = -10\,(\text{no válida, descartada}).$$

2. Intersección de $2x + 3y = 40$ con $x = 0$:

$$2(0) + 3y = 40 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{40}{3} \approx 13{,}33.$$

3. Intersección de $4x + 7y = 70$ con $y = 0$:

$$4x + 7(0) = 70 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{70}{4} = 17{,}5.$$

4. Intersección de $2x + 3y = 40$ y $y = 0$:

$$2x + 3(0) = 40 \quad \Rightarrow \quad x = 20.$$

Los vértices del área factible son:

$$(0, \frac{40}{3}),\ (17{,}5, 0),\ (20, 0).$$

Paso 3: Evaluación de la función objetivo

Evaluamos $C(x, y) = 400x + 700y$ en los vértices:

$$\begin{aligned}
C(0, \frac{40}{3}) &= 400(0) + 700\left(\frac{40}{3}\right) = \frac{28000}{3} \approx 9333{,}33, \\
C(17{,}5, 0) &= 400(17{,}5) + 700(0) = 7000, \\
C(20, 0) &= 400(20) + 700(0) = 8000.
\end{aligned}$$

Paso 4: Solución

El valor mínimo de $C(x, y)$ es:

$$C(17{,}5, 0) = 7000.$$

Respuesta: El costo mínimo diario es **S/7000**, utilizando 17.5 servidores tipo 1 y 0 servidores tipo 2.

Ejercicio 10

Maximizar:

$$G(x, y) = 20x + 15y$$

Sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned}
3x + y &\leq 120, \\
x &\geq 10, \\
x, y &\geq 0.
\end{aligned}$$

Paso 1: Encontrar los vértices de la región factible.

Las restricciones forman una región en el plano xy. Para determinar los vértices, se deben analizar las intersecciones de las líneas correspondientes a las restricciones.

1. **Intersección de las rectas $3x + y = 120$ y $x = 10$:**

Sustituimos $x = 10$ en la ecuación $3x + y = 120$:

$$3(10) + y = 120 \implies 30 + y = 120 \implies y = 90.$$

Por lo tanto, el primer vértice es $(10, 90)$.

2. **Intersección de las rectas $3x + y = 120$ y $y = 0$:**

Sustituimos $y = 0$ en la ecuación $3x + y = 120$:

$$3x + 0 = 120 \implies 3x = 120 \implies x = 40.$$

Por lo tanto, el segundo vértice es $(40, 0)$.

3. **Intersección de las rectas $x = 10$ y $y = 0$:**

Aquí, simplemente tenemos $x = 10$ y $y = 0$. Por lo tanto, el tercer vértice es $(10, 0)$.
Vértices encontrados: $(10, 90), (40, 0), (10, 0)$.
Paso 2: Evaluar la función objetivo $G(x, y) = 20x + 15y$ en cada vértice.
Evaluamos $G(x, y)$ en cada uno de los vértices encontrados.
1. **Evaluación en $(10, 90)$:**

$$G(10, 90) = 20(10) + 15(90) = 200 + 1350 = 1550.$$

2. **Evaluación en $(40, 0)$:**

$$G(40, 0) = 20(40) + 15(0) = 800 + 0 = 800.$$

3. **Evaluación en $(10, 0)$:**

$$G(10, 0) = 20(10) + 15(0) = 200 + 0 = 200.$$

Paso 3: Determinar la solución óptima.
De las evaluaciones anteriores, podemos ver que la ganancia máxima ocurre en el vértice $(10, 90)$ con una ganancia de 1550.
Respuesta: La ganancia máxima es **S/1550**, produciendo 10 unidades de software local y 90 cursos virtuales.