Gauss-Jordan Ejercicios

Fred Torres

January 2025

Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6, \\ 2x + 3y + z = 11, \\ y + 2z = 5. \end{cases}$$

Paso 1: Escribir la matriz aumentada

En primer lugar, escribimos la **matriz aumentada** que representa al sistema. Cada fila de la matriz se compone de los coeficientes de x, y y z, seguidos por la constante del lado derecho de cada ecuación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 6 \\ 2 & 3 & 1 & \mid & 11 \\ 0 & 1 & 2 & \mid & 5 \end{bmatrix}.$$

¿Por qué la tercera fila tiene 0 como coeficiente de x? La tercera ecuación es $y + 2z = 5$. Puesto que no hay término en x, el coeficiente de x en esa ecuación es 0.

Paso 2: Transformar la matriz a forma escalonada (Método de Gauss)

El objetivo es ir realizando operaciones elementales por filas para transformar la matriz en una **forma escalonada**.

1. **Hacer cero el elemento (2,1):** Se observa que el elemento de la posición (2,1) (segunda fila, primera columna) es 2. Para anularlo, realizamos la siguiente operación:

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2\,R_1.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 6 \\ 2 & 3 & 1 & \mid & 11 \\ 0 & 1 & 2 & \mid & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 6 \\ 0 & -1 & -1 & \mid & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \mid & 5 \end{bmatrix}.$$

Explicación:

$$\begin{aligned} R_2 - 2R_1 &= (2 - 2 \cdot 1,\ 3 - 2 \cdot 2,\ 1 - 2 \cdot 1,\ 11 - 2 \cdot 6) \\ &= (2 - 2,\ 3 - 4,\ 1 - 2,\ 11 - 12) \\ &= (0,\ -1,\ -1,\ -1). \end{aligned}$$

2. **Hacer cero el elemento (3,2):** Ahora miramos el elemento en la posición (3,2) (tercera fila, segunda columna). Ese valor es 1. Para anularlo, aprovechamos la segunda fila (que tiene -1 en la posición (2,2)) y hacemos:

$$R_3 \leftarrow R_3 + R_2.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 6 \\ 0 & -1 & -1 & \mid & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \mid & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \mid & 6 \\ 0 & -1 & -1 & \mid & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \mid & 4 \end{bmatrix}.$$

Explicación:

$$\begin{aligned} R_3 + R_2 &= (0 + 0,\ 1 + (-1),\ 2 + (-1),\ 5 + (-1)) \\ &= (0,\ 0,\ 1,\ 4). \end{aligned}$$

3. **Hacer uno el elemento (2,2):** Observamos que en la posición (2,2) tenemos -1. Nos interesa que ese pivote sea 1. Para ello, multiplicamos la segunda fila por -1:

$$R_2 \leftarrow -1 \cdot R_2.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

4. **Hacer cero el elemento (1,2):** El siguiente paso es dejar en cero el elemento de la posición (1,2) (primera fila, segunda columna), donde actualmente hay un 2. Para ello usamos la segunda fila (que ahora tiene un 1 en (2,2)):

$$R_1 \leftarrow R_1 - 2\,R_2.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Explicación:

$$\begin{aligned} R_1 - 2R_2 &= (1 - 2 \cdot 0,\ 2 - 2 \cdot 1,\ 1 - 2 \cdot 1,\ 6 - 2 \cdot 1) \\ &= (1,\ 0,\ -1,\ 4). \end{aligned}$$

5. **Hacer cero el elemento (1,3):** Finalmente, en la primera fila, tercera columna hay un -1. Para hacerla cero a través de la tercera fila (cuyo pivote en la posición (3,3) es 1), hacemos:

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_3.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Explicación:

$$\begin{aligned} R_1 + R_3 &= (1 + 0,\ 0 + 0,\ -1 + 1,\ 4 + 4) \\ &= (1,\ 0,\ 0,\ 8). \end{aligned}$$

Ahora la matriz está en **forma escalonada reducida**:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Paso 3: Leer las soluciones

La matriz final nos indica claramente los valores de cada variable:

$$\begin{aligned} x &= 8, \\ y &= -3, \\ z &= 4. \end{aligned}$$

Ejercicios

1. **Modelo de regresión lineal:** Resolver el siguiente sistema para determinar los valores de los pesos del modelo w_1, w_2, w_3:

$$\begin{aligned} 2w_1 + 3w_2 - w_3 &= 5, \\ -w_1 + 2w_2 + 4w_3 &= 6, \\ 3w_1 - w_2 + 2w_3 &= 7. \end{aligned}$$

2. **Calibración de hiperparámetros:** Determinar los valores de x, y, z que satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 12, \\ 2x - y + z &= 4, \\ -x + 2y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

3. **Asignación óptima de recursos:** Resolver para a, b, c, que representan las proporciones de recursos asignados a cada módulo, el sistema:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 6, \\ 2a - b + 3c &= 13, \\ -a + 2b - c &= 2. \end{aligned}$$

4. **Optimización de parámetros de un Bosque Aleatorio:** Resolver el siguiente sistema para los hiperparámetros p, q, r:

$$\begin{aligned} p + 2q + 3r &= 10, \\ 2p - q + 4r &= 12, \\ 3p + 3q - r &= 6. \end{aligned}$$

5. **Estimación de demanda de inventario:** Resolver para u, v, w, que representan los coeficientes del modelo de series de tiempo:

$$\begin{aligned} u + v + 2w &= 9, \\ 2u - 3v + 4w &= 5, \\ u - 2v + w &= 1. \end{aligned}$$

Resolver cada uno de estos sistemas paso a paso utilizando el método de Gauss-Jordan e interpretar los valores obtenidos en el contexto de cada problema.