UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO PUNO

FACULTAD DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ESTADÍSTICA E INFORMÁTICA

Programación No Lineal

CURSO: MÉTODOS OPTIMIZACIÓN

DOCENTE:

ING. Fred Torres Cruz

PRESENTADO POR:

Edilfonso Muñoz Anccori

SEMESTRE: V NIV

PUNO-PERÚ
2025

1. Introducción

La optimización no lineal (NLP, por sus siglas en inglés) se refiere al proceso de encontrar el valor óptimo de una función objetivo $f(x)$, donde tanto esta función como las restricciones pueden ser no lineales. Este tipo de problemas se define matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) \\ \text{Sujeto a:} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{1}$$

donde:

- $f(x)$ es la función objetivo que se desea minimizar (o maximizar).
- $g_i(x) \leq 0$ son las restricciones de desigualdad.
- $h_j(x) = 0$ son las restricciones de igualdad.
- x es el vector de variables de decisión.

Los problemas de optimización no lineales se encuentran en muchas áreas de la ciencia, la ingeniería, la economía, entre otros, y su resolución es fundamental para la toma de decisiones óptimas en diversas aplicaciones. Por ejemplo, en la ingeniería, se emplean estos métodos para el diseño de estructuras, en la economía para la optimización de portafolios, y en la bioinformática para la modelización de datos complejos.

En este contexto, se hace necesario utilizar métodos numéricos y algoritmos específicos que puedan aproximarse a la solución de manera eficiente, dada la complejidad de las funciones y las restricciones involucradas. A lo largo de este documento, se discutirán algunas de las técnicas más comunes utilizadas para resolver problemas de optimización no lineales, tales como el método de gradiente, los algoritmos de búsqueda de dirección, y los métodos de optimización global.

2. Métodos Comunes de Optimización No Lineal

Existen varios métodos numéricos utilizados para resolver problemas de optimización no lineales. Estos métodos incluyen, entre otros:

- Método del Gradiente
- Métodos de Búsqueda de Dirección
- Algoritmos Evolutivos
- Programación Cuadrática

Cada uno de estos enfoques tiene sus ventajas y desventajas dependiendo de la naturaleza del problema a resolver

3. Ejemplos Adicionales (Páginas 4 y 5 del Documento)

3.1. Ejemplo 1.1: Combinación convexa de funciones convexas

Si $f(x)$ y $g(x)$ son convexas, entonces $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ con $\alpha, \beta \geq 0$ también es convexa.

Demostración: Como f y g son convexas, se cumple:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \tag{2}$$

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2). \tag{3}$$

Multiplicando la primera desigualdad por α y la segunda por β, y sumando, se obtiene:

$$\alpha f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+\beta g(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leq \lambda(\alpha f(x_1)+\beta g(x_1))+(1-\lambda)(\alpha f(x_2)+\beta g(x_2)). \tag{4}$$

Esto muestra que $h(x)$ es convexa.

Código en Julia:

```
using Plots

# Definimos las funciones convexas
f(x) = x^2
g(x) = log(x + 1)

# Par metros de la combinaci n convexa
alpha = 0.5
beta = 0.5

# Funci n combinada
h(x) = alpha * f(x) + beta * g(x)

# Graficamos las funciones
x = 0:0.1:10
plot(x, f.(x), label="f(x) = x  ", lw=2)
plot!(x, g.(x), label="g(x) = log(x+1)", lw=2)
plot!(x, h.(x), label="h(x) = 0.5 * f(x) + 0.5 * g(x)", lw=2)
xlabel!("x")
ylabel!("y")
title!("Combinaci n convexa de funciones convexas")
```

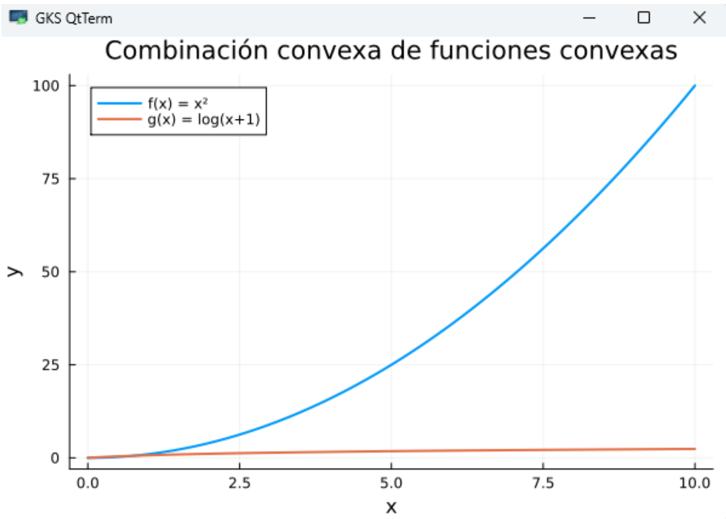

Figura 1: Grafico ejemplo1.

3.2. Multiplicación por un escalar positivo

Si $f(x)$ es convexa y $\gamma \geq 0$, entonces $h(x) = \gamma f(x)$ es convexa.
Demostración: Como f es convexa, se cumple:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \tag{5}$$

Multiplicando ambos lados por $\gamma \geq 0$, se obtiene:

$$\gamma f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda\gamma f(x_1) + (1 - \lambda)\gamma f(x_2), \tag{6}$$

lo que demuestra que $h(x)$ es convexa.
Código en Julia:

```
using Plots

# Funci n convexa
f(x) = x^2

# Par metro gamma
gamma = 2.0

# Funci n escalada
h(x) = gamma * f(x)

# Graficamos las funciones
x = 0:0.1:10
plot(x, f.(x), label="f(x) = x ", lw=2)
plot!(x, h.(x), label="h(x) = 2 * f(x)", lw=2)
xlabel!("x")
ylabel!("y")
title!("Multiplicaci n por un escalar positivo")
```

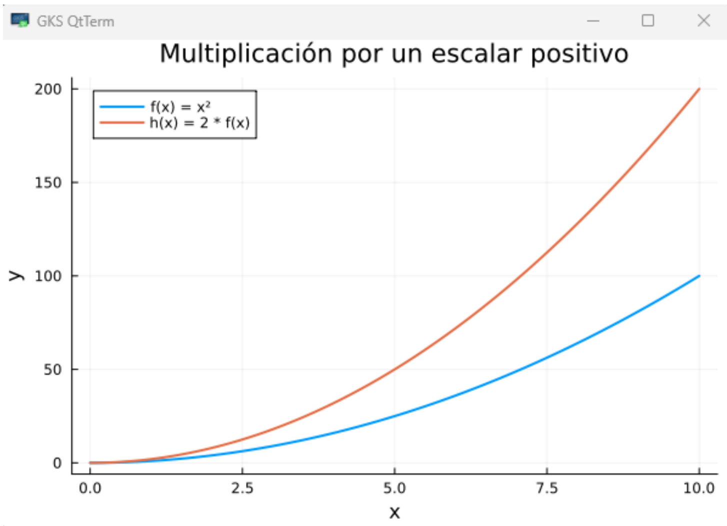

Figura 2: Grafico ejemplo 2.

3.3. Criterio de la segunda derivada

Si $f''(x) \geq 0$ en un intervalo, entonces $f(x)$ es convexa en ese intervalo.
Demostración: Usando el Teorema del Valor Medio, para x_1, x_2 en el intervalo, existe c entre ellos tal que:

$$f'(x_2) - f'(x_1) = f''(c)(x_2 - x_1). \tag{7}$$

Si $f''(x) \geq 0$, entonces $f'(x_2) \geq f'(x_1)$, lo que implica que $f(x)$ es convexa.

Código en Julia:

```
using Plots

# Funci n convexa
f(x) = x^2

# Graficamos la funci n
x = -5:0.1:5
plot(x, f.(x), label="f(x) = x  ", lw=2)
xlabel!("x")
ylabel!("y")
title!("Criterio de la segunda derivada")
```

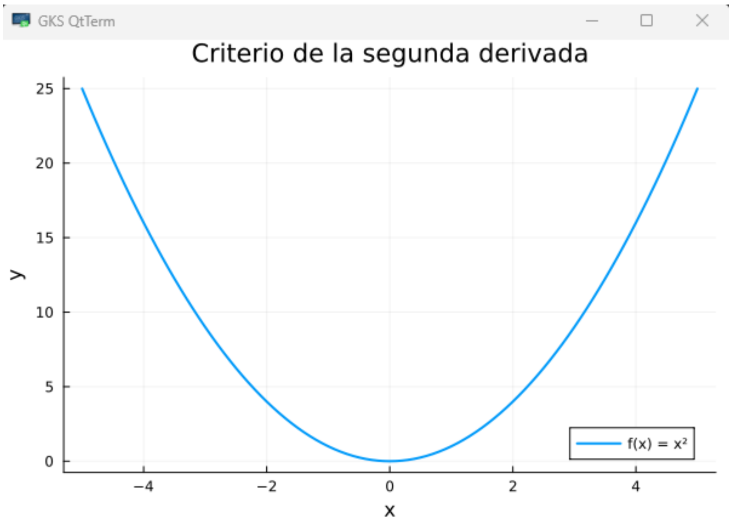

Figura 3: Ggrafico ejemplo 3.

3.4. Las funciones lineales son convexas y cóncavas

Toda función de la forma $f(x) = ax + b$ es convexa y cóncava.
Demostración: Para cualquier x_1, x_2 y $\lambda \in [0, 1]$, se cumple:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = a(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + b. \tag{8}$$

Dado que la ecuación es idéntica a la combinación convexa de $f(x_1)$ y $f(x_2)$, la función es convexa y cóncava.

Código en Julia:

```
using Plots

# Funci n lineal
f(x) = 2x + 3

# Graficamos la funci n
x = -5:0.1:5
plot(x, f.(x), label="f(x) = 2x + 3", lw=2)
xlabel!("x")
ylabel!("y")
title!("Funci n lineal")
```

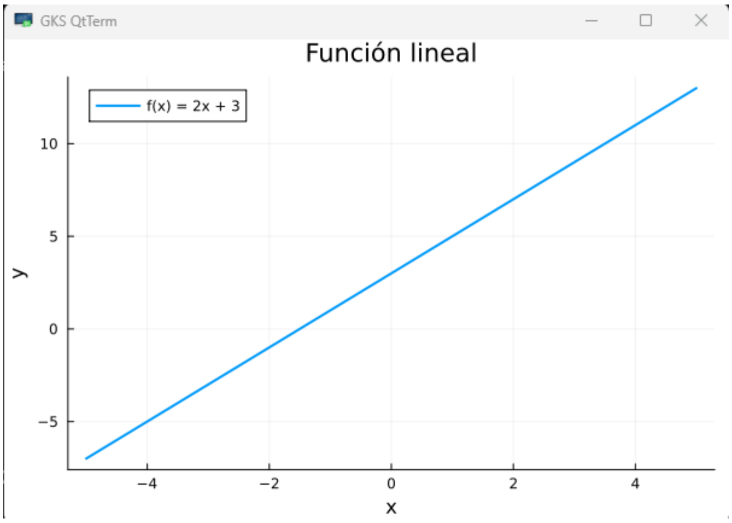

Figura 4: Grafico ejemplo 4.

3.5. El epígrafe de una función convexa es convexo

El conjunto de puntos (x, y) tales que $y \geq f(x)$ es convexo.
Demostración: Sea (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el epígrafe de f, es decir, $y_1 \geq f(x_1)$ y $y_2 \geq f(x_2)$. Para $\lambda \in [0, 1]$, consideremos:

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \quad y = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2. \tag{9}$$

Por convexidad de f,

$$f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leq \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = y. \tag{10}$$

Esto demuestra que el epígrafe es convexo.

Código en Julia:

```
using Plots

# Funci n convexa
f(x) = x^2

# Graficamos el ep grafe
x = -5:0.1:5
y = f.(x)

plot(x, y, label="f(x) = x ", lw=2)
fillrange!(x, y, fillalpha=0.3)
xlabel!("x")
ylabel!("y")
title!("Ep grafe de una funci n convexa")
```

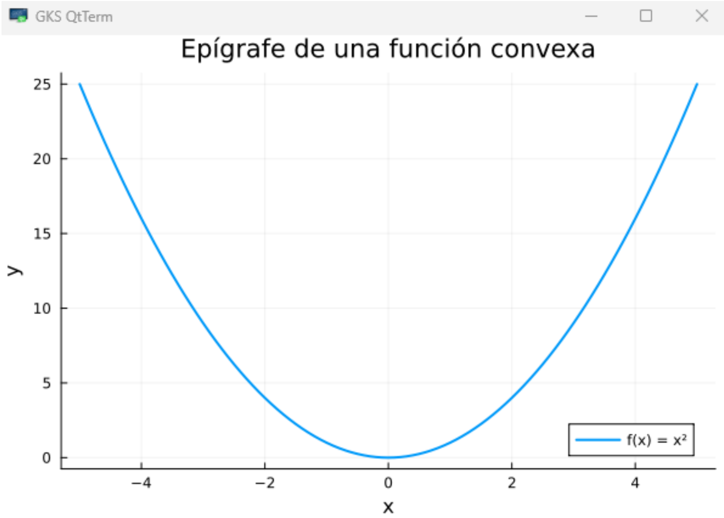

Figura 5: Grafico ejemplo 5.

3.6. Mínimos locales son mínimos globales

Si $f(x)$ es convexa en un conjunto convexo, entonces todo mínimo local es también un mínimo global.

Demostración: Si x^* es un mínimo local, existe un entorno U donde $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in U$. Para cualquier x en el dominio y $\lambda \in [0,1]$, se tiene:

$$f(\lambda x^* + (1-\lambda)x) \leq \lambda f(x^*) + (1-\lambda)f(x). \tag{11}$$

Si x^* es un mínimo local, se cumple $f(x^*) \leq f(x)$, lo que implica que $f(x^*)$ es un mínimo global.

Código en Julia:

```
using Plots

# Funci n convexa
f(x) = x^2

# Graficamos la funci n
x = -5:0.1:5
plot(x, f.(x), label="f(x) = x ", lw=2)
scatter!([0], [0], label="M nimo global", color=:red, markersize=6)
xlabel!("x")
ylabel!("y")
title!("M nimos locales son m nimos globales")
```

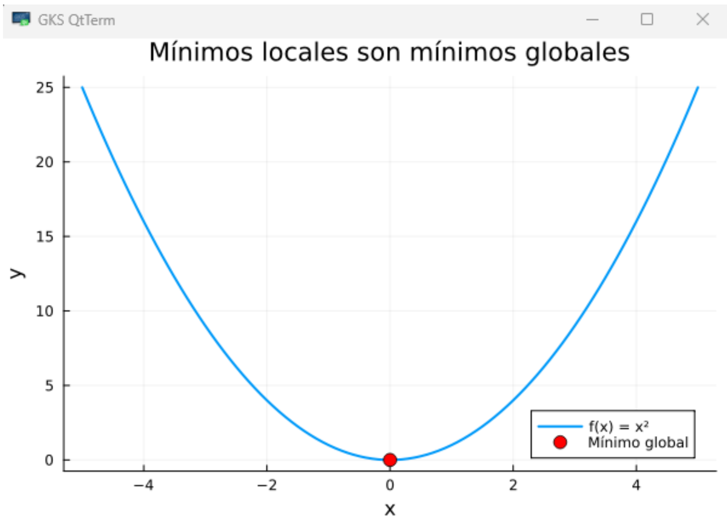

Figura 6: Grafico ejemplo 6.

Figura 7: github.com.