3ª EDIÇÃO
SÃO PAULO, 2018

Luiz Roberto Dante

Livre-docente em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp-SP), *campus* de Rio Claro

Doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)

Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP)

Licenciado em Matemática pela Unesp-SP, Rio Claro

Pesquisador em Ensino e Aprendizagem da Matemática pela Unesp-SP, Rio Claro

Ex-professor do Ensino Fundamental e do Ensino Médio na rede pública de ensino

Autor de várias obras de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio

MANUAL DO PROFESSOR

TELÁRIS

Ensino Fundamental - Anos Finais

MATEMÁTICA

COMPONENTE CURRICULAR: **MATEMÁTICA**

8

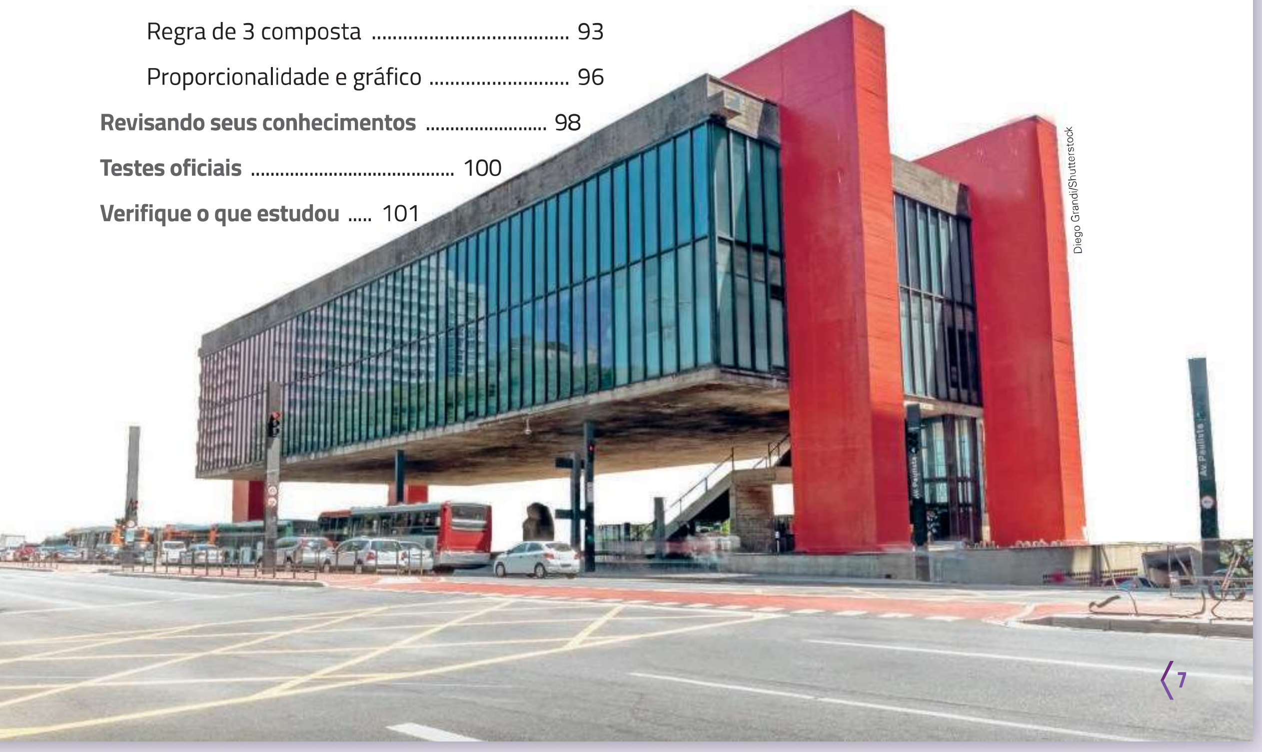
editora ática

SUMÁRIO

ColorMaker/Shutterstock

Capítulo 3

Capítulo 4



Diego Grandi/Shutterstock

Capítulo 5

Capítulo 6

Sergio Dotta Jr./Arquivo da editora

Capítulo 7


V. S. Anandhakrishna/Shutterstock/Glow Images

Capítulo 8

Abertura

Neste capítulo, serão retomadas e ampliadas explorações envolvendo números naturais, inteiros e racionais e situações do cotidiano nas quais tais números são utilizados. Também serão trabalhados os assuntos: antecessor e sucessor de um número, localização dos números na reta numerada, potenciação, radiciação e sequências.

Nesta página, explore a ilustração da estação Vostok. Oriente os alunos a pesquisar sobre o tema. Em seguida, pergunte: "Onde está localizada a estação Vostok?"; "Quando foi fundada e por quem?"; "Quem compartilha, atualmente, as pesquisas na estação?"; "Como é feito o abastecimento?"; "Quais são as medidas de temperatura durante o ano?"; "Qual foi a menor medida de temperatura já registrada na região?". Explore essas medidas de temperatura, incentivando os alunos a fazer comparações com situações conhecidas para que tenham consciência da dimensão dos números envolvidos.

Plano de desenvolvimento

Para mais informações, veja o **plano de desenvolvimento** do 1º bimestre.

CAPÍTULO

1 Números, dos naturais aos racionais, e sequências

Alexey Anatolievich Ekaykin/Arquivo pessoal

Vostok, na Antártida, é uma estação russa de pesquisas científicas. Atualmente, cientistas da Rússia, dos Estados Unidos e da França desenvolvem, nessa estação, pesquisas sobre o clima e as oscilações magnéticas da Terra. Foto de 2005.

10

Usamos números em várias situações do dia a dia. Veja alguns exemplos.

Dmitrij Skorobogatov/Shutterstock

1 dia tem 24 horas.

1 hora tem 60 minutos.

1 minuto tem 60 segundos.

A menor medida de temperatura já registrada na Terra foi de −89,2 °C, na Estação Vostok, na Antártida, em 21 de julho de 1983.

Receita de pão de queijo

Rendimento: 30 porções.

Ingredientes:

- $\frac{1}{2}$ copo de óleo de soja
- 1,5 copo de leite
- 4 ovos
- 0,25 kg de queijo meia-cura
- $\frac{1}{2}$ kg de polvilho doce
- 1 colher (de sobremesa) de sal

Paulo Manzi/Arquivo da editora

A garagem do prédio fica no andar −1.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

zoff/Shutterstock

Vaso de azaleia.

Aleksandrs Samuilovs/Shutterstock

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Todos os números destas situações são **números racionais**, alguns deles também são números inteiros e, entre estes, alguns são também números naturais. Neste capítulo, vamos retomar e ampliar o estudo desses números.

Não escreva no livro!

Analise as questões com os colegas e faça os registros no caderno.

1 Nas situações desta página, apareceram as indicações 24 horas, 30 porções e $\frac{1}{2}$ copo. Quais desses números são números naturais? Entre eles, qual indica contagem e qual indica medida? 24 (medida) e 30 (contagem).

2 Como podemos escrever o número 0,25 na forma de fração? Exemplos de resposta: $\frac{25}{100}$, $\frac{5}{20}$ e $\frac{1}{4}$.

3 Onde fica o andar −1 em um prédio? Normalmente no andar logo abaixo do térreo.

4 Como podemos escrever o número 1,5 na forma mista? $1\frac{5}{10}$ ou $1\frac{1}{2}$.

5 Quais são as temperaturas cuja medida, em graus Celsius, vêm com o sinal − na frente? As medidas que indicam temperaturas abaixo de 0 °C.

Abertura

Leia, com os alunos, as situações cotidianas (apresentadas no livro) em que usamos números. Peça que compartilhem outros exemplos e verifique se lembram quais dos números citados são naturais, inteiros ou racionais. Se necessário, relembre que:

- todo número natural é inteiro e racional;
- todo número inteiro é racional;
- nem todo número racional é natural ou inteiro.

Incentive-os a pensar também em números que não estão incluídos nesses conjuntos. É possível que alguns alunos se lembrem que o número π, visto no 7º ano, não pertence a nenhum deles.

Em seguida, solicite que respondam as questões em grupo. Acompanhe-os na tarefa e faça intervenções, se necessário.

1 Conjuntos numéricos

Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

Você já conhece a sequência dos números naturais:

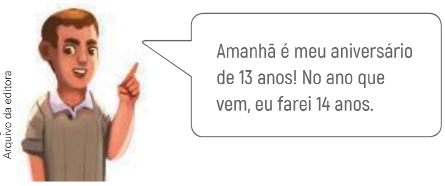
$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots)$$

E você já estudou que o **conjunto dos números naturais** pode ser representado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\}$$

O primeiro elemento desse conjunto é o 0 (zero). O **sucessor** do 0 é o 1, o sucessor do 1 é o 2, e assim por diante.

Podemos representar o sucessor de um número natural qualquer n por $n + 1$. E, como sempre podemos obter o sucessor de um número natural, dizemos que o conjunto dos números naturais é **infinito**. Esse fato é representado pelas reticências (...) no final de uma sequência crescente de números naturais.



Thiago Neumann/ Arquivo da editora

O **antecessor** do 12 é o 11 e o antecessor do 1 000 é o 999.

Na sequência dos números naturais, todo número, com exceção do 0, tem um antecessor.

Bate-papo

O que devemos fazer para determinar o antecessor de um número natural n diferente de 0? Represente no caderno o antecessor de n.

Devemos subtrair 1 do número; $n - 1$.

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

1› Escolha 2 números naturais quaisquer e some-os.
A soma também é um número natural? Repita isso com outros pares de números naturais.
Exemplo de resposta: $65 + 12 = 77$; a soma também é um número natural.

2› Escolha 2 números naturais quaisquer e multiplique-os.
O produto também é um número natural? Repita isso com outros pares de números naturais.
Exemplo de resposta: $7 \times 20 = 140$; o produto também é um número natural.

O que ocorreu com os números naturais que você escolheu no *Explorar e descobrir* ocorre sempre.

- A soma de 2 números naturais quaisquer é sempre um número natural.
- O produto de 2 números naturais quaisquer é sempre um número natural.

Mas será que a diferença entre 2 números naturais quaisquer é sempre um número natural? Observe estas subtrações.

- $1 - 2 = -1$
- $123 - 200 = -77$

Os números -1 e -77 **não** são números naturais; eles são **números inteiros negativos**.

1 Conjuntos numéricos

Principais habilidades da BNCC

EF08MA03 EF08MA11 EF08MA05

Iniciaremos com o conjunto dos números naturais. Pergunte: "Vocês se lembram do conjunto dos números naturais?"; "Qual é o primeiro elemento dele?"; "E o sucessor desse número?"; "Se representarmos um número natural qualquer por n, qual será o sucessor dele?". Esperamos que os alunos saibam que o menor número natural é 0, que o sucessor dele é 1 e que o sucessor de n é $n + 1$.

Então, questione: "Qual é o maior número do conjunto dos números naturais?". Caso os alunos citem algum número, mostre que sempre é possível descobrir o sucessor dele e explique que o conjunto dos números naturais é infinito, pois não há um número que seja o maior, o último elemento dele. Em seguida, na lousa, apresente a representação desse conjunto, destacando que as reticências representam a ideia de que ele não tem fim.

Neste momento, indague a turma: "O que é o antecessor de um número?"; "Todo número natural tem antecessor?"; "Até mesmo o 0?". Se necessário, ajude-os a entender que o 0 é o único número natural que não tem antecessor.

Bate-papo

Converse com os alunos, verificando se entenderam que, para descobrir o antecessor de um número, devemos subtrair 1 dele e que o antecessor do número natural n, diferente de 0, é $n - 1$.

Explorar e descobrir

Peça aos alunos que acompanhem a exploração proposta no livro. Ao final, sugira que compartilhem os números naturais escolhidos e os resultados obtidos para que verifiquem que todos são números naturais.

Então, desafie-os a fazer o mesmo com a subtração e com a divisão, compartilhando também os resultados com a turma. Ajude-os a perceber que, apenas na adição e na multiplicação de números naturais, obteremos sempre números naturais.

Após o *Explorar e descobrir*, peça aos alunos que leiam as informações apresentadas no livro e debatam as hipóteses criadas por eles mesmos, anotando as conclusões em um painel. Esse painel será usado durante o ano todo para que os alunos registrem descobertas matemáticas, de preferência com as próprias palavras. Assim, a turma pode consultar informações sobre os conteúdos fundamentais do 8º ano sempre que for necessário relembrá-los.

1. c) É um código que indica uma linha telefônica programada para assumir o pagamento das ligações recebidas.

Não escreva no livro!

Atividades

2. a) 27 unidades de Federação (26 estados e o Distrito Federal).

8. a) 6 maneiras diferentes. (3 possibilidades para a camisa e 2 possibilidades para a bermuda; total de possibilidades: $3 \times 2 = 6$ ou $2 \times 3 = 6$).

1 Os números naturais são usados para contar, ordenar, medir ou codificar.

a) Qual é o código de Discagem Direta a Distância (DDD) da cidade onde você mora? Resposta pessoal.

b) A Constituição da República Federativa do Brasil promulgada em 5 de outubro de 1988 tem 250 artigos. Veja o início do artigo 5º: "Todos são iguais perante a lei.".

Nessa informação, qual número natural foi usado para contagem? E qual foi usado para indicar uma ordem? 250; 5º.

c) O que indica o prefixo telefônico 0800?

2 Responda no caderno.

a) Quantas unidades de Federação o Brasil tem?

b) As unidades de federação são separadas em regiões. Quantas são essas regiões? Quais são elas? 5 regiões; Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sudeste e Sul.

c) Em qual região você mora? Quantos estados ela tem? Respostas pessoais.

3 Qual é o sucessor do maior número natural formado por 4 algarismos? 10 000 (Pois é o sucessor de 9 999.)

4 Qual é o antecessor do menor número natural formado por 5 algarismos? 9 999 (Pois é o antecessor de 10 000.)

5 Determine no caderno a soma do sucessor de 126 com o antecessor de 235. 361 $(127 + 234 = 361)$

6 Dados os números naturais $a = 18$ e $b = 3$, no caderno, calcule o que se pede.

a) $a + b$ e $b + a$ 21 e 21.

c) $a \cdot b$ e $b \cdot a$ 54 e 54.

b) $a - b$ e $b - a$ 15 e -15.

d) $a : b$ e $b : a$ 6 e $\frac{1}{6}$.

7 Nos resultados do exercício anterior, quais números não são naturais? -15 e $\frac{1}{6}$.

8 Os números naturais também são usados para resolver problemas que envolvem contagem e possibilidades.

a) Ricardo comprou 3 camisas: uma branca, uma azul e uma vermelha. Comprou também 2 bermudas: uma preta e uma cinza. De quantas maneiras diferentes Ricardo pode se vestir com essas peças?

b) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3 e 4? 24 números. $(4 \times 3 \times 2 = 24)$

c) Uma agência de turismo oferece um plano de viagens ao Nordeste do Brasil no qual é possível escolher 2 das 4 capitais disponíveis: Salvador (*S*), Recife (*R*), Maceió (*M*) e Natal (*N*). Quantas e quais são as possibilidades de escolha?

d) Um time de vôlei é formado por 6 jogadores. Antes de iniciar uma partida, cada jogador cumprimentou os demais com um aperto de mão. Qual foi o total de apertos de mão? 15 apertos de mão. $(5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15)$

e) De quantas maneiras diferentes Mara pode se vestir escolhendo entre 3 saias, 4 blusas e 2 pares de sandálias? 24 maneiras diferentes. $(3 \times 4 \times 2 = 24)$

9 Quais são os 2 próximos números naturais de cada sequência? Exemplos de resposta:

a) $(3, 6, 9, 12, 15, \ldots)$ 18 e 21. (Adicionando 3 ao número anterior.)

b) $(2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ 64 e 128. (Multiplicando por 2 o número anterior.)

c) $(3, 9, 27, 81, \ldots)$ 243 e 729. (Multiplicando por 3 o número anterior.)

d) $(2, 2, 4, 6, 10, 16, \ldots)$ 26 e 42. (Adicionando os 2 números anteriores.)

10 Ao lançarmos sucessivamente 3 moedas perfeitas, quantas são as possibilidades de resultado?

Lembre-se: Em uma moeda perfeita, honesta ou não viciada, as 2 faces da moeda têm a mesma chance de serem sorteadas.

Cara. Coroa.

Reprodução/Casa da Moeda do Brasil/Ministério da Fazenda

8 possibilidades. $(2 \times 2 \times 2 = 8)$

11 A Federação Russa é o maior país do mundo em extensão territorial. De acordo com o IBGE, a medida aproximada da área dela é dada por um número natural seguido da unidade de medida de área: 17 078 240 km².

Fonte de consulta: IBGE. *Países*. Disponível em: <https://paises.ibge.gov.br/#/pt/pais/federacao-russa/info/sintese>. Acesso em: 24 set. 2018.

TTstudio/Alamy/Fotoarena

O edifício histórico do Teatro Bolshoi é um dos principais pontos turísticos e símbolos da Federação Russa. Localizado na capital Moscou, é sede da Companhia de Balé Bolshoi, uma das melhores escolas de balé do mundo. Foto de 2018.

a) Como se lê esse número? Dezessete milhões, setenta e oito mil, duzentos e quarenta.

b) Qual é o valor posicional do algarismo 8? 8 000

c) Qual é o sucessor desse número? 17 078 241

d) Qual é o arredondamento desse número para a unidade de milhão mais próxima? 17 000 000

8. c) 6 possibilidades: *S* e *R*, *S* e *M*, *S* e *N*, *R* e *M*, *R* e *N*, e *M* e *N*. $(3 + 2 + 1 = 6)$

1 Conjuntos numéricos

Peça aos alunos que resolvam as atividades e acompanhe-os durante essa tarefa, fazendo intervenções apenas se for necessário.

As atividades desenvolvem os diferentes usos dos números naturais.

Atividades 1 e 2

Estas atividades trabalham os diferentes usos dos números naturais: contar, ordenar e codificar.

A atividade 2 pode ser resolvida usando-se um mapa ou em conjunto com as aulas de Geografia.

Atividades 3, 4, 5 e 11

Estas atividades abordam o sucessor ou antecessor de um número natural.

Nas atividades 3 e 4, sugira aos alunos que determinem primeiro o número descrito e depois o sucessor ou antecessor dele.

A atividade 11 trabalha também escrita por extenso, valor posicional e arredondamento de um número natural.

Atividades 6 e 7

Os alunos devem efetuar operações com números naturais, verificando quais resultados não são números naturais.

Aproveite a atividade 6 para retomar a propriedade comutativa da adição de números naturais e a propriedade comutativa da multiplicação de números naturais. Para isso, peça aos alunos que observem em quais itens as respostas das 2 operações são iguais e que digam por que isso acontece.

Atividades 8 e 10

Estas atividades usam números naturais na resolução de problemas de contagem e de princípio multiplicativo.

Na atividade 8, verifique os recursos utilizados pelos alunos para a resolução e, se necessário, relembre a árvore de possibilidades, vista nos anos anteriores.

Atividade 9

Esta atividade aborda a identificação dos próximos termos de sequências de números naturais.

Leitura

Leia, com os alunos, a parte do texto que está nesta página e pergunte: “Qual número é equivalente a 60 na aritmética módulo 12?”.

Para visualizarem a resposta, sugira que, em grupos, disponham números naturais até 60 em uma reta numerada e montem a circunferência correspondente à aritmética módulo 12. Chame a atenção dos alunos para o fato de que a medida de distância entre os números na reta numerada deve ser exatamente igual, senão os números equivalentes não coincidirão.

Proponha que determinem os equivalentes de alguns números na aritmética módulo 12 e que usem a circunferência para conferir as respostas.

Em seguida, peça que criem uma segunda circunferência com outro valor modular. Podem-se destinar valores diferentes para os grupos ou deixar que eles escolham. Se achar interessante, os grupos podem se desafiar a descobrir os equivalentes de alguns números na aritmética da segunda circunferência que fizeram.

Neste momento, questione: “Existe alguma forma fácil de calcular números equivalentes na aritmética módulo 10?”. Esperamos que, após alguns exemplos, os alunos percebam que basta verificar o algarismo da unidade.

LEITURA

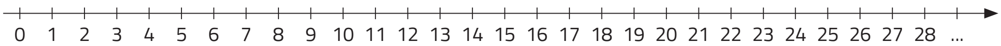
Aritmética do relógio ou aritmética modular

Um relógio analógico, aquele com ponteiros no mostrador, pode estar “escondendo” uma aritmética surpreendente chamada de **aritmética do relógio** ou de **aritmética modular**.

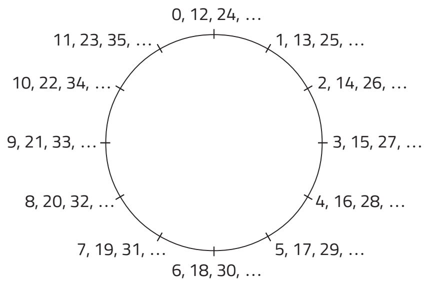
Esse tipo de aritmética tem grande aplicação para criar códigos de barras, criar a numeração de CPFs e CNPJs e, principalmente, na criptografia, para se estabelecerem códigos secretos.

Aritmética módulo 12

Consideremos os números naturais dispostos em uma reta numerada.



Imagine que vamos “enrolar” essa reta numerada formando uma circunferência, de modo que o número 12 coincida com o 0, o número 13 com o 1, o número 14 com o 2 e, assim por diante. Obteremos uma circunferência como a da figura ao lado.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Podemos escrever a relação entre os números.

- $12 \equiv 24$ (Lemos: doze é **equivalente** a vinte e quatro.)
- $0 \equiv 12 \equiv 24 \equiv \ldots$, pois todos esses números são equivalentes no sentido de que, quando divididos por 12, deixam **resto 0**. É a **classe do 0**.
- $1 \equiv 13 \equiv 25 \equiv \ldots$, pois todos esses números são equivalentes no sentido de que, quando divididos por 12, deixam resto 1. É a classe do 1.
- $2 \equiv 14 \equiv 26 \equiv \ldots$
- $3 \equiv 15 \equiv 27 \equiv \ldots$

  $\vdots$
- $11 \equiv 23 \equiv 35 \equiv \ldots$, pois todos esses números são equivalentes no sentido de que, quando divididos por 12, deixam resto 11. É a classe do 11.

Essa nova aritmética é **finita**, pois trabalha somente com 12 números naturais: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11. Por isso ela também pode ser chamada de **aritmética módulo 12**.

Assim, podemos escrever:

$$0 \equiv 12 \pmod{12}$$
$$1 \equiv 13 \pmod{12}$$
$$2 \equiv 14 \pmod{12}$$
$$3 \equiv 15 \pmod{12}$$
$$4 \equiv 16 \pmod{12}$$
$$\vdots$$
$$11 \equiv 23 \pmod{12}$$

> E como essa aritmética módulo 12 se relaciona com o relógio? Pense que dizemos 1 hora da tarde ou 13 horas e temos que $1 \equiv 13 \pmod{12}$. Também dizemos 2 horas da tarde ou 14 horas, 11 horas da noite ou 23 horas, e assim por diante.

Nessa aritmética, para saber em qual classe determinado número natural se encontra, basta dividi-lo por 12 e verificar o resto. Por exemplo, o número 135 está na classe do 3, porque $135 \div 12 = 11$ e resto 3.

Operações na aritmética módulo 12

Na aritmética módulo 12, os termos das operações devem ser exclusivamente elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ e o resultado deverá ser transformado em um elemento também desse conjunto.

Veja alguns exemplos para a adição e a multiplicação.

- $5 + 9 = 14$
  Temos $14 \div 12 = 1$ e resto 2, ou seja, $14 \equiv 2 \pmod{12}$.
  Assim, $5 + 9 = 2 \pmod{12}$.
- $11 + 10 = 21$
  Temos $21 \div 12 = 1$ e resto 9, ou seja, $21 \equiv 9 \pmod{12}$.
  Assim, $11 + 10 = 9 \pmod{12}$.
- $7 \times 8 = 56$
  Temos $56 \div 12 = 4$ e resto 8, ou seja, $56 \equiv 8 \pmod{12}$.
  Assim, $7 \times 8 = 8 \pmod{12}$.
- $9 \times 11 = 99$
  Temos $99 \div 12 = 8$ e resto 3, ou seja, $99 \equiv 3 \pmod{12}$.
  Assim, $9 \times 11 = 3 \pmod{12}$.

Não escreva no livro!

Questões

1 Quando um relógio digital indica 15 horas, um relógio analógico indica 3 horas (da tarde), porque $15 \div 12 = 1$ e o resto é 3, ou seja, $15 \equiv 3 \pmod{12}$.

Korvit/Shutterstock


Korvit/Dmitrij Skorobogatov/Shutterstock

Considere um relógio digital marcando os horários indicados nos itens. Qual horário um relógio analógico indicará em cada caso? **a)** 4 horas da tarde.

a) 16 horas. b) 19 horas. c) 23 horas.

b) 7 horas da noite. **c)** 11 horas da noite.

2 Se é noite e um relógio analógico está marcando 8 horas, então qual horário um relógio digital está marcando? 20 horas. ($20 \equiv 8 \pmod{12}$)

3 Efetue no caderno cada adição na aritmética (mod 12).

a) $4 + 5 + 11$ b) $7 + 3 + 9$

4 Agora, efetue no caderno as multiplicações na aritmética módulo 12.

a) $2 \times 5 \times 9$ b) $3 \times 4 \times 7$

5 Na aritmética módulo 5, dividimos o número por 5 e tomamos o resto. Por exemplo, $12 \equiv 2 \pmod{5}$ porque $12 \div 5 = 2$ e resto 2. Assim, por exemplo, $3 \times 4 = 2 \pmod{5}$.

Observe esta tabela com alguns resultados de multiplicações na aritmética módulo 5. Copie-a no caderno e complete-a.

Multiplicações na aritmética módulo 5

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

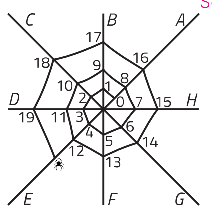
Tabela elaborada para fins didáticos.

6 Use a tabela da atividade anterior e determine no caderno o valor de cada ▇.

a) $2 \times ▇ = 3 \pmod{5}$ 4 c) $▇ \times 4 = 1 \pmod{5}$ 4

b) $3 \times ▇ = 2 \pmod{5}$ 4 d) $▇ \times 1 = 4 \pmod{5}$ 4

7 **(Obmep)** *A, B, C, D, E, F, G* e *H* são fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura a seguir. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118? Sobre o fio *G*.



Reprodução/Obmep

3. a) $4 + 5 + 11 = 20$; $20 \equiv 8 \pmod{12}$; logo, $4 + 5 + 11 = 8 \pmod{12}$. **b)** $7 + 3 + 9 = 19$; $19 \equiv 7 \pmod{12}$; logo, $7 + 3 + 9 = 7 \pmod{12}$.

4. a) $2 \times 5 \times 9 = 90$; $90 \equiv 6 \pmod{12}$; logo, $2 \times 5 \times 9 = 6 \pmod{12}$.
b) $3 \times 4 \times 7 = 84$; $84 \equiv 0 \pmod{12}$; logo, $3 \times 4 \times 7 = 0 \pmod{12}$.

Leitura

Continue a leitura com os alunos e sugira que confirmem os resultados das operações indicadas no texto usando a circunferência da aritmética módulo 12. Indague: "Qual é a diferença entre as operações que costumamos efetuar e essas em aritmética modular?". Se necessário, explique que não há diferença ao efetuar a operação, apenas depois, pois temos que verificar a quanto equivale o resultado.

Então, apresente alguns exemplos de operações em aritmética de outros módulos para os alunos efetuarem e incentive-os a compartilhar hipóteses e conclusões sobre a aritmética modular e as operações nela.

Depois, peça que respondam às questões sobre equivalências e operações na aritmética modular.

Questões 1 e 2

São trabalhadas equivalências na aritmética módulo 12, mostrando os relógios digital e analógico como situação cotidiana em que usamos esse assunto.

Questão 5

Apresentamos nesta questão a tabuada da multiplicação na aritmética módulo 5. Peça aos alunos que compartilhem os padrões identificados.

Questão 7

Nesta questão, mostramos um exemplo de aritmética módulo 8. Por que módulo 8? Porque em cada linha os números são acrescidos de 8 em 8.

Os números equivalentes módulo 8 estarão no fio em que estiverem os números cujo resto da divisão por 8 seja o mesmo que o resto da divisão de 118 por 8. No caso, $118 \div 8 = 14$ e resto 6. Assim, esses elementos são os do fio *G* e o número 118 estará sobre esse fio.

1 Conjuntos numéricos

Explique aos alunos que muitos lugares têm clima frio, até mesmo no Brasil, e peça que citem alguns. Então, questione: “Como representamos as medidas de temperatura nesses locais?”; “Como podemos representar uma medida de temperatura abaixo de zero?”; “Por exemplo, como podemos escrever 3 °C abaixo de zero?”. Provavelmente os alunos saibam que se escreve -3.

Em seguida, relembre que esse número é um inteiro negativo e pergunte em que outras situações esse tipo de número pode ser utilizado. É possível que, embora tenham experiências com algumas dessas situações, não as identifiquem como tendo registros numéricos negativos. Por exemplo, faltar dinheiro para uma compra, andares no subsolo de uma edificação, saldo de gols, entre outras.

Neste momento, proponha a representação do conjunto dos números inteiros na lousa, perguntando: “Qual é o maior número desse conjunto?”; “E o menor?”; “Todo número inteiro tem antecessor e sucessor?”. Após as respostas, relembre o uso de reticências para representar que o conjunto dos números inteiros é infinito.

Exemplifique algumas subtrações que não podíamos efetuar no conjunto dos números naturais, mas podem ser efetuadas no conjunto dos números inteiros. Então, na lousa, apresente também a representação do conjunto dos números naturais para os alunos compararem com o conjunto dos números inteiros, indagando: “Quais elementos estão nos 2 conjuntos?”. Esperamos que respondam que todos os números naturais estão em ambos.

Depois, explique que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros e que para indicar que um elemento pertence ou não pertence a um conjunto usamos, respectivamente, os símbolos $\in$ e $\notin$. Provavelmente os alunos conhecem o conceito de pertencer ou não a um conjunto por terem visto em anos anteriores, tendo dificuldade apenas com a simbologia. Se achar conveniente, escreva alguns exemplos na lousa para a turma se familiarizar com esses símbolos.

Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

Muitas cidades da região Sul do Brasil são conhecidas pelo clima frio. Um exemplo é a cidade de Urupema (SC), onde foi registrada a medida de temperatura de 3 °C abaixo de zero no início de junho de 2018.

Essa temperatura pode ser indicada assim:

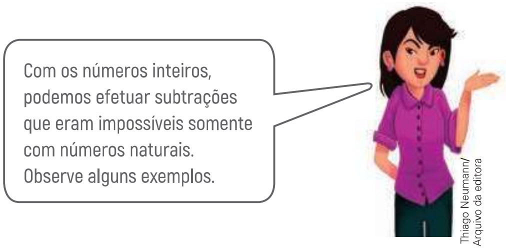
$$-3\ °C$$

O número -3 é um **número inteiro negativo**.

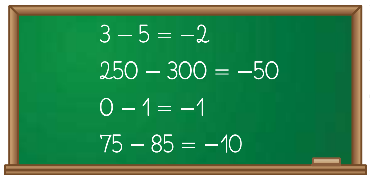
Fonte de consulta: UOL NOTÍCIAS. Ciência e saúde. Disponível em: <https://noticias.uol.com.br/meio-ambiente/ultimas-noticias/redacao/2018/06/08/a-duas-semanas-do-inverno-sul-ja-tem-temperatura-negativa-e-geada.htm>. Acesso em: 5 jul. 2018.

Lembre-se de que, reunindo os números naturais com os números inteiros negativos, obtemos o **conjunto dos números inteiros**, que representamos por $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \text{ ou } \mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$$

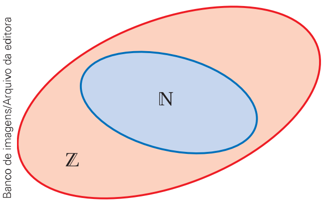


Thiago Neumann/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, podemos observar que $\mathbb{N}$ é um **subconjunto** de $\mathbb{Z}$, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ($\mathbb{N}$ **está contido** em $\mathbb{Z}$). Veja essa relação no diagrama.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Para indicar que o número -3 é um **elemento** do conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), escrevemos:

$$-3 \in \mathbb{Z}$$

(Lemos: -3 **pertence** ao conjunto dos números inteiros.)

Para indicar que o número -3 não é um elemento do conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), escrevemos:

$$-3 \notin \mathbb{N}$$

(Lemos: -3 **não pertence** ao conjunto dos números naturais.)

Atividades

Não escreva no livro!

12 No caderno, indique com números inteiros as medidas de temperatura dadas.

a) 28 graus Celsius acima de zero. +28 °C ou 28 °C.

b) 5 graus Celsius abaixo de zero. -5 °C

c) 6 graus Celsius positivos. +6 °C ou 6 °C.

d) 2 graus Celsius negativos. -2 °C

13 Copie os itens no caderno e escreva $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence) no lugar do ▇.

a) -28 ▇ $\mathbb{N}$ $\notin$

b) 0 ▇ $\mathbb{N}$ $\in$

c) 0 ▇ $\mathbb{Z}$ $\in$

d) $\frac{2}{5}$ ▇ $\mathbb{Z}$ $\notin$

e) -1000 ▇ $\mathbb{Z}$ $\in$

f) 1 205 378 ▇ $\mathbb{N}$ $\in$

g) 0,444... ▇ $\mathbb{Z}$ $\notin$

h) $2\frac{4}{5}$ ▇ $\mathbb{N}$ $\notin$

14 Observe que, se $x \in \mathbb{N}$ e $x > 5$, então podemos representar os possíveis valores de x pelo conjunto $\{6, 7, 8, 9, \ldots\}$.

Do mesmo modo, se $y \in \mathbb{Z}$ e $y < 2$, então temos o conjunto $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1\}$.

Represente no caderno o conjunto formado pelos possíveis valores de x em cada item.

a) $x \in \mathbb{N}$ e $x < 3$. $\{0, 1, 2\}$

b) $x \in \mathbb{Z}$ e $x \geqslant -2$. $\{-2, -1, 0, 1, \ldots\}$

c) $x \in \mathbb{N}$ e $x < 0$. Não existe valor natural para x.

d) $x \in \mathbb{Z}$ e $x < 0$. $\{\ldots, -3, -2, -1\}$

Ao final, sugira que leiam as informações apresentadas nesta página, compartilhem os conhecimentos obtidos e os registrem no painel de descobertas, usando as próprias palavras.

Atividade 12

Esta atividade trabalha a identificação de números inteiros a partir das temperaturas apresentadas.

Atividades 13 e 14

Estas atividades desenvolvem noções da linguagem dos conjuntos com os conjuntos dos números naturais e dos números inteiros: identificação de pertencimento ou não e representação de conjuntos.

LEITURA

Coordenadas geográficas: latitude e longitude

Em muitas situações existe a necessidade de determinar ou descrever um ponto da Terra, como na navegação. Qualquer ponto da Terra pode ser localizado utilizando como referência linhas imaginárias chamadas de **linhas de latitude** e **linhas de longitude**.

Como a forma da Terra lembra uma esfera, essas linhas têm a forma aproximada de circunferências ou de partes de circunferências. A **latitude** e a **longitude** são medidas em graus porque circunferências podem ser divididas em graus.

As linhas de latitude (também chamadas de **paralelos**) são paralelas entre si e paralelas à linha do equador.

A linha do equador tem latitude de 0° e divide a Terra em 2 hemisférios: norte e sul. Qualquer ponto da Terra está a um número de graus ao norte (N) ou ao sul (S) da linha do equador. Por exemplo, o ponto *A* ao lado está localizado a uma latitude de 40° N e o ponto *B* está a uma latitude de 20° S.

Por convenção, atribui-se o sinal positivo a todos os pontos ao norte da linha do equador e o sinal negativo a todos os pontos ao sul dele. Assim, o ponto *A* está a uma latitude de +40°, e o ponto *B*, de −20°.

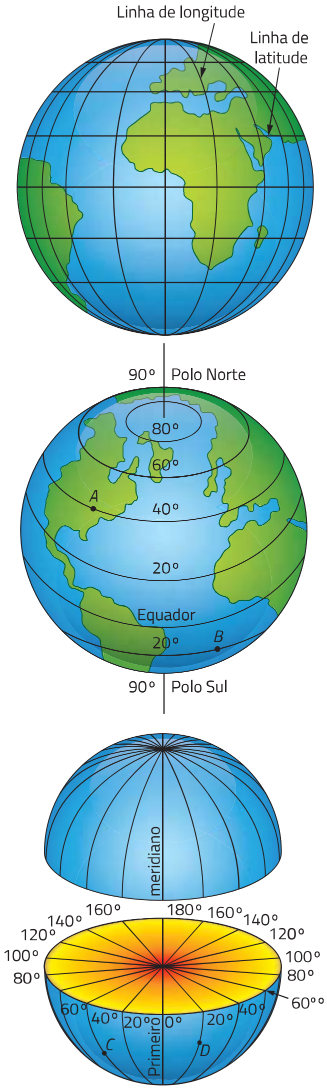
Os principais paralelos da Terra são o círculo polar Ártico, o trópico de Câncer, a própria linha do equador, o trópico de Capricórnio e o círculo polar Antártico.

As linhas de longitude (também chamadas de **meridianos**) estão na disposição Norte-Sul de polo a polo.

Em 1884, convencionou-se que o primeiro meridiano passaria por Greenwich, na Inglaterra. Assim, ele tem longitude de 0° e divide a Terra em 2 hemisférios: oriental (a leste) e ocidental (a oeste). Qualquer ponto da Terra está a um número de graus a oeste (O) ou a leste (L) do meridiano de Greenwich. Por exemplo, o ponto *C* ao lado está localizado a uma longitude de 40° O e o ponto *D* está localizado a uma longitude de 20° L.

Também por convenção, atribui-se o sinal positivo a todos os pontos a leste do meridiano de Greenwich e o sinal negativo a todos os pontos a oeste dele. Assim, o ponto *C* está a uma longitude de −40°, e o ponto *D*, de +20°.

Observe que, para indicar a localização, ou seja, as coordenadas geográficas de qualquer ponto da Terra, precisamos indicar 2 medidas: a latitude e a longitude. Para isso, representamos na forma de par ordenado (latitude, longitude).



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro!

Questão

Observe um globo terrestre ou um mapa e escreva no caderno, na forma de par ordenado, a latitude e a longitude aproximadas de cada cidade citada. Exemplos de resposta:

a) Manaus. (−3°, −60°)
b) Natal. (−5°, −35°)
c) São Paulo. (−23°, −46°)
d) Londres. (51°, 0°)
e) Brasília (−16°, −47°)
f) Da cidade em que você mora. Resposta pessoal.

Leitura

Peça aos alunos que leiam o texto e que compartilhem conhecimentos anteriores e o que entenderam a partir da leitura.

A notação de coordenadas geográficas apresentada no livro condiz com o que se faz em Cartografia: primeiro escreve-se a latitude e, depois, a longitude. Em Matemática, no plano cartesiano, por exemplo, o registro é ao contrário: primeiro registramos a coordenada da horizontal e, depois, a da vertical.

Em seguida, pergunte aos alunos de quais cidades eles gostariam de identificar as coordenadas geográficas e, se achar conveniente, incentive-os também a descobrir as coordenadas da estação Vostok, vista no início do capítulo.

Ao observar um globo terrestre ou um mapa, os alunos devem localizar as linhas imaginárias principais que estão indicadas nele (normalmente indicadas de 10 em 10 ou de 20 em 20 graus) e, então, fazer uma estimativa da latitude e da longitude de cada cidade citada, obtendo medidas aproximadas. Neste momento, propomos essa aproximação para números inteiros; porém, os alunos podem compreender que é possível usar medidas mais precisas, com números racionais. Então, peça que respondam a questão proposta no livro.

Questão

Assim como nas explorações, os alunos devem indicar as coordenadas geográficas de algumas cidades. Observe que apresentamos exemplos de respostas aproximadas e verifique se os alunos obtiveram números inteiros condizentes com essas medidas.

1 Conjuntos numéricos

Pergunte: "Vocês se lembram dos números racionais?"; "Quais números são racionais?"; "Como podemos defini-los?". Se necessário, lembre os alunos de que os números racionais são obtidos a partir da divisão de 2 números inteiros, desde que o divisor seja diferente de 0.

Questione: "Por que o divisor precisa ser diferente de 0?"; "Podemos dividir por 0?". Esperamos que respondam que não existe divisão por 0.

Neste momento, na lousa, com os alunos, escreva a representação do conjunto dos números racionais e apresente exemplos desses números escritos nas formas de fração, divisão, números inteiros, números mistos, decimal exato e dízima periódica, aproveitando para mostrar que números inteiros são números racionais, ou seja, podem ser escritos na forma de fração.

Explore também o fato de que algumas divisões que eram impossíveis nos conjuntos dos números naturais e dos números inteiros são possíveis no conjunto dos números racionais, mostrando exemplos.

Em seguida, peça que leiam o texto, compartilhem hipóteses e anotem as conclusões no painel de descobertas.

As atividades relacionam números com os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais.

Atividade 16

Se necessário, sugira que desenhem uma reta numerada para cada item que fornece um intervalo e localizem o que se pede.

Nos itens **c** a **e**, conduza a conversa para que percebam que há infinitas possibilidades de resposta.

Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

Lembre-se de que os **números racionais** são aqueles que podem ser obtidos da **divisão de 2 números inteiros**, com o divisor diferente de 0 (zero). Veja alguns exemplos.

- $-\frac{3}{5} = \frac{-3}{5}$ ou $-\frac{3}{5} = (-3) : 5$
- $0,\overline{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ou $0,\overline{6} = 2 : 3$
- $3,25 = 3\frac{25}{100} = 3\frac{1}{4} = \frac{13}{4}$ ou $3,25 = 13 : 4$
- $5 = \frac{10}{2}$ ou $5 = 10 : 2$
- $0 = \frac{0}{5}$ ou $0 = 0 : 5$
- $0,1 = \frac{1}{10}$ ou $0,1 = 1 : 10$

Lembre-se: $0,\overline{6}$ é o mesmo que 0,666...

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros e com denominador diferente de 0, ou seja:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ números inteiros e } b \neq 0\right\}$$

A letra **Q** usada para representar o conjunto dos números racionais vem de **q**uociente.

Observações

- O denominador *b* deve ser diferente de 0 porque não existe divisão por 0.
- Com os números racionais podemos efetuar divisões que eram impossíveis somente com os números inteiros. Veja os exemplos.

  $2 : 5 = \frac{2}{5}$ ou $2 : 5 = 0,4$

  $17 : 9 = \frac{17}{9} = 1\frac{8}{9}$ ou $17 : 9 = 1,\overline{8}$
- Todo número inteiro é um número racional. Veja os exemplos.

  $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3}$ $\quad -2 = \frac{-2}{1} = \frac{-4}{2} = \frac{-6}{3}$ $\quad 0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$

16. c) Exemplos de resposta: $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{4}$ e 2. e) Exemplo de resposta: $-\frac{3}{4}$.

Atividades

Não escreva no livro!

15 Observe estes números.

-5 $\quad \frac{1}{2}$ $\quad \frac{-3}{4}$ $\quad 1,5$

a) Quais desses números são números inteiros? -5

b) Quais são racionais? Todos.

c) Quais são racionais não inteiros? $\frac{1}{2}$; $\frac{-3}{4}$ e 1,5.

d) Quais são naturais? Nenhum.

e) Qual está entre 0 e 1? $\frac{1}{2}$

16 Escreva os números no caderno.

a) Os números naturais entre 11 e 15. 12, 13 e 14.

b) Os números inteiros de -2 a 2. $-2, -1$, 0, 1 e 2.

c) Três números racionais entre -1 e 3.

d) Um número inteiro não natural. Exemplo de resposta: -6.

e) Um número racional não inteiro.

Sugestões de leitura

Para saber um pouco mais sobre os conjuntos numéricos, recomendamos a você, professor, a leitura dos seguintes artigos da *Revista do Professor de Matemática* (*RPM*):

- Grandezas incomensuráveis e números irracionais, de Geraldo Ávila. *RPM*, n. 5, p. 6.
- O que é o número π?, de Elon Lages Lima. *RPM*, n. 6, p. 18.
- Que significa a igualdade $\frac{1}{9} = 0,111...$?, de Elon Lages Lima. *RPM*, n. 2, p. 6.
- Dúvidas sobre dízimas, de Elon Lages Lima. *RPM*, n. 8, p. 19.
- Voltando a falar sobre dízimas, de Elon Lages Lima. *RPM*, n. 10, p. 23.

17 No caderno, escreva um exemplo para cada item, quando existir.

a) Um número inteiro que não é natural. Exemplos de resposta: -3, -8 e -1.

b) Um número racional que não é inteiro. Exemplos de resposta: $\frac{2}{3}$; $-0{,}7$ e $1\frac{4}{5}$.

c) Um número natural que não é inteiro. Não existe.

18 Verifique se cada afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). Copie no caderno apenas as verdadeiras.

V a) Todo número natural é inteiro.

F b) Todo número racional é inteiro.

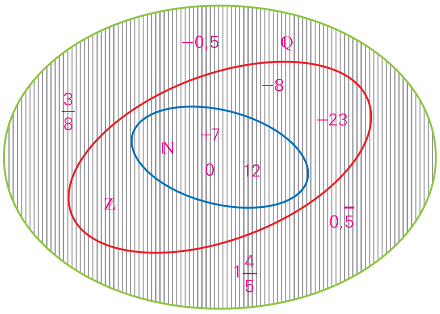
V c) Todo número inteiro é racional.

V d) Todo número natural é racional.

19 Copie no caderno o diagrama ao lado e coloque nele as letras dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, de maneira adequada.

Depois, registre os números a seguir nos locais corretos do diagrama.

-8	$+7$	$\frac{3}{8}$	$-0{,}5$	12
0	-23	$1\frac{4}{5}$	$0{,}\overline{5}$	



Banco de imagens/Arquivo da editora

20 A equação $x + 5 = 3$ não tem solução em $\mathbb{N}$, pois não existe número natural que somado a 5 resulte em 3. Em $\mathbb{Z}$, porém, essa equação tem solução: $x = -2$, pois $-2 + 5 = 3$.

Determine no caderno as soluções das equações dadas, quando existirem.

a) $x^2 = 9$, em $\mathbb{N}$. $x = 3$

b) $x^2 = 9$, em $\mathbb{Z}$. $x = -3$ ou $x = 3$

c) $3x = 2$, em $\mathbb{Z}$. Não existe solução em $\mathbb{Z}$.

d) $3x = 2$, em $\mathbb{Q}$. $x = \frac{2}{3}$

e) $2x = 6$, em $\mathbb{N}$. $x = 3$

f) $2x = 9$, em $\mathbb{N}$. Não existe solução em $\mathbb{N}$.

21 **Avaliação de medida de massa.** Os índices IMC (índice de massa corporal) e IAC (índice de adiposidade corporal) são utilizados frequentemente para avaliar a medida de massa de uma pessoa. Para calcular o IMC de uma pessoa, a partir dos 19 anos, usamos esta fórmula:

$$\text{IMC} = \frac{\text{medida de massa}}{(\text{medida de altura})^2}$$

(medida de massa em quilogramas e medida de altura em metros)

Em seguida, interpretamos o valor obtido de acordo com os dados desta tabela.

Interpretação do IMC

IMC	Menor do que 18,5	De 18,5 a 24,9	De 25 a 29,9	De 30 a 40	Maior do que 40,0
Classificação	Magreza	Normal	Sobrepeso	Obesidade	Obesidade grave

Fonte de consulta: SOCIEDADE BRASILEIRA DE ENDOCRINOLOGIA E METABOLOGIA. *Teste seu IMC*. Disponível em: <www.endocrino.org.br/teste-seu-imc/>. Acesso em: 5 jul. 2018.

Tomemos como exemplo uma pessoa com medida de massa de 70 kg e medida de altura de 1,64 m. Temos:

$$\text{IMC} = \frac{70}{(1{,}64)^2} = \frac{70}{2{,}6896} \simeq 26{,}03$$

Consultando a tabela, podemos concluir que essa pessoa tem sobrepeso.

Considerando as informações dadas, resolva as questões no caderno. **a)** Normal. $\left(\text{IMC} = \frac{70}{(1{,}70)^2} \simeq 24{,}2\right)$

a) Qual é a classificação de IMC de uma pessoa que tem medida de altura de 1,70 m e medida de massa de 70 kg?

b) Pesquise as medidas de altura e de massa de adultos que morem com você, calcule o IMC deles e veja qual é a classificação de cada índice obtido. Resposta pessoal.

c) Uma pessoa tem 1,80 m de medida de altura. Qual deve ser a medida de massa dela para que o IMC seja igual a 20? 64,8 kg $\left(\frac{x}{(1{,}8)^2} = 20 \Rightarrow x = 20 \times 3{,}24 = 64{,}8\right)$

1 Conjuntos numéricos

Atividades 17, 18 e 19

Estas atividades relacionam os conjuntos numéricos vistos até agora: naturais, inteiros e racionais.

Solicite o compartilhamento das descobertas feitas após a resolução destas atividades e sugira que os alunos registrem as principais no painel.

Atividade 20

Esta atividade aborda a resolução de equações de acordo com o conjunto universo dado.

Atividade 21

Esta atividade contextualiza o uso de números racionais, apresentando a definição e interpretação do IMC. Se achar conveniente, sugira que os alunos pesquisem ações que favoreçam a normalização do IMC, como reeducação alimentar e prática de exercícios físicos, desenvolvendo os temas contemporâneos *educação alimentar e nutricional* e *saúde*. Além disso, peça também aos alunos que pesquisem sobre o IAC e o comparem ao IMC.

1 Conjuntos numéricos

Apresente os passos que podemos seguir para facilitar a resolução de atividades:

- leitura e compreensão do enunciado;
- planejamento da solução;
- execução do que foi planejado;
- verificação dos resultados;
- emissão da resposta;
- ampliação da atividade.

Em seguida, leia o enunciado da situação e verifique o que os alunos entenderam. Se necessário, pergunte se é possível simplificar o resultado para que os alunos percebam que ele é uma fração irredutível.

Então, sugira que elaborem uma estratégia de resolução e confira o que planejarem. Na lousa, siga as indicações dos alunos para a resolução da atividade, intervindo quando for preciso. Se necessário, mostre que o mmc entre b e d só pode ser igual a 30 e lembre-os de que os valores devem estar entre 1 e 9. Após descobrirem os valores de b e d, peça que os substituam na expressão inicial e descubram quais números inteiros entre 1 e 9 satisfazem a igualdade.

Após determinarem os valores de todas as incógnitas, relembre-os de que a atividade solicita a soma desses números. Peça também que verifiquem se os resultados condizem com a situação para poderem dar uma resposta.

Neste momento, apresente a situação dada no *Ampliando a atividade* e desafie-os a resolvê-la. Depois de algumas tentativas, pergunte: “Os números $2x$ e $4y$ são pares ou ímpares?”; “E o número 13 é par ou ímpar?”. Esperamos que percebam que a soma de 2 valores pares não pode ter resultado ímpar.

Ao final, sugira que leiam o texto para compararem a resolução do livro com a que fizeram.

Atividade resolvida passo a passo

Não escreva no livro!

(Obmep) Na expressão $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{29}{30}$, as letras a, b, c e d representam números inteiros de 1 a 9. Qual é o valor de $a + b + c + d$?

a) 14 b) 16 c) 19 d) 21 e) 23

Lendo e compreendendo

A pergunta desta atividade envolve a soma de 2 frações cujo resultado é uma fração irredutível. Ser irredutível é uma informação muito importante para a resolução da atividade.

Planejando a solução

Devemos começar verificando se, ao calcular o mmc de b e d, é possível determinar esses valores e, a partir deles, efetuar a soma das 2 frações. Após isso, devemos comparar o numerador da fração obtida com o numerador da fração $\frac{29}{30}$ para determinar os valores de a e c. Por fim, calculamos a soma dos 4 valores.

Executando o que foi planejado

Como o resultado da adição das frações é uma fração irredutível, devemos entender que $\text{mmc}(b, d) = 30$, o que nos levaria a concluir que $b = 5$ e $d = 6$ ou $b = 6$ e $d = 5$, pois são os únicos números entre 1 e 9 que têm produto igual a 30.

Para $b = 5$ e $d = 6$, obtemos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{29}{30} \Rightarrow \frac{6a + 5c}{30} = \frac{29}{30} \Rightarrow 6a + 5c = 29$$

Considerando essa equação, podemos atribuir valores de 1 a 9 para a e verificar se obtemos um valor para c, tal que $6a + 5c = 29$.

a	1	2	3	4	5	6	...	9
c	$c = \frac{23}{5}$	$c = \frac{17}{5}$	$c = \frac{2}{5}$	1	?	?	...	?

Para $a = 4$, temos $c = 1$, que é um número inteiro entre 1 e 9. Para qualquer valor de a maior ou igual a 5, obteremos valores negativos para c, o que não condiz com o enunciado da atividade.

Assim, temos $a = 4$ e $b = 5$, $c = 1$ e $d = 6$ e, por fim:

$$a + b + c + d = 4 + 5 + 1 + 6 = 16$$

No caso de $b = 6$ e $d = 5$, chegaríamos ao mesmo resultado.

Verificando

Substituímos os valores de a, b, c e d, efetuamos a adição das frações e verificamos se o resultado é $\frac{29}{30}$.

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{6} = \frac{24 + 5}{30} = \frac{29}{30}$$

Emitindo a resposta

A resposta correta é a alternativa **b**.

Ampliando a atividade

Por que a equação $2x + 4y = 13$ **não** apresenta solução para x e y inteiros?

Solução

Porque se x e y são números inteiros, então $2x$ e $4y$ são números pares e a soma de 2 números pares sempre resulta em um número par. Então, a soma $2x + 4y$ só pode resultar em um número par e nunca poderia ser igual a 13, que é um número ímpar.

Os números racionais e as dízimas periódicas

Toda **dízima periódica** é um número racional, pois pode ser transformada em uma fração. Essa fração é chamada de **fração geratriz,** pois ela **gera**, **dá origem** à dízima periódica.

> Observe a dízima 0,123321456789… Como ela não é periódica (não há parte que se repete), não é possível transformá-la em uma fração. Esse tipo de número, que você estudará no livro do 9º ano, **não** pertence ao conjunto dos números racionais.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Para transformar uma dízima periódica em uma fração, ou seja, para determinar a fração geratriz de uma dízima periódica, podemos usar equações.

Veja como isso é possível acompanhando, inicialmente, os exemplos para as dízimas periódicas simples.

Dízima periódica simples: 0,7777… = ?

$$x = 0{,}7777\ldots$$
$$10x = 7{,}7777\ldots$$
$$10x = 7 + \underbrace{0{,}7777\ldots}_{x}$$
$$10x = 7 + x$$
$$10x - x = 7$$
$$9x = 7$$
$$x = \frac{7}{9}$$

Dízima periódica simples: 0,353535… = ?

$$x = 0{,}353535\ldots$$
$$100x = 35{,}353535\ldots$$
$$100x = 35 + \underbrace{0{,}353535\ldots}_{x}$$
$$100x = 35 + x$$
$$100x - x = 35$$
$$99x = 35$$
$$x = \frac{35}{99}$$

Bate-papo

Converse com os colegas e tentem formular um processo prático para a obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica simples.

Resposta pessoal.

Os exemplos sugerem que, para obter a fração geratriz de uma dízima periódica simples, podemos usar um processo prático.

> Escrever no numerador o número formado pela parte periódica e, no denominador, o número formado por tantos algarismos 9 quantos forem os algarismos do numerador (ou seja, da parte periódica).

De fato, para a dízima periódica 0,353535…, temos:

$$\text{Processo prático: } 0{,}\underbrace{35}_{\text{período com 2 algarismos}}3535\ldots = \frac{35 \leftarrow \text{período}}{99 \leftarrow \text{dois algarismos 9}}$$

1 Conjuntos numéricos

Inicie questionando: "O que é dízima?"; "Toda dízima é periódica?". Se necessário, explique que existem dízimas não periódicas, como 2,101101110… e 0,3455439876…, que não são números racionais, destacando que serão vistos no 9º ano.

Em seguida, fale sobre as dízimas periódicas, classificando-as em simples, como 11,$\overline{2}$ e 0,3333…, e compostas, como 0,457777… e 2,3$\overline{4}$. Peça aos alunos que expliquem a diferença entre esses tipos de dízima periódica, corrigindo ou complementando as definições obtidas.

Então, explique o que é fração geratriz e diga que, neste momento, determinaremos as frações geratrizes de dízimas periódicas, começando pelas simples.

Na lousa, mostre como transformar os exemplos do livro em frações geratrizes, verificando se os alunos têm dúvidas sobre o processo. Proponha também alguns exemplos para que os alunos determinem as frações geratrizes.

Bate-papo

Incentive os alunos a observar as frações geratrizes obtidas, verificando se há algum padrão. Se necessário, pergunte se há alguma relação entre o numerador e a parte periódica e entre a quantidade de algarismos 9 e os algarismos da parte periódica.

Sugira que testem a regra que criaram em algumas dízimas periódicas simples. Peça que comparem os resultados obtidos pela aplicação dessa regra com os obtidos pela utilização de equações.

Após o *Bate-papo*, peça que leiam as informações do livro, comparando a regra criada por eles com a fornecida no material.

Sequência didática

Para mais informações, veja a **sequência didática 1** do 1º bimestre.

1 Conjuntos numéricos

Peça aos alunos que determinem a fração geratriz para cada exemplo de dízima periódica simples, permitindo que usem o método que preferirem.

Então, na lousa, determine as frações geratrizes dos exemplos de dízimas periódicas compostas do livro e, em seguida, proponha mais alguns para que os alunos transformem em frações geratrizes.

Bate-papo

Pelo conhecimento do processo prático usado para a dízima periódica simples e observando os exemplos dados, esperamos que os alunos consigam formular uma explicação para o processo prático para as dízimas periódicas compostas sem sua intervenção.

Após o *Bate-papo*, sugira a leitura do texto do material para compararem a regra criada pela turma com a dada no livro. Neste momento, apresente outros exemplos de dízimas periódicas compostas para os alunos determinarem as frações geratrizes.

Ao final, sugira que os alunos anotem, no painel de descobertas, as regras que criaram para transformar dízimas periódicas simples e compostas em frações geratrizes.

Atividade 22

Esta atividade desenvolve a descoberta das frações geratrizes de dízimas periódicas simples e compostas.

Veja outros exemplos para dízimas periódicas simples.

- $0{,}666\ldots = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$
- $1{,}444\ldots = 1 + \dfrac{4}{9} = 1\dfrac{4}{9} = \dfrac{13}{9}$
- $0{,}\overline{376} = \dfrac{376}{999}$
- $0{,}181818\ldots = \dfrac{18}{99} = \dfrac{2}{11}$

Agora, acompanhe os exemplos de como determinar a fração geratriz de dízimas periódicas compostas.

Dízima periódica composta: 0,25555... = ?

$$x = 0{,}25555\ldots$$
$$10x = 2{,}5555\ldots$$
$$10x = 2 + \underbrace{0{,}5555\ldots}_{\frac{5}{9}}$$
$$10x = 2 + \frac{5}{9}$$
$$90x = 18 + 5$$
$$90x = 23$$
$$x = \frac{23}{90}$$

Dízima periódica composta: 0,25444... = ?

$$x = 0{,}25444\ldots$$
$$100x = 25{,}444\ldots$$
$$100x = 25 + \underbrace{0{,}444\ldots}_{\frac{4}{9}}$$
$$100x = 25 + \frac{4}{9}$$
$$900x = 225 + 4$$
$$900x = 229$$
$$x = \frac{229}{900}$$

Bate-papo

Converse com os colegas e tentem formular um processo prático para a obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica composta.

Resposta pessoal.

Pelos exemplos, também podemos determinar um processo prático para obter a fração geratriz de uma dízima periódica composta. Observe para a dízima periódica 0,25444...:

$$\text{Processo prático: } 0{,}\underbrace{25}_{\text{parte não periódica}}\underbrace{4}_{\text{período}}44\ldots = \frac{254 - 25}{\underbrace{9}_{\text{tantos 9 quantos forem os algarismos do período}}\underbrace{00}_{\text{tantos zeros quantos forem os algarismos da parte não periódica}}} = \frac{229}{900}$$

Tente identificar o processo prático em mais estes exemplos de dízimas periódicas compostas.

- $0{,}5212121\ldots = \dfrac{521 - 5}{990} = \dfrac{516}{990}$
- $0{,}7222\ldots = \dfrac{72 - 7}{90} = \dfrac{65}{90}$
- $0{,}25\overline{37} = \dfrac{2\,537 - 25}{9\,900} = \dfrac{2\,512}{9\,900}$

22. a) $\dfrac{5}{33}$ $\left(\dfrac{15}{99} = \dfrac{5}{33}\right)$ b) $\dfrac{287}{999}$ c) $\dfrac{7}{9}$

d) $\dfrac{239}{990}$ $\left(\dfrac{241 - 2}{990} = \dfrac{239}{990}\right)$

e) $\dfrac{359}{1100}$ $\left(\dfrac{3\,263 - 32}{9\,900} = \dfrac{3\,231}{9\,900} = \dfrac{1077}{3\,300} = \dfrac{359}{1100}\right)$

f) $\dfrac{1667}{9\,000}$ $\left(\dfrac{1852 - 185}{9\,000} = \dfrac{1667}{9\,000}\right)$

Atividade

Não escreva no livro!

22 No caderno, transforme cada dízima periódica em fração irredutível.

a) 0,151515...
b) $0{,}\overline{287}$
c) 0,777...
d) 0,2414141...
e) $0{,}32\overline{63}$
f) 0,185222...
g) 1,111...
h) 0,0111...
i) 2,1222...
j) $5{,}54\overline{6}$

g) $\dfrac{10}{9}$ $\left(1\dfrac{1}{9} = \dfrac{10}{9}\right)$

h) $\dfrac{1}{90}$ $\left(\dfrac{01 - 0}{90} = \dfrac{1}{90}\right)$

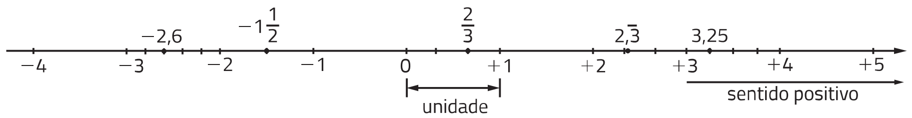
i) $\dfrac{191}{90}$ $\left(2\dfrac{12 - 1}{90} = 2\dfrac{11}{90} = \dfrac{191}{90}\right)$

j) $\dfrac{416}{75}$ $\left(5\dfrac{546 - 54}{900} = 5\dfrac{492}{900} = \dfrac{4\,992}{900} = \dfrac{1248}{225} = \dfrac{416}{75}\right)$

Os números racionais na reta numerada

Fixando um ponto de origem para o 0 (zero), uma unidade para o 1 e um sentido para ser o positivo, podemos localizar na reta numerada qualquer número racional.

Veja a localização dos números racionais $\frac{2}{3}$; $-1\frac{1}{2}$; 3,25; $-2{,}6$ e $2{,}\overline{3}$ e dos números racionais e inteiros -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 4 e 5.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A fração $\frac{2}{3}$ fica entre 0 e $+1$: dividimos esse intervalo em 3 partes iguais e tomamos 2 partes de 0 para 1.

O número $-1\frac{1}{2}$ fica entre -2 e -1: dividimos esse intervalo em 2 partes iguais e tomamos 1 parte de -1 para -2.

> O ponto que representa o número $-1\frac{1}{2}$ é chamado de **ponto médio** do intervalo entre -2 e -1, pois divide esse intervalo em 2 partes iguais, ou seja, divide o segmento de reta em 2 partes de mesma medida de comprimento.

O número racional $3{,}25 = 3\frac{25}{100} = 3\frac{1}{4}$ fica entre $+3$ e $+4$: dividimos esse intervalo em 4 partes iguais e tomamos 1 parte de $+3$ para $+4$.

O número $-2{,}6 = -2\frac{3}{5}$ fica entre -3 e -2: dividimos esse intervalo em 5 partes iguais e tomamos 3 partes de -2 para -3.

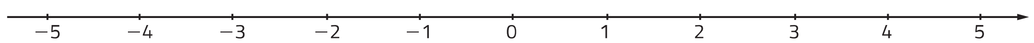
A dízima periódica $2{,}333... = 2\frac{3}{9} = 2\frac{1}{3}$ fica entre $+2$ e $+3$: dividimos esse intervalo em 3 partes iguais e tomamos 1 parte de $+2$ para $+3$.

Ilustrações: Thiago Neumann/Arquivo da editora

Densidade do conjunto dos números racionais

Lembre-se de que, entre 2 números naturais, nem sempre há outro número natural. Por exemplo, entre os números naturais 3 e 5 há outro número natural (4), mas entre quaisquer 2 números naturais consecutivos (3 e 4, por exemplo) não há outro número natural.

Com os números inteiros, ocorre o mesmo. Entre 2 números inteiros nem sempre há outro número inteiro. Por exemplo, entre -1 e -2 não há outro número inteiro. Observe esta reta numerada com números inteiros.



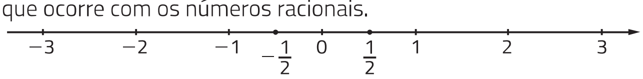
Banco de imagens/Arquivo da editora

1 Conjuntos numéricos

Na lousa, desenhe uma reta numerada e peça aos alunos que disponham os números dados como exemplo no livro, acompanhando-os na tarefa e intervindo se for preciso. Então, explique que existe um ponto na reta numerada para cada número racional, mas questione: "Todo ponto da reta corresponde a um número racional?"; "Existem pontos que não são números racionais?"; "Vocês se lembram de algum número que não é racional?". Provavelmente eles citem dízimas periódicas ou o número π, visto no 7º ano.

Em seguida, pergunte: "Entre 2 números naturais sempre podemos encontrar um outro número natural?"; "Entre 1 e 2, por exemplo, há algum número natural?"; "Será que entre 2 números inteiros sempre existe um outro número inteiro?"; "Por exemplo, entre -1 e 0 encontramos um outro número inteiro?". Para facilitar as respostas, represente essas situações em uma reta numerada na lousa.

Agora, veja o que ocorre com os números racionais.



Entre 2 números racionais podemos encontrar muitos outros números racionais. Por exemplo, entre 0 e 1 existem os números racionais $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{3}{5} = 0{,}6$; e muitos outros. Do mesmo modo, entre 0 e −1, existem os números racionais $-\frac{1}{2}$; $-\frac{3}{4} = -0{,}75$; $-\frac{3}{5} = -0{,}6$; e muitos outros. Então, podemos afirmar:

Entre 2 números racionais diferentes, **sempre** existe outro número racional.

Essa é a propriedade da **densidade dos números racionais**. Dizemos, por isso, que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é **denso**.

Agora, dados 2 números racionais, como podemos determinar outro número racional que está entre eles? Considere, por exemplo, os números racionais $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$.

- **1ª maneira:** Escrevemos as frações equivalentes a $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$ com denominadores iguais. Por exemplo, $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ e $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$.
  Então, escolhemos um número racional que está entre $\frac{12}{20}$ e $\frac{15}{20}$, como o número $\frac{14}{20}$. Assim, $\frac{12}{20} < \frac{14}{20} < \frac{15}{20}$ ou $\frac{3}{5} < \frac{14}{20} < \frac{3}{4}$.

Bate-papo

Qual outra fração poderia ser escolhida entre $\frac{12}{20}$ e $\frac{15}{20}$?

Exemplo de resposta: $\frac{13}{20}$.

- **2ª maneira:** Determinamos a média aritmética de $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$.
  $$\frac{\frac{3}{5}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{12}{20}+\frac{15}{20}}{2} = \frac{\frac{27}{20}}{2} = \frac{27}{20} \div 2 = \frac{27}{20} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{40}$$
  Assim, $\frac{27}{40}$ está entre $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$, ou seja, $\frac{3}{5} < \frac{27}{40} < \frac{3}{4}$.
- **3ª maneira:** Transformamos as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{4}$ para a forma decimal.
  $$\frac{3^{\times 20}}{5_{\times 20}} = \frac{60}{100} = 0{,}60 \quad \text{e} \quad \frac{3^{\times 25}}{4_{\times 25}} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$
  Então, escolhemos um número racional que está entre 0,60 e 0,75, como os decimais 0,65; 0,7; 0,71; 0,7222... Assim, por exemplo, $\frac{3}{5} < 0{,}65 < \frac{3}{4}$.

Não escreva no livro!

Atividades

23 Trace no caderno uma reta numerada, estabeleça o sentido positivo, o ponto de origem para o 0 e a unidade. Em seguida, localize os números inteiros de −3 a +3 e, depois, localize aproximadamente os pontos correspondentes aos números racionais dados.

$\boxed{1\frac{1}{2}}$ $\boxed{-2{,}\overline{3}}$ $\boxed{\frac{4}{5}}$ $\boxed{-0{,}75}$ $\boxed{\frac{8}{3}}$ $\boxed{-1\frac{4}{5}}$

24 Escreva no caderno pelo menos 2 números racionais que estejam entre cada par de números dados.

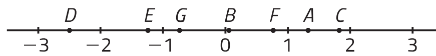
Exemplos de resposta:

a) $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$. $0{,}6$ e $\frac{5}{8}$.

b) 1 000,01 e 1 000,1. 1 000,03 e 1 000,07.

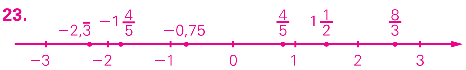
c) 1,6 e $1\frac{5}{8}$. 1,61 e 1,623.

25 Copie no caderno esta reta e, depois, associe cada número racional dado à letra correspondente, marcada na reta numerada.



- $1\frac{4}{5}$ C
- $-\frac{7}{10}$ G
- $\frac{4}{3}$ A
- 0,7 F
- −2,5 D
- $-1\frac{1}{4}$ E
- $0{,}\overline{18}$ B

23.



1 Conjuntos numéricos

Questione: "Vocês acham que entre 2 números racionais também há sempre outro número racional?"; "Entre 0,5 e 0,6 podemos encontrar um número racional, por exemplo?". Esperamos que os alunos citem algum número racional. Então, indague se existe outro número racional entre o número citado e 0,6. Caso os alunos mencionem outro número, pergunte se há algum número racional entre esse número e 0,6. Continue assim sucessivamente até que eles percebam que sempre há um número racional entre 2 números racionais. Nesse momento, explique que essa propriedade é conhecida como densidade dos números racionais e, por isso, dizemos que $\mathbb{Q}$ é um conjunto denso.

Em seguida, pergunte aos alunos como podemos determinar um número racional entre 2 números racionais apresentados na forma de fração. A partir do exemplo do livro, verifique as hipóteses da turma, complementando ou corrigindo-as, e apresente as 3 maneiras dadas no material. Se necessário, relembre o que é média aritmética, vista no 7º ano.

Ao final, peça que registrem, no painel de descobertas, os procedimentos para determinar um número racional entre 2 números racionais, incluindo os apresentados por eles.

Atividades 23 e 25

Estas atividades desenvolvem a localização de números racionais na reta numerada.

Verifique principalmente como os alunos fazem para descobrir a localização das dízimas periódicas. Se necessário, relembre-os como determinar a fração geratriz de uma dízima periódica ou peça que verifiquem no painel de descobertas.

Atividade 24

Permita que os alunos usem a maneira que considerarem mais adequada para encontrar racionais entre cada par de números dados, mesmo que não seja uma das apresentadas no livro.

Observe alguns exemplos de resolução para o item **a** desta atividade.

- Usando frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ com o mesmo denominador.

Repare que, ao determinar as frações equivalentes com denominador 4, não conseguimos definir diretamente um número entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, pois $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Então, determinamos as frações equivalentes com denominador 8, $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ e $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Escolhemos um número que está entre $\frac{4}{8}$ e $\frac{6}{8}$, como $\frac{5}{8}$. Assim, $\frac{4}{8} < \frac{5}{8} < \frac{6}{8}$ ou $\frac{1}{2} < \frac{5}{8} < \frac{3}{4}$.

- Calculando a média aritmética entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{2}{4}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{4} \div 2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

Assim, $\frac{1}{2} < \frac{5}{8} < \frac{3}{4}$.

- Transformando as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ para a forma decimal:

$$\frac{1^{\times 50}}{2_{\times 50}} = \frac{50}{100} = 0{,}50 \quad \text{e} \quad \frac{3^{\times 25}}{4_{\times 25}} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Escolhemos um número racional entre 0,50 e 0,75, como 0,6. Assim, $\frac{1}{2} < 0{,}6 < \frac{3}{4}$.

2 Potenciação

Potenciação com expoente natural

Vamos recordar a potenciação com base e expoente naturais. Leia a situação a seguir.

Inspirada na famosa lenda do jogo de xadrez, de Malba Tahan, Marina decidiu colocar grãos de arroz em um tabuleiro de xadrez: 1 grão na primeira casa e, em cada casa seguinte, o dobro de grãos da anterior.

Assim, nas casas do tabuleiro ela terá 1 grão, 2 grãos, $2 \cdot 2$ grãos, $2 \cdot 2 \cdot 2$ grãos, e assim por diante. Na décima primeira casa ela terá $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, ou seja, 2^{10} grãos.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10}$$

2^{10} (lemos: dois elevado a dez ou dois elevado à décima potência) é uma potência de base 2 e expoente 10.

Veja outro exemplo de potenciação com base e expoente natural.

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

Base: 5
Expoente: 3
Potência: 5^3
Potenciação: $5^3 = 125$

Agora vamos ampliar o estudo da potenciação e calcular o valor de potências de **base racional** e expoente natural. Veja os exemplos.

- $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$
- $(-0{,}1)^3 = (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) = -0{,}001$
- $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{1}{9}$
- $\left(+\frac{1}{5}\right)^0 = 1$
- $(-0{,}9)^1 = -0{,}9$
- $(-0{,}5)^0 = 1$
- $-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{9}$
- $-(0{,}5)^0 = -1$

Atividades

Não escreva no livro!

26 Copie as potências no caderno e calcule o valor de cada uma delas.

a) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ $+\frac{9}{25}$

b) $\left(+\frac{1}{2}\right)^5$ $\frac{1}{32}$

c) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3$ $-3\frac{3}{8}$

d) $(-3{,}5)^2$ $+12{,}25$

e) $\left(+\frac{1}{3}\right)^0$ 1

f) $(-1{,}5)^1$ $-1{,}5$

27 No caderno, indique a potenciação em cada caso.

Lembre-se de que, para indicar a potenciação, você deve escrever a base, o expoente e o valor da potência (resultado).

a) $-\frac{1}{2}$ elevado à quarta potência. $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = +\frac{1}{16}$

b) $+0{,}3$ elevado ao quadrado. $(+0{,}3)^2 = +0{,}09$

c) -10 elevado ao cubo. $(-10)^3 = -1000$

d) Base $-1\frac{1}{2}$ e expoente 3. $\left(-1\frac{1}{2}\right)^3 = -3\frac{3}{8}$

e) -2 na base e $+4$ no expoente. $(-2)^4 = +16$

f) $+\frac{3}{4}$ na base e 0 no expoente. $\left(+\frac{3}{4}\right)^0 = +1$

g) $-1{,}01$ elevado ao quadrado. $(-1{,}01)^2 = +1{,}0201$

28 Calcule no caderno o valor de cada expressão.

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^4$ $+1\frac{1}{4}$

b) $(-2)^3 \cdot (-2)^3$ $+64$

c) $\left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)^5$ $+1\frac{1}{2}$

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(+\frac{3}{2}\right) - \left(+\frac{2}{3}\right)^3 : \left(-\frac{1}{27}\right)$ $8\frac{3}{8}$

e) $(0{,}1)^2 : (-2) + (1{,}5) \cdot (-0{,}1)^2$ $0{,}01$

29 No caderno, compare os resultados de cada par de operações.

a) $(-2) \cdot (-3)$ e $(-3)^2$. $+6 < +9$

b) $-4 + 9$ e $\left(+4\frac{2}{3}\right)^1$. $+5 > +4\frac{2}{3}$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ e $\left(-\frac{3}{8}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right)$. $-\frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$

d) $(-5)^2$ e $(-2)^5$. $+25 > -32$

Então, na lousa, apresente os exemplos de potências de base racional e expoente natural do livro e calcule-os junto com a turma. Se achar necessário, forneça mais algumas potências para os alunos calcularem.

As atividades desenvolvem o cálculo de potências de base racional e expoente natural.

Atividade 26

Veja a resolução do item **c** desta atividade.

$\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8}$

Atividade 27

Destaque que os alunos devem escrever a potência e o resultado dela, não apenas um desses valores. Verifique a resolução do item **d** desta atividade.

$\left(-1\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8} =$
$= -3\frac{3}{8}$

Atividade 28

Esta atividade trabalha expressões numéricas envolvendo potências.

Se necessário, retome a ordem em que devem ser efetuadas as operações.

Observe a resolução dos itens desta atividade.

a) $+\frac{1}{4} + 1 = +1\frac{1}{4}$

b) $[-8]^2 = +64$

c) $\left(-\frac{3}{2}\right) \times (-1) = +\frac{3}{2} =$
$= +1\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{4} \times \frac{3}{2} - \frac{8}{27} \div \left(-\frac{1}{27}\right) =$
$= \frac{3}{8} + \frac{8}{1} = 8\frac{3}{8}$

e) $0{,}01 : (-2) + 0{,}015 =$
$= 0{,}01$

Atividade 29

Verifique como os alunos comparam os pares dados e destaque que devem usar os sinais $>$ (é maior do que) ou $<$ (é menor do que).

Sequência didática

Para mais informações, veja a **sequência didática 3** do 1º bimestre.

2 Potenciação

Principais habilidades da BNCC

EF08MA01 EF08MA02

Leia as informações do livro e pergunte aos alunos se eles conhecem a lenda do jogo de xadrez. Caso alguém a conheça, peça que a conte aos colegas. Você também pode pedir que eles levem para a sala de aula essa história para trabalhá-la conjuntamente; ela pode ser encontrada no livro *O homem que calculava*, de Malba Tahan, ou na internet.

Comente com eles que Malba Tahan é o pseudônimo do matemático brasileiro Júlio César de Melo e Sousa. No livro *O homem que calculava*, além da lenda do jogo de xadrez, o autor apresenta diversos problemas, desafios e questões de lógica muito interessantes e divertidos.

Em seguida, verifique se os alunos lembram como calcular potências de base natural ou inteira e expoente natural, como 3^2, $(-5)^3$, 1^4, -15^0.

2 Potenciação

Na lousa, reproduza com os alunos os procedimentos de cálculo efetuados por Moacir e por Juliana para escrever os produtos de potências de mesma base como uma única potência.

Bate-papo

Proponha aos alunos uma conversa sobre as estratégias e verifique se eles concordam que a escolha de Moacir é mais prática, pois não é necessário efetuar as potenciações e as multiplicações e depois fatorar o resultado.

Após o *Bate-papo*, peça aos alunos que observem os outros exemplos apresentados no livro, conferindo se confirmam o que conversaram.

Explorar e descobrir

Sugira aos alunos que escolham o procedimento para escrever os produtos de potências dados como uma única potência. Pergunte a eles se muda algo quando o produto estiver entre mais de 2 potências e peça que elaborem uma regra.

Após essas explorações, peça que leiam o texto e confiram a regra criada.

As atividades trabalham a escrita de produtos de potências de mesma base como uma única potência.

Atividade 31

Se necessário, relembre aos alunos o que significa o dobro e o triplo de um número.

Propriedades da potenciação com expoente natural

Produto de potências de mesma base

O professor de Moacir e Juliana propôs uma questão a eles.

Escrevam um produto de potências de mesma base, com expoentes naturais, em uma única potência.

Thiago Neumann/ Arquivo da editora

Moacir escolheu o produto $6^2 \cdot 6^3$ e fez assim:

$$6^2 \cdot 6^3 = \underbrace{\overbrace{6 \cdot 6}^{2\text{ fatores}} \cdot \overbrace{6 \cdot 6 \cdot 6}^{3\text{ fatores}}}_{5\text{ fatores}} = 6^5$$

Logo, $6^2 \cdot 6^3 = 6^{2+3} = 6^5$.

Juliana escolheu o produto $2^3 \cdot 2^4$ e fez assim:

$$2^3 \cdot 2^4 = 8 \cdot 16 = 128 = 2^7$$

$$\begin{array}{r|l} 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad 2^7$$

Bate-papo

E você, como faria? Qual estratégia escolheria: a de Moacir ou a de Juliana?

Resposta pessoal.

Logo, $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$.

Veja outros exemplos.

- $3^3 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 3^{3+3}$
  ou $3^3 \cdot 3^3 = 27 \cdot 27 = 729 = 3^6 = 3^{3+3}$
- $5^4 \cdot 5^1 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 5^{4+1}$
  ou $5^4 \cdot 5^1 = 625 \cdot 5 = 3\,125 = 5^5 = 5^{4+1}$
- $(0{,}1)^2 \cdot (0{,}1)^1 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = (0{,}1)^3 = (0{,}1)^{2+1}$
  ou $(0{,}1)^2 \cdot (0{,}1)^1 = 0{,}01 \cdot 0{,}1 = 0{,}001 = (0{,}1)^3 =$
  $= (0{,}1)^{2+1}$

Explorar e descobrir Não escreva no livro!

Use o processo que quiser e escreva no caderno cada produto de potências de mesma base usando uma única potência.

a) $2^3 \cdot 2^5$ 2^8
b) $3^2 \cdot 3^4$ 3^6
c) $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$ 2^9
d) $10^2 \cdot 10^3 \cdot 10$ 10^6
e) $7 \cdot 7^4$ 7^5
f) $a^5 \cdot a^5$, sendo a um número racional. a^{10}

O que acabamos de ver é uma **propriedade** da potenciação de expoente natural, pois acontece sempre.

Um **produto de 2 ou mais potências de mesma base**, diferente de 0, pode ser reduzido a uma única potência **conservando-se a base e somando-se os expoentes**.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

com a base a sendo um número racional, diferente de 0, e os expoentes m e n sendo números naturais.

30. $7^5 \cdot 7^3 = \underbrace{\overbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}^{5\text{ fatores}} \cdot \overbrace{7 \cdot 7 \cdot 7}^{3\text{ fatores}}}_{8\text{ fatores}} = 7^8$ ou $7^5 \cdot 7^3 = 7^{5+3} = 7^8$

Atividades

Não escreva no livro!

30 Constate a propriedade para o produto $7^5 \cdot 7^3$. Registre no caderno.

31 Use a propriedade e escreva no caderno cada produto como uma única potência.

a) $10^5 \cdot 10^9$ 10^{14}
b) $(-2)^3 \cdot (-2)^2$ $(-2)^5$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^6$
d) O dobro de 2^{10}. 2^{11} $(2 \times 2^{10} = 2^1 \times 2^{10} = 2^{11})$
e) $(1{,}5)^2 \cdot (1{,}5)^4$ $(1{,}5)^6$
f) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^4$ $\left(-\frac{3}{4}\right)^9$

Quociente de potências de mesma base

Veja agora a questão proposta pela professora e a preocupação de André.

Ilustrações: Thiago Neumann/ Arquivo da editora

Existe uma maneira simples e rápida de fazer esse cálculo.

$$17^9 \div 17^7 = \frac{17^9}{17^7} = \frac{\cancel{17} \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{17} \cdot 17 \cdot 17}{\cancel{17} \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{17} \cdot \cancel{17}} = 17 \cdot 17 = 289$$

Simplificamos essa fração dividindo o numerador e o denominador por 17. Fazemos isso 7 vezes.

Observe que $17^9 \div 17^7 = 17^{9-7} = 17^2$.

O que foi mostrado acima vale sempre e podemos escrever uma nova propriedade.

Um **quociente de 2 potências de mesma base**, diferente de 0, pode ser reduzido a uma única potência **conservando-se a base e subtraindo-se os expoentes, na ordem em que aparecem**.

$$a^m \div a^n = a^{m-n},$$

com a base a sendo um número racional, diferente de 0, e os expoentes m e n sendo números naturais.

Você sabia?

Justificando por que $a^0 = 1$, para $a \neq 0$

Podemos usar essa propriedade da potenciação para justificar que $a^0 = 1$, com a base a sendo racional e $a \neq 0$.

Se a é um número racional diferente de 0 e n é um número natural, então:

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0 \qquad \text{(I)}$$

Mas, como todo número racional diferente de 0 dividido por ele mesmo resulta em 1, podemos escrever:

$$a^n : a^n = 1 \qquad \text{(II)}$$

Comparando as igualdades I e II, concluímos que:

$$a^0 = 1, \text{ para } a \neq 0.$$

32. $8^6 \div 8^2 = \frac{\cancel{8} \cdot \cancel{8} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{\cancel{8} \cdot \cancel{8}} = 8^4$ ou $8^6 \div 8^2 = 8^{6-2} = 8^4$

Atividades

Não escreva no livro!

32 Constate essa propriedade para o quociente $8^6 \div 8^2$. Registre no caderno.

33 Use a propriedade e, no caderno, escreva cada quociente como uma única potência e calcule o valor dela.

a) $3^7 : 3^5$ $3^2 = 9$ $(3^{7-5} = 3^2 = 9)$

b) $(-1)^8 : (-1)^6$ $(-1)^2 = 1$ $((-1)^{8-6} = (-1)^2 = +1 = 1)$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)$ $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}\right)$

d) Metade de 2^{10}.

e) $(-2,5)^5 : (-2,5)^2$

f) $a^9 \div a^8$, com a racional não nulo. $a^1 = a$ $(a^{9-8} = a^1 = a)$

g) $1^8 \div 1^2$ $1^6 = 1$ $(1^{8-2} = 1^6 = 1)$

h) Terça parte de 3^8.
$3^7 = 2\,187$ $(3^8 \div 3 = 3^8 \div 3^1 = 3^{8-1} = 3^7 = 2\,187)$

33. d) $2^9 = 512$ $(2^{10} \div 2 = 2^{10} \div 2^1 = 2^{10-1} = 2^9 = 512)$
e) $(-2,5)^3 = -15,625$ $((-2,5)^{5-2} = (-2,5)^3 = -15,625)$

2 Potenciação

Apresente a situação dada no livro e peça aos alunos que a resolvam e escrevam o quociente de potências como uma única potência.

Em seguida, na lousa, anote alguns exemplos de quocientes de 2 potências de mesma base para a turma escrever como uma única potência, elaborando também uma regra para isso.

Então, peça que leiam a propriedade dada no livro e confiram a regra que criaram. Além disso, incentive os alunos a testar outros exemplos para verificar a propriedade.

Você sabia?

Desafie a turma a justificar por que $a^0 = 1$, utilizando a propriedade que acabaram de conhecer. Se necessário, pergunte: "Quanto é $4 : 4$?"; "Como $4 = 2^2$, quanto é $2^2 : 2^2$?"; "Podemos escrever $2^2 : 2^2$ como uma única potência?"; "Então, $2^0 = 1$?"; "Será que isso vale para qualquer base racional diferente de 0?". Peça que leiam as informações apresentadas nesta seção para confirmar ou corrigir o que estavam pensando.

Após o *Você sabia?*, questione o motivo de a base da potência necessariamente ser diferente de 0. Esperamos que algum aluno saiba que, se a base e o expoente forem iguais a 0, teremos uma indeterminação.

As atividades trabalham a escrita de quocientes de potências de mesma base como uma única potência.

Atividade 33

Se necessário, relembre os alunos o que significa a metade e a terça parte de um número.

2 Potenciação

Coloque a expressão $(5^2)^3$ na lousa e desafie os alunos a encontrar uma única potência para representar essa expressão. Se necessário, mostre que $(5^2)^3 = 5^2 \times 5^2 \times 5^2$ e peça que usem os conhecimentos de multiplicação de potências de mesma base. Após obterem 5^6, pergunte se existe alguma relação entre os expoentes 2, 3 e 6. Esperamos que algum aluno diga que $2 \times 3 = 6$.

Apresente os outros exemplos do livro e proponha que façam o mesmo que no primeiro exemplo e verifiquem se a relação continua ocorrendo. Em seguida, peça à turma para criar um maneira para escrever uma potência de potência usando uma única potência.

Explorar e descobrir

Solicite aos alunos que escolham um método, de preferência o criado pela turma, para escrever cada potência de potência como uma única potência.

Após essas explorações, sugira que leiam as informações do material, verificando se a maneira inventada pelos alunos está correta. Destaque, na lousa, que $(2^4)^3 \neq 2^{4^3}$ e peça para justificarem, auxiliando-os.

As atividades desenvolvem a escrita de potências de potências como uma única potência.

Atividade 35

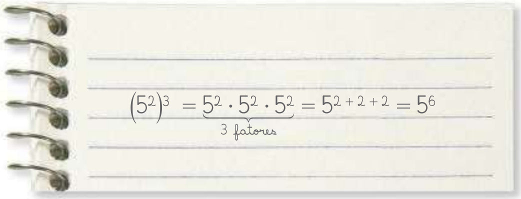
Esta atividade aborda também produto e quociente de potências de mesma base.

Explorar e descobrir

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{24} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4+4+4+4+4+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{24} \text{ ou } \left(\frac{1}{2}\right)^{6 \times 4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{24}\right)$

Potência de potência

Veja mais uma questão proposta pela professora.
A solução dada por Aninha foi esta.



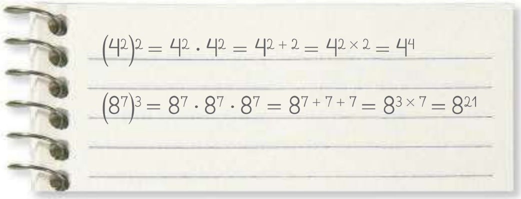
Paulo Manzi/Arquivo da editora

Thiago Neumann/Arquivo da editora

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Dizemos que a expressão $(5^2)^3$ é uma **potência de potência**.

Caio decidiu testar a estratégia de Aninha com outros 2 exemplos.



Paulo Manzi/Arquivo da editora

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Observe outros exemplos.

- $(7^5)^2 = 7^5 \cdot 7^5 = 7^{5+5} = 7^{10}$ ou $(7^5)^2 = 7^{2 \times 5} = 7^{10}$
- $\left[(1{,}1)^3\right]^4 = (1{,}1)^3 \cdot (1{,}1)^3 \cdot (1{,}1)^3 \cdot (1{,}1)^3 = (1{,}1)^{3+3+3+3} = (1{,}1)^{12}$ ou $\left[(1{,}1)^3\right]^4 = (1{,}1)^{4 \times 3} = (1{,}1)^{12}$

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

Teste você também escrevendo no caderno cada potência de potência com uma única potência. Escolha o método que achar melhor.

a) $(6^4)^5$
6^{20} $(6^4 \times 6^4 \times 6^4 \times 6^4 \times 6^4 = 6^{4+4+4+4+4} = 6^{20}$ ou $6^{5 \times 4} = 6^{20})$

b) $(12^3)^2$
12^6 $(12^3 \times 12^3 = 12^{3+3} = 12^6$ ou $12^{2 \times 3} = 12^6)$

c) $(3^5)^5$
3^{25} $(3^5 \times 3^5 \times 3^5 \times 3^5 \times 3^5 = 3^{5+5+5+5+5} = 3^{25}$ ou $3^{5 \times 5} = 3^{25})$

d) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^6$

Podemos enunciar mais uma propriedade da potenciação.

Uma **potência de potência**, com base diferente de 0, pode ser reduzida a uma única potência **conservando-se a base da primeira e multiplicando-se os expoentes**.

$$(a^m)^n = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n},$$

com a base a sendo um número racional, diferente de 0, e os expoentes m e n sendo números naturais.

Note que $(2^4)^3 \neq 2^{4^3}$, pois $(2^4)^3 = 2^4 \cdot 2^4 \cdot 2^4 = 2^{12}$ e $2^{4^3} = 2^{4 \times 4 \times 4} = 2^{64}$.

Atividades

Não escreva no livro!

34 No caderno, constate essa propriedade reduzindo a potência de potência $\left[(-5)^3\right]^2$ a uma única potência de base -5.

$[(-5)^3]^2 = (-5)^3 \times (-5)^3 = (-5)^{3+3} = (-5)^6$ ou $[(-5(^3]^2 = (-5)^{2 \times 3} = (-5)^{3 \times 2} = (-5)^6$

35 **Desafio.** No caderno, reduza cada expressão a uma única potência de base 2.

a) $\dfrac{2^7 \cdot 2 \cdot 2^4}{2^6 \cdot 2^3}$

b) $(8 \times 2)^5$

b) 2^{20} $((2^3 \times 2^1)^5 = (2^{3+1})^5 = (2^4)^5 = 2^{20})$

35. a) 2^3 $\left(\dfrac{2^{7+1+4}}{2^{6+3}} = \dfrac{2^{12}}{2^9} = 2^{12-9} = 2^3\right)$

Produto de potências de mesmo expoente

A professora propôs mais uma questão.

Veja a solução de Ângela, que usou as propriedades comutativa e associativa da multiplicação.

É possível escrever o produto de potências $3^2 \cdot 5^2$ usando uma única potência?

Thiago Neumann/Arquivo da editora

$$3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) =$$
$$= (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2 = 15^2$$

Paulo Manzi/Arquivo da editora

Rodrigo gostou da ideia de Ângela, mas achou que poderia simplificá-la. Veja como ele pensou.

Será que não basta multiplicar as bases e conservar o expoente? $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2$

Thiago Neumann/Arquivo da editora

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Examine outros exemplos.

- $3^4 \cdot 2^4 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) = (3 \cdot 2)^4 = 6^4$
- $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = (2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) = (2 \cdot 3 \cdot 5)^3 = 30^3$

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

Será que Rodrigo pensou corretamente? Converse com os colegas a respeito disso. Depois, calculem e verifiquem no caderno se esta igualdade é válida.

$$2^2 \cdot (0{,}3)^2 = (0{,}6)^2$$

Sim, pois $2^2 \times (0{,}3)^2 = (2 \times 2) \times (0{,}3 \times 0{,}3) = (2 \times 0{,}3) \times (2 \times 0{,}3) = (2 \times 0{,}3)^2 = (0{,}6)^2$.

O que vocês provavelmente descobriram vale sempre, e podemos escrever uma nova propriedade da potenciação.

Um **produto de 2 ou mais potências de mesmo expoente** pode ser reduzido a uma única potência **multiplicando-se as bases e conservando-se o expoente comum**.

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m,$$

com as bases *a* e *b* sendo números racionais, diferentes de 0, e o expoente *m* sendo um número natural.

Atividades

36. $11^2 \times 3^2 = (11 \times 11) \times (3 \times 3) = (11 \times 3) \times (11 \times 3) = (11 \times 3)^2 = 33^2$

Não escreva no livro!

36 Constate essa propriedade reduzindo o produto de potências $11^2 \times 3^2$ a uma única potência. Registre no caderno.

37 No caderno, copie cada produto de potências e transforme-o em uma única potência.

a) $10^2 \cdot 2^2$ 20^2

b) $(-6)^3 \cdot (-8)^3$ 48^3

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$ $\left(\frac{3}{16}\right)^4$

d) $(3{,}1)^5 \cdot (0{,}7)^5 \cdot 2^5$ $(4{,}34)^5$

38 **Desafio.** Escreva no caderno o produto $27 \cdot 125$ como uma única potência.

Sugestão: Faça a decomposição de 27 e de 125 em fatores primos.

38. 15^3 $(27 \times 125 = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3 = 15^3)$

27	3
9	3
3	3
1	

125	5
25	5
5	5
1	

2 Potenciação

Desenvolva, com os alunos, a questão proposta no material. Incentive-os a escrever a expressão com multiplicações sucessivas e a usar as propriedades comutativa e associativa da multiplicação.

Em seguida, pergunte se não bastava multiplicarmos as bases e mantermos o expoente. Esperamos que os alunos percebam que sim. Então, solicite que verifiquem se o mesmo vale para os outros exemplos do livro.

Explorar e descobrir

Peça aos alunos que verifiquem se a igualdade proposta é válida, usando o método inicial.

Após essas explorações, incentive-os a elaborar uma regra para escrever produtos de potências de mesmo expoente como uma única potência. Então, peça que leiam o texto e façam ajustes na regra que criaram, se necessário.

As atividades abordam a escrita de produtos de potências de mesmo expoente como uma única potência.

Atividade 37

Veja a resolução dos itens desta atividade.

a) $(10 \times 2)^2 = 20^2$

b) $[(-6) \times (-8)]^3 =$
$= (+48)^3 = 48^3$

c) $\left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{16}\right)^4$

d) $(3{,}1 \times 0{,}7 \times 2)^5 = 4{,}34^5$

Atividade 38

Chame a atenção dos alunos para a sugestão de fazer a decomposição de 27 e de 125 em fatores primos para escrevê-los em forma de potência. Se necessário, relembre como decompor em fatores primos.

2 Potenciação

Desafie os alunos a escrever o quociente $30^2 : 5^2$ como uma única potência, incentivando-os a relacionar a propriedade da multiplicação de potências com mesmo expoente com uma possível solução para a divisão de potências com mesmo expoente. Pergunte: "Será que a expressão $30^2 : 5^2$ pode ser escrita como $(30 : 5)^2$?"; "Ela também pode ser escrita como $\left(\frac{30}{5}\right)^2$?"; "Ela é igual a 6^2?".

Bate-papo

Considerando as propriedades estabelecidas anteriormente e o exemplo dado, esperamos que os alunos cheguem à regra enunciada na propriedade. Peça para testarem-na em outros exemplos criados por eles.

Após o *Bate-papo*, sugira que comparem a regra inventada pela turma com a fornecida no material.

Ao final, solicite que os alunos usem as próprias palavras para registrar, no painel de descobertas, as propriedades de potenciação com expoente natural: produto e quociente de potências de mesma base, potência de potência e produto e quociente de potências de mesmo expoente.

Atividades 39, 40, 41 e 42

Estas atividades desenvolvem o uso da propriedade do quociente de potências de mesmo expoente.

Confira a resolução dos itens da atividade 40.

a) $8^{10} \div 4^{10} = (8 \div 4)^{10} = 2^{10}$

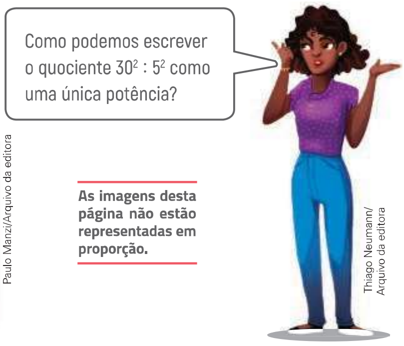
b) $(-6)^3 \div (+2)^3 =$
$= [(-6) \div (+2)]^3 =$
$= (-3)^3$

c) $\left(\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)^4 =$
$= \left(\frac{3}{4}\right)^4$

d) $(2{,}5)^5 \div (0{,}5)^5 =$
$= (2{,}5 \div 0{,}5)^5 = 5^5$

Quociente de potências de mesmo expoente

Veja ao lado a nova questão da professora.
Observe a solução de Rui.



Thiago Neumann/Arquivo da editora

$$30^2 : 5^2 = \frac{30^2}{5^2} = \frac{30 \cdot 30}{5 \cdot 5} =$$
$$= \frac{30}{5} \cdot \frac{30}{5} = \left(\frac{30}{5}\right)^2 = (30 : 5)^2 = 6^2$$

Paulo Manzi/Arquivo da editora

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Edivaldo e Solange escreveram de modo mais simplificado.

$$30^2 : 5^2 = (30 : 5)^2 = 6^2$$
$$30^2 : 5^2 = \left(\frac{30}{5}\right)^2 = 6^2$$

Paulo Manzi/Arquivo da editora

Assim, estabelecemos uma nova propriedade.

Bate-papo

Converse com os colegas e procurem estabelecer uma hipótese de como transformar o quociente de 2 potências de mesmo expoente em uma única potência. Verifique com outros exemplos.

Resposta pessoal.

Um **quociente de duas potências de mesmo expoente**, com a segunda base diferente de 0, pode ser reduzido a uma única potência **dividindo-se a primeira base pela segunda e conservando-se o expoente**.

$$a^m : b^m = (a : b)^m,$$

com as bases a e b sendo números racionais, diferentes de 0, e o expoente m sendo um número natural.

39. $10^3 : 2^3 = \frac{10^3}{2^3} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \left(\frac{10}{2}\right) \cdot \left(\frac{10}{2}\right) \cdot \left(\frac{10}{2}\right) = (10 \div 2) \times (10 \div 2) \times (10 \div 2) = (10 \div 2)^3 = 5^3$

Não escreva no livro!

Atividades

39 Constate essa propriedade para o quociente $10^3 : 2^3$. Registre no caderno.

40 No caderno, reduza cada quociente a uma única potência. MP

a) $8^{10} : 4^{10}$

b) $(-6)^3 : (+2)^3$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^4$

d) $(2{,}5)^5 : (0{,}5)^5$

41 Da última propriedade, podemos deduzir esta nova propriedade.

Para elevarmos uma fração a um expoente, basta elevar o numerador e o denominador a esse expoente.

Veja alguns exemplos.

- $\left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2^3}{7^3} = \frac{8}{343}$
- $\left(\frac{-4}{5}\right)^2 = \frac{(-4)^2}{5^2} = \frac{16}{25}$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1^4}{3^4} = \frac{1}{81}$

Copie os itens no caderno, elimine os parênteses e calcule o valor de cada potência. MP

a) $\left(\frac{6}{7}\right)^4$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^9$ c) $\left(1\frac{1}{3}\right)^5$ d) $\left(\frac{-2}{3}\right)^3$

42 **Desafio.** No caderno, reduza o quociente $4^3 : 27^2$ a uma única potência de expoente 6.

43 Use as propriedades estudadas e, no caderno, reduza cada expressão a uma única potência.

a) $(3^7)^4$ 3^{28}

b) $2^9 : 2^4$ 2^5

c) $5^6 \cdot 5^4$ 5^{10}

d) $30^5 : 15^5$ 2^5

e) $\frac{6^4}{2^4}$ 3^4

f) $9^5 \cdot 9 \cdot 3^6$ 27^6 ou 3^{18}.

g) $\frac{6^{10}}{6^9}$ 6^1 ou 6.

h) $\frac{3^4 \cdot 3^7}{(3^2)^3}$ 3^5

i) $7^4 \cdot 7^2 : 7$ 7^5

j) $6^3 \cdot 5^3$ 30^3

k) $\frac{3^7 \cdot 3 \cdot 3}{3^2 \cdot 3^5}$ 3^2

42. $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ $\left((2^2)^3 \div (3^3)^2 = 2^6 \div 3^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6\right)$

Na atividade 41, verifique se os alunos entenderam a propriedade apresentada e peça que a anotem no painel de descobertas, usando as próprias palavras. Observe a resolução dos itens desta atividade.

a) $\frac{6^4}{7^4} = \frac{1\,296}{2\,401}$

b) $\frac{1^9}{2^9} = \frac{1}{512}$

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{4^5}{3^5} = \frac{1\,024}{243}$

d) $\frac{(-2)^3}{3^3} = \frac{-8}{27} = -\frac{8}{27}$

Na atividade 42, incentive-os a fazer a decomposição dos números 4 e 27 em fatores primos e, em seguida, confira se eles usam as propriedades de potência de potência e do quociente de potências de mesmo expoente para resolver o desafio.

Atividade 43

Esta atividade trabalha a redução das expressões a uma única potência, usando as propriedades de produto e quociente de potências de mesma base, potência de potência e produto e quociente de potências de mesmo expoente.

Permita a consulta ao painel de descobertas e destaque que, em alguns itens, será necessário usar mais do que uma propriedade.

Potenciação com expoente inteiro

Agora vamos ampliar mais um pouco o estudo da potenciação e calcular o valor de potências de **base racional** e **expoente inteiro**.

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

Partindo das potenciações que você já estudou, observe a regularidade na sequência a seguir. Copie essas potenciações no caderno e substitua cada ■ pelo número adequado.

$$2^3 = 8$$
$$\div 2$$
$$2^2 = 4$$
$$\div 2$$
$$2^1 = 2$$
$$\div 2$$
$$2^0 = \boxed{1}$$
$$\div 2$$
$$2^{\boxed{-1}} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} \qquad \left(1 \div 2 = \frac{\boxed{1}}{\boxed{2}}\right)$$
$$\div 2$$
$$2^{\boxed{-2}} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} \qquad \left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{2}} \div 2 = \frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} = \frac{1}{2^2}\right)$$
$$\div 2$$
$$2^{\boxed{-3}} = \frac{\boxed{1}}{\boxed{8}} \qquad \left(\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} \div 2 = \frac{\boxed{1}}{\boxed{8}} = \frac{1}{2^3}\right)$$

Note que:

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad 2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad \text{ou} \quad 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Veja mais um exemplo, agora com potências de base 10.

$$10^3 = 1\,000 \xrightarrow{1\,000 \div 10} 10^2 = 100 \xrightarrow{100 \div 10} 10^1 = 10 \xrightarrow{10 \div 10} 10^0 = 1 \xrightarrow{1 \div 10} 10^{-1} = \frac{1}{10} \xrightarrow{\frac{1}{10} \div 10} 10^{-2} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} \xrightarrow{\frac{1}{100} \div 10} 10^{-3} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

ou ou ou

$$10^{-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^1 = \frac{1}{10} \qquad 10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} \qquad 10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$$

2 Potenciação

Explorar e descobrir

Peça aos alunos que acompanhem as indicações desta seção, auxiliando-os a perceber que, ao dividirmos por 2 as potências de 2, pela propriedade do quociente de potências de mesma base, devemos subtrair 1 do expoente da potência. Se necessário, recorde o cálculo da divisão de uma fração por número natural.

Assim, esperamos que os alunos comecem a entender que, ao elevarmos a base a um expoente negativo, obtemos o inverso dela elevado ao módulo do expoente.

Depois dessa exploração, proponha que comparem os resultados de $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ e $\frac{1}{2^2}$ e de $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ e $\frac{1}{2^3}$. Em seguida, desafie-os a fazer os cálculos de potências de base 10 como feito para as potências de base 2.

Então, peça que comparem os registros deles com o registro do livro e façam ajustes, se necessário. Sugira que a turma debata as hipóteses criadas e elabore uma regra para potências com expoente inteiro negativo.

Verifique a resolução dos itens desta atividade.

a) $3^{7 \times 4} = 3^{28}$

b) $2^{9-4} = 2^5$

c) $5^{6+4} = 5^{10}$

d) $\left(\frac{30}{15}\right)^5 = 2^5$

e) $\left(\frac{6}{2}\right)^4 = 3^4$

f) $9^6 \times 3^6 = (9 \times 3)^6 = 27^6$ ou $(3^2)^5 \times 3^2 \times 3^6 =$
$= 3^{10} \times 3^2 \times 3^6 = 3^{10+2+6} = 3^{18}$

g) $6^{10-9} = 6^1 = 6$

h) $\frac{3^{11}}{3^6} = 3^{11-6} = 3^5$

i) $7^{4+2-1} = 7^5$

j) $(6 \times 5)^3 = 30^3$

k) $\frac{3^9}{3^7} = 3^{9-7} = 3^2$

2 Potenciação

Peça que comparem a regra criada por eles com a fornecida no livro. Se necessário, retome o significado de inverso de um número e de módulo de um número. Lembre-se de perguntar: “Por que há a ressalva de que a base seja diferente de zero?”. Faça-os perceber que a base será o denominador da fração e, como não é possível dividir por zero, a base não pode ser zero.

Neste momento, proponha que calculem os 3 exemplos de potências de expoente inteiro negativo e descubram quanto é $a \cdot a^{-1}$. Se necessário, mostre que, para efetuar essa multiplicação, podemos usar $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ou a propriedade do produto de potências de mesma base. Após descobrirem que $a \cdot a^{-1} = 1$, relembre que, ao multiplicarmos um número pelo inverso dele, obtemos 1, ou seja, a^{-1} é o inverso de a.

Em seguida, peça que leiam as informações desta página, verificando se entendem o motivo de $\frac{b}{a}$ ser o inverso de $\frac{a}{b}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Então, sugira que compartilhem hipóteses sobre potências com expoente inteiro e anotem as conclusões no painel de descobertas.

As atividades desenvolvem potências de expoente inteiro.

Atividade 44

Confira a resolução desta atividade.

$3^3 = 27$

$\div 3$

$3^2 = 9$

$\div 3$

$3^1 = 3$

$\div 3$

$3^0 = 1$

$\div 3$

$3^{-1} = \frac{1}{3}\left(1 \div 3 = \frac{1}{3}\right)$

$\div 3$

$3^{-2} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}\right)$

$\div 3$

$3^{-3} = \frac{1}{27}\left(\frac{1}{9} \div 3 = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}\right)$

$\div 3$

$3^{-4} = \frac{1}{81}\left(\frac{1}{27} \div 3 = \frac{1}{81} = \frac{1}{3^4}\right)$

Assim, podemos escrever:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ ou } a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \text{ para } a \neq 0 \text{ e } n \text{ um número natural.}$$

Ou, de outra maneira:

Um número diferente de 0 elevado a um expoente inteiro negativo é igual ao inverso desse número elevado ao módulo desse expoente, ou seja, ao mesmo expoente, mas positivo.

Veja mais alguns exemplos.

- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- $(-4)^{-2} = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$
- $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{1}\right)^3 = \frac{5^3}{1^3} = \frac{125}{1} = 125$

Observe que:

$$a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1, \text{ ou seja, } a \cdot a^{-1} = 1, \text{ com } a \neq 0.$$

Assim, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ é chamado de **inverso de a**.

Se a e b são números naturais diferentes de 0, então o **inverso** de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$, pois $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Observação

Note que, com essa definição de potência de expoente inteiro negativo, a propriedade fundamental da potenciação $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, com $a \neq 0$, continua válida, pois $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$.

Assim, $a^{-n} \cdot a^n = 1$ e, portanto, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

45. a) $\frac{1}{64}$ $\left(\frac{1}{8^2} = \frac{1}{64} \text{ ou } \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}\right)$ **b)** $\frac{1}{5}$ $\left(\frac{1}{5^1} = \frac{1}{5} \text{ ou } \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}\right)$ **c)** $\frac{1}{16}$ $\left(\frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16} \text{ ou } \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\right)$ **d)** 8 $\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 8 \text{ ou } 2^3 = 8\right)$ **e)** $-\frac{1}{27}$ $\left(\frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27} \text{ ou } \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}\right)$ **f)** 32 $\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = 32 \text{ ou } 2^5 = 32\right)$

Não escreva no livro!

Atividades

44 Partindo de 3^3 e usando o processo visto no *Explorar e descobrir* da página anterior, determine o valor de 3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3} e 3^{-4}. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$ e $\frac{1}{81}$.

45 Calcule no caderno o valor de cada potência.

a) 8^{-2}
b) 5^{-1}
c) $(-2)^{-4}$
d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
e) $(-3)^{-3}$
f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

46 Para a potenciação com base racional, diferente de 0, e expoente inteiro, continuam valendo as propriedades vistas quando o expoente era natural.

Copie as expressões no caderno e reduza cada uma delas a uma única potência.

a) $5^4 \cdot 5^{-3}$ 5^1
b) $\frac{2^{-3}}{2^{-1}}$ 2^{-2}
c) $(7^4)^{-3}$ 7^{-12}
d) $(-6)^{-3} \cdot (-6)^{-2}$ $(-6)^{-5}$
e) $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^{-1}$ $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-5}$
f) $3^{-2} \cdot 3^{-5} : 3^{-1}$ 3^{-6}

Atividade 46

Trabalha as propriedades estudadas para potências com expoente natural para efetuar operações com potências de expoente inteiro.

Veja a resolução de cada item desta atividade.

a) $5^4 \cdot 5^{-3} = 5^{4+(-3)} = 5^{4-3} = 5^1$

b) $\frac{2^{-3}}{2^{-1}} = 2^{-3-(-1)} = 2^{-3+1} = 2^{-2}$

c) $(7^4)^{-3} = 7^{4 \times (-3)} = 7^{-12}$

d) $(-6)^{-3} \cdot (-6)^{-2} = (-6)^{-3+(-2)} = (-6)^{-3-2} = (-6)^{-5}$

e) $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{-4+(-1)} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{-4-1} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{-5}$

f) $3^{-2} \cdot 3^{-5} \div 3^{-1} = 3^{-2+(-5)-(-1)} = 3^{-2-5+1} = 3^{-6}$

Potências de base 10

Vamos relembrar um processo prático para calcular o valor de uma potência quando a base é 10 e o expoente é um número natural.

- $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$ (o algarismo 1 seguido de 3 algarismos 0)
- $10^5 = 100\,000$ (o algarismo 1 seguido de 5 algarismos 0)
- $10^8 = 100\,000\,000$ (o algarismo 1 seguido de 8 algarismos 0)
- $10^0 = 1$ (o algarismo 1 e nenhum algarismo 0)

Agora, veja um processo prático para calcular o valor de uma potência quando a base é 10 e o expoente é um número inteiro negativo.

- $10^{-1} = \dfrac{1}{10^1} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

  1 casa depois da vírgula

- $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}\underbrace{001}$

  3 casas depois da vírgula
  (2 algarismos 0 e o algarismo 1)

- $10^{-7} = \dfrac{1}{10\,000\,000} = 0{,}\underbrace{0000001}$

  7 casas depois da vírgula
  (6 algarismos 0 e o algarismo 1)

Bate-papo

Qual é a relação entre o expoente da potência e a quantidade de zeros do resultado?

São iguais.

Bate-papo

E para o expoente inteiro negativo, qual é a relação entre ele e a quantidade de casas decimais do resultado?

A quantidade de casas decimais do resultado é igual ao módulo do expoente.

49. $3 \times 10^2 = 300$; $3 \times 10^{-2} = 0{,}03$; $3^{-2} \times 10 = 1{,}\overline{1}$; $3^2 \times 10^{-2} = 0{,}09$; $3^{-2} \times 10^2 = 11{,}\overline{1}$; $3^2 \times 10^2 = 900$; $3^2 \times 10 = 90$; $3^{-2} \times 10^{-2} = 0{,}00\overline{1}$.

Atividades

Não escreva no livro!

47 Calcule no caderno o valor de cada potência. Nas potências de expoente negativo, represente o valor na forma decimal.

a) 10^6 1 000 000
b) 10^{-6} 0,000001
c) 10^{-4} 0,0001
d) 10^4 10 000
e) 10^{-2} 0,01
f) 10^{-5} 0,00001
g) 10^{10} 10 000 000 000
h) 10^{-8} 0,00000001

48 Escreva no caderno cada número como potência de base 10.

a) 1 000 10^3
b) 0,01 10^{-2}
c) $\dfrac{1}{10\,000}$ 10^{-4} $\left(\dfrac{1}{10^4} = 10^{-4}\right)$
d) 10 000 000 10^7
e) 0,00001 10^{-5}
f) 100 000 000 000 10^{11}
g) 1 10^0
h) $1\,000 \cdot 10\,000$ 10^7 $(10^3 \cdot 10^4 = 10^{3+4} = 10^7)$

49 No caderno, relacione cada número do primeiro quadro com o correspondente do segundo quadro.

$3 \cdot 10^2$	$3^{-2} \cdot 10$	$3^{-2} \cdot 10^2$	$3^2 \cdot 10$
$3 \cdot 10^{-2}$	$3^2 \cdot 10^{-2}$	$3^2 \cdot 10^2$	$3^{-2} \cdot 10^{-2}$

900	0,09	$11{,}\overline{1}$	0,03
$1{,}\overline{1}$	90	300	$0{,}00\overline{1}$

50 Determine no caderno o valor de cada expressão.

a) $10^5 \times 0{,}01$ 1000
b) $10^{-3} \times 0{,}1$ 0,0001
c) $10^4 + 10^{-2}$ 10 000,01
d) $\dfrac{1}{1000} + 10^2$ 100,001

2 Potenciação

Proponha que calculem os valores das potências de base 10 com expoentes naturais dadas no livro. Em seguida, pergunte quantos zeros tem o resultado de 10^1, 10^2 e 10^{10}.

Bate-papo

Verifique se os alunos descobriram alguma relação entre o expoente natural da potência de base 10 e a quantidade de zeros do resultado e incentive-os a criar uma regra para a relação percebida.

Após o primeiro *Bate-papo*, na lousa, apresente o cálculo de 10^{-1} e incentive-os a calcular o resultado das outras potências de base 10 com expoentes inteiros negativos fornecidas no material. Então, questione quantas casas decimais tem o resultado de 10^{-2}, 10^{-5} e 10^{-10}.

Bate-papo

Confira se os alunos entenderam que existe uma relação entre o expoente inteiro negativo da potência de base 10 e a quantidade de casas decimais do resultado e incentive-os a elaborar uma regra prática para calcular esses valores.

Depois desse segundo *Bate-papo*, sugira aos alunos que escrevam, no painel de descobertas, essas regras que inventaram para o cálculo de potências de 10.

As atividades relacionam potências de base 10 (de expoente positivo ou negativo) com o valor delas.

Atividade 47

Destaque que as potências de expoente negativo devem ser representadas usando-se decimais.

Atividades 49 e 50

Estas atividades desenvolvem o cálculo do valor de expressões numéricas envolvendo potências de 10.

Na atividade 50, se necessário, peça aos alunos que escrevam decimais e frações na forma de potências de base 10 antes de efetuar as operações. Veja a resolução dos itens desta atividade.

a) $10^5 \times 10^{-2} = 10^{5+(-2)} = 10^3 = 1\,000$

b) $10^{-3} \times 10^{-1} = 10^{-3+(-1)} = 10^{-4} = 0{,}0001$

c) $10\,000 + 0{,}01 = 10\,000{,}01$

d) $0{,}001 + 100 = 100{,}001$

2 Potenciação

Peça que leiam as informações apresentadas nesta página e que pesquisem a população e a medida de área da China, país citado no texto.

Então, sugira que decomponham os valores da população e da medida de área do Brasil, da Índia e da China, no caderno, usando potências de 10 e uma outra maneira.

Ao final, solicite que compartilhem as decomposições com a turma.

Atividades 51 e 52

Estas atividades trabalham a decomposição de números usando potências de 10.

Confira abaixo a resolução dos itens da atividade 51.

No item **d**, relembre os alunos que a densidade demográfica de uma região é dada pela razão entre o número de habitantes do local e a medida de área da região, como visto no 7º ano. Assim, no Brasil havia aproximadamente 24 pessoas por km^2, enquanto na Índia havia quase 400 pessoas por km^2 em 2015. Sugira que a turma imagine essa quantidade de pessoas em uma região, comparando quantas vezes a densidade demográfica da Índia é maior do que a do Brasil.

Se achar conveniente, peça aos alunos que pesquisem os países com maior e menor densidade demográfica ou organizem a densidade demográfica dos estados brasileiros em uma tabela, em conjunto com as aulas de Geografia.

Atividade 53

Esta atividade aborda a escrita de expressões como uma única potência de 10, usando as propriedades de produto e quociente de potências de mesma base.

Potências de base 10 e decomposição de números racionais

De acordo com a Organização das Nações Unidas (ONU), em 2030 a Índia, país do centro-sul da Ásia, será o país mais populoso do mundo, superando a China.

Grzegorz Czapski/Shutterstock

A Índia é um país que apresenta alta densidade demográfica (número de habitantes por quilômetro quadrado). Foto de 2018, em Bangalore (Índia).

Índia

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte de consulta: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 7. ed. Rio de Janeiro, 2016.

Veja a população da Índia em 2015 e a medida de área do território dela, comparadas com as do Brasil, de acordo com dados do IBGE.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

População e medida de área do Brasil e da Índia

País	População (em 2015)	Medida de área (em km^2)
Brasil	204 450 649 (ou seja, aproximadamente 204 milhões)	8 515 759
Índia	1 311 050 527 (ou seja, aproximadamente 1,31 bilhão)	3 287 260

Fonte de consulta: IBGE PAÍSES. Disponível em: <https://paises.ibge.gov.br/#/pt>. Acesso em: 7 jul. 2018.

O número 8 515 759 pode ser decomposto de várias maneiras, uma delas usando potências de 10.

$8\,515\,759 = 8\,000\,000 + 500\,000 + 10\,000 + 5\,000 + 700 + 50 + 9$

$8\,515\,759 = 8 \cdot 1\,000\,000 + 5 \cdot 100\,000 + 1 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1\,000 + 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 9 \cdot 1$

$8\,515\,759 = 8 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$

Atividades

Não escreva no livro!

52. d) $1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}$

51 Escreva no caderno. MP

a) A decomposição do número 1,31 bilhão com potências de base 10.

b) 3 decomposições diferentes do número 3 287 260.

c) O número 204 450 649 usando decomposição com potências de 10.

d) As densidades demográficas do Brasil e da Índia, em 2015. (Use uma calculadora.)

52 Leandro comprou este aparelho de *blu-ray*. Veja algumas maneiras que podemos escrever o número 502,58.

$502{,}58 = 5 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{100}$

$502{,}58 = 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$

Reprodução/Arquivo da editora

Aparelho de *blu-ray*.

Escreva no caderno a decomposição de cada decimal usando potências de 10.

a) 3,49 — $3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2}$

b) 31,6 — $3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}$

c) 17,043 — $1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$

d) 109,306

53 Simplifique cada expressão escrevendo-a no caderno com uma única potência de 10.

a) $\frac{10^5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2}{10^{-4} \cdot 10^7}$ $10 \left(\frac{10^{5-3+2}}{10^{-4+7}} = \frac{10^4}{10^3} = 10^{4-3} = 10 \right)$

b) $\frac{10^4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2}{10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}$ $10^{-1} \left(\frac{10^{4-6+2}}{10^{3+1-3}} = \frac{10^0}{10^1} = \frac{1}{10} = 10^{-1} \right)$

a) $1 \cdot 10^9 + 3 \cdot 10^8 + 1 \cdot 10^7 + 0 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$

b) Exemplos de resposta:

$3\,287\,260 = 3\,000\,000 + 200\,000 + 80\,000 + 7\,000 + 200 + 60 + 0$

$3\,287\,260 = 3 \times 1\,000\,000 + 2 \times 100\,000 + 8 \times 10\,000 + 7 \times 1\,000 + 2 \times 100 + 6 \times 10 + 0 \times 1$

$3\,287\,260 = 3 \times 10^6 + 2 \times 10^5 + 8 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 0 \times 10^0$

c) $2 \cdot 10^8 + 0 \cdot 10^7 + 4 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$

d) $204\,450\,649 \div 8\,515\,759 \simeq 24{,}01$

$1\,311\,050\,527 \div 3\,287\,260 \simeq 398{,}82$

Brasil: aproximadamente 24,01; Índia: aproximadamente 398,82.

A notação ou escrita científica

Cientistas como os astrônomos, os biólogos, os físicos, os químicos e outros costumam trabalhar com números muito maiores e muito menores do que 1, formados por muitos algarismos. Para simplificar essa escrita, foi criada a **notação científica**, que usa as potências de base 10.

A principal utilidade da notação científica é fornecer, de maneira rápida e simples, a ideia da ordem de grandeza de um número, que, se fosse escrito por extenso, não daria essa informação de modo tão imediato.

> Um número na notação científica deve ter as seguintes características:
> - ser escrito como um produto de 2 fatores;
> - um dos fatores deve ser um número de 1 a 10, excluído o 10;
> - o outro fator deve ser uma potência de base 10.

Observe os números das informações e como eles são escritos na notação científica.

- Urano é o sétimo planeta do Sistema Solar e a medida média da distância entre ele e o Sol é de 2 870 000 000 km.

  $2\,870\,000\,000 = 287 \cdot 10\,000\,000 = 2{,}87 \cdot 100 \cdot 10\,000\,000 = 2{,}87 \cdot 10^2 \cdot 10^7 = 2{,}87 \cdot 10^9$
- Uma molécula chega a ter medida de comprimento do diâmetro de 0,0000018 mm.

  $0{,}0000018 = 18 \cdot 0{,}0000001 = 1{,}8 \cdot 10^1 \cdot 10^{-7} = 1{,}8 \cdot 10^{-6}$

Notação científica: processo prático

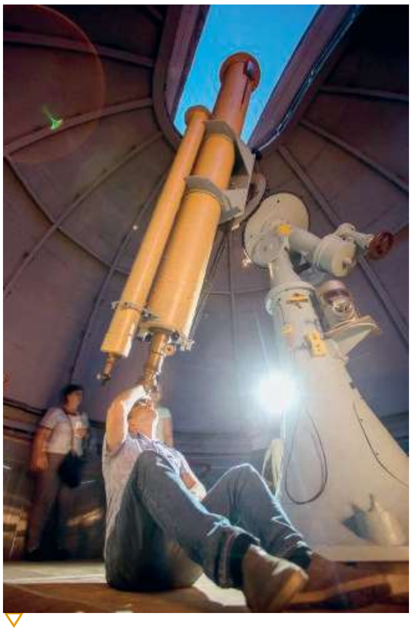
Observe os exemplos e tente descobrir o processo prático para escrever notações científicas.

Números maiores do que 1

- $2\,\underbrace{870\,000\,000}_{9 \text{ algarismos}} = 2{,}87 \cdot 10^9$
- $38\,000\,000 = 3{,}8 \cdot 10^7$
- $1\,470\,000 = 1{,}47 \cdot 10^6$
- $100\,000\,000 = 1 \cdot 10^8$

Números menores do que 1

- $0{,}\underbrace{000001}_{6 \text{ algarismos}}8 = 1{,}8 \cdot 10^{-6}$
- $0{,}0006 = 6 \cdot 10^{-4}$
- $0{,}0045 = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$
- $0{,}00000001 = 1 \cdot 10^{-8}$


Marina Lystseva/TASS/Getty Images

Astrônomo utilizando telescópio, instrumento usado para visualizar e mensurar elementos muito distantes da Terra, como planetas e estrelas.


Corbis Historical/Getty Images

Cientista utilizando microscópio, instrumento que possibilita a visualização e a mensuração de elementos muito pequenos, como células e moléculas.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

2 Potenciação

Explique o que é notação científica e quais as características de um número escrito nessa notação. Então, na lousa, apresente a medida média de distância entre Urano e o Sol e a medida de comprimento do diâmetro de uma molécula e peça aos alunos que as escrevam em notação científica.

Se houver oportunidade, junto com as aulas de Ciências, peça que façam 2 pesquisas:

- sobre as medidas de distância média entre cada planeta do Sistema Solar e o Sol, em quilômetros;
- sobre as medidas de comprimento de células, moléculas, tecidos, entre outros componentes dos seres vivos, em milímetros.

Esses dados devem ser organizados em uma tabela e os alunos devem incluir uma coluna para escrever cada uma dessas medidas em notação científica.

Após essa exploração, peça que leiam o processo prático para a escrita de números maiores do que 1 e números menores do que 1 em notação científica, dando um tempo para que os alunos conversem sobre esses processos. Em seguida, faça a formalização com toda a turma e peça que anotem o que consideraram mais importante sobre notação científica no painel de descobertas.

56. a) Aproximadamente 333 333 vezes. $\left(\dfrac{2 \times 10^{27}}{6 \times 10^{21}} = \dfrac{2 \times 10^{6} \times \cancel{10^{21}}}{6 \times \cancel{10^{21}}} = \dfrac{2\,000\,000}{6} \simeq 333\,333\right)$

b) Aproximadamente 82 vezes. $\left(\dfrac{6 \times 10^{21}}{7{,}348 \times 10^{19}} = \dfrac{6 \times 10^{2} \times \cancel{10^{19}}}{7{,}348 \times \cancel{10^{19}}} = \dfrac{600}{7{,}348} \simeq 82\right)$

Não escreva no livro!

Atividades

c) Quantas vezes a medida de massa do Sol é maior do que a medida de massa da Lua.

54 Escreva no caderno cada número em notação científica.

a) 49 000 000 000 $4{,}9 \cdot 10^{10}$

b) 0,00000607 $6{,}07 \cdot 10^{-6}$

c) 9 360 000 $9{,}36 \cdot 10^{6}$

d) 0,00001 $1 \cdot 10^{-5}$

e) 10 000 000 000 000 $1 \cdot 10^{13}$

f) 0,00007 $7 \cdot 10^{-5}$

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

55 Registre os números no caderno usando a forma decimal.

a) A medida média da distância entre a Terra e o Sol é de aproximadamente $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km.
150 000 000

Roger Harris/Science Photo Library/Latinstock

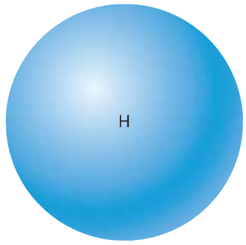
Planeta Terra visto do espaço.

b) Para percorrer 1 km, a luz gasta $3{,}3 \cdot 10^{-6}$ s.
0,0000033

Meirion Matthias/Shutterstock

Representação de um farol iluminado.

c) O átomo de hidrogênio tem medida de massa de $1{,}7 \cdot 10^{-24}$ g.
0,0000000000000000000000017



Banco de imagens/Arquivo da editora

Representação simplificada de um átomo de hidrogênio.

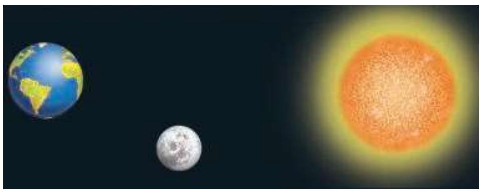
56 **Desafio.** A medida de massa do Sol é de $2 \cdot 10^{27}$ t, a medida de massa da Terra é de $6 \cdot 10^{21}$ t e a medida de massa da Lua é de $7{,}348 \cdot 10^{19}$ t.

Use uma calculadora, calcule e responda.

a) Quantas vezes a medida de massa do Sol é maior do que a medida de massa da Terra?

b) Quantas vezes a medida de massa da Terra é maior do que a medida de massa da Lua?

c) O que representa o produto obtido ao multiplicar os números calculados nos itens **a** e **b**?



Paulo Manzi/Arquivo da editora

Representação sem escala e em cores fantasia da Terra, da Lua e do Sol vistos do espaço.

57 Escreva no caderno usando notação científica.

a) A medida de distância média entre o Sol e Marte, que é de aproximadamente 227 900 000 km.
$2{,}279 \times 10^{8}$ km

b) A medida de distância média entre o Sol e Júpiter, que é de aproximadamente 778 400 000 km.
$7{,}784 \times 10^{8}$ km

Fonte de consulta: ASTRONOMIA E ASTROFÍSICA. *Sistema Solar*. Disponível em: <http://astro.if.ufrgs.br/ssolar.htm>. Acesso em: 24 set. 2018.

c) A medida de massa de um elétron, que é de aproximadamente 0,000000000000000000000000000911 g.
$9{,}11 \times 10^{-28}$ g

2 Potenciação

Atividades 54, 55 e 57

Estas atividades desenvolvem a escrita de números na forma decimal em notação científica e vice-versa.

Atividade 56

Esta atividade aborda problemas cujas medidas foram dadas em notação científica.

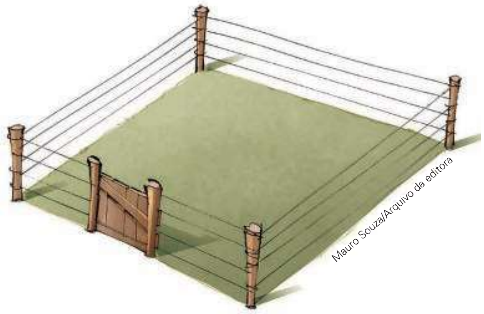
Pergunte aos alunos se, usando a calculadora, seria possível calcular as respostas se os números não estivessem em notação científica. Assim, podem verificar que não seria possível colocar todos os algarismos no visor, sendo impossível o uso da calculadora com o número na forma decimal.

3 Radiciação

Examine esta situação-problema.

José comprou um terreno de forma quadrada. Na escritura desse terreno estava indicada a medida de área dele: 169 m². Porém, nela não estava registrada a medida de comprimento de cada lado do terreno. Como José pode determinar essa medida de comprimento?

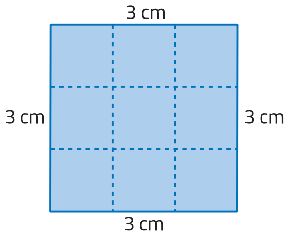
Na resolução dessa situação-problema está envolvida a ideia de **raiz quadrada**, que será estudada a seguir.



Mauro Souza/Arquivo da editora

A ideia de raiz quadrada

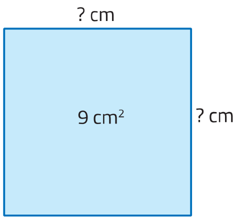
- Quando temos uma região quadrada com lados de medida de comprimento de 3 cm e queremos saber a medida de área dessa região, podemos: "quadricular" a região quadrada (em quadradinhos com lados de medida de comprimento de 1 cm) e verificar que a medida de área é de 9 quadradinhos, ou seja, de 9 cm²; ou efetuar a multiplicação $3 \times 3 = 9$ e, com isso, determinar que a medida de área é de 9 cm².



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Quando temos uma região quadrada cuja medida de área é de 9 cm² e queremos saber a medida de comprimento de cada lado, devemos determinar o número que, multiplicado por ele mesmo, resulte em 9, ou seja, o número que, elevado ao quadrado, resulte em 9.

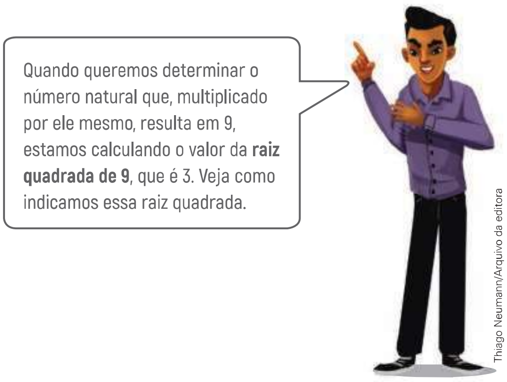
As imagens desta página não estão representadas em proporção.



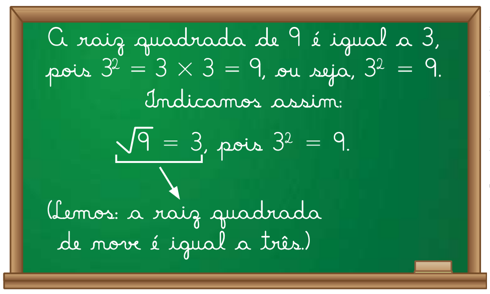
Banco de imagens/Arquivo da editora

Thiago Neumann/Arquivo da editora

- Como $3^2 = 3 \times 3 = 9$, concluímos que a medida de comprimento de cada lado dessa região quadrada é de 3 cm.



Thiago Neumann/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

3 Radiciação

Principais habilidades da BNCC

EF08MA01 EF08MA19 EF08MA02

Com os alunos, leia a situação-problema sobre o terreno de José e verifique as hipóteses da turma. Pode ser que algum aluno saiba determinar a raiz quadrada, mas provavelmente ninguém saiba. Então, explique que a resolução usa raiz quadrada, assunto que estudaremos a seguir.

Na lousa, apresente a relação entre as medidas de comprimento dos lados de uma região quadrada de 3 cm e a medida de área dela (9 cm²), como feito no livro.

Destaque que, quando queremos descobrir a raiz quadrada de um valor, buscamos um número que, multiplicado por ele mesmo, dê esse valor. Além disso, apresente o símbolo utilizado para se referir à raiz quadrada ($\sqrt{\ }$), mostrando que: $9 = 3 \cdot 3 = 3^2 \Rightarrow \sqrt{9} = 3$.

3 Radiciação

Chame a atenção dos alunos para o fato de que a medida de comprimento do lado de uma região quadrada equivale à raiz quadrada da medida de área dela. Assim, podemos resolver a situação-problema da página anterior. Pergunte aos alunos: "O que devemos fazer para determinar a medida de comprimento de cada lado do terreno de José?"; "Qual número multiplicado por ele mesmo é igual a 169?".

Após resolverem a situação-problema, explique que, quando elevamos ao quadrado o valor da raiz quadrada de a, obtemos o próprio a, ou seja, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Destaque que a e $\sqrt{a}$ são números racionais maiores ou iguais a 0.

Questione: "Calcular o valor da raiz quadrada é a operação inversa de qual operação?". Se necessário, explique que extrair a raiz quadrada de um número é a operação inversa de elevá-lo ao quadrado, apresentando o exemplo do livro, referente à situação-problema resolvida.

Em seguida, na lousa, apresente os exemplos de raízes quadradas fornecidos no material para que os alunos calculem os valores. Se considerar necessário, escreva outros exemplos. Então, explique que a raiz quadrada de um número natural, cujo valor também seja um número natural, é chamada de **raiz quadrada exata**.

Para fazer a interpretação geométrica da raiz quadrada, disponibilize material dourado aos alunos.

Observe que a medida de comprimento do lado de uma região quadrada corresponde à raiz quadrada da medida de área dela.

Assim, retomando a situação-problema inicial, em que o terreno de forma quadrada tem medida de área de 169 m², temos que a medida de comprimento do lado desse terreno corresponde à raiz quadrada de 169.

$$\sqrt{169} = 13, \text{ pois } 13^2 = 13 \times 13 = 169.$$

De um modo geral, para $a \in \mathbb{Q}$ e $a \geqslant 0$, o valor da **raiz quadrada de *a*** (indicada por $\sqrt{a}$) é um número positivo ou nulo que, elevado ao quadrado, resulta em a.
Em estudos posteriores, veremos que esse número nem sempre é racional.

Calcular o valor da raiz quadrada de um número racional positivo ou nulo, ou seja, extrair a raiz quadrada desse número, é a **operação inversa** de elevar esse número ao quadrado.

$$13^2 = 169 \Leftrightarrow \sqrt{169} = 13$$

Veja outros exemplos.

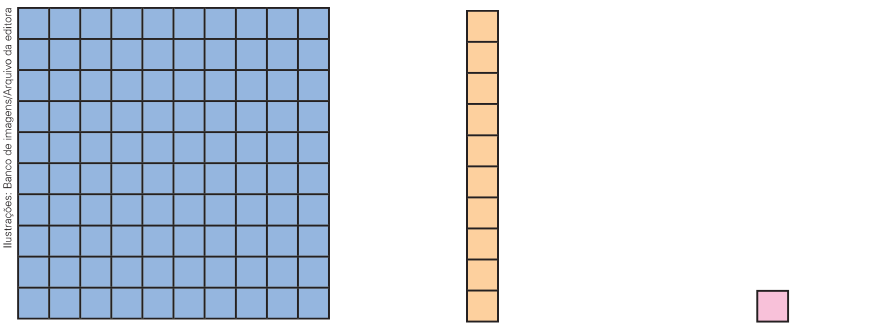
- $\sqrt{81} = 9$, pois $9^2 = 81$.
- $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, pois $(0{,}5)^2 = 0{,}25$.
- $\sqrt{10\,000} = 100$, pois $100^2 = 10\,000$.
- $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$, pois $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$.

Quando extraímos a raiz quadrada de um número racional e obtemos um número racional positivo ou nulo, dizemos que a raiz quadrada é **exata** em $\mathbb{Q}$.

Assim, para os exemplos acima, temos que $\sqrt{81} = 9$ e $\sqrt{10\,000} = 100$ são raízes quadradas exatas em $\mathbb{N}$ e $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ e $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$ são raízes quadradas exatas em $\mathbb{Q}$.

Interpretação geométrica da raiz quadrada

Observe como podemos usar estas regiões planas para formar regiões quadradas e calcular o valor de raízes quadradas.



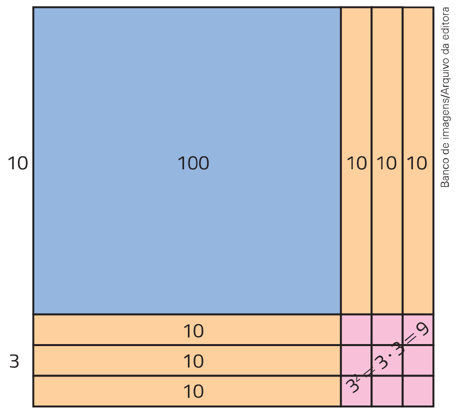
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

100 quadradinhos (10 por 10). 10 quadradinhos (1 por 10). 1 quadradinho (1 por 1).

Vejamos, por exemplo, a interpretação geométrica de $\sqrt{169}$.

Devemos obter uma região quadrada cuja medida de área é de 169 quadradinhos. A medida de comprimento do lado dessa região vai determinar o valor de $\sqrt{169}$.

- Medida de área da região azul: 100 quadradinhos.
- Medida de área da região laranja: 60 quadradinhos ($6 \cdot 10 = 60$).
- Medida de área da região rosa: 9 quadradinhos ($3^2 = 9$).
- Medida de área da região quadrada toda: 169 quadradinhos ($100 + 60 + 9 = 169$).



Dessa interpretação geométrica concluímos que a medida de comprimento de cada lado dessa região quadrada é 13 ($10 + 3 = 13$). Logo, $\sqrt{169} = 13$.

De modo geral, podemos fazer a interpretação geométrica dessa maneira para qualquer número natural que tem raiz quadrada exata, como é o caso do 169. Por isso, dizemos que esses números são **quadrados perfeitos**.

Observação: As raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos têm como resultado números que não são racionais. Esses números, chamados de irracionais, serão estudados nos anos seguintes.

Um pouco de História

O número de ouro dos gregos

O **número de ouro** dos gregos é dado por uma expressão numérica que envolve raiz quadrada e é aproximadamente igual a 1,618. Essa expressão foi muito usada pelo escultor grego Fídias e, em homenagem a ele, usamos a letra fi (ϕ) para representar o número de ouro:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618$$

Podemos identificar aproximações desse número em muitos elementos de arquitetura, em esculturas e em pinturas gregas. Por exemplo, a divisão da medida de largura (ℓ) pela medida de altura (h) do Partenon (século V a.C.), em Atenas, se aproxima do número de ouro:

$$\frac{\ell}{h} \simeq 1{,}618$$

Fonte de consulta: LÍVIO, Mario. *Razão áurea*: a história de fi, um número surpreendente. Trad. Marco Shinoba Matsumura. Rio de Janeiro: Record, 2006.

ColorMaker/Shutterstock

Vista do Partenon, em Atenas (Grécia). Ele foi erguido no século V a.C., na montanha de Acrópole, que fica localizada no centro de Atenas. Foto de 2018.

3 Radiciação

Organize os alunos em duplas e distribua as peças do material dourado. Os alunos usarão a face superior das peças do material dourado para representar a área de 169 quadradinhos. Oriente-os na representação e, depois, pergunte: "É possível fazer uma região quadrada?". Após as respostas, peça que criem outras regiões quadradas usando o material dourado e questione se verificam algo em comum entre as medidas de área e as medidas de comprimento dos lados delas. Se necessário, explique que as medidas de área dessas regiões quadradas têm raízes quadradas exatas e recebem o nome de **quadrados perfeitos**.

Em seguida, peça aos alunos que calculem, usando uma calculadora, a raiz de um número natural que não é um quadrado perfeito. Então, indague se o resultado é um valor racional e explique que ele é um número irracional e que será visto nos próximos anos.

Um pouco de História

Oriente os alunos a ler o texto e pergunte: "O número de ouro é um número racional?". Faça-os concluir que o número de ouro não é um número racional porque $\sqrt{5}$ é um número irracional.

Se achar conveniente, peça que pesquisem mais informações sobre o número de ouro para que verifiquem a importância dele na arquitetura, na arte, na natureza, etc.

3 Radiciação

Se possível, leve para a sala o cubo de milhar do material dourado. Peça aos alunos que observem o cubo e pergunte: "Qual é a medida de volume desse cubo, considerando o cubinho de 1 cm de medida de comprimento de aresta como unidade?". Incentive-os a escrever a expressão que representa esse cálculo: $V = 10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$.

Em seguida, questione-os: "Quanto mede o comprimento das arestas de um cubo cuja medida de volume é de 1 000 cm³?"; "Como vocês podem calcular essa medida, pensando de forma equivalente ao que foi feito para o cálculo de raiz quadrada?". Explique que devemos descobrir o número que, ao ser elevado ao cubo, resulta em 1 000, ou seja, buscamos a raiz cúbica de 1 000. Mostre que a representamos por $\sqrt[3]{1000}$.

Destaque que, quando elevamos ao cubo o valor da raiz cúbica de a, obtemos o próprio a, ou seja, $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$. Mas, diferentemente da raiz quadrada, a e $\sqrt[3]{a}$ são números racionais, podendo ser até mesmo negativos.

Neste momento, indague qual é a operação inversa de extrair a raiz cúbica de um número. Se necessário, explique que é elevar esse número ao cubo.

Então, desafie-os a descobrir a raiz cúbica dos exemplos dados no livro e verifique se algum aluno consegue calcular a $\sqrt[3]{-27}$. Para ajudá-los, mostre que $-27 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$.

Depois, esclareça que existem também raízes quartas, quintas e assim por diante. No conjunto dos racionais, explique que existe a raiz enésima de a para:

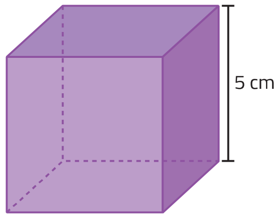
- todos os números racionais, se n for ímpar;
- os números racionais positivos ou nulos, se n for par.

Aproveite também para definir cada elemento da operação de radiciação, relacionando-o ao termo da potenciação correspondente.

Raiz cúbica

Considere um cubo cujas arestas têm medida de comprimento de 5 cm. Você já sabe calcular a medida de volume desse cubo.

$$V = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$
$$V = 125 \text{ cm}^3$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Agora, se sabemos que a medida de volume de um cubo é de 125 cm³ e quisermos determinar a medida de comprimento das arestas, devemos pensar no número a que, elevado ao cubo, resulta em 125.

Indicamos assim:

$$a^3 = 125$$
$$a = \sqrt[3]{125}$$

(Lemos: a é igual à **raiz cúbica** de cento e vinte e cinco.)

Portanto, $a = \sqrt[3]{125} = 5$, porque $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Observe que a medida de comprimento do lado de um cubo corresponde à raiz cúbica da medida de volume dele.

De um modo geral, para $a \in \mathbb{Q}$, a **raiz cúbica de a** (indicada por $\sqrt[3]{a}$) é um número que, elevado ao cubo, resulta em a.
Esse número nem sempre é racional.

Extrair a raiz cúbica de um número racional qualquer é a **operação inversa** de elevar esse número ao cubo.

$5^3 = 125 \Leftrightarrow \sqrt[3]{125} = 5$

Observe que não é necessário que esse número seja positivo ou nulo.

- $\sqrt[3]{-27} = -3$, pois $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$.
- $\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$, pois $0{,}2^3 = 0{,}008$.
- $\sqrt[3]{1000} = 10$, pois $10^3 = 1\,000$.
- $\sqrt[3]{\dfrac{8}{343}} = \dfrac{2}{7}$, pois $\left(\dfrac{2}{7}\right)^3 = \dfrac{8}{343}$.

Outras raízes

No conjunto dos números racionais existem também outras raízes.

- As **raízes quartas**, para os números racionais positivos ou nulo.
  Por exemplo, $\sqrt[4]{16} = 2$, pois 2 é positivo e $2^4 = 16$.
- As **raízes quintas**, para todos os números racionais.
  Por exemplo, $\sqrt[5]{243} = 3$, pois $3^5 = 243$.

  ⋮
- De modo geral, existe a **raiz enésima** de a para todos os números racionais, se n é ímpar, e para os números racionais positivos ou nulo, se n é par.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Assim, fica definida a **operação de radiciação**.

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Raiz: $\sqrt[n]{a}$
Índice: n
Radicando: a
Valor da raiz: b
Radiciação: $\sqrt[n]{a} = b$

O símbolo $\sqrt{\ }$ usado para representar uma raiz é chamado de **radical**.

Veja a relação entre os termos da radiciação e os termos da potenciação correspondente.

$\sqrt[n]{a} = b$	$\Leftrightarrow$	$b^n = a$
Índice: n		Expoente: n
Radicando: a		Valor da potência: a
Valor da raiz: b		Base: b
Radiciação: $\sqrt[n]{a} = b$		Potenciação: $b^n = a$

Um pouco de História

- O símbolo $\sqrt{\ }$ foi usado pela primeira vez em 1525, em um livro do matemático alemão Christoph Rudolff (1499-1545).
- É provável que a primeira letra da palavra *radix*, que em latim significa "raiz", tenha dado origem a esse símbolo.
- Em 1637, René Descartes (1596-1650) introduziu nesse símbolo o traço superior $\sqrt{\ }$ que usamos atualmente.
- Os hindus foram os primeiros a usar regras para extrair raízes quadradas.

Fonte de consulta: ASIMOV, Isaac. *Gênios da humanidade*. Rio de Janeiro: Bloch Editores S.A., 1972.

60. a) $\sqrt[3]{8} = 2$ e $2^3 = 8$. **b)** $5^4 = 625$ e $\sqrt[4]{625} = 5$.
c) $(-4)^3 = -64$ e $\sqrt[3]{-64} = -4$. **d)** $\sqrt[6]{64} = 2$ e $2^6 = 64$.

Atividades

Não escreva no livro!

62. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100;
$\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{81} = 9$, $\sqrt{100} = 10$.

58 No caderno, calcule o valor de cada raiz quadrada e, em seguida, indique a potenciação correspondente.

a) $\sqrt{9}$ $\sqrt{9} = 3$ e $3^2 = 9$.

b) $\sqrt{25}$ $\sqrt{25} = 5$ e $5^2 = 25$.

c) Raiz quadrada de 64. $\sqrt{64} = 8$ e $8^2 = 64$.

d) $\sqrt{1{,}96}$ $\sqrt{1{,}96} = 1{,}4$ e $(1{,}4)^2 = 1{,}96$.

e) $\sqrt{\dfrac{484}{49}}$ $\sqrt{\dfrac{484}{49}} = \dfrac{22}{7}$ e $\left(\dfrac{22}{7}\right)^2 = \dfrac{484}{49}$.

f) Raiz quadrada de 1. $\sqrt{1} = 1$ e $1^2 = 1$.

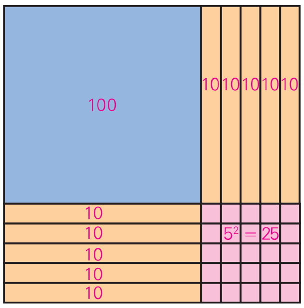
59 Uma região quadrada tem medida de área de 64 m². Qual é a medida de comprimento do lado dela?

60 No caderno, efetue a radiciação ou a potenciação de cada item e indique a operação inversa correspondente.

a) $\sqrt[3]{8} = \blacksquare$ c) $(-4)^3 = \blacksquare$

b) $5^4 = \blacksquare$ d) $\sqrt[6]{64} = \blacksquare$

61 Esta figura pode ser utilizada para calcular o valor de qual raiz quadrada? Indique no caderno e calcule o valor dela. $\sqrt{225} = 15$

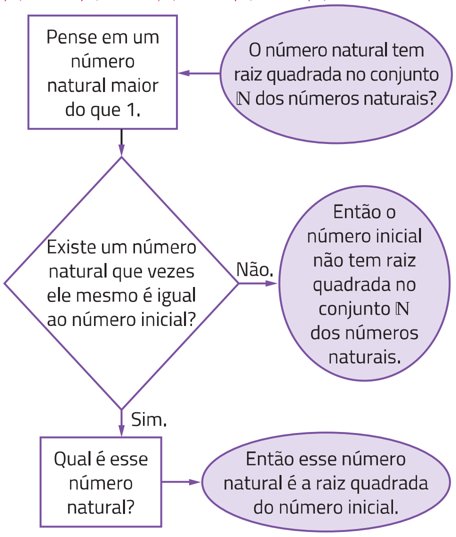


Banco de imagens/Arquivo da editora

62 Escreva no caderno a sequência dos 10 primeiros números positivos que são quadrados perfeitos. Depois, extraia a raiz quadrada de cada um deles.

(1, 4, 9, 16, 25, ...)

63 **Raiz quadrada e fluxograma.** Observe este fluxograma para o cálculo da raiz quadrada de número natural, no conjunto ℕ dos números naturais.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Usando esse fluxograma, verifique se cada número natural dado tem raiz quadrada em ℕ e, quando existir, registre o valor dela no caderno.

a) 36 c) 64 e) 49

b) 20 d) 12 f) 400

64 Uma sala de aula quadrada terá o piso coberto com ladrilhos com medida de comprimento dos lados de 60 cm.

a) Qual é a medida de comprimento dos lados da sala sabendo que a medida de área dela é de 81 m²? 9 m ($\sqrt{81} = 9$)

b) Quantos ladrilhos serão necessários para cobrir o piso? 225 ladrilhos. ($9 \div 0{,}6 = 15$; $15 \times 15 = 225$)

65 **Tentativa e erro.** A cozinha de Pedro tem forma quadrada com medida de área de 38 m². Faça tentativas e determine a medida aproximada do comprimento dos lados dessa cozinha sabendo que essa medida está entre 6 m e 7 m. Aproximadamente 6,17 m.

63. a) Sim; $\sqrt{36} = 6$. ($6 \times 6 = 36$)
b) Não existe em ℕ.
c) Sim; $\sqrt{64} = 8$. ($8 \times 8 = 64$)
d) Não existe em ℕ.
e) Sim; $\sqrt{49} = 7$. ($7 \times 7 = 49$)
f) Sim; $\sqrt{400} = 20$. ($20 \times 20 = 400$)

59. 8 m ($\sqrt{64} = 8$)

3 Radiciação

Um pouco de História

Peça aos alunos que leiam o texto e pergunte: "Por que será que foi acrescentado um traço superior ao símbolo de raiz?"; "Como escreveríamos $\sqrt{4+9}$ e $\sqrt{4}+9$ sem o traço superior?"; "Com o traço fica mais fácil ou mais difícil de diferenciar?". Verifique a opinião da turma.

As atividades desenvolvem os conceitos de radiciação, principalmente relacionados à raiz quadrada.

Atividades 58 e 60

Trabalham radiciação e potenciação como operações inversas.

Atividades 61 e 62

Apresentam números quadrados perfeitos.

A atividade 62 retoma sequências, assunto visto nos anos anteriores.

Atividades 63 e 65

Abordam raízes quadradas não exatas.

Na atividade 63, o cálculo da raiz quadrada de um número natural é apresentado em um fluxograma.

Na atividade 65, pergunte: "Entre quais números com uma casa decimal está $\sqrt{38}$?"; "E com 2 casas decimais?". Se necessário, peça que elevem os números ao quadrado para verificar se 38 está entre esses quadrados.

3 Radiciação

Retome, com os alunos, alguns exemplos de potenciações com bases racionais e expoentes inteiros e os conceitos de potenciação e radiciação que serão necessários para o entendimento do significado de uma potenciação com expoente fracionário.

Na lousa, apresente a potência $9^{\frac{1}{2}}$ e pergunte o que acontece se a elevarmos ao quadrado. Se necessário, mostre, passo a passo, que obteremos o resultado 9. Então, relembre que elevamos $\sqrt{9}$ ao quadrado, assim como a potência $9^{\frac{1}{2}}$, para obter 9 e questione se existe alguma relação entre $\sqrt{9}$ e $9^{\frac{1}{2}}$. Esperamos que alguns alunos percebam que são iguais.

Faça o mesmo para $8^{\frac{1}{3}}$ e $a^{\frac{1}{n}}$, sendo $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, e indague como podemos representar $8^{\frac{2}{3}}$ na forma de raiz, verificando as hipóteses da turma. Se necessário, mostre, passo a passo, que é $\sqrt[3]{8^2}$.

Neste momento, peça aos alunos que generalizem a escrita de potência com expoente fracionário na forma de raiz para $a^{\frac{m}{n}}$, tal que $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$ e $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, e registrem isso no painel de descobertas. Sugira que anotem no painel tudo que considerarem importante sobre radiciação e potenciação com expoente fracionário.

Potenciação com expoente fracionário

Você acaba de estudar que a potenciação e a radiciação são operações inversas. Sabendo disso, vamos ampliar o estudo da potenciação, agora com expoentes fracionários.

Retome alguns exemplos de potenciações com bases racionais e expoentes inteiros.

- $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$
- $(-8)^0 = 1$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$
- $5^{-1} = \frac{1}{5}$

Para estudar as potenciações com expoentes fracionários, continuaremos a considerar:

- para a potenciação, a propriedade $(a^m)^n = a^{m \times n}$;
- para a radiciação, $\sqrt[n]{a}$ para a racional qualquer, quando n é ímpar, e para a racional positivo ou nulo, quando n é par.

Inicialmente vamos estudar o significado de algumas potências com expoentes fracionários e, depois, fazer a generalização.

- Considere a potência $9^{\frac{1}{2}}$. Veja o que acontece elevando esse número ao quadrado.

$$\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 9^{2 \times \frac{1}{2}} = 9^{\frac{2}{2}} = 9^1 = 9$$

  Então, $9^{\frac{1}{2}}$ é um número que, elevado ao quadrado, resulta em 9.

  Considerando que $9^{\frac{1}{2}}$ é um número positivo, ele corresponde a $\sqrt{9}$.

  Logo, $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9}$.

- Agora, considere a potência $8^{\frac{1}{3}}$.

$$\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8^{3 \times \frac{1}{3}} = 8^{\frac{3}{3}} = 8^1 = 8$$

  Assim, $8^{\frac{1}{3}}$ elevado ao cubo resulta em 8.

  Logo, $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$.

- De um modo geral, para $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, temos:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{n \times \frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

  Assim, $a^{\frac{1}{n}}$ é um número que, elevado a n, é igual ao número a, ou seja:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

- Vejamos agora a potência $8^{\frac{2}{3}}$.

$$8^{\frac{2}{3}} = 8^{2 \times \frac{1}{3}} = \left(8^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^2}$$

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2}$$

Observe a diferença entre esta potência e a dos outros exemplos: nela, o numerador da fração do expoente é diferente de 1.

- De modo geral, para $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ e $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, temos:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \times \frac{1}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

  Ou seja:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

68. a) $64^{\frac{1}{3}}$ $\left(\sqrt[3]{64^1} = 64^{\frac{1}{3}}\right)$ **b)** 2^2 $\left(\sqrt[3]{2^6}\right) = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2$ **c)** $8^{\frac{2}{3}}$ $\left(\sqrt[3]{8^2} = 8^{\frac{2}{3}}\right)$ **d)** 4^1 $\left(\sqrt[3]{4^3} = 4^{\frac{3}{3}} = 4^1\right)$

Atividades

Não escreva no livro!

66. e) $\sqrt[5]{(-1)^3} = \sqrt[5]{-1} = -1$ **f)** $\sqrt[3]{1000^2} = \sqrt[3]{1\,000\,000} = 100$

66 No caderno, escreva a raiz correspondente à potência de cada item e calcule o valor dela, em $\mathbb{Q}$.

a) $81^{\frac{1}{4}}$ $\sqrt[4]{81} = 3$
b) $(-32)^{\frac{1}{5}}$ $\sqrt[5]{-32} = -2$
c) $(0{,}001)^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{10}$
d) $4^{\frac{3}{2}}$ $\sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$
e) $(-1)^{\frac{3}{5}}$
f) $1000^{\frac{2}{3}}$

67 Escreva no caderno cada raiz na forma de potência.

a) $\sqrt[3]{1\,000}$ $1\,000^{\frac{1}{3}}$
b) $\sqrt{36}$ $36^{\frac{1}{2}}$
c) $\sqrt[7]{1^3}$ $1^{\frac{3}{7}}$
d) $\sqrt[3]{8^2}$ $8^{\frac{2}{3}}$
e) $\sqrt[6]{0^5}$ $0^{\frac{5}{6}}$
f) $\sqrt[4]{16}$ $16^{\frac{1}{4}}$

68 Escreva no caderno a raiz $\sqrt[3]{64}$ na forma de potência:

a) de base 64;
b) de base 2;
c) de base 8;
d) de base 4.

69 No caderno, escreva na forma de potência de base 10 cada número dado.

a) 100 000 10^5
b) 0,001 10^{-3}
c) $\frac{1}{100}$ 10^{-2}
d) $\sqrt[3]{10}$ $10^{\frac{1}{2}}$
e) $\sqrt{1\,000}$ $10^{\frac{3}{2}}$
f) $\sqrt[5]{0{,}01}$ $10^{-\frac{2}{5}}$

70 Determine a medida de perímetro de cada região quadrada, dadas as medidas de área delas.

a) 64 cm²
b) 256 cm²

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) 32 cm $\left(\sqrt{64} = 8;\ 4 \times 8 = 32\right)$
b) 64 cm $\left(\sqrt{256} = 16;\ 4 \times 16 = 64\right)$

71 Calcule mentalmente o valor de cada raiz quadrada e registre no caderno.

a) $\sqrt{144}$ 12
b) $\sqrt{1{,}44}$ 1,2
c) $\sqrt{81}$ 9
d) $\sqrt{0{,}81}$ 0,9

72 Copie e complete as igualdades no caderno.

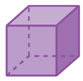
a) $\sqrt[3]{125} = \blacksquare$ 5
b) $\sqrt[3]{\blacksquare} = 4$ 64
c) $\sqrt[4]{81} = \blacksquare$ 3
d) $\sqrt[4]{\blacksquare} = 2$ 16
e) $\sqrt[3]{27\,000} = \blacksquare$ 30
f) $\sqrt[3]{0{,}027} = \blacksquare$ 0,3
g) $\sqrt[6]{\blacksquare} = 4$ 4096
h) $\sqrt[3]{0{,}001} = \blacksquare$ 0,1

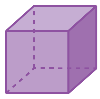
Raciocínio lógico

Pensei em um número. Somei-o à raiz cúbica de 27 e obtive a raiz quadrada de 16. Em qual número pensei?

1 $(\sqrt[3]{27} = 3;\ \sqrt{16} = 4;\ x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1)$

73 Calcule a medida de comprimento da aresta de cada cubo, dadas as medidas de volume deles.

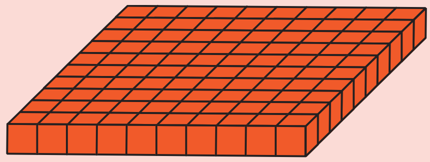
a)

$V = 512$ cm³
8 cm $\left(\sqrt[3]{512} = 8\right)$

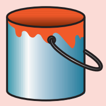
b)

$V = 1\,000$ cm³
10 cm $\left(\sqrt[3]{1\,000} = 10\right)$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Raciocínio lógico

Esta peça foi feita com 100 cubinhos. Pedro pintou todas as faces da peça de vermelho e depois separou os cubinhos.


Paulo Manzi/Arquivo da editora



- Determine a porcentagem de cubinhos que têm pintadas de vermelho:

a) todas as 6 faces; 0%
b) 4 faces; 4%
c) 2 faces; 64%
d) 5 faces; 0%
e) 3 faces; 32%
f) 1 face; 0%
g) nenhuma face. 0%

- Qual é a soma dessas 7 porcentagens? 100%

74 No caderno, determine o que se pede.

a) A soma da raiz quadrada de 81 com a raiz cúbica de 64. 13
b) A diferença entre a raiz cúbica de 27 e a raiz quadrada de 4. 1
c) O quadrado da raiz quadrada de 81. 81
d) O cubo da raiz cúbica de 8. 8

75 O quadrado de um número natural mais 2 é igual a 102. Qual é esse número? 10 $(10^2 + 2 = 100 + 2 = 102)$

76 O cubo de um número mais 5 é igual a 130. Qual é esse número? 5 $(5^3 + 5 = 125 + 5 = 130)$

77 Invente uma questão usando raiz quadrada e raiz cúbica e dê para um colega resolver. Você resolve a questão que ele criou. Resposta pessoal.

3 Radiciação

Atividades 66, 67, 68 e 69

Estas atividades desenvolvem a escrita de potências com expoente fracionário na forma de raiz e vice-versa.

Nas atividades 68 e 69, se necessário, peça aos alunos que fatorem os radicandos de acordo com a base proposta. Observe a resolução de alguns itens da atividade 69.

d) $\sqrt[3]{10^1} = 10^{\frac{1}{2}}$

e) $\sqrt{10^3} = 10^{\frac{3}{2}}$

f) $\sqrt[5]{10^{-2}} = 10^{-\frac{2}{5}}$

Atividades 70, 71, 72 e 73

Estas atividades abordam o cálculo de raízes.

Nas atividades 70 e 73, os alunos devem calcular as raízes de medidas de área e de volume.

Raciocínio lógico

Retomamos a resolução de equações, acrescentando o cálculo de raízes.

Raciocínio lógico

Aparentemente seria necessário o cálculo de porcentagens, mas, como a peça é formada por 100 cubinhos, basta a identificação da quantidade de faces pintadas em cada cubinho e a contagem desses sólidos geométricos.

Atividades 74, 75, 76 e 77

Estas atividades trabalham com expressões numéricas dadas em linguagem usual para calcular o valor delas ou descobrir um valor não fornecido.

Veja a resolução dos itens da atividade 74.

a) $\sqrt{81} + \sqrt[3]{64} = 9 + 4 = 13$

b) $\sqrt[3]{27} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$

c) $\left(\sqrt{81}\right)^2 = 9^2 = 81$ ou

$\left(\sqrt{81}\right)^2 = \left(81^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$

$= 81^{\frac{1}{2} \times 2} = 81^1 = 81$

d) $\left(\sqrt[3]{8}\right)^3 = 2^3 = 8$ ou $\left(\sqrt[3]{8}\right)^3 =$

$= \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 8^{\frac{1}{3} \times 3} = 8^1 = 8$

As atividades 75 e 76 poderiam ser escritas na forma de equação. No entanto, chame a atenção dos alunos para o fato de que não sabemos resolver equações que não sejam do 1º grau.

Na atividade 77, destaque que deve ser criada uma única questão que use raiz quadrada e raiz cúbica, lembrando os alunos de trocá-la com uma colega para que um resolva a situação criada pelo outro.

4 Sequências

Principais habilidades da BNCC

EF08MA10 EF08MA11

As sequências são objetos de estudo dos alunos, em Matemática, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. As sequências numéricas, em particular, costumam ser as mais estudadas. No início deste capítulo, por exemplo, foram estudadas a sequência dos números naturais e a sequência dos números inteiros. Pelas características dessas sequências, que os alunos já conhecem, eles devem ser capazes de descrever, com as próprias palavras, a lei de formação delas.

Além da regra dessas sequências, aproveite para iniciar uma conversa sobre elas terem ou não um primeiro ou um último termo e sobre a importância da ordem em que os números estão listados.

No livro do 7º ano desta coleção, os alunos também estudaram sequências e aprenderam a identificar e utilizar a fórmula do termo geral e a fórmula de recorrência para definir sequências numéricas. Faça uma retomada dos conhecimentos que eles já têm, identificando também as nomenclaturas de que se recordam, como "termo", "regra", "lei de formação", "fórmula do termo geral", "fórmula de recorrência", entre outras.

Explorar e descobrir

Peça aos alunos que respondam a essas questões que retomam conceitos já vistos sobre sequências. Nos itens 1 e 2, explique que não há apenas uma resposta correta e sugira aos alunos que se reúnam em grupos para que uns corrijam o que os outros fizeram.

Após as explorações, relembre como podemos identificar a ordem dos termos de uma sequência, apresentando algumas sequências para que a turma encontre o termo de acordo com o índice pedido ou que apresente o índice a partir do termo fornecido.

4 Sequências

No início deste capítulo, você estudou algumas **sequências numéricas**, como a dos números naturais e a dos números inteiros, que determinam conjuntos numéricos.

- Sequência dos números naturais: $(0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$.
- Sequência dos números inteiros: $(\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots)$.

Além das sequências numéricas, as sequências também podem ser formadas por objetos, pessoas, figuras geométricas, entre outros elementos. A esses elementos damos o nome de **termos da sequência**.

Na Matemática, nos interessa estudar as sequências que têm uma **lei de formação**, ou seja, uma **regra** que explica a relação entre os termos de cada sequência. Veja os exemplos.

Lei de formação	Sequência
Números naturais pares.	$(0, 2, 4, 6, \dots)$
Divisores de 12.	$(1, 2, 3, 4, 6, 12)$

Explorar e descobrir — Não escreva no livro!

1. Na sequência dos números naturais, a lista ordenada dos números obedece a uma lei de formação. Qual é ela? Exemplo de resposta: O primeiro termo é o 0 e, a partir do segundo, cada termo é 1 unidade a mais do que o anterior.
2. E qual é a lei de formação da sequência dos números inteiros? Exemplo de resposta: A partir de um número inteiro, cada termo deve ser 1 a mais do que o anterior e 1 a menos do que o seguinte.
3. Veja outros exemplos de sequências e responda ao que se pede.

a) Sequência dos dias da semana:

(segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado, domingo)

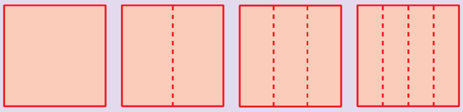
Quantos termos essa sequência tem? 7 termos.

b) Sequência dos anos de Copa do Mundo de futebol masculino, a partir de 2018:

$$(2018, 2022, 2026, 2030, \dots)$$

Observando a regra dessa sequência, é possível identificar quando ocorrerá a quinta Copa do Mundo de futebol masculino, a partir de 2018? Em 2034. (Como a Copa do Mundo de futebol masculino ocorre de 4 em 4 anos, temos: $2030 + 4 = 2034$.)

c) Sequência de figuras: Joaquim desenhou 4 regiões quadradas iguais e, em seguida, dividiu a segunda em 2 partes iguais, a terceira em 3 partes iguais e a última em 4 partes iguais.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O número de partes em que cada região quadrada foi dividida forma uma sequência. Qual é essa sequência? (1, 2, 3, 4)

Identificação de um termo da sequência

Quando queremos identificar a ordem em que um termo está disposto em uma sequência, podemos usar uma letra minúscula do nosso alfabeto, seguida de um **índice**.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots)$$

Por exemplo, considere a sequência formada pelos 6 primeiros números pares positivos (maiores do que 0).

$$(2, 4, 6, 8, 10, 12)$$

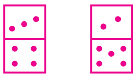
Nessa sequência, o primeiro termo é $\boldsymbol{a_1}$ (lemos: *a* índice um, ou *a* um), tal que $\boldsymbol{a_1 = 2}$; o segundo termo é $\boldsymbol{a_2 = 4}$; e assim por diante.

Sequência finita e sequência infinita

De acordo com o número de termos, uma sequência pode ser classificada como **finita** ou **infinita**. Você já estudou essa classificação no livro do 7º ano.

- **Sequência finita:** é aquela que tem um número finito de termos. Veja alguns exemplos.
  Sequência dos meses do ano com 30 dias: (abril, junho, setembro, novembro).
  Sequência dos números naturais primos menores do que 20: $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19)$.
- **Sequência infinita:** é aquela que tem um número infinito de termos. Veja alguns exemplos.
  Sequência dos números naturais: $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$.
  Sequência dos números inteiros: $(\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$.
  Sequência dos números inteiros e positivos que são múltiplos de 5: $(5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots)$.

Para indicar que uma sequência tem infinitos termos, usamos reticências (...) no início ou no final dela.

80. 
(4º termo) (5º termo)

Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro!

Atividades

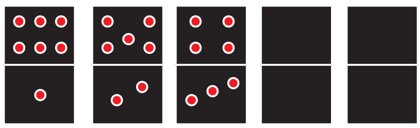
79. As sequências da atividade anterior são todas infinitas; as dos itens **a** e **c** do *Explorar e descobrir* são finitas e a do item **b** é infinita.

78 Considere a sequência numérica $(20, 17, 14, 11, 8, 5, x)$ cuja lei de formação é $a_1 = 20$ e cada termo, a partir do segundo, é 3 unidades a menos do que o anterior. Neste caso, temos $x = 2$.
Agora, observe as sequências dadas e, no caderno, determine o valor de x em cada uma delas.
Exemplos de resposta:
a) $(\dots, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, 23, x)$ **a)** $x = 27$ $(23 + 4 = 27)$
b) $(6, 12, 24, 48, 96, x, \dots)$ $x = 192$ $(2 \times 96 = 192)$
c) $(1, 4, 9, 16, 25, 36, x, \dots)$ $x = 49$ $(7^2 = 49)$

79 As sequências da atividade anterior são finitas ou infinitas? E as sequências dos itens **a**, **b** e **c** do *Explorar e descobrir* da página anterior?

80 Observe uma sequência de peças de dominó e, no caderno, determine os termos a_4 e a_5 dela.

Banco de imagens/Arquivo da editora



81 Até 2018 o Brasil foi campeão da Copa do Mundo de futebol masculino em 5 edições. Escreva no caderno a sequência dos anos em que isso ocorreu. (1958, 1962, 1970, 1994, 2002)

82 Considere a sequência $(2, 5, 8, \dots, 14, \dots)$, em que cada termo, a partir de a_2, é 3 unidades a mais do que o anterior. Quais são os termos a_4 e a_6?
$a_4 = 11$ e $a_6 = 17$. $(8 + 3 = 11$ ou $14 - 3 = 11$; $14 + 3 = 17)$

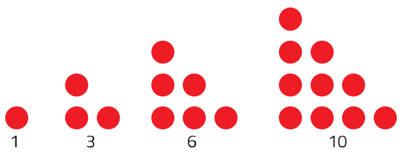
83 Escreva no caderno a sequência dos 6 primeiros estados do Brasil que são banhados pelo oceano Atlântico, partindo no sentido do sul para o norte, e classifique a sequência quanto ao número de termos. (RS, SC, PR, SP, RJ, ES); finita.

Brasil político

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte de consulta: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 7. ed. Rio de Janeiro, 2016.

84 Quantas bolinhas o próximo termo desta sequência tem? Exemplo de resposta: 15 bolinhas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

4 Sequências

Relembre a classificação de sequências em finitas ou infinitas, apresentando exemplos para que a turma as rotule.

Se achar conveniente, peça aos alunos que criem sequências finitas e sequências infinitas e as entreguem para um colega classificá-las. Em seguida, os alunos devem formar duplas para descreverem a lei de formação das sequências que criaram. Ao final, devem compartilhar com a turma tudo que fizeram.

Atividades 78, 80, 82 e 84

Estas atividades trabalham a descoberta de algum termo das sequências dadas.

Se achar conveniente, peça aos alunos que descrevam a lei de formação de cada uma das sequências destas atividades.

Na atividade 84, considerando que foram adicionadas 2 bolinhas ao primeiro termo para obter o segundo, 3 bolinhas ao segundo termo, 4 bolinhas ao terceiro, e assim por diante. Então, juntam-se 5 bolinhas ao quarto termo: $10 + 5 = 15$.

Atividade 79

Esta atividade aborda a classificação de sequências em finitas ou infinitas.

Atividades 81 e 83

Estas atividades desenvolvem a escrita de sequências a partir da descrição fornecida.

Na sequência da atividade 81, não existe um padrão numérico que relacione um termo a outro da sequência; o que define os termos da sequência é a lei de formação "anos em que o Brasil ganhou a Copa do Mundo".

Na atividade 83, destaque que, após a escrita da sequência, devem classificá-la em finita ou infinita.

4 Sequências

Retome o que são as fórmulas do termo geral e de recorrência e apresente o exemplo da sequência dos números ímpares, cuja fórmula do termo geral é $a_n = 2n - 1$ e a fórmula de recorrência é dada por $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 2$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$

Solicite a cada aluno que crie uma fórmula do termo geral e uma fórmula de recorrência de sequências diferentes.

Em seguida, na lousa, mostre como construir o diagrama para determinar os termos da sequência cuja fórmula de recorrência foi dada como exemplo no livro.

Bate-papo

Verifique se os alunos entenderam que, para determinar um termo de uma sequência a partir da fórmula de recorrência, é necessário calcular os termos anteriores a ele.

Construção de sequências

Você já sabe que as sequências são definidas seguindo uma **regra**, uma **lei de formação**. Também podemos usar fórmulas para definir e construir uma sequência.

- A **fórmula do termo geral** expressa cada termo a_n da sequência em função do valor de n.
  Por exemplo, a sequência dos números naturais pares não nulos, que é $(2, 4, 6, 8, \ldots)$, pode ser dada pela fórmula do termo geral $a_n = 2n$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$
- A **fórmula de recorrência** expressa cada termo a_n da sequência em função do termo anterior a_{n-1}.
  Por exemplo, a sequência cujo primeiro termo é 1 e cada termo, a partir do segundo, é obtido subtraindo 2 do termo anterior, ou seja, a sequência $(1, -1, -3, -5, \ldots)$, pode ser dada pela fórmula de recorrência $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} - 2$, com $n = 2, 3, 4, \ldots$

Usando essas fórmulas, podemos construir sequências. Acompanhe os exemplos.

- Sequência cuja fórmula de recorrência é $a_1 = 5$ e $a_n = a_{n-1} + 3$, para $n = 2, 3, 4, \ldots$
  Podemos determinar os termos dessa sequência usando a fórmula e um diagrama. Para isso, vamos calcular o valor de a_2 usando o valor de a_1; depois calcular o valor de a_3 usando o valor de a_2; e assim por diante.

$a_1 = 5$ e $a_n = a_{n-1} + 3$

Para $n = 1$:
$a_1 = 5$

Para $n = 2$:
$a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8 \Rightarrow a_2 = 8$

Para $n = 3$:
$a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11 \Rightarrow a_3 = 11$

Para $n = 4$:
$a_4 = a_3 + 3 = 11 + 3 = 14 \Rightarrow a_4 = 14$

Para $n = 5$:
$a_5 = a_4 + 3 = 14 + 3 = 17 \Rightarrow a_5 = 17$

⋮

Banco de imagens/ Arquivo da editora

Nessa sequência, podemos observar que, a partir do segundo termo, cada termo é igual ao termo anterior adicionado a 3. Esse procedimento de **sempre** recorrer ao termo anterior é chamado de **recursividade**. A sequência obtida é:

$$(5, 8, 11, 14, 17, \ldots)$$

1. $a_8 = 26$ ($a_6 = 17 + 3 = 20$; $a_7 = 20 + 3 = 23$; $a_8 = 23 + 3 = 26$)

2. Sim, pois a sequência foi dada por uma fórmula de recorrência, ou seja, cada termo a_n é dado em função do termo a_{n-1}.

Bate-papo

1. Converse com os colegas, faça os registros no caderno e responda: Qual é o termo a_8 dessa sequência?
2. Para calcular o valor do termo a_8 dessa sequência foi necessário calcular o valor de a_7? Justifique.
3. Como essa sequência pode ser classificada de acordo com o número de termos? Justifique. Sequência infinita, pois ela tem um número infinito de termos.

- Sequência cuja fórmula do termo geral é $b_n = 3(n + 1)$, com $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Novamente vamos usar a fórmula e construir um diagrama, substituindo n pelos possíveis valores, ou seja, por 1, depois por 2, em seguida por 3, por 4 e, finalmente, por 5.

$b_n = 3(n + 1)$

Para $n = 1$:
$b_1 = 3 \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow b_1 = 6$

Para $n = 2$:
$b_2 = 3 \cdot (2 + 1) = 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow b_2 = 9$

Para $n = 3$:
$b_3 = 3 \cdot (3 + 1) = 3 \cdot 4 = 12 \Rightarrow b_3 = 12$

Para $n = 4$:
$b_4 = 3 \cdot (4 + 1) = 3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow b_4 = 15$

Para $n = 5$:
$b_5 = 3 \cdot (5 + 1) = 3 \cdot 6 = 18 \Rightarrow b_5 = 18$

Banco de imagens/ Arquivo da editora

A sequência obtida é:

$$(6, 9, 12, 15, 18)$$

1. Não, pois temos $n = 1, 2, 3, 4, 5$, ou seja, a sequência tem apenas os termos b_1, b_2, b_3, b_4 e b_5.
2. Não, pois a sequência foi dada por uma fórmula do termo geral, ou seja, cada termo b_n é dado em função apenas do valor de n.
3. Sequência finita, pois ela tem um número finito de 5 termos.

Bate-papo

1. Podemos determinar o termo b_6 nessa sequência? Justifique.
2. Para calcular o valor do termo b_4 dessa sequência foi necessário usar o valor de b_3? Justifique.
3. Como essa sequência pode ser classificada de acordo com o número de termos? Justifique.

Atividades

Não escreva no livro!

85 Copie no caderno o diagrama da sequência dada pela fórmula do termo geral $c_n = 2^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ e complete-o determinando o termo c_5.

Para $n = 5$: $c_5 = 2^5 = 32$.

$c_n = 2^n$

Para $n = 1$:
$c_1 = 2^1 = 2$

Para $n = 2$:
$c_2 = 2^2 = 4$

Para $n = 3$:
$c_3 = 2^3 = 8$

Para $n = 4$:
$c_4 = 2^4 = 16$

Banco de imagens/ Arquivo da editora

86 Observe as fórmulas dadas e escreva no caderno se ela é do termo geral da sequência ou de recorrência. Em seguida, monte o diagrama e escreva a sequência. MP

a) $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 0{,}5$ e $n = 2, 3, 4, 5$.

b) $b_n = 10 \cdot 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $c_n = 2n^2$ e $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

d) $d_n = (d_{n-1})^2 - 1$, $d_1 = -1$ e $n = 2, 3, 4, \ldots$

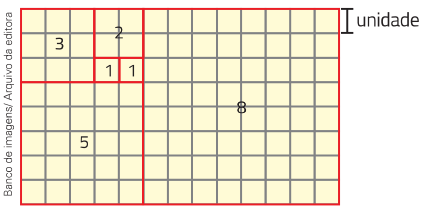
87 Pense em uma fórmula para representar cada sequência dada e registre-a no caderno. Em seguida, determine o quinto termo de cada sequência.

a) $(1, 8, 27, 64, \ldots)$

b) $(1, 3, 5, 7, \ldots)$

c) $(1, 3, 9, 27, \ldots)$ MP

88 **Desafio.** Veja nesta figura uma sequência de regiões quadradas em um papel quadriculado. Os números indicam a medida de comprimento dos lados delas.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Essas medidas de comprimento podem ser organizadas em uma sequência:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$$

a) Determine o sétimo e o oitavo termos dessa sequência. $a_7 = 13$ e $a_8 = 21$.

b) Podemos definir essa sequência de uma maneira recursiva, ou seja, por uma fórmula de recorrência? Sim, por $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, para $n = 3, 4, 5, \ldots$

Atividades 87 e 88

Trabalham a escrita das fórmulas do termo geral ou de recorrência das sequências dadas.

Na atividade 87, os alunos podem escolher determinar uma fórmula do termo geral ou uma fórmula de recorrência para cada sequência. Essa escolha depende da própria sequência dada e da observação que eles fazem sobre o "comportamento" dos termos dela. Peça a eles que compartilhem com os colegas as escolhas feitas. Confira exemplos de resposta dos itens desta atividade.

a) Fórmula do termo geral $a_n = n^3$; $a_5 = 5^3 = 125$.

b) Fórmula de recorrência $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 2$; $a_5 = 7 + 2 = 9$.

c) Fórmula do termo geral $a_n = 3^{(n-1)}$; $a_5 = 3^{5-1} = 3^4 = 81$.

Na sequência da atividade 88, conhecida como sequência de Fibonacci, a partir do terceiro termo, cada termo é igual à soma dos 2 termos anteriores. Assim: $a_7 = 5 + 8 = 13$ e $a_8 = 8 + 13 = 21$. No item **b**, se necessário, complemente a pergunta dizendo "Podemos definir essa sequência de uma maneira recursiva, ou seja, por uma fórmula de recorrência **usando os 2 termos anteriores**?". Se achar conveniente, informe que esta é a sequência de Fibonacci e peça que pesquisem o tema.

4 Sequências

Na lousa, mostre como construir o diagrama para determinar os termos da sequência cuja fórmula do termo geral encontra-se no material.

Bate-papo

Verifique se os alunos entenderam que, para determinar um termo de uma sequência a partir da fórmula do termo geral, não é necessário calcular os termos anteriores a ele, diferentemente da fórmula de recorrência.

Após o *Bate-papo*, sugira aos alunos que compartilhem hipóteses e conclusões e registrem o que considerarem mais importante sobre sequências no painel de descobertas.

Atividades 85 e 86

Nestas atividades são usados diagramas para determinar termos das sequências dadas pelas fórmulas do termo geral ou de recorrência.

Veja a resolução da atividade 86 na página XLIV deste Manual.

Se achar conveniente, apresente aos alunos outras sequências para desafiá-los com expressões envolvendo outras operações.

Leitura

Principais habilidades da BNCC

EF08MA11 EF08MA21

Peça aos alunos que leiam o texto e compartilhem o que consideraram mais importante e conhecimentos anteriores. Depois, faça alguns questionamentos para verificar o que entenderam sobre o texto: "O que é axioma?"; "O que é Geometria euclidiana?"; "Por que foram criadas geometrias não euclidianas?".

Se houver oportunidade, peça que façam uma pesquisa sobre Euclides, Lobachevsky, Riemann e Mandelbrot. Organize os alunos em grupos e destine um matemático para cada grupo pesquisar e apresentar para a turma.

Em seguida, oriente-os a pesquisar imagens de fractais. Se houver os recursos disponíveis, projete para a turma algumas dessas imagens. Então, peça aos alunos que criem desenhos e gravuras fractais e promova a exposição dos trabalhos pela escola.

LEITURA

As ideias de sequência, lei de formação e recursividade também estão presentes na Geometria. Acompanhe a leitura deste texto para conhecer mais sobre o assunto.

De Euclides ao cubo mágico: uma longa história da Geometria

Grande parte da Geometria que estudamos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio se deve ao matemático grego Euclides.

Os dados biográficos sobre ele, inclusive as datas de nascimento e de morte, são bastante imprecisos. O que se sabe é que ele viveu entre os séculos III a.C. e II a.C. e que nasceu onde atualmente é a Síria. Além disso, foi um dos mestres no *Museum* de Alexandria, a maior e mais célebre escola da antiguidade, e escreveu a obra *Elementos*, que serviu de alicerce para o estudo da Geometria durante séculos.

A Geometria euclidiana era fundamentada em verdades absolutas e indiscutíveis chamadas de **axiomas**. No entanto, no século XIX, alguns matemáticos resolveram contestar as ideias de Euclides. O matemático russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) foi o primeiro a declarar a "independência" dessas verdades, criando a própria teoria. Outro mestre da Geometria, o alemão George Friederich Bernhard Riemann (1826--1866), seguiu o exemplo e também criou um sistema diferente. Eles estavam criando outras Geometrias, que atualmente são chamadas de Geometrias não euclidianas.

Posteriormente, no século XX, alguns matemáticos perceberam que a Geometria euclidiana não conseguia estudar todos os modelos vistos no dia a dia. Eles se intrigavam ao constatar, por exemplo, que nunca vamos nos deparar na natureza com a forma de uma esfera. Podemos encontrar formas aproximadas à da esfera, como em uma laranja ou no próprio planeta Terra; mas serão sempre formas parecidas e nunca a forma de uma esfera perfeita. Outro exemplo são as árvores, como certos pinheiros, que apresentam a forma aproximada de um cone; novamente, a forma é apenas aproximada.

E como podemos estudar essas formas imprecisas? Como estudar como surgem os galhos de uma árvore, por exemplo? Popularmente dizemos que esses galhos aparecem (ou nascem) de maneira bagunçada, sem nenhum padrão; os matemáticos dizem que esses galhos aparecem de maneira "caótica".

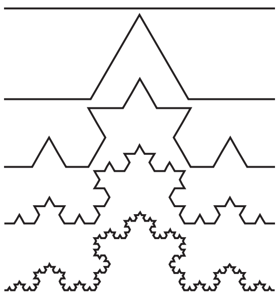
E seria possível prever acontecimentos caóticos, como esses? Sim, é possível e assim nasceu mais uma Geometria não euclidiana: a **Geometria fractal**.

Esse termo foi criado em 1975 pelo matemático Benoît Mandelbrot (1924-2010), nascido na Polônia, mas de nacionalidade francesa. A palavra **fractal** vem do latim *fractus*, que quer dizer pedaço, fração.

A interessante Geometria fractal tem muitas aplicações quando se estudam fenômenos caóticos, como as pesquisas eleitorais e a reprodução de células cancerígenas em um organismo.

Nessa Geometria, algumas figuras são obtidas por partes reduzidas de si mesmas, como nesta figura. Observe que existe um padrão: inicialmente temos um segmento de reta que é "quebrado" em 4 partes, depois em 16 partes, depois em 32 partes, e assim por diante.

Na natureza também podemos observar elementos que dão a ideia de fractal, como em um floco de neve ou em uma flor de couve ou de brócolis.


Banco de imagens/Arquivo da editora

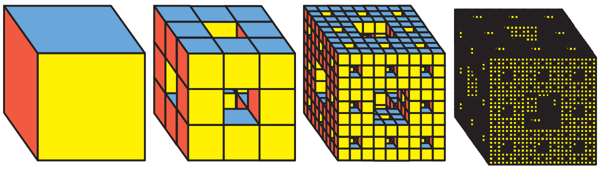
Fractal obtido a partir de um segmento de reta.


KENNETH LIBBRECHT/SPL/Fotoarena

Floco de neve.

Com o advento dos computadores, tornou-se possível criar figuras muito mais interessantes e complexas na Geometria fractal, em que cada parte é semelhante à figura como um todo. Observe ao lado um pedacinho desta figura e veja que ela é semelhante à figura toda.

Outro fractal interessante é a esponja de Menger. Veja os procedimentos para obtê-lo.



Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

LAGUNA DESIGN/SPL/Fotoarena

Fractal obtido usando programa de computador.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

1. Começamos com o cubo grande da 1ª imagem.
2. Esse cubo é dividido em 27 cubos idênticos.
3. O cubo do meio de cada face do cubo maior é removido e o cubo do centro também é removido.
4. Sobram 20 cubos, como na 2ª imagem.
5. Repetimos os passos 2 e 3 para cada cubo restante, e assim sucessivamente.

Observe como existe uma regularidade para a retirada desses cubos.

Esponja de Menger

Nível	0	1	2	3	...	n
Quantidade de cubos removidos	0	7	$7 \cdot 20$	$7 \cdot 20 \cdot 20 = 7 \cdot 20^2$	...	$7 \cdot 20^{n-2} \cdot 20 = 7 \cdot 20^{n-1}$
Quantidade de cubos restantes	$1 = 20^0$	$1 \cdot 20 = 20^1$	$20 \cdot 20 = 20^2$	$20^2 \cdot 20 = 20^3$	...	$20^{n-1} \cdot 20 = 20^n$

Tabela elaborada para fins didáticos.

Seguindo os procedimentos de construção da esponja de Menger, vamos obtendo um sólido geométrico em que, conforme a medida de área da superfície dele vai aumentando indefinidamente, a medida de volume vai se aproximando de 0.

Fonte de consulta: AZIMOV, Isaac. *Gênios da humanidade*. Rio de Janeiro: Bloch Editores S.A., 1972.

2. a) 8 cm³ (A aresta de cada cubo pequeno tem medida de comprimento de 2 cm ($6 \div 3 = 2$) e, então, a medida de volume é de 8 cm³ ($2 \times 2 \times 2 = 8$).)

2. b) 160 cm³ (A medida do volume do cubo inicial é de 216 cm³ ($6 \times 6 \times 6 = 216$). Dele retiramos 7 cubos pequenos, cada um com medida de volume de 8 cm³. Assim: $216 - 7 \times 8 = 216 - 56 = 160$.)

Questões

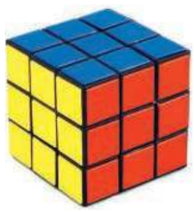
Não escreva no livro!

1 Pesquisem outros exemplos do cotidiano ou da natureza em que a Geometria fractal pode ser aplicada. Vocês vão se surpreender! Resposta pessoal.

2 Suponha um cubo, em que as arestas tenham medida de comprimento de 6 cm, e a divisão dele em 27 pequenos cubos, como no cubo mágico.

a) Qual é a medida de volume de cada cubo pequeno obtido?

b) Com esse cubo podemos simular a construção da esponja de Menger retirando 7 cubos pequenos. Qual é a medida do volume do sólido geométrico restante?



tinka's/Shutterstock

Cubo mágico.

3 Considere um cubo cujas arestas têm medida de comprimento de 1 m. Imagine a divisão desse cubo em cubinhos cujas arestas têm medida de comprimento de 1 mm.

a) Quantos cubinhos você obterá? 1 000 000 000 cubinhos ou 1 bilhão de cubinhos. ($1000 \times 1000 \times 1000 = 1\,000\,000\,000$)

b) Empilhando esses cubinhos, um a um, você formará uma torre com quantos quilômetros de medida de altura? 1 000 km (1 000 000 000 mm = 1 000 km)

Leitura

Ajude os alunos a entender as sequências das quantidades de cubos removidos e de cubos restantes na esponja de Menger.

Questões 1 e 2

É desenvolvido o assunto Geometria fractal a partir de exemplos cotidianos e da esponja de Menger.

Questão 3

Esta questão trabalha a composição de um cubo em cubinhos e a conversão de unidades de medida de comprimento.

Para ajudar os alunos a determinar quantos cubinhos formam o cubo dado, sugira que verifiquem em quantas partes iguais cada aresta do cubo foi dividida.

Revisando seus conhecimentos

Principais habilidades da BNCC

EF08MA03 EF08MA04 EF08MA12 EF08MA13

Peça aos alunos que resolvam as atividades para revisar os conhecimentos sobre conteúdos vistos até mesmo em anos anteriores. Incentive-os a consultar o livro, o caderno e o painel de descobertas para sanar dúvidas. No entanto, caso a dúvida persista, faça intervenções para favorecer a aprendizagem. Se necessário, retome os assuntos vistos em anos anteriores para relembrá-los.

Atividade 1

Esta atividade retoma os critérios de divisibilidade de 2, 3 e 5.

Atividades 2 e 9

Estas atividades apresentam situações cotidianas com grandezas direta ou inversamente proporcionais.

Na atividade 9, chame a atenção dos alunos para o fato de que devem indicar se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais. Veja as resoluções dos itens desta atividade.

a) $\frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{12}^{2}} = \frac{x}{3} \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3 \div 2 = 1{,}5$

1,5 h; grandezas inversamente proporcionais.

b) $\frac{\cancel{240}^{1}}{\cancel{480}^{2}} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 6$

6 h; grandezas diretamente proporcionais.

c) $\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}^{2}} = \frac{x}{20} \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 10$

10 dias; grandezas inversamente proporcionais.

d) $\frac{3}{x} = \frac{\cancel{45}^{1}}{\cancel{90}^{2}} \Rightarrow x = 6$

6 arrobas; grandezas diretamente proporcionais.

e) $\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{12}^{3}} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 30$

R$ 30,00; grandezas diretamente proporcionais.

Atividade 3

Esta atividade trabalha a descoberta da medida de comprimento do diâmetro de uma circunferência a partir da medida de comprimento dela.

2. R$ 38,25 $\left(17 \div 2 = 8{,}5 \text{ e } 4{,}5 \times 8{,}5 = 38{,}25 \text{ ou } \frac{2}{17} = \frac{4{,}5}{x} \Rightarrow 2x = 76{,}5 \Rightarrow x = 76{,}5 \div 2 = 38{,}25\right)$

Revisando seus conhecimentos

Não escreva no livro!

1. b) 1 596, 285, 2 139 e 4 200. (Números cuja soma dos algarismos é um número múltiplo de 3.)

1 ▸ Sem efetuar divisões, localize os números no quadro e registre-os no caderno.

1. c) 285, 1 340, 4 200 e 2 905. (Números cujo algarismo das unidades é 0 ou 5.)

1 001	787	2 139
1 596	285	4 200
346	1 340	2 905

a) Os 4 números que são múltiplos de 2. 1 596, 346, 1 340 e 4 200. (Números pares.)

b) Os 4 números que são múltiplos de 3.

c) Os 4 números que são múltiplos de 5.

2 ▸ Se 2 kg de carne custam R$ 17,00, então quanto custam 4,5 kg dessa carne?

3 ▸ Cláudia e uma amiga resolveram medir o comprimento da circunferência do bambolê com o qual estavam brincando. Usando uma fita métrica, encontraram a medida 314 cm. Então qual é a medida de comprimento do diâmetro desse bambolê?

100 cm (314 ÷ 3,14 = 100 ou 100 × 3,14 = 314)

4 ▸ Rogério gravou 4 DVDs, colocou-os em caixas com cores diferentes e arrumou-os na prateleira da estante, como indicado nesta imagem. Quantas arrumações diferentes Rogério pode fazer variando a posição das caixas na prateleira? 24 arrumações. (4 × 3 × 2 × 1 = 24)

Mauro Souza/ Arquivo da editora

5 ▸ Copie no caderno as 2 afirmações que são corretas.

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$

X b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

X c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

6 ▸ **(UFRGS-RS)** A razão entre a base e a altura de um retângulo é de 3 para 2 e a diferença entre elas é de 10 cm. A área desse retângulo é de:

a) 200 cm².

b) 300 cm².

c) 500 cm².

X d) 600 cm².

7 ▸ Analise estas 3 afirmações.

A: $\frac{2}{3}$ de 21 = 14

B: 10% de 6 000 = 600

C: 1% de 20 000 = 2 000

(21 ÷ 3 = 7 e 2 × 7 = 14; 6 000 ÷ 10 = 600; 20 000 ÷ 100 = 200)

Quais delas são verdadeiras?

a) **A**, **B** e **C**.

X b) **A** e **B**.

c) **A** e **C**.

d) **B** e **C**.

6. $\left(\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \text{ e } b - a = 10 \Rightarrow a = 20 \text{ e } b = 30 \Rightarrow a \times b = 600\right)$

8 ▸ Usando moedas de R$ 0,50, R$ 0,25 e R$ 0,10, de quantas maneiras diferentes podemos fazer um pagamento de R$ 1,00?

X a) 6

b) 4

c) 3

d) 5

9 ▸ Em cada item, calcule mentalmente e responda no caderno. Indique também se as grandezas envolvidas são direta ou inversamente proporcionais. MP

a) Uma torneira despeja 6 L de água por minuto e gasta 3 h para encher um tanque. Se ela despejasse 12 L por minuto, então em quanto tempo encheria o tanque?

b) Um carro percorreu 240 km em 3 h, em certa velocidade. Com a mesma velocidade, em quanto tempo ele percorrerá 480 km?

c) Dois pintores levam 20 dias para pintar uma casa. No mesmo ritmo de trabalho, quantos dias 4 pintores levariam para pintar essa casa?

d) Se 3 arrobas correspondem a 45 kg, então a quantas arrobas correspondem 90 kg?

e) O preço de 4 L de tinta é de R$ 10,00. Qual é o preço de 12 L?

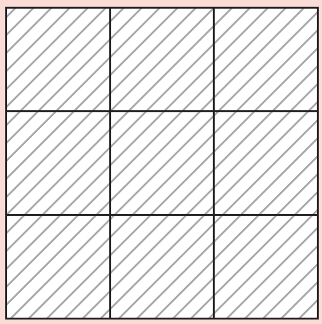
10 ▸ A idade atual de Marisa é o quíntuplo da idade de Paula. Daqui a 9 anos, a idade de Paula será $\frac{4}{11}$ da idade de Marisa. Determine as idades atuais de Marisa e Paula.

Marisa: 35 anos; Paula: 7 anos.

$\left(\text{Paula: } x\text{; Marisa: } 5x\text{; } x + 9 = \frac{4}{11}(5x + 9) \Rightarrow x = 7\text{; } 5 \times 7 = 35\right)$

Raciocínio lógico

Copie esta figura em uma folha de papel sulfite. Pinte 3 quadradinhos de azul, 3 de amarelo e 3 de vermelho. Mas atenção: 2 quadradinhos vizinhos não podem ter a mesma cor.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplo de resposta:

az	am	v
v	az	am
am	v	az

8. (10 × 0,10 ou 4 × 0,25 ou 2 × 0,50 ou 2 × 0,25 + 5 × 0,10 ou 1 × 0,50 + 5 × 0,10 ou 1 × 0,50 + 2 × 0,25.)

Atividades 4 e 8

Estas atividades apresentam problemas de contagem.

Na atividade 8, lembre os alunos de que a construção de uma árvore de possibilidades pode facilitar a resolução da situação apresentada.

Atividade 5

Esta atividade aborda as relações de inclusão entre os conjuntos numéricos vistos até agora.

Atividade 7

Esta atividade revisa o cálculo de fração e de porcentagem de um número.

Atividade 10

Esta atividade trabalha a escrita e a resolução de uma equação a partir dos dados fornecidos em linguagem usual.

Destaque que a idade de Paula será $\frac{4}{11}$ da idade de Marisa daqui

11 **Capacidade dos estádios de futebol no Brasil.** Em 2014, o Brasil foi sede da Copa do Mundo de Futebol. Foi a 20ª edição do evento e a 5ª vez que ele ocorreu na América do Sul. A Argentina havia sido o último país sul-americano a sediar a competição, em 1978.

O Brasil foi classificado automaticamente para a Copa do Mundo de 2014, por ser o anfitrião do evento, e terminou o campeonato em 4º lugar.

Caetano Barreira/Fotoarena

FIFA WORLD CUP Brasil

Logotipo da Copa do Mundo de 2014.

Veja na tabela a capacidade, durante o período da Copa, de alguns estádios que sediaram o evento.

Capacidade de alguns estádios que sediaram a Copa do Mundo de 2014

Estádio	Estado	Capacidade
Maracanã	RJ	74 738
Arena da Baixada	PR	39 631
Arena Amazônia	AM	40 549
Arena Pantanal	MS	41 112
Arena Corinthians	SP	63 321

Fonte de consulta: 2014 FIFA WORLD CUP BRAZIL. Disponível em: <www.fifa.com/worldcup/destination/stadiums/stadium=5025136/index.html>. Acesso em: 2 maio 2018.

a) 39 631, 40 549, 41 112, 63 321, 74 738.

Analise a tabela e faça no caderno o que se pede.

a) Escreva em ordem crescente os números da tabela.

b) Qual é o valor posicional do algarismo 6 no número 63 321? 60 000

c) Setenta e quatro mil, setecentos e trinta e oito.

c) Escreva por extenso o número 74 738.

d) Decomponha o número 41 112.
Exemplo de resposta: 40 000 + 1 000 + 100 + 10 + 2

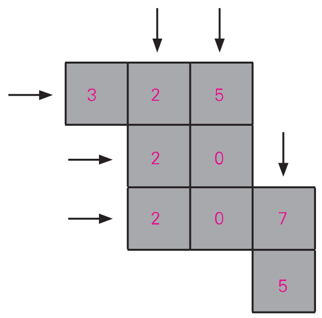
11. f) 747 grupos e sobram 38 lugares vagos. ($747 \times 100 = 74\,700$ e $748 \times 100 = 74\,800$; $74\,738 - 74\,700 = 38$)

e) Em qual dos números da tabela o algarismo das dezenas de milhar é 7? E em qual deles o algarismo das centenas é 1? 74 738; 41 112.

f) Quantos grupos de 100 pessoas cabem no Maracanã?

12 **Cruzadinha com expressões numéricas.** No caderno, copie esta cruzadinha e complete-a com os valores numéricos das expressões algébricas dadas. Para isso, coloque 1 algarismo em cada quadradinho da cruzadinha.

e) 325 ($7^3 - 7^2 + 3 \times 7 + 10 = 343 - 49 + 21 + 10 = 325$)



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) $x^2 - x + 8$ para $x = 4$. 20 ($4^2 - 4 + 8 = 16 - 4 + 8 = 20$)

b) $y^3 + y$ para $y = 6$. 222 ($6^3 + 6 = 216 + 6 = 222$)

c) $2n^2 + 7$ para $n = -10$. 207 ($2 \times (-10)^2 + 7 = 2 \times 100 + 7 = 207$)

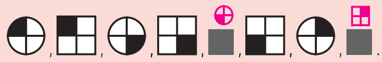
d) $\dfrac{a^2b + ab + 6a}{2}$ para $a = 5$ e $b = 4$.

e) $n^3 - n^2 + 3n + 10$ para $n = 7$.

f) $\dfrac{r^3}{2}$ para $r = 10$. 500 $\left(\dfrac{10^3}{2} = \dfrac{1000}{2} = 500\right)$

Raciocínio lógico

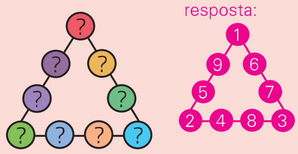
- Vamos brincar de descobrir quais são as sequências? Copie-as no caderno e complete de acordo com elas.

a) 

b) 

- Copie no caderno este diagrama. Escreva os números de 1 a 9 nos círculos de modo que a soma dos números em cada lado do diagrama seja 17. Use cada número uma única vez.

Exemplo de resposta:



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

12. d) 75 $\left(\dfrac{5^2 \times 4 + 5 \times 4 + 6 \times 5}{2} = \dfrac{100 + 20 + 30}{2} = 75\right)$

Revisando seus conhecimentos

Atividade 11

Nesta atividade são explorados números "grandes", apresentando dados da capacidade de estádios que sediaram a Copa do Mundo de 2014, que ocorreu no Brasil. Essa é uma temática que costuma ser do interesse dos alunos.

Atividade 12

Esta atividade retoma um dos conteúdos da unidade temática *Álgebra*, o cálculo do valor numérico de expressões algébricas, em um contexto lúdico de cruzadinha. Conhecendo o valor numérico de cada expressão algébrica dada, os alunos devem descobrir em quais linhas e colunas da cruzadinha colocar cada número. Acompanhe as estratégias que eles utilizam para isso.

Raciocínio lógico

Na primeira atividade, apresentamos sequências de figuras para que os alunos descubram a regularidade e as completem. Peça a eles que expliquem para os colegas a regularidade que identificaram, desenvolvendo a habilidade de se expressar matematicamente.

Na segunda atividade, os vértices do diagrama sempre terão os números 1, 2 e 3, e os demais pares de números podem aparecer em outra ordem nos lados do diagrama.

a 9 anos, ou seja, devemos somar 9 à idade de ambas para que essa relação exista.

Raciocínio lógico

Desenvolvemos o estudo das possibilidades de acordo com a condição dada. Peça aos alunos que pensem na situação proposta e, depois de resolvê-la, pintem na folha de sulfite.

Testes oficiais

Peça aos alunos que resolvam os testes oficiais. Acompanhe-os na tarefa e faça intervenções, se necessário.

Atividades 1, 2, 4 e 7

Nestas atividades desenvolvemos a localização de números na reta numerada.

Sugira aos alunos que escrevam as frações impróprias na forma de número misto para facilitar a resolução.

Na atividade 7, sugira aos alunos o cálculo aproximado do número irracional $\sqrt{3}$ ou a comparação dele com os outros valores colocados na reta numerada.

Atividades 3 e 5

Estas atividades trabalham o cálculo do valor de expressões numéricas com números racionais.

Atividade 6

Esta atividade aborda a escrita de um número racional na forma de notação científica.

Atividade 8

Esta atividade apresenta uma sequência de figuras para a determinação de um termo.

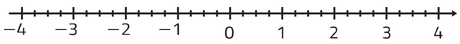
Se necessário, leve palitos para os alunos reproduzirem os primeiros termos da sequência e solicite que tentem descobrir a fórmula do termo geral para facilitar a resolução desta atividade.

2. $\left(\text{Tanto } 0{,}5 = \frac{1}{2} \text{ quanto } 0{,}25 = \frac{1}{4} \text{ estão entre 0 e 1, mas apenas o número } 1\frac{3}{4} \text{ está entre 1 e 2.}\right)$

Testes oficiais

Não escreva no livro!

1 **(Saeb)** Em uma aula de Matemática, o professor apresentou aos alunos uma reta numérica como a da figura a seguir. $\left(\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4};\ 2 < 2\frac{3}{4} < 3\right)$

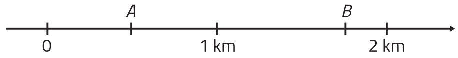


Banco de imagens/Arquivo da editora

O professor marcou o número $\frac{11}{4}$ nessa reta. Esse número foi marcado entre que pontos da reta numérica?

a) −4 e −3.
b) −3 e −2.
X c) 2 e 3.
d) 3 e 4.

2 **(Saresp)** Joana e seu irmão estão representando uma corrida em uma estrada assinalada em quilômetros, como na figura abaixo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

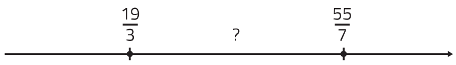
Joana marcou as posições de dois corredores com os pontos *A* e *B*. Esses pontos *A* e *B* representam que os corredores já percorreram, respectivamente, em km:

X a) 0,5 e $1\frac{3}{4}$.
b) 0,25 e $\frac{10}{4}$.
c) $\frac{1}{4}$ e 2,75.
d) $\frac{1}{2}$ e 2,38.

3 **(Saeb)** Fazendo-se as operações indicadas em $0{,}74 + 0{,}5 - 1{,}5$, obtém-se:

a) −0,64.
X b) −0,26.
c) 0,26.
d) 0,64.

4 **(Obmep)** Em qual das alternativas aparece um número que fica entre $\frac{19}{3}$ e $\frac{55}{7}$? $\left(\frac{19}{3} = 6{,}\overline{3};\ \frac{55}{7} = 7{,}85714...\right)$



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) 4
b) 5
X c) 7
d) 9

5 **(Obmep)** Qual é o valor de $1 + \dfrac{1}{1 - \frac{2}{3}}$?

$\left(1 + \dfrac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 1 + 1 \times \dfrac{3}{1} = 4\right)$

a) 2
b) $\frac{3}{2}$
X c) 4
d) $\frac{4}{3}$

6 **(Enem)** Uma das principais provas de velocidade do atletismo é a prova dos 400 metros rasos. No Campeonato Mundial de Sevilha, em 1999, o atleta Michael Johnson venceu essa prova, com a marca de 43,18 segundos.

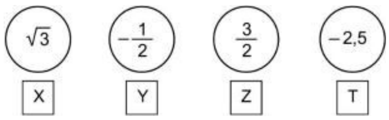
Esse tempo, em segundo, escrito em notação científica é:

a) $0{,}4318 \times 10^2$
X b) $4{,}318 \times 10^1$
c) $43{,}18 \times 10^0$
d) $431{,}8 \times 10^{-1}$
e) $4\,318 \times 10^{-2}$

$\left(43{,}18 = \frac{43{,}18}{10} \times 10 = 4{,}318 \times 10^1\right)$

7 **(Enem)** Em um jogo educativo, o tabuleiro é uma representação da reta numérica e o jogador deve posicionar as fichas contendo números [...] corretamente no tabuleiro, cujas linhas pontilhadas equivalem a 1 (uma) unidade de medida. Cada acerto vale 10 pontos.

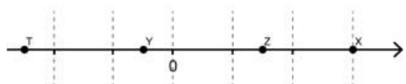
Na sua vez de jogar, Clara recebe as seguintes fichas:



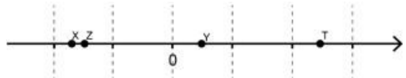
Reprodução/ENEM PPL, 2013

Para que Clara atinja 40 pontos nessa rodada, a figura que representa seu jogo, após a colocação das fichas no tabuleiro, é:

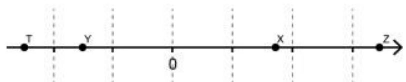
a)



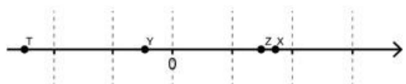
b)



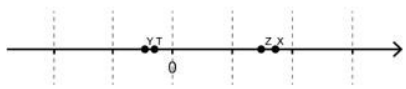
X c)



d)



e)



Fotos: Reprodução/ENEM PPL, 2013

8 **(Enem)** A figura ilustra uma sequência de formas geométricas formadas por palitos, segundo uma certa regra.


Reprodução/ENEM LIBRAS, 2017

Continuando a sequência, segundo essa mesma regra, quantos palitos serão necessários para construir o décimo termo da sequência?

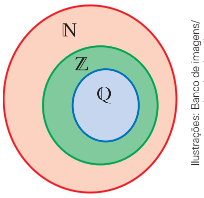
a) 30
X b) 39
c) 40
d) 43
e) 57

(A sequência do número de palitos é 3, 7, 11, ...; $a_1 = 3$; $a_2 = 3 + 1 \times 4 = 7$; $a_3 = 3 + 2 \times 4 = 11$; $a_4 = 3 + 3 \times 4 = 15$; ...; $a_{10} = 3 + 9 \times 4 = 39$.)

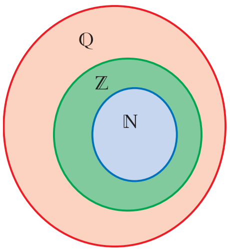
VERIFIQUE O QUE ESTUDOU

1 Copie no caderno apenas o diagrama que indica corretamente a relação entre os conjuntos $\mathbb{N}$ dos números naturais, $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e $\mathbb{Q}$ dos números racionais.

a)



X b)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

3. a) Falsa; contraexemplo: entre os números naturais 3 e 4 não há número natural.
b) Verdadeira; exemplo: entre os números inteiros −1 e −2 não há número inteiro, entre os números inteiros −1 e −3 há o número inteiro −2 e entre os números inteiros −1 e 2 há os números inteiros 0 e 1.

2 Indique no caderno quais afirmações são verdadeiras.

X a) Todo número natural é racional.

b) Todo número racional é inteiro.

X c) Todo número inteiro é racional.

X d) $3\frac{4}{5}$ é um número racional.

X e) -1 é um número racional.

3 Verifique se cada afirmação é verdadeira ou falsa. No caso de ser verdadeira, no caderno, dê 3 exemplos que a confirmem. No caso de ser falsa, dê 1 contraexemplo, ou seja, um exemplo que conteste a afirmação feita.

a) Entre 2 números naturais sempre existe outro número natural.

4. b) $1 \div 3 = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$; $2 \div 5 = 0,4$.

Não escreva no livro!

b) Entre 2 números inteiros nem sempre existe outro número inteiro.

4 Indique no caderno. Exemplos de resposta:

a) Uma operação com números naturais que é impossível em $\mathbb{N}$, mas é possível em $\mathbb{Z}$. $1 - 3 = -2$; $2 - 9 = -7$; $5 - 7 = -2$.

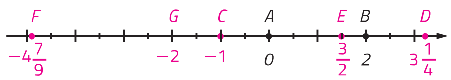
b) Uma operação com números naturais que é impossível em $\mathbb{Z}$, mas é possível em $\mathbb{Q}$.

5 Copie cada sentença no caderno e substitua os ▇ pelos números corretos.

a) Se $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = ▇$, então $\sqrt{▇} = \frac{1}{7}$. $\frac{1}{49}$; $\frac{1}{49}$.

b) Se $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = ▇$, então $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = ▇$. $\frac{27}{64}$; $\frac{3}{4}$.

6 Nesta reta numerada estão indicados os pontos *A* e *B* que correspondem aos números racionais 0 e 2, respectivamente.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Copie esta reta numerada no caderno e marque nela os pontos *C, D, E, F* e *G*, que correspondem às localizações aproximadas dos números racionais -1, $3\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$, $-4\frac{7}{9}$ e $(-8)^{\frac{1}{3}}$, respectivamente. $\left((-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2\right)$

7 No caderno, coloque na ordem crescente os valores de 3^0, $(-1)^5$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ e $4^{\frac{1}{2}}$.

8 Com um colega, criem no caderno 2 sequências numéricas (uma finita e outra infinita) e descrevam a lei de formação de cada uma delas. Resposta pessoal.

Atenção

Retome os assuntos que você estudou neste capítulo. Verifique em quais teve dificuldade e converse com o professor, buscando maneiras de reforçar seu aprendizado.

7. $(-1)^5$, 3^0, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$, $4^{\frac{1}{2}}$. $\left(3^0 = 1;\ (-1)^5 = -1;\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2};\ 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2;\ -1, 1, \frac{3}{2}, 2 \text{ ou } (-1)^5, 3^0, \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}, 4^{\frac{1}{2}}\right)$

Autoavaliação

Algumas atitudes e reflexões são fundamentais para melhorar o aprendizado e a convivência na escola. Reflita sobre elas. Respostas pessoais.

- Participei das atividades propostas, contribuindo com o professor e com os colegas para melhorar a qualidade das aulas?
- Esforcei-me para realizar as leituras do livro com atenção e para resolver as atividades e os problemas propostos?
- Estive atento a erros cometidos e procurei sanar as dúvidas com os colegas e com o professor?
- Conversei com os professores sempre que percebi alguma ausência de motivação para a aprendizagem?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

Verifique o que estudou

Principais habilidades da BNCC

EF08MA01 EF08MA02

Peça aos alunos que resolvam as atividades de verificação dos conhecimentos adquiridos neste capítulo. Comente que esta é uma importante oportunidade de analisar os conhecimentos adquiridos e os que ainda precisam ser desenvolvidos.

Atividades 1 e 2

Estas atividades abordam as relações de inclusão e pertinência com os conjuntos numéricos vistos até agora.

Atividade 3

Esta atividade trabalha a verificação de que os conjuntos dos números naturais e dos inteiros não são densos.

Se achar conveniente, pergunte se entre 2 números racionais sempre existe outro número racional.

Atividade 4

Esta atividade desenvolve a escrita de operações não definidas em um conjunto numérico, mas definidas no conjunto numérico que o contém.

Explique aos alunos que existe mais de uma resposta correta para esta atividade e permita que compartilhem com a turma as operações que escreveram.

Atividade 5

Esta atividade relaciona potenciações com radiciações, a partir do conceito de que são operações inversas.

Veja a resolução de cada item desta atividade.

a) $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1^2}{7^2} = \frac{1}{49} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{7^2}} = \frac{1}{7}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{3}{4}$

Autoavaliação

As questões de autoavaliação apresentadas propiciam aos alunos refletir sobre os estudos, as atitudes e as aprendizagens. Dê um tempo para que cada aluno reflita individualmente sobre elas e registre as respostas no caderno. Em seguida, àqueles que desejarem, permita que compartilhem as respostas com os colegas.

Ao longo do ano, é importante a retomada dos registros de autoavaliação feitos no fim de cada capítulo, para que eles possam perceber e mensurar o quanto aprenderam e melhoraram em diversos aspectos.

Em relação às perguntas propostas nesta página, converse com a turma sobre a importância de estar atento aos erros que eventualmente ocorrem no decorrer da aprendizagem e na busca por sanar as dúvidas. Enfatize a necessidade de ter motivação, atenção e empenho na sala de aula e ao desenvolver as atividades na escola e em casa, de modo a ser protagonista dos próprios estudos e aprendizagens.

Abertura

Comente com os alunos que neste capítulo serão explorados: lugares e construções geométricas utilizando o *software* GeoGebra.

Nesta página, peça que observem a imagem e leiam a notícia no recorte de jornal. Então, explique que podemos usar o termo **equidistante** para nos referirmos a algo que tem a mesma medida de distância, ou seja, a creche deve ser equidistante à prefeitura, à escola e ao posto de saúde.

Em seguida, sugira que localizem a escola, o posto de saúde e a prefeitura, identificando também o local onde deve ser construída a creche.

Se achar conveniente, pergunte: "É comum o planejamento da localização de hospitais, escolas, creches, entre outros estabelecimentos?"; "E o planejamento de cidades inteiras?". Peça aos alunos que compartilhem o que sabem sobre o assunto e, se necessário, sugira que pesquisem o tema para enriquecer ainda mais essa conversa.

CAPÍTULO 2

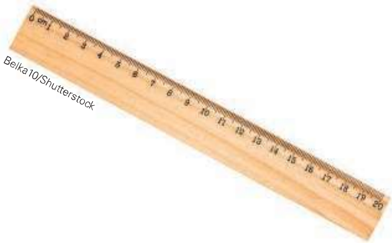
Lugares geométricos e construções geométricas

Michel Ramalho/Arquivo da editora

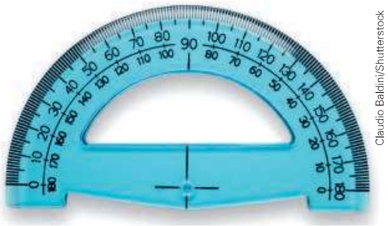
Se fôssemos trabalhar com uma planta dessa cidade para descobrir o local exato onde a creche será construída, precisaríamos usar conceitos de Matemática, como lugares geométricos (para saber como descobrir o local) e construções geométricas (para chegar a esse local).

Neste capítulo, vamos estudar esses conceitos e conhecer algumas aplicações deles. Veja alguns instrumentos de desenho que serão úteis nesse estudo.

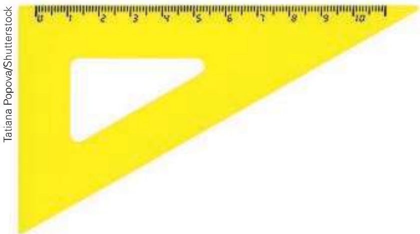
As imagens desta página não estão representadas em proporção.


Beika10/Shutterstock

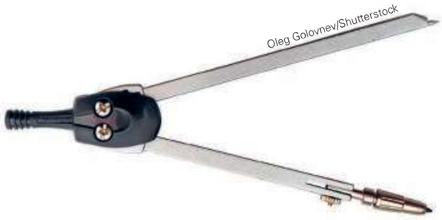
Régua graduada.


Claudio Baldini/Shutterstock

Transferidor.


Tatiana Popova/Shutterstock

Esquadro.


Oleg Golovnev/Shutterstock

Compasso.

Não escreva no livro!

Converse com os colegas sobre estas questões e faça os registros no caderno.

1 Qual figura geométrica obtemos ao ligar com segmentos de reta 3 pontos não alinhados, dois a dois? Triângulo.

2 O que significa dizer que um ponto é equidistante a 3 pontos dados? Que a medida da distância entre ele e cada um dos 3 pontos é igual.

3 Quando 2 retas de um mesmo plano são paralelas? Quando não têm ponto comum.

4 E quando são perpendiculares? Quando têm apenas 1 ponto comum e se intersectam formando 4 ângulos retos.

5 Qual é o ponto médio de um segmento de reta?

5. É o ponto que divide o segmento de reta em 2 segmentos de reta de mesma medida de comprimento (segmentos de reta congruentes) ou é o ponto do segmento de reta que equidista dos extremos dele.

6 Façam um esboço dessa cidade, usando pontos para representar as construções da prefeitura, do posto de saúde e da escola e retas para ligar essas construções. Qual é a posição aproximada do ponto onde será construída a creche? Tentem descobrir! Resposta pessoal.

Abertura

Sugira que observem as figuras dos instrumentos de desenho e pergunte: "Vocês conhecem esses instrumentos de desenho?"; "Lembram-se de usar esses instrumentos em estudos anteriores?"; "Para que serve cada um deles?". Depois, incentive-os a responder, em grupo, as questões no caderno.

Na questão 6, esperamos que os alunos façam o esboço da cidade, conversem com os colegas e intuitivamente tentem achar um ponto que atenda às informações dadas. Neste momento, eles ainda não farão construções para determinar o ponto exato que representa a creche.

Ao final, peça aos alunos que compartilhem as respostas e verifique o quanto se lembram dos conceitos geométricos vistos anteriormente.

1 Construções geométricas com régua, esquadro, transferidor e compasso

Principais habilidades da BNCC

EF08MA15 EF08MA16

Questione quais construções geométricas os alunos já viram e quais eles lembram como se faz. Após as respostas, retome com a turma algumas construções geométricas, como a construção e o transporte de um ângulo; o transporte de um segmento de reta; a construção de retas paralelas e perpendiculares; a construção de um triângulo (dadas as medidas de comprimento dos 3 lados); e a construção de circunferências.

As atividades revisam construções com régua, transferidor e esquadro vistas em anos anteriores.

Atividade 1

Esta atividade trabalha a construção de ângulos com medida de abertura dada, usando régua e transferidor. Se achar conveniente, sugira que os alunos classifiquem os ângulos dados como agudos, retos ou obtusos.

Veja a resolução desta atividade na página XLVI deste Manual.

Atividade 2

Esta atividade aborda a construção, com régua e esquadro, de uma reta perpendicular a uma reta dada e que passe por um determinado ponto dessa reta.

Veja a resolução desta atividade na página XLVI deste Manual.

Atividade 3

Usa as construções vistas em anos anteriores para construir um quadrado com medida de comprimento dos lados fornecida, usando régua e transferidor. Se achar conveniente, desafie os alunos a fazer a mesma construção desta atividade com régua e esquadro.

Veja a resolução desta atividade na página XLVII deste Manual.

Sequência didática

Para mais informações, veja a **sequência didática 2** do 1º bimestre.

1 Construções geométricas com régua, esquadro, transferidor e compasso

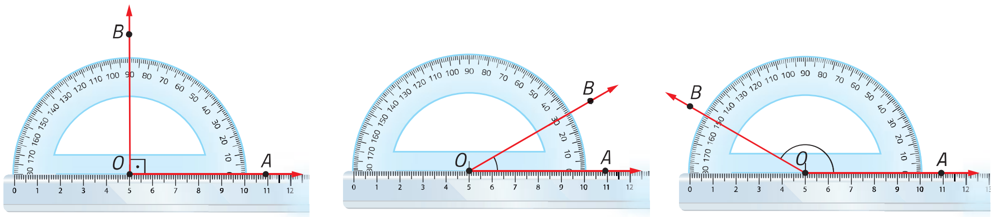
Nos anos anteriores, você aprendeu a fazer algumas construções geométricas usando régua, esquadro, transferidor e compasso. Vamos recordar e aprender a fazer novas construções?

Atividades

Não escreva no livro!

1 Com régua e transferidor, podemos construir ângulos com medidas de abertura dadas. Observe.

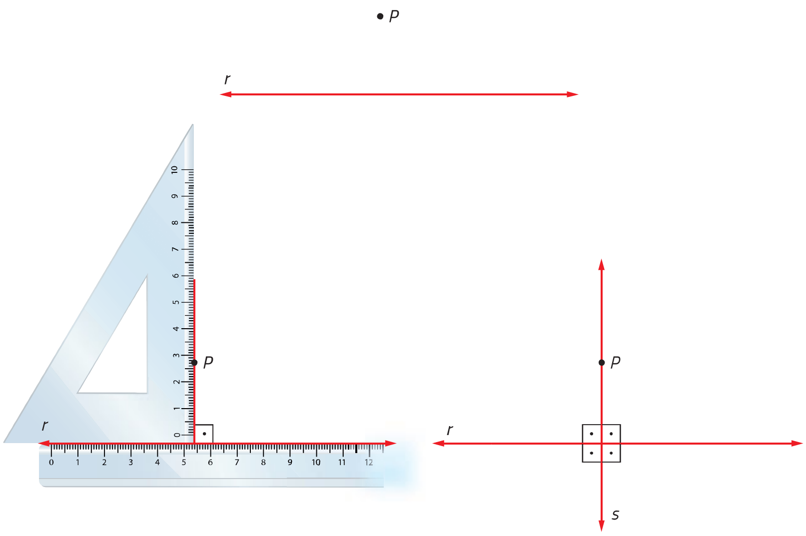
$A\hat{O}B$: ângulo de medida de abertura de 90°. $A\hat{O}B$: ângulo de medida de abertura de 30°. $A\hat{O}B$: ângulo de medida de abertura de 150°.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

No caderno, com régua e transferidor, construa esses ângulos e também um ângulo de medida de abertura de 45°. MP

2 Com régua e esquadro, a partir de uma reta *r* e um ponto *P* fora dela, podemos construir a reta *s* que passa por *P* e é perpendicular a *r*. Veja.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Reproduza no caderno essa mesma construção. Em seguida, construa uma reta *r*, marque um ponto *P* sobre ela e, usando régua e esquadro, construa a reta *t* que passa por *P* e é perpendicular a *r*. MP

3 Com régua graduada e transferidor, construa um quadrado *ABCD* cuja medida de comprimento dos lados seja de 5 cm. MP

Divisão da circunferência e do círculo em partes iguais

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Constantemente surge a necessidade de dividir uma circunferência ou um círculo em partes iguais. Quando dividimos uma circunferência em partes iguais, obtemos **arcos** iguais. E a nomenclatura **setores** você já conhece: quando dividimos um círculo em partes iguais, obtemos setores iguais.

Observem estas imagens, que lembram uma circunferência e um círculo divididos em partes iguais.

Woodyalbaba/Shutterstock

Roda do leme de um barco.

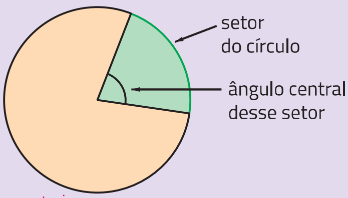
Kelly Sillaste/Flickr/Getty Images

Vitral da catedral de Estrasburgo, França.

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

1› Vamos aprender a fazer essa divisão por meio de dobraduras e, depois, usando régua, compasso e transferidor.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Com compasso, trace uma circunferência em uma folha de papel sulfite e recorte o círculo correspondente. Dobre-o em 8 partes iguais. Quantos setores você obteve? 8 setores iguais.

b) Passe lápis de cor ou caneta colorida sobre as dobras. Quantos ângulos centrais iguais podemos observar na dobradura? 8 ângulos centrais.

c) Use um transferidor e meça a abertura, em graus, de cada ângulo central. Qual foi a medida obtida? 45°

d) E qual é a soma das medidas de abertura, em graus, de todos os ângulos centrais? 360°

2› Agora, imagine um círculo dividido em 5 setores iguais. Qual é a medida de abertura de cada ângulo central dele? Explique para um colega como você fez para determinar essa medida. 72°; dividindo 360° por 5.

3› Às vezes, para dividir uma circunferência em arcos iguais ou um círculo em setores iguais, sabemos apenas a medida de abertura do ângulo central correspondente e não a quantidade de partes.

a) Trace uma nova circunferência em uma folha de papel sulfite. Use régua e transferidor e marque nela um ângulo central de medida de abertura de 72°.

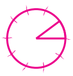
b) Com o compasso, marque as demais divisões da circunferência, ligando o centro da circunferência com cada divisão dela. Em quantos arcos iguais a circunferência ficou dividida? 5 arcos iguais.

Atividade

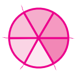
Não escreva no livro!

4› Faça no caderno o que se pede.

a) A divisão de uma circunferência em 10 arcos iguais. 360° ÷ 10 = 36°



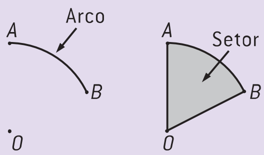
b) A divisão de um círculo em 6 setores iguais. Pinte cada um de uma cor. 360° ÷ 6 = 60°



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

1 Construções geométricas com régua, esquadro, transferidor e compasso

Na lousa, mostre que as partes em que dividimos uma circunferência são chamadas de arcos, enquanto as partes em que dividimos círculos são chamadas de setores.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, peça aos alunos que determinem a quantidade de arcos e de setores das imagens presentes no material.

Explorar e descobrir

Distribua folhas de papel sulfite e peça que sigam as indicações deste boxe para dividir uma circunferência ou um círculo em partes iguais.

Faça alguns questionamentos durante as explorações para enriquecer a aprendizagem:

- Após a resolução do item **1b**, "A quantidade de ângulos centrais sempre é igual à quantidade de setores em que foi dividido o círculo?".
- Após a resolução do item **1c**, "É possível determinar a medida de abertura de cada ângulo central sem o uso de transferidor?"; "Como pode ser feito?".
- Após a resolução do item **1d**, "Essa soma das medidas de abertura varia conforme a quantidade de ângulos centrais?"; "Se dividirmos o círculo em 8 partes ou em 5 partes, por exemplo, essa soma será diferente?".
- Após a resolução do item **3a**, "Podemos dividir uma circunferência em quantos arcos com essa medida de abertura do ângulo central?".
- Para ajudar na resolução do item **3b**, "Como podemos usar o compasso para dividir igualmente a circunferência a partir do arco obtido no item anterior?".

Atividade 4

Esta atividade desenvolve a divisão de circunferências e círculos em partes iguais que formam, respectivamente, arcos e setores iguais.

Solicite aos alunos que determinem as medidas de abertura dos ângulos centrais em cada item.

1 Construções geométricas com régua, esquadro, transferidor e compasso

Como os alunos estudaram a congruência de segmentos de reta e a congruência de ângulos no livro do 7º ano desta coleção, esperamos que se lembrem desses conceitos. No entanto, se necessário, relembre-os antes de iniciar a leitura deste tópico.

Em seguida, com a turma, leia o texto e as orientações de Mariana para a construção de um octógono regular e pergunte: "Por que Mariana dividiu 360 por 8 para calcular a medida de abertura de cada ângulo central correspondente aos arcos que deveria marcar na circunferência?"; "Por que ela queria dividir a circunferência em 8 arcos iguais para desenhar um octógono?".

Após entenderem o procedimento proposto por Mariana, incentive-os a desenhar um decágono regular ou algum outro polígono regular da preferência da turma.

Você sabia?

Peça que leiam o texto e desafie-os a reproduzir o desenho do polígono regular convexo com 33 lados, como exposto no livro.

Atividades 5 e 6

Estas atividades desenvolvem a construção de polígonos regulares a partir do procedimento apresentado no material.

Na atividade 5, a construção da placa é feita com um octógono regular, como nas explorações iniciais desta página. Para ampliar a atividade, peça aos alunos que pesquisem outras placas de trânsito com forma de polígono e o significado delas. Então, sugira que representem essas placas, usando polígonos convexos, com os respectivos significados em cartazes que ficarão expostos na escola. Assim, a turma estará trabalhando a construção de polígonos convexos e o tema contemporâneo *educação para o trânsito*.

Atividade 7

Esta atividade relaciona o polígono formado com a medida de abertura do ângulo destacado.

Construção de polígonos regulares

Para montar um jogo, Felipe precisava construir um octógono regular, ou seja, um polígono de 8 lados que tem todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes.

Lembre-se: Dizemos que 2 segmentos de reta são congruentes quando têm a mesma medida de comprimento e dizemos que 2 ângulos são congruentes quando têm a mesma medida de abertura.

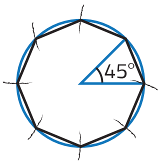
Felipe pediu ajuda à irmã mais velha dele, Mariana. Veja o que ela disse.

Ilustrações: Thiago Neumann/Arquivo da editora

Para construir esse polígono regular, vamos usar uma circunferência, fazendo a divisão dela em 8 arcos iguais. Para isso, precisamos calcular a medida de abertura do ângulo central correspondente.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 8 \\ -32 & 45 \\ \hline 040 & \\ -40 & \\ \hline 00 & \end{array}$$

Com transferidor, marcamos a medida de abertura do primeiro ângulo central. Depois, com compasso, marcamos na circunferência os demais arcos iguais. Cada ponto da divisão da circunferência é um vértice do pentágono regular.



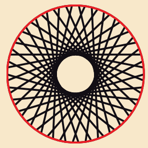
Banco de imagens/Arquivo da editora

Você sabia?

"Circunferência" feita com retas

Você sabia que é possível obter uma circunferência traçando apenas linhas retas?

Esta figura, feita por um artista minucioso, mostra que essa proeza gráfica é realizável. Na parte central da figura aparece uma "circunferência" formada exclusivamente por feixes de reta.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Do ponto de vista rigorosamente matemático, a parte central da figura, que parece ser uma circunferência, é apenas um polígono regular convexo com 33 lados.

Fonte de consulta: TAHAN, Malba. *As maravilhas da Matemática*. Rio de Janeiro: Bloch, 1972.

Atividades

Não escreva no livro!

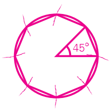
5 Construa no caderno um polígono com a forma desta placa. Depois, escreva uma frase referente ao respeito à sinalização de trânsito e leia para os colegas.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Jacek/Kino.com.br

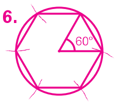
Placa de trânsito.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Frase pessoal.

6.



(360° ÷ 6 = 60°)

6 Construa no caderno um hexágono regular.

7 A estrela-do-mar é um animal invertebrado e carnívoro. Ela costuma se alimentar principalmente de moluscos, como mariscos e ostras. Com os braços, ela força a abertura das conchas desses animais e se alimenta deles. Depois, ela permanece até 10 dias em jejum. Geralmente, a estrela-do-mar é encontrada semienterrada no fundo do mar.

Observe a foto desta estrela-do-mar e o ângulo em destaque.

Juan Carlos Tinjaca/Shutterstock

Estrela-do-mar.

a) Ligando as "pontas" da estrela-do-mar obtém-se uma figura parecida com um polígono. Qual polígono é esse? Pentágono.

b) Quanto mede, aproximadamente, a abertura do ângulo destacado? 72° (360° ÷ 5 = 72°)

Construção do hexágono regular sem o uso do transferidor

Você acaba de estudar como construir polígonos regulares utilizando o transferidor para traçar o ângulo central em uma circunferência. Veja agora como construir um hexágono regular sem o uso do transferidor.

Observe a circunferência ao lado, dividida em 6 arcos iguais, e o hexágono regular correspondente. Ligando o centro O da circunferência aos vértices do hexágono, obtemos 6 triângulos.

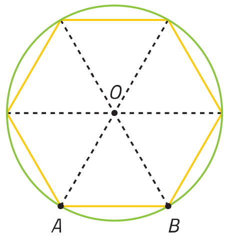
Analisando o $\triangle AOB$, temos que o ângulo central $A\hat{O}B$ tem medida de abertura de 60° (360° ÷ 6 = 60°) e $\overline{AO} \cong \overline{BO}$ (pois são raios da circunferência). Assim, o $\triangle AOB$ é isósceles de base $\overline{AB}$.

É possível demonstrar que, como o $\triangle AOB$ é isósceles, temos $O\hat{A}B \cong O\hat{B}A$. Então:

$$m(O\hat{A}B) = m(O\hat{B}A) = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$$

Logo, os 3 ângulos internos são congruentes e, portanto, o $\triangle AOB$ é isósceles e equilátero.

Analogamente, podemos deduzir que os outros triângulos também são equiláteros. E se os 6 triângulos são equiláteros, então a medida de comprimento do lado do hexágono regular é igual à medida de comprimento do raio da circunferência.



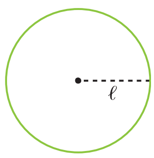
Banco de imagens/Arquivo da editora

No capítulo 4, você estudará as propriedades dos triângulos e verá que, em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

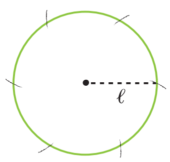
Thiago Neumann/Arquivo da editora

Acompanhe as etapas que devemos seguir.

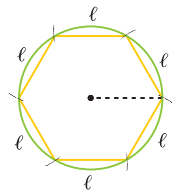
- Traçamos com o compasso uma circunferência com raio de medida de comprimento ℓ.



- Com a **mesma abertura do compasso**, dividimos a circunferência em 6 arcos iguais.

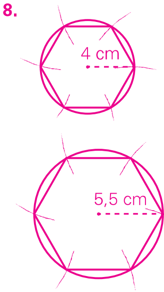


- Ligamos os pontos obtidos, construindo um hexágono regular com lados de medida de comprimento ℓ.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

8.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro!

Atividade

8 Com régua e compasso, construa no caderno 2 hexágonos regulares: um com lados de medida de comprimento de 4 cm e o outro, de 5,5 cm.

1 Construções geométricas com régua, esquadro, transferidor e compasso

Nesta página, veremos como construir um hexágono regular usando régua e compasso, sem a necessidade de usar o transferidor.

Na lousa, reproduza o hexágono do livro e mostre que $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$ são congruentes por serem raios da circunferência e, por isso, o $\triangle AOB$ é isósceles. Então, explique que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes (como veremos no capítulo 4), ou seja, têm a mesma medida de abertura, e faça alguns questionamentos: "Qual é a medida de abertura do ângulo central $A\hat{O}B$?"; "Quanto mede a abertura de cada ângulo da base do $\triangle AOB$?"; "Todas as medidas de abertura dos ângulos internos desse triângulo são iguais?". Conduza a conversa para os alunos perceberem que os 3 ângulos internos são congruentes e que o $\triangle AOB$ é equilátero, ou seja, tem as medidas de comprimento dos lados iguais.

Neste momento, pergunte aos alunos: "Esse $\triangle AOB$ é diferente dos outros triângulos que formam o hexágono regular?"; "Todos têm a mesma medida de comprimento dos lados?"; "O que podemos dizer sobre a medida de comprimento do lado do hexágono regular e a medida de comprimento do raio da circunferência?".

Neste momento, apresente o método demonstrado no livro e questione se é possível usar esse procedimento para construir outros polígonos regulares. Após as respostas, explique que só é possível construir o hexágono regular porque a medida de abertura do ângulo central é 60°, o que possibilita que todos os triângulos que compõem a figura sejam equiláteros, tornando as medidas de comprimento do lado do hexágono regular e do raio da circunferência iguais.

Ao final, peça à turma que anote, no painel de descobertas, como construir polígonos regulares, usando régua, compasso e transferidor, e hexágonos regulares com régua e compasso. Se considerarem conveniente, os alunos também podem colocar, no painel, as construções vistas em anos anteriores.

Atividade 8

Esta atividade desenvolve a construção de hexágonos sem o uso do transferidor.

Verifique se os alunos entenderam que as medidas de comprimento dos lados fornecidas são iguais às medidas de comprimento do raio das circunferências.

2 Lugares geométricos

Principais habilidades da BNCC

EF08MA15 EF08MA17

Explique aos alunos o que é um lugar geométrico e que ficará mais fácil entender esse conceito após alguns exemplos.

Em seguida, proponha que marquem um ponto *O* e um segundo ponto em uma folha de papel e meçam a distância entre eles com um compasso. Então, desafie-os a marcar outros pontos equidistantes ao ponto *O*, usando a medida de abertura do compasso.

Solicite que marquem muitos pontos equidistantes ao ponto *O* e pergunte: "Se forem marcados todos os pontos equidistantes de *O*, qual figura será construída?"; "Há outros pontos equidistantes a *O* e que não pertencem a essa circunferência?". Após as respostas, explique que a circunferência é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto do plano.

Atividades 9 e 10

Estas atividades trabalham a definição de circunferência como lugar geométrico.

Na atividade 9, pergunte aos alunos qual figura devem traçar.

No item **f** da atividade 10, questione se existe outro ponto que dista *x* de *O* e *y* de *R*.

2 Lugares geométricos

Agora você verá como a ideia de **lugar geométrico** possibilita muitas construções geométricas e como esse conceito é importante para entender diversos fatos relacionados às posições de pontos, retas e circunferências de um plano. Além disso, você verá aplicações desse conceito em situações do cotidiano.

Lembrando que toda figura geométrica é um conjunto de pontos, podemos definir lugar geométrico.

Uma figura é chamada de **lugar geométrico** quando satisfaz estas 2 condições.
- Todos os pontos da figura têm uma mesma propriedade.
- Nenhum outro ponto do universo considerado tem essa propriedade.

Atenção: No estudo que faremos neste capítulo, consideramos os lugares geométricos planos, ou seja, aqueles cujo universo são os pontos de um mesmo plano.

Você vai entender melhor essa definição logo a seguir, a partir do estudo das propriedades dos pontos de uma circunferência, que são próprias e exclusivas desses pontos.

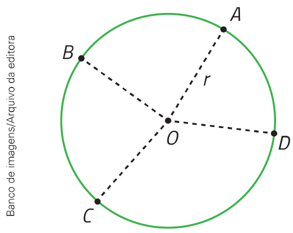
Circunferência

Você já conhece as características da circunferência e já sabe como traçá-la, usando o compasso. Agora, você verá por que a circunferência é um lugar geométrico.

- Propriedade: todos os pontos da circunferência são equidistantes de um ponto do plano (o centro).

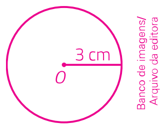
$$AO = BO = CO = DO = \ldots = r$$

- Nenhum outro ponto do plano tem essa propriedade.



Circunferência de centro *O* e raio de medida de comprimento *r*.

9.



Atividades

Não escreva no livro!

9 No caderno, marque um ponto *O* e, com compasso, trace o lugar geométrico dos pontos que distam 3 cm de *O*.

10 Observe esta figura, com uma circunferência de centro *O* e uma circunferência de centro *R*.

a) Reproduza essa figura no caderno.

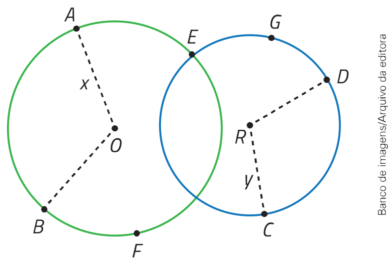
b) O que a letra *x* está indicando?

c) E o que a letra *y* está indicando?

d) Qual é a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{OB}$? *x*

e) E qual é a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{RD}$? *y*

f) Entre os pontos marcados com letra nesta figura, qual dista *x* de *O* e *y* de *R*? Ponto *E*.

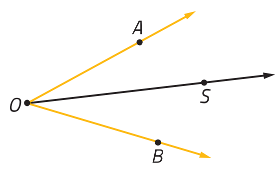


10. b) A medida de comprimento do raio da circunferência de centro *O*.
c) A medida de comprimento do raio da circunferência de centro *R*.

Bisetriz de um ângulo

Outro lugar geométrico do plano é a **bissetriz** de um ângulo.

Bissetriz de um ângulo é a semirreta com origem no vértice desse ângulo e que o divide em 2 ângulos de medidas de abertura iguais (ângulos congruentes).



Banco de imagens/Arquivo da editora

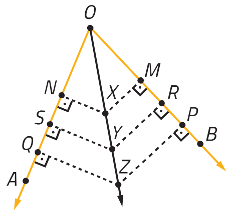
A semirreta $\overrightarrow{OS}$ é bissetriz do $A\hat{O}B$, pois $A\hat{O}S \cong B\hat{O}S$.

Veja por que a bissetriz de um ângulo é um lugar geométrico do plano.

- Propriedade: todos os pontos da bissetriz são equidistantes dos 2 lados do ângulo.

$$XM = XN,\ YR = YS,\ ZP = ZQ,\ \ldots$$

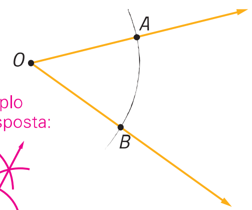
- Nenhum outro ponto do plano tem essa propriedade.



Banco de imagens/Arquivo da editora

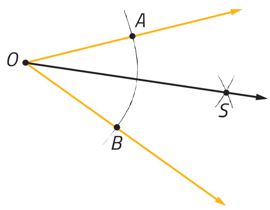
Veja a construção da bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$, com régua e compasso.

- Abrimos o compasso com uma abertura qualquer. Com a ponta-seca no vértice O, traçamos um arco que intersecta os 2 lados do ângulo, obtendo os pontos A e B.



11. Exemplo de resposta:

- Abrimos novamente o compasso, com uma abertura qualquer. Com a mesma abertura, com a ponta-seca no ponto A e, depois, no ponto B, traçamos 2 arcos que se intersectam, determinando o ponto S.
- Traçamos a semirreta $\overrightarrow{OS}$, bissetriz do $A\hat{O}B$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividade

Não escreva no livro!

11 › No caderno, trace um ângulo obtuso. Em seguida, com régua e compasso, construa a bissetriz desse ângulo.

2 Lugares geométricos

Peça aos alunos que construam um ângulo de 90° no caderno, usando transferidor, e tracem a semirreta que divide esse ângulo em 2 partes iguais. Pergunte: “Onde deve ser a origem dessa semirreta?”; “Quanto deve medir a abertura de cada ângulo formado?”. Esperamos que os alunos respondam que a origem deve ser o vértice do ângulo e que as aberturas dos ângulos formados medem 45°, metade da medida de abertura do ângulo inicial.

Então, explique que essa semirreta recebe o nome de **bissetriz** e apresente a definição fornecida no livro.

Em seguida, solicite que marquem um ponto qualquer X sobre a bissetriz e meçam a distância entre ele e os lados do ângulo inicial. Destaque que, para medir essa distância (entre um ponto e uma semirreta), devem traçar um segmento que ligue o ponto X ao lado do ângulo, formando um ângulo reto, e medir o comprimento desse segmento. Questione o que podem afirmar sobre as medidas de distância entre o ponto X e os lados do ângulo inicial. Esperamos que digam que são iguais.

Peça que meçam a distância de mais alguns pontos da bissetriz em relação aos lados do ângulo inicial e explique que, a partir dessas medidas, podemos perceber que todos os pontos da bissetriz são equidistantes aos lados do ângulo. Indague: “Existe algum ponto equidistante aos lados do ângulo e que não pertença à bissetriz?”. Após as respostas, explique que a bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos 2 lados do ângulo.

Ao final, na lousa, apresente a construção da bissetriz de um ângulo, usando régua e compasso, como fornecida no livro.

Atividade 11

Esta atividade desenvolve a construção da bissetriz de um ângulo obtuso, usando régua e compasso.

2 Lugares geométricos

Atividade 12

Esta atividade desenvolve o uso da definição de mediatriz.

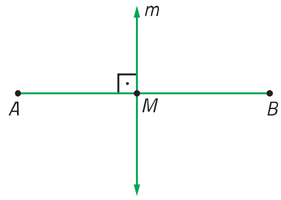
Peça aos alunos que justifiquem o motivo de a reta r não ser mediatriz em todas as figuras.

Atividade 13

Esta atividade trabalha a construção da mediatriz para o segmento de reta pedido, usando régua e compasso.

Mediatriz de um segmento de reta

A **mediatriz** de um segmento de reta também é um lugar geométrico do plano.



Mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular a esse segmento e que passa pelo ponto médio dele.

A reta m é a mediatriz do $\overline{AB}$, pois:

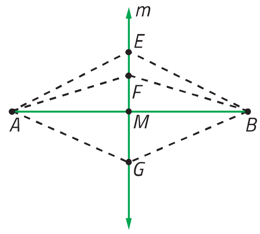
- m é perpendicular ao $\overline{AB}$ ($m \perp \overline{AB}$);
- M é o ponto médio do $\overline{AB}$ ($\overline{AM} \cong \overline{BM}$).

Veja por que a mediatriz de um segmento de reta é um lugar geométrico.

- Propriedade: todos os pontos da mediatriz são equidistantes às extremidades do segmento de reta.

$$EA = EB,\ FA = FB,\ MA = MB,\ GA = GB,\ \ldots$$

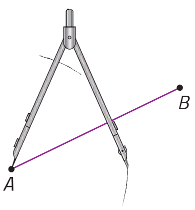
- Nenhum outro ponto do plano tem essa propriedade.



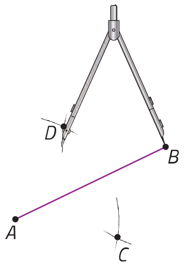
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Veja a construção da mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$.

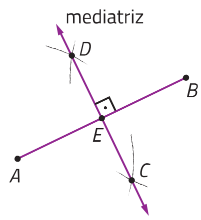
- Abrimos o compasso com uma abertura maior do que a metade do comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$. Com a ponta-seca do compasso em A e essa abertura, traçamos 2 arcos.



- Com a mesma abertura, e a ponta-seca em B, traçamos 2 arcos que intersectam os arcos já traçados, obtendo 2 pontos da mediatriz.



- Traçamos a reta m, mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

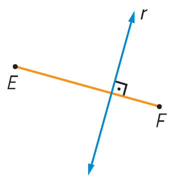
Observe que, ao construir a mediatriz m do segmento de reta $\overline{AB}$, encontramos o ponto médio M dele: é a intersecção da mediatriz m com o segmento de reta $\overline{AB}$. Assim, também podemos usar essa construção para determinar o ponto médio de um segmento de reta.

Atividades

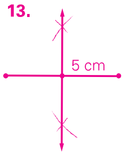
Não escreva no livro!

12 › Em qual destas figuras a reta r é mediatriz do $\overline{EF}$? Justifique. Na figura do item **c**, pois r é perpendicular ao $\overline{EF}$ e passa pelo ponto médio do $\overline{EF}$.

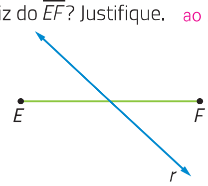
a)



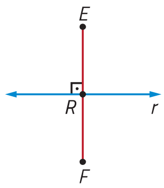
13.



b)



c)

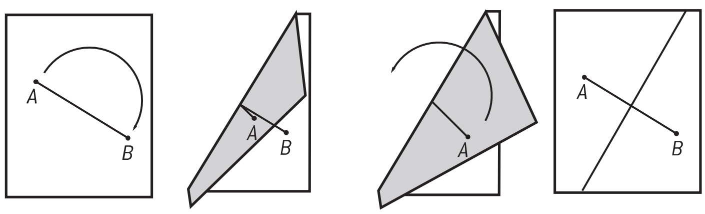


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

13 › No caderno, trace um segmento de reta de medida de comprimento de 5 cm. Em seguida, com régua e compasso, construa a mediatriz dele.

Sugestão de atividade

Distribua folhas de papel sulfite e solicite aos alunos que desenhem um segmento de reta na folha, marcando as extremidades dele. Eles devem dobrar o papel, fazendo um extremo coincidir com o outro; depois, desdobrar o papel e reforçar a dobradura com uma caneta, como indicado nas figuras a seguir.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

MATEMÁTICA
E TECNOLOGIA

O GeoGebra

O GeoGebra é um software livre e dinâmico de Matemática que pode ser utilizado em diversos conteúdos de Álgebra e de Geometria, em todos os níveis de ensino. Ele foi criado em 2001 pelo matemático austríaco Markus Hohenwarter (1976-) e recebeu diversos prêmios na Europa e nos Estados Unidos.

No endereço <www.geogebra.org/download>, você pode fazer o *download* do *software* "Geometria" ou acessá-lo *on-line*. Se precisar, peça a alguém mais experiente ajudá-lo com a instalação.

Software livre: qualquer programa gratuito de computador cujo código-fonte deve ser disponibilizado para permitir o uso, o estudo, a cópia e a redistribuição.

Construções geométricas no GeoGebra

Agora o trabalho é no computador, você vai gostar!

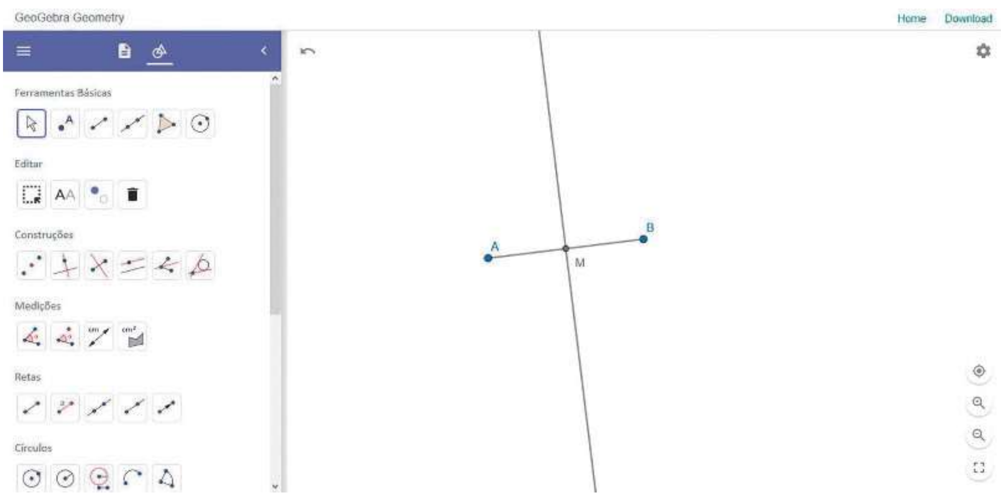
Vamos utilizar o GeoGebra para construir a mediatriz de um segmento de reta, a bissetriz de um ângulo, os ângulos de medida de abertura de 90°, 60°, 45° e 30° e alguns polígonos regulares. Siga atentamente os passos dados e registre no caderno as respostas às perguntas.

Construção da mediatriz de um segmento de reta

Vamos construir a mediatriz de um segmento e observar algumas propriedades importantes.

1º passo: Clique na opção "Segmento" no menu de ferramentas (à esquerda da tela) e marque 2 pontos próximos ao centro da tela, onde você quiser que fique o desenho do segmento de reta.

2º passo: Clique na opção "Mediatriz" e selecione o próprio segmento de reta ou as extremidades dele. Em seguida, clique na opção "Ponto" e marque a intersecção do segmento de reta e da mediatriz.



Matemática e tecnologia

Principal habilidade da BNCC
EF08MA15

Nesta seção, iniciamos a apresentação do *software* livre GeoGebra, que pode ser proposto em diversas atividades ao longo do livro.

No *site* indicado para o *download* do GeoGebra, também é possível acessar o "GeoGebra clássico" que apresenta outras funcionalidades, além das que aparecem na versão exclusiva de Geometria.

Inicialmente, leve os alunos ao laboratório de informática e cite as construções que faremos usando o GeoGebra. Utilizaremos o *software* para consolidar e avançar nas explorações de temas que já foram trabalhados anteriormente. Assim, sempre que possível, relacione o que estudaram com o que estão vendo e fazendo no computador.

É interessante ir, gradativamente, dando independência aos alunos para que sigam os passos de construção no *software* e explorem as ferramentas e as construções feitas. Além do próprio trabalho com as construções geométricas, o GeoGebra permite desenvolver habilidades relacionadas à leitura em diversas linguagens.

Nesta página, oriente os alunos a seguir os passos indicados para construir a mediatriz de um segmento de reta e realizar as explorações propostas. Destaque que as respostas obtidas ressaltam que a mediatriz é perpendicular ao segmento de reta e passa pelo ponto médio desse segmento.

Audiovisual

Para mais informações, veja o **audiovisual** *Construção da mediatriz de um segmento de reta com o GeoGebra* do 1º bimestre.

Peça aos alunos que observem a reta representada pela dobradura e o segmento de reta e respondam: "Qual é a posição entre a reta e o segmento de reta?". São perpendiculares. Eles devem observar que o segmento de reta ficou dividido em 2 partes e medir o comprimento de cada parte; assim, concluirão que as 2 partes são congruentes. Neste momento, explique que essa reta se chama **mediatriz** e apresente a definição dada no livro.

Em seguida, sugira que marquem pontos na mediatriz e meçam a distância entre cada um desses pontos e as extremidades do segmento, verificando que os pontos da mediatriz são equidistantes aos pontos *A* e *B*. Então, pergunte: "Existe algum ponto equidistante às extremidades do segmento e que não pertença à mediatriz?". Após as respostas, explique que a mediatriz é o lugar geométrico dos pontos equidistantes às extremidades do segmento de reta.

Depois, na lousa, apresente a construção da mediatriz de um segmento de reta, usando régua e compasso, como fornecida no livro. Explique que, a partir dessa construção para a mediatriz, determinamos também o ponto médio de um segmento de reta.

Ao final, solicite aos alunos que registrem, no painel de descobertas, a definição de lugar geométrico e as informações sobre os lugares geométricos que viram até agora (circunferência, bissetriz e mediatriz), com os procedimentos para construí-los. Peça aos alunos que usem as próprias palavras nessas anotações, pois, além de facilitar o entendimento quando forem consultá-las, isso ajudará na aprendizagem dos conhecimentos.

Matemática e tecnologia

Incentive a turma a movimentar o segmento de reta e, se necessário, faça intervenções para que percebam que a mediatriz mantém as mesmas características vistas anteriormente, independentemente das alterações no segmento.

Construção da bissetriz de um ângulo

Explique aos alunos que vamos construir a bissetriz de um ângulo e permita que construam o ângulo da forma que quiserem. Verifique as construções e relembre-os de que o ângulo é formado por 2 semirretas. Se necessário, peça que sigam os passos do livro para traçar um ângulo qualquer.

Oriente os alunos a seguir os próximos passos propostos no material para medir a abertura do ângulo criado e construir a bissetriz dele. Explique aos alunos que, embora o GeoGebra crie uma reta, a bissetriz de um ângulo é uma semirreta, sendo apresentada, no *software*, a reta suporte da bissetriz do ângulo.

Solicite que continuem seguindo os passos do material para comparar as medidas de abertura dos ângulos formados entre as semirretas e a bissetriz com a medida de abertura do ângulo inicial. Destaque que a resposta mostra, como visto anteriormente em sala, que a bissetriz divide o ângulo inicial em 2 ângulos de medidas de abertura iguais.

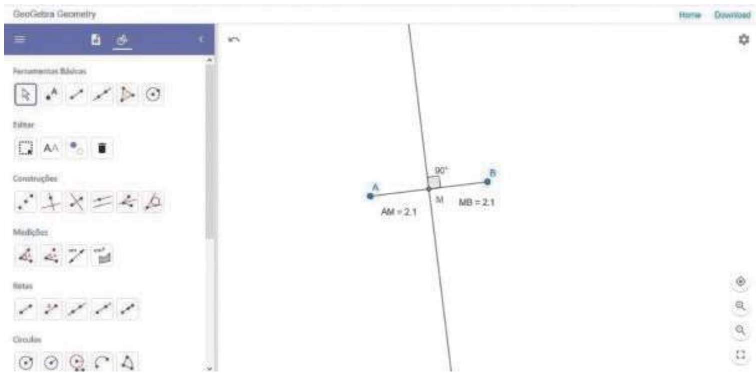
Neste momento, incentive os alunos a movimentar as semirretas para verificarem que essa relação se mantém, independentemente da medida de abertura do ângulo inicial.

3º passo: Qual é a medida de abertura de cada ângulo formado pelo segmento de reta e a mediatriz? 90°

Você pode comprovar sua resposta fazendo a medição no GeoGebra. Clique na opção "Ângulo" no menu de ferramentas e, depois, clique no segmento de reta e na mediatriz.

4º passo: A mediatriz divide o segmento de reta em 2 partes. Qual é a relação entre as medidas de comprimento delas? Têm a mesma medida de comprimento.

Você também pode comprovar sua resposta fazendo a medição no GeoGebra. Clique na opção "Distância, Comprimento ou Perímetro" no menu de ferramentas e, em seguida, clique nas extremidades de cada segmento de reta formado.



Fotos: Reprodução/www.geogebra.org

5º passo: Use a opção "Mover" do menu de ferramentas para alterar a posição de todo o segmento de reta. O que você observa na posição da mediatriz que foi traçada? E nas medidas de abertura e de comprimento indicadas?

6º passo: Agora, movimente apenas uma extremidade do segmento de reta e rotacione-o lentamente. Faça mais movimentos aumentando ou reduzindo a medida de comprimento do segmento de reta. O que acontece com a mediatriz? E com as medidas de abertura e de comprimento indicadas?

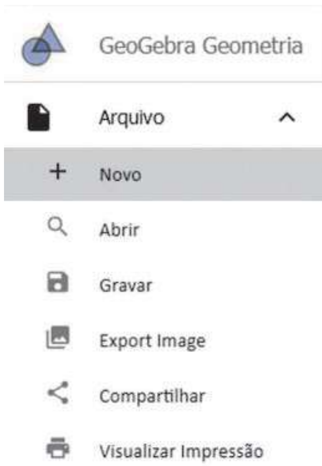
5º passo: Exemplo de resposta: A mediatriz se movimenta junto com o segmento de reta, continuando a ser a mediatriz dele e mantendo as propriedades de formar ângulos com medida de abertura de 90° e dividir o segmento de reta em 2 partes iguais (de mesma medida de comprimento).

6º passo: Exemplo de resposta: A mediatriz se movimenta junto com o segmento de reta, continuando a ser a mediatriz dele e mantendo as propriedades. Ao alterar a medida de comprimento do segmento de reta, as medidas das 2 partes também mudam, mas continuam iguais entre si.

Construção da bissetriz de um ângulo

Agora vamos construir e explorar as propriedades da bissetriz de um ângulo.

Para iniciar um novo trabalho, salve as construções já feitas e comece uma nova construção, clicando em "Novo".

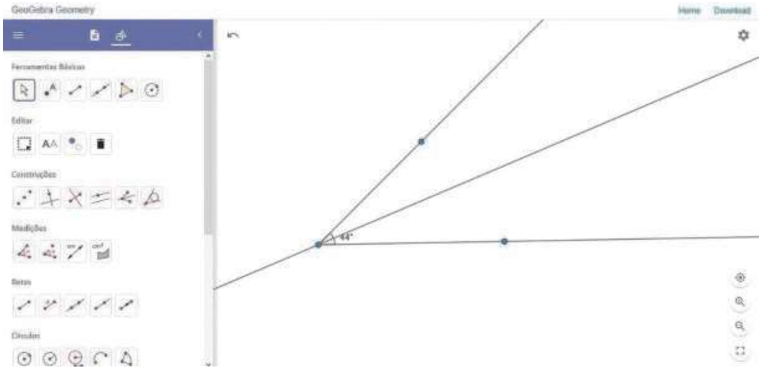


Fotos: Reprodução/www.geogebra.org

1º passo: Clique na opção "Semirreta" no menu de ferramentas e marque 2 pontos próximos ao centro da tela, onde você quiser que fique o desenho. Para construir a outra semirreta, clique novamente em um dos pontos e, depois, escolha e clique em outro ponto na tela.

2º passo: Você já viu como medir a abertura do ângulo formado entre 2 retas. Entre 2 semirretas você pode usar a mesma opção. Faça essa medição. Se necessário, você pode usar a opção "Mover" para melhorar a posição e a visualização do valor obtido.

3º passo: Para determinar a bissetriz do ângulo, clique na opção "Bissetriz" e, em seguida, clique nos 3 pontos que você usou para traçar as semirretas.



Reprodução/www.geogebra.org

Atenção: O GeoGebra traça a reta suporte da bissetriz do ângulo, que é uma semirreta.

5º passo: Exemplo de resposta: A mediatriz se movimenta junto, continuando a ser a mediatriz do ângulo e mantendo as propriedades. Ao alterar a medida de abertura do ângulo traçado, a outra medida de abertura calculada continua sendo a metade dela.

4º passo: Agora, meça a abertura de um dos ângulos formados entre as semirretas que você traçou inicialmente e a bissetriz. Qual é a relação entre essa medida e a medida de abertura do ângulo que você traçou? É a metade da medida de abertura do ângulo traçado.

5º passo: Use a opção "Mover" para alterar lentamente a posição de umas das semirretas que você traçou. O que acontece com a bissetriz? E com as medidas de abertura dos ângulos?

Construção de ângulos de medida de abertura dada

Agora vamos construir ângulos de medida de abertura de 90°, 60°, 45° e 30°.

Novamente, salve as construções já feitas e comece uma nova construção, clicando em "Novo".

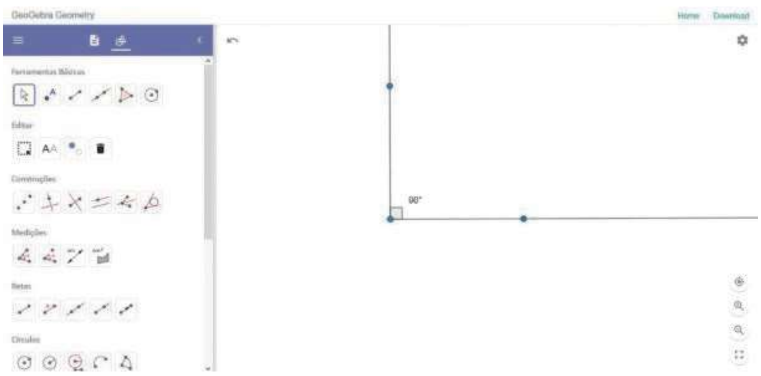
1º passo: No menu de ferramentas, clique na opção "Ângulo com amplitude fixa" e marque 2 pontos na tela.

Uma janela vai aparecer para você digitar a medida de abertura do ângulo que deseja construir. Substitua a medida que aparecer por 90 (mantenha o símbolo ° que já aparece) e escolha um sentido para a construção do ângulo.

Fotos: Reprodução/www.geogebra.org

Atenção: A medida de abertura de um ângulo é chamada de **amplitude** no GeoGebra.

2º passo: Para melhorar a visualização, trace as semirretas que formam o ângulo, clicando na origem do ângulo e em cada ponto já marcado. Você verá claramente que o ângulo é reto (a medida de abertura é de 90°).



Reprodução/www.geogebra.org

Matemática e tecnologia

Explique aos alunos que eles vão construir ângulos com medidas de abertura de 90°, 60°, 45° e 30°. Oriente-os a seguir os passos indicados no texto para construir o ângulo de medida de abertura de 90°, mantendo o símbolo de graus (°) ao preencher a medida de abertura do ângulo. Neste momento, destaque que o GeoGebra usa a palavra **amplitude** para indicar a medida de abertura de um ângulo e sugira que comparem o que acontece ao criar o ângulo em sentido horário e anti-horário. Esperamos que percebam que só muda o sentido em que é criado o ângulo.

Em seguida, incentive-os a construir os ângulos com medidas de abertura de 60°, 45° e 30° a partir dos passos apresentados no material. Para construir o ângulo de medida de abertura de 45°, os alunos também podem usar a construção da bissetriz do ângulo de medida de abertura de 90° que eles construíram. Analogamente para a construção do ângulo de medida de abertura de 30° com o de 60°. Sugira a eles que façam também essas construções no GeoGebra.

Então, permita que os alunos construam ângulos com as medidas de abertura que escolherem e da forma que preferirem. Acompanhe essas construções, verificando se eles conseguem construir ângulos sem seguir instruções.

Matemática e tecnologia

Construção de polígonos regulares

Explique que agora eles vão construir polígonos regulares com 4, 6, 8, 12 e 20 vértices. Peça que iniciem pela construção do quadrado (polígono regular de 4 vértices) seguindo os passos apresentados no material.

Questione os alunos como eles definiram a medida de comprimento dos lados do quadrado. Esperamos que alguns alunos percebam que eles escolhem essa medida ao marcarem os 2 pontos.

Após construírem o quadrado, destaque que o GeoGebra apresenta o polígono junto com a região poligonal, relembrando que o polígono corresponde apenas ao contorno da figura. Então, solicite que construam os polígonos regulares com 6, 8, 12 e 20 vértices. Depois, sugira que movimentem as figuras e diminuam o *zoom* para facilitar a visualização delas.

Em seguida, peça que meçam os ângulos internos dos polígonos e pergunte: “Em polígonos regulares, o que podemos dizer sobre as medidas de abertura dos ângulos internos?”; “É necessário medir todas as aberturas dos ângulos internos desses polígonos para determinarmos as medidas?”. Após as respostas, permita que os alunos construam outros polígonos regulares, podendo até mesmo fazer desenhos a partir deles.

Se achar conveniente, ao final, mostre que, quanto maior o número de vértices do polígono regular, mais ele se aproxima da forma de uma circunferência.

3º passo: Aplique o que você aprendeu! Repita o 1º e o 2º passo e construa um ângulo de medida de abertura de 60°, depois um de 45° e, por fim, um de 30°.

Construção de polígonos regulares

Agora vamos construir alguns polígonos regulares. Não se esqueça de salvar as construções já feitas e começar uma nova.

1º passo: No menu de ferramentas, clique na opção “Polígono regular” e marque 2 pontos na tela.

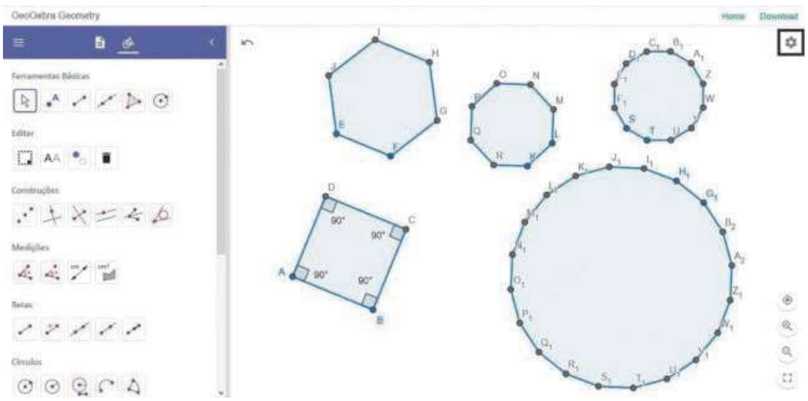
Uma janela vai aparecer para você digitar a quantidade de vértices do polígono regular que deseja construir. Inicialmente, escolha 4 vértices, para que seja construído um quadrado.

Reprodução/www.geogebra.org

2º passo: Repita o passo anterior e desenhe polígonos regulares com 6 vértices, com 8 vértices, com 12 vértices e com 20 vértices.

3º passo: Para melhorar a visualização de cada polígono, use a opção “Mover” e reposicione-os de modo que não fiquem um por cima do outro. Você também pode diminuir o *zoom* da tela.

4º passo: Usando a opção “Ângulo” e clicando em 2 lados consecutivos do quadrado, meça a abertura de cada ângulo interno. O que pode ser observado em todos os ângulos internos do quadrado? Todos os ângulos internos têm a mesma medida de abertura (90°).


Reprodução/www.geogebra.org

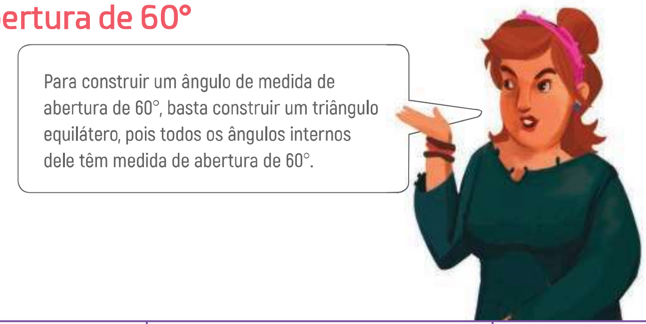
5º passo: Meça a abertura dos ângulos internos dos demais polígonos regulares que você construiu. Quais medidas de abertura você obteve? 120° (hexágono), 135° (octógono), 150° (dodecágono) e 162° (icoságono).

3 Mais construções geométricas com régua não graduada e compasso

Construção de ângulos de medidas de abertura dadas

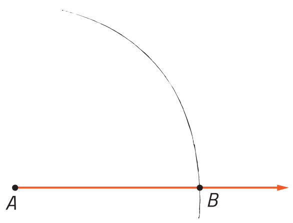
Dada a medida de abertura de qualquer ângulo, você já sabe construí-lo usando transferidor e também usando o GeoGebra. Agora, vamos aprender a construir alguns ângulos, de medidas de abertura dadas, com régua e compasso.

Medida de abertura de 60°

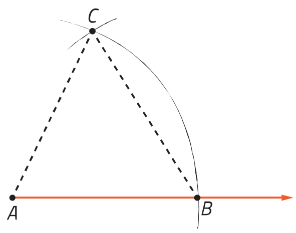


Thiago Neumann/Arquivo da editora

- Traçamos uma semirreta, de origem *A*, na posição desejada.
- Com uma abertura qualquer do compasso, e a ponta-seca em *A*, traçamos um arco de circunferência, determinando o ponto *B* sobre a semirreta.

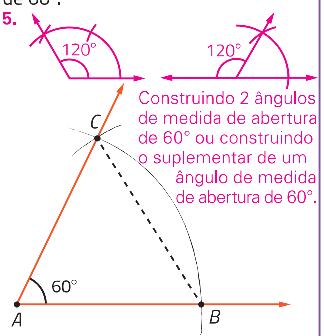


- Com a mesma abertura do compasso, e a ponta-seca em *B*, traçamos um arco que intersecta o arco já traçado, determinando o ponto *C* (o $\triangle ABC$ é equilátero).



- Traçamos a semirreta $\overrightarrow{AC}$ e obtemos o ângulo $B\hat{A}C$, de medida de abertura de 60°.

15.

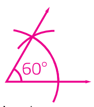


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

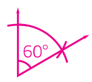
Atividades

Não escreva no livro!

14. Exemplos de respostas: a)



b)



14 Faça as construções no caderno.

a) Um ângulo cuja medida de abertura seja de 60°, na posição que desejar.

b) Outro ângulo cuja medida de abertura seja de 60°, só que agora um dos lados dele deve estar na posição vertical.

15 **Desafio.** Usando régua e compasso, e sem usar transferidor, construa no caderno um ângulo de medida de abertura de 120°.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

3 Mais construções geométricas com régua não graduada e compasso

Principal habilidade da BNCC

EF08MA15

Explique à turma que já vimos construções de ângulos com régua e transferidor e com o *software* GeoGebra e que agora veremos como construir ângulos com régua e compasso, iniciando pelo ângulo cuja abertura mede 60°.

Então, pergunte: "Vocês lembram quanto medem as aberturas dos ângulos de um triângulo equilátero?"; "Vocês lembram como construir um triângulo a partir das medidas de comprimento e usando régua e compasso?". Se os alunos anotaram essa construção no painel de descobertas, peça que o consultem.

Em seguida, na lousa, apresente a construção dada no livro e mostre que, a partir dela, poderíamos traçar um triângulo equilátero, mas que não é necessário, pois, neste momento, nosso objetivo é construir apenas o ângulo de medida de abertura de 60°.

Atividades 14 e 15

Estas atividades trabalham a construção de ângulos de medida de abertura de 60° e a construção do ângulo de medida de abertura de 120°. Se achar necessário, sugira que usem o método apresentado nesta página para resolver estas atividades.

Observe que apresentamos as respostas com as construções, mas a posição das figuras pode ser outra.

Na atividade 14, observe a posição dos ângulos construídos pelos alunos e se atendem às indicações dadas.

3 Mais construções geométricas com régua não graduada e compasso

Relembre os alunos que já vimos como construir, com régua e compasso, ângulos de medidas de abertura de 60° e de 120° e a bissetriz de ângulos. Então, pergunte: “Com essas construções, conseguimos construir ângulos de medidas de abertura de 30°?”; “E de 90°?”.

Ajude os alunos a perceber que podem construir um ângulo de medida de abertura de 60° e a bissetriz dele para conseguir um ângulo com medida de abertura de 30°.

Para a construção de um ângulo com medida de abertura de 90°, na lousa, a partir das respostas dos alunos, apresente 2 maneiras.

- Construindo um ângulo de medida de abertura de 120° e a bissetriz de uma das partes correspondentes a 60°, como mostrado no livro;
- Construindo um ângulo de medida de abertura de 60° e um ângulo de medida de abertura de 30°.

Em seguida, ajude-os a perceber que o primeiro método é mais fácil do que o segundo por exigir menos construções. Mostre também que poderíamos construir um ângulo de 90° traçando uma reta (ângulo de medida de abertura de 180°) e construindo a bissetriz dela.

As atividades trabalham a construção de ângulos de medidas de abertura de 30° e de 90°, mesmo para construir ângulos com outras medidas de abertura.

Atividade 16

Veja exemplo de resolução desta atividade na página XLVII deste Manual.

Atividade 17

Veja exemplo de resolução desta atividade na página XLVII deste Manual.

Atividade 18

Para começar a construção do triângulo, os alunos devem transportar o segmento de reta dado, de medida de comprimento x. Se necessário, retome com eles como fazer esse transporte.

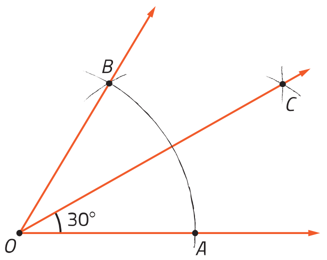
Em seguida, peça que construam os ângulos adjacentes a esse lado do triângulo, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

Medidas de abertura de 30° e de 90°

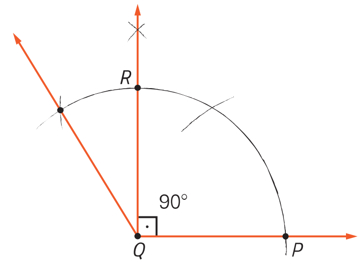
Você já viu como construir ângulos de medidas de abertura de 60° e de 120°, usando régua e compasso. Viu também o traçado da bissetriz de um ângulo.

Usando essas construções você pode construir ângulos de medidas de abertura de 30° e de 90°.

- Construímos um ângulo $A\hat{O}B$ de medida de abertura de 60°.
- Traçamos a bissetriz $\overrightarrow{OC}$ desse ângulo.
- O $A\hat{O}C$ obtido tem medida de abertura de 30° (60° ÷ 2 = 30°).



- Construímos um ângulo de medida de abertura de 120° (60° + 60° = 120°).
- Construímos a bissetriz de uma das partes correspondente a 60°.
- O $P\hat{Q}R$ obtido tem medida de abertura de 90° (60° + 30° = 90°).



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

Não escreva no livro!

16 Faça as construções no caderno. MP

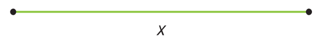
a) Um ângulo cuja medida de abertura seja de 30°, com um dos lados na posição horizontal.

b) Um ângulo cuja medida de abertura seja de 90°, com um dos lados na posição vertical.

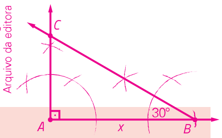
17 Usando régua e compasso, e sem usar transferidor, faça no caderno as construções dos ângulos de medidas de abertura dadas. MP

a) 45° b) 135° c) 75° d) 150°

18 Considerando a medida x dada, use régua e compasso para construir no caderno o $\triangle ABC$, em que $AB = x$, $m(\hat{A}) = 90°$ e $m(\hat{C}) = 60°$. $(m(\hat{B}) = 180° - (90° + 60°) = 30°)$



Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

Raciocínio lógico

Luis Felipe ganhou 4 selos, mas está confuso sobre o país de origem de cada um. Vamos ajudá-lo a classificar os selos? Observe as dicas.

- O selo com a imagem de um trem é vermelho.
- O selo alemão tem a imagem de um corredor.
- O selo cuja imagem é uma flor não é francês.
- O selo da Suíça não é vermelho.
- O selo que tem a imagem de um avião não é amarelo.
- O selo dos Estados Unidos é azul.
- O selo com a imagem de uma flor é verde.

Sugestão: No caderno, organize as informações como neste quadro e complete-o.

Bandeira do país				
Nome do país	França.	Alemanha.	Suíça.	Estados Unidos.
Cor do selo	Vermelho.	Amarelo.	Verde.	Azul.
Imagem no selo	Trem.	Corredor.	Flor.	Avião.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Raciocínio lógico

Este boxe apresenta um desafio de lógica.

Leia as dicas com os alunos e oriente-os a copiar o quadro do livro no caderno e preenchê-lo. Sugira também que anotem primeiro as informações diretas, como “O selo alemão tem a imagem de um corredor” e “O selo dos Estados Unidos é azul”, e interpretem as outras a partir dessas.

▼ 2 retas perpendiculares quaisquer, não servindo quando são fornecidos uma reta e um ponto (pertencente ou não à reta).

Explorar e descobrir

Peça que observem as figuras do livro com as indicações do traçado para construção de uma reta *s* perpendicular a uma reta *r* e que passa por *P* nos 2 casos: *P* é um ponto da reta *r* ou *P* é um ponto fora da reta *r*.

Para descobrirem como foram feitas essas construções, peça que as comparem com construções que já vimos e que formam uma reta perpendicular. Faça intervenções para que concluam que foram traçadas mediatrizes nas construções apresentadas.

Então, pergunte como podemos definir o segmento na reta *r* tal que a mediatriz a ele passe pelo ponto *P*. Se necessário, explique que basta colocarmos a ponta seca em *P* e traçarmos um arco que marque 2 pontos de *r* equidistantes a *P*.

Neste momento, esperamos que os alunos saibam que só falta construir a mediatriz em cada caso para fazerem as construções apresentadas.

Construção de retas paralelas

Explique aos alunos que agora vamos construir uma reta *s* paralela a uma reta *r* e que passa por *P* a partir da construção de um losango, pois os pares de lados opostos dele são paralelos. Destaque que faremos essa construção a partir de outra característica desse polígono: ele tem todos os lados com medidas de comprimento iguais.

Então, pergunte: "Vocês se lembram qual construção nos permite transportar medidas de comprimento iguais?". Se necessário, relembre-os que é o transporte de segmentos e como fazer isso.

Em seguida, na lousa, mostre como usar essa construção para traçar a reta *s* paralela à reta *r* e que passa por *P*.

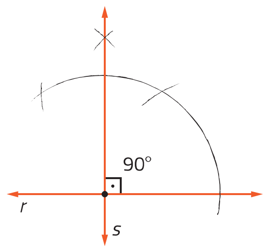
Ao final, solicite aos alunos que registrem, no painel de descobertas, as construções com régua e compasso de ângulos de medida de abertura de 30°, 60° e 90°, de retas perpendiculares e retas paralelas.

Construção de retas perpendiculares

Você já aprendeu a construir retas perpendiculares e paralelas a uma reta dada, usando régua e esquadro.

Para aprender a construir 2 retas perpendiculares, usando régua e compasso, analise os exemplos.

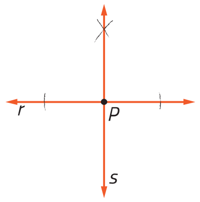
- Se você quiser traçar 2 retas perpendiculares quaisquer, então basta traçar um ângulo de medida de abertura de 90° e prolongar os lados dele.
- Se você tem uma reta *r* e um ponto *P* e quiser construir uma reta *s* perpendicular à reta *r* e que passa por *P*, então inicialmente você deve analisar a posição do ponto *P*.



$s \perp r$

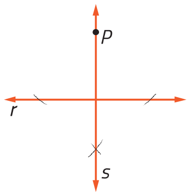
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

1º caso: *P* é um ponto da reta *r*.



$s \perp r$

2º caso: *P* é um ponto fora da reta *r*.



$s \perp r$

Explorar e descobrir — Não escreva no livro!

Observe os 2 casos das construções da reta perpendicular à reta *r* e que passa por *P*.

a) Converse com os colegas. Como vocês acham que foram feitas essas construções? Registre no caderno.

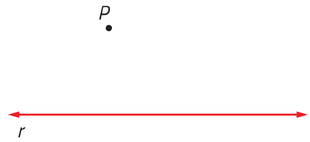
b) Faça essas 3 construções no caderno. Reprodução das figuras do livro.

a) Resposta esperada: Nos 2 casos, com a ponta-seca do compasso em *P*, traçamos um arco determinando 2 pontos de *r* que equidistam de *P*; em seguida, traçamos a mediatriz do segmento de reta de extremidades nesses pontos, obtendo a reta perpendicular procurada.

Construção de retas paralelas

Dada uma reta *r*, existem no mesmo plano infinitas retas paralelas a ela. Vamos estudar uma dessas retas em particular: aquela que passa por um ponto *P* dado, pertencente ao mesmo plano.

Considere uma reta *r* e um ponto *P* não pertencente a *r*.

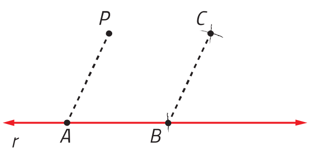


Banco de imagens/Arquivo da editora

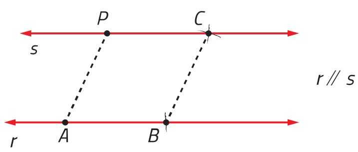
Podemos construir uma reta *s* que passa por *P* e é paralela à reta *r*. Para isso, usamos o fato de que um losango tem todos os lados com medidas de comprimento iguais e que os pares de lados opostos são paralelos.

Acompanhe a construção.

- Marcamos um ponto *A* qualquer sobre a reta *r*. Com a ponta-seca do compasso em *A*, e abertura correspondente à *AP*, determinamos o ponto *B* sobre a reta *r*.
- Com a mesma abertura do compasso, traçamos 2 arcos, com a ponta-seca em *B* e depois em *P*. A intersecção desses arcos determina um ponto *C*.



- Como $AP = AB = BC = PC$, temos que *ABCP* é um losango e que a reta *s* que passa por *P* e por *C* é paralela à reta *r* dada.
- Traçamos a reta *s*.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

3 Mais construções geométricas com régua não graduada e compasso

Explique aos alunos que agora vamos aprender a construir retas perpendiculares utilizando régua e compasso e pergunte: "Qual é a medida de abertura dos ângulos formados por 2 retas perpendiculares entre si?". Após as respostas, incentive-os a construir um ângulo de medida de abertura de 90° e a prolongar os lados desse ângulo.

Em seguida, peça que leiam as informações do livro, destacando que essa construção que fizeram só pode ser utilizada para construir ▶

3 Mais construções geométricas com régua não graduada e compasso

As atividades desenvolvem as construções de retas perpendiculares e de retas paralelas, usando os procedimentos usados nelas para fazer também outras construções.

Atividade 19

Veja a resolução desta atividade na página XLVII deste Manual.

Atividade 20

Nesta atividade, além dos procedimentos usados para a construção de retas perpendiculares e de retas paralelas, também será necessária a construção de um ângulo de medida de abertura de 60°.

Veja a resolução desta atividade na página XLVII deste Manual.

Atividade 21

Veja a resolução do item **c** desta atividade na página XLVIII deste Manual.

Raciocínio lógico

Este boxe trabalha uma adivinha do dia e do mês em que um colega nasceu.

Se achar conveniente, escreva os procedimentos na forma de uma equação com 2 incógnitas (x para o dia e y para o mês) e desenvolva-a com os alunos para que entendam o motivo da adivinha dar certo.

Atividade 22

Esta atividade apresenta mais um lugar geométrico: par de retas paralelas a uma reta dada, todas em um mesmo plano.

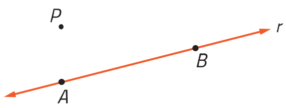
Se necessário, relembre que a medida de distância entre um ponto e uma reta é a medida de comprimento de um segmento que liga o ponto e a reta, tal que o segmento e a reta sejam perpendiculares.

Veja a resolução do item **c** desta atividade na página XLVIII deste Manual.

Atividades

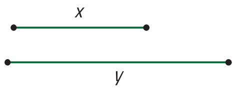
Não escreva no livro!

19 Copie esta figura no caderno. Depois, usando régua e compasso, localize o ponto *O* na intersecção da mediatriz *m* de $\overline{AB}$ e da reta *s*, que passa por *P* e é paralela à reta *r*. MP



Banco de imagens/Arquivo da editora

20 Construa no caderno o que se pede, considerando as medidas de comprimento *x* e *y*. MP

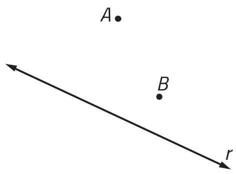


Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Um quadrado *ABCD* com lados de medida de comprimento *x*.

b) Um paralelogramo *RSTU* com $RS = y$ e $RU = x$ e $m(\hat{R}) = 60°$.

21 Observe a reta *r* e os pontos *A* e *B* não pertencentes à *r*.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Copie a figura no caderno.

b) Pense na reta *s*, que passa por *A* e é perpendicular à reta *r*, e na reta *t*, que passa por *B* e é paralela à reta *r*. Qual será a posição da reta *t* em relação à reta *s*? Perpendicular.

c) Construa as retas *s* e *t* da figura no caderno e confirme sua resposta. MP

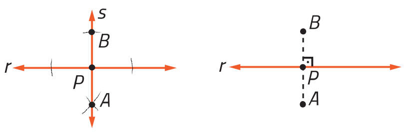
Raciocínio lógico

Divirta-se adivinhando o dia e o mês de um aniversário!
Peça a um colega que escreva, em uma folha à parte, o número do mês em que ele nasceu e **não** mostre para você. Depois, peça a ele que multiplique esse número por 5, adicione 6, multiplique por 4, adicione 9, multiplique por 5 e, ao final, adicione o dia em que ele nasceu. Pergunte a ele qual foi o resultado final. Se você subtrair 165 do resultado que ele disse, então encontrará o dia do aniversário dele, nos últimos 2 algarismos, e o mês em que ele nasceu, nos outros algarismos. Resposta pessoal.

22 **Mais um lugar geométrico: par de retas paralelas a uma reta dada, todas em um mesmo plano.** Para construir esse lugar geométrico, considere inicialmente uma reta *r* dada. MP

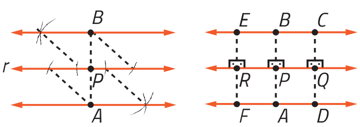
a) Com traços suaves a lápis, faça no caderno a primeira construção (à esquerda) da reta *s*, perpendicular a *r* no ponto *P*, e dos pontos *A* e *B*, tal que $AP = BP$. Depois, cubra com caneta a reta *r* e os pontos *P*, *A* e *B* obtidos (figura à direita).

> *AP* é a medida da distância entre o ponto *A* e a reta *r*.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

b) O novo lugar geométrico é o par de retas paralelas a *r*, uma passando pelo ponto *A* e outra, pelo ponto *B*. Observe e faça no caderno a construção dessas paralelas.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

> O par de retas paralelas é um lugar geométrico porque:
> - todos os pontos dessas 2 retas têm a mesma medida de distância até *r*, que é igual a *AP* ($AP = BP = CQ = ER = FR = ...$);
> - nenhum outro ponto do plano tem essa propriedade.

c) Agora, trace no caderno uma reta *r* qualquer e construa o par de retas paralelas a *r*, cuja medida da distância de todos os pontos dela até *r* seja igual a *x*.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Construções com régua não graduada e compasso

As construções geométricas utilizando régua não graduada e compasso são do interesse dos matemáticos desde a Grécia Antiga.

Entre todas as figuras geométricas, a reta e a circunferência são consideradas as figuras básicas e talvez por isso os gregos usavam a régua não graduada e o compasso para traçar figuras geométricas. Eles acreditavam que era mais belo e puro, do ponto de vista matemático, quando uma construção podia ser realizada apenas com esses instrumentos.

Matthew Salacuse/Getty Images

Régua não graduada.

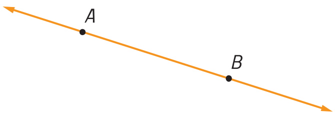
As imagens desta página não estão representadas em proporção.

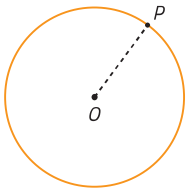
Leon Rafael/Shutterstock

Compasso.

Naquela época, o traçado das construções era feito como se fosse um jogo, e tinha regras. As regras básicas relacionavam as possíveis construções que podiam ser feitas conhecendo-se 2 pontos distintos do plano:

- com a régua não graduada, é possível traçar uma reta que passa por esses pontos;
- com o compasso, é possível traçar uma circunferência com centro em um dos pontos e que passa pelo outro.

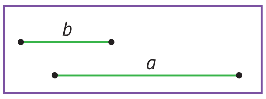




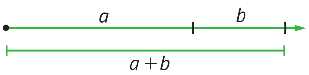
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Usando a régua não graduada e o compasso e seguindo as regras básicas, os gregos faziam até mesmo as operações aritméticas fundamentais de adição, subtração, multiplicação e divisão de segmentos de reta e de ângulos, usando as figuras geométricas e o transporte delas. Veja os exemplos.

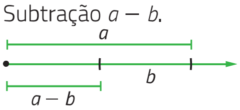
1. Com 2 segmentos de reta de medidas de comprimento a e b.



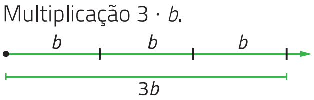
- Adição $a + b$.



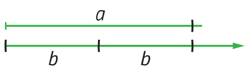
- Subtração $a - b$.



- Multiplicação $3 \cdot b$.

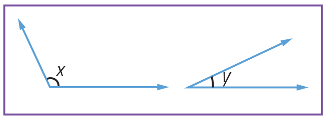


- Divisão $a \div b$ (ideia de quantas vezes b "cabe" em a).

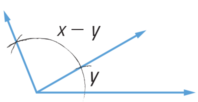


$a \div b = 2$ (pois b "cabe" 2 vezes em a)

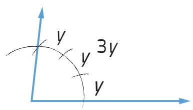
2. Com 2 ângulos de medidas de abertura x e y.



- Subtração $x - y$.



- Multiplicação $3 \cdot y$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Leitura

Peça que leiam o texto e que compartilhem hipóteses e conclusões com a turma. Solicite aos alunos que construam no caderno os ângulos de medidas de abertura x e y, a adição $x + y$ e a divisão $x \div y$, verificando se y cabe um número de vezes inteiro em x.

Então, pergunte: "Há diferença nas construções feitas com régua e compasso ou com régua e transferidor?"; "E com o uso de ferramentas como o GeoGebra?". Leve-os a perceber que o resultado final é o mesmo, mas que as construções feitas com régua e compasso, em geral, exigem mais conhecimentos matemáticos e são mais trabalhosas do que as construções com outras ferramentas. Destaque que, por isso, as construções com régua e compasso são importantíssimas para o desenvolvimento das habilidades de desenho geométrico e do aprendizado de Geometria.

Se achar conveniente, peça aos alunos que criem operações com segmentos de reta e ângulos e troquem com um colega para que um faça, usando régua e compasso, o que foi proposto pelo outro.

Leitura

Peça que leiam a continuação do texto e questione: "Vocês já fizeram essas construções geométricas possíveis usando régua e compasso?". Faça-os concluir que as fizeram ao longo deste capítulo, sendo a bissecção de um ângulo satisfeita pela bissetriz.

Então, forme 3 grupos e peça que cada grupo explique como pode ser feita, com régua e compasso, uma das construções citadas no livro: retas paralelas a uma reta dada, bissetriz de um ângulo e reta perpendicular a uma reta dada, passando por um ponto dado.

Se achar conveniente, sugira que cada grupo pesquise um dos 3 problemas clássicos da Geometria grega: duplicação do cubo, trissecção do ângulo e quadratura do círculo. Explique que não queremos que procurem a demonstração ou a construção deles, apenas que pesquisem a parte histórica sobre eles, para compartilhar com a turma.

Questões

As questões desta página são resolvidas usando régua e compasso para o transporte de segmentos de reta e de ângulos e a construção de ângulos, triângulos, retas perpendiculares, retas paralelas, mediatriz de um segmento e bissetriz de um ângulo. Além disso, apresentam operações aritméticas com segmentos de reta e ângulos.

Veja as resoluções na página XLVIII deste Manual.

Ainda usando apenas a régua não graduada e o compasso, e seguindo as regras básicas, os gregos fizeram inúmeras outras construções geométricas, como:

- a construção de retas paralelas a uma reta dada;
- a bissecção de um ângulo, ou seja, a divisão dele em 2 partes iguais;
- a construção de uma reta perpendicular a uma reta dada, passando por um ponto dado.

Apesar disso, os gregos não conseguiram, por exemplo, trissecionar um ângulo, ou seja, dado um ângulo qualquer e usando a régua não graduada e compasso, construir um ângulo cuja medida de abertura é a terça parte da medida de abertura do ângulo dado.

Durante séculos muitos matemáticos tentaram realizar a trissecção, mas não obtiveram êxito. Apenas no final do século XIX é que foi provado que essa construção é impossível com a utilização apenas da régua não graduada e do compasso.

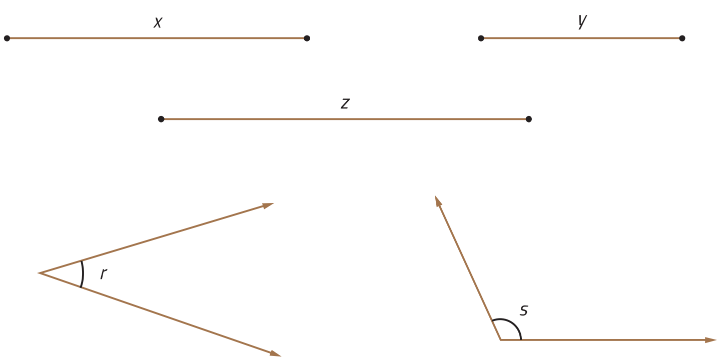
Fonte de consulta: KARSON, Paul. *A magia dos números*. Rio de Janeiro: Globo, 1961. p. 67.

Euclides, c. 1630-1625. Jusepe de Ribera. Óleo sobre tela de 125,1 cm × 92,4 cm.

Não escreva no livro!

Questão

Considere estes segmentos de reta e estes ângulos, com as medidas de comprimento e de abertura, respectivamente, indicadas com letras.



Faça as construções no caderno. MP

a) Reproduza essas figuras.
b) Construa um segmento de reta com medida de comprimento $x + y$.
c) Construa um triângulo cujos lados têm medidas de comprimento x, y e z.
d) Construa um retângulo de medidas de comprimento z da base e y da altura.
e) Construa um losango com lados de medida de comprimento x e ângulos de medida de abertura 30°, 150°, 30° e 150°.
f) Construa um ângulo com medida de abertura $2r$.
g) Construa um ângulo de medida de abertura $r + 90°$.
h) Construa um ângulo de medida de abertura $180° - s$.
i) Construa um $\triangle ABC$ com $AB = x$, $AC = y$ e $m(\hat{A}) = s$.
j) Construa o segmento de reta $\overline{PQ}$, de medida de comprimento z, e a mediatriz m dele.
k) Construa o ângulo $\hat{A}$, de medida de abertura s, e a bissetriz $\overrightarrow{AP}$ dele.

Revisando seus conhecimentos

Principais habilidades da BNCC

EF08MA04 EF08MA10 EF08MA11 EF08MA15 EF08MA17 EF08MA25

Atividade 1

Se necessário, relembre o que são ângulos suplementares e o que é um triângulo isósceles.

Veja a resolução desta atividade na página XLIX deste Manual.

Atividade 3

Esta atividade contextualiza o uso de equações para a resolução de problemas. Veja um exemplo de resolução desta atividade.

João: x reais.

$x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 65 \Rightarrow 6x + 3x + 4x = 390 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13x = 390 \Rightarrow x = 30$

$\frac{30}{2} = 15$

$\frac{2 \times 30}{3} = 20$

3. João: R\$ 30,00; Paulo: R\$ 15,00; Lauro: R\$ 20,00. $\left(J: x, P: \frac{x}{2} \text{ e } L: \frac{2x}{3};\ x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 65 \Rightarrow x = 30;\ \frac{30}{2} = 15 \text{ e } \frac{2 \times 30}{3} = 20\right)$

Revisando seus conhecimentos

Não escreva no livro!

1 Faça no caderno estas construções. MP

a) Com régua e transferidor: dois ângulos suplementares, com um deles de medida de abertura de 50°.

b) Com régua e esquadro: um retângulo com medidas de comprimento da base de 7 cm e da altura de 4 cm.

c) Com régua e compasso: um triângulo isósceles ABC com $BC = a$ e $AB = AC = b$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2 Escreva as expressões algébricas no caderno.

a) A soma do cubo do número x com o quadrado do número y. $x^3 + y^2$

b) O dobro do número m somado ao cubo do número n. $2m + n^3$

c) A terça parte de um número a menos o triplo de um número b. $\frac{1}{3}a - 3b$ ou $\frac{a}{3} - 3b$.

3 Joaquim repartiu R\$ 65,00 entre seus 3 filhos (Paulo, João e Lauro), de modo que Paulo ficou com a metade da quantia de João e Lauro ficou com $\frac{2}{3}$ da quantia de João. Quanto cada um recebeu?

4 Observe as sequências numéricas e um exemplo de fórmula para representar um termo qualquer a_n.

- $(0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, \ldots)$
  Fórmula do termo geral: $a_n = 6(n - 1)$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$
- $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots)$
  Fórmula de recorrência: $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 2$, para $n = 2, 3, 4, \ldots$

Agora, observe estas sequências e, no caderno, escreva uma fórmula para representar um termo qualquer a_n e os próximos 2 termos de cada sequência. MP

a) $(0, 5, 10, 15, 20, \ldots)$

b) $(1, 6, 11, 16, 21, \ldots)$

c) $(2, 7, 12, 17, 22, \ldots)$

d) $(1, 5, 9, 13, 17, \ldots)$

5 **Construção de polígonos com mais de 3 lados.** No livro do 7º ano você aprendeu a construir triângulos dadas as medidas de comprimento dos 3 lados.

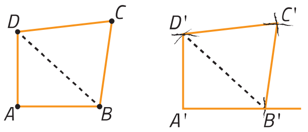
Para reproduzir quadriláteros, pentágonos, hexágonos, entre outros polígonos, podemos recorrer à construção de triângulos e ao transporte de segmentos de reta. Para isso, a partir de um mesmo vértice do polígono convexo, traçamos as diagonais. Em seguida, reproduzimos os triângulos que foram formados e, assim, obtemos a reprodução do polígono.

Veja os 2 exemplos e reproduza os polígonos no caderno. Reprodução das figuras do livro.

a) Reprodução de um quadrilátero dado.

Traçamos a diagonal $\overline{BD}$ no quadrilátero dado.

Transportamos os lados do $\triangle ABD$, obtendo o $\triangle A'B'D'$. Em seguida, transportamos os lados do $\triangle BDC$, obtendo o $\triangle B'D'C'$.



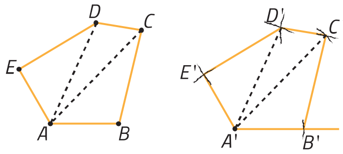
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Obtemos, então, o quadrilátero $A'B'C'D'$.

b) Reprodução de um pentágono dado.

Traçamos as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ no pentágono dado.

Construímos o $\triangle A'B'C'$, em seguida o $\triangle A'C'D'$ e, finalmente, o $\triangle A'D'E'$.

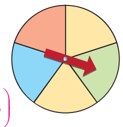


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Obtemos o pentágono $A'B'C'D'E'$.

6 Para reproduzir um octógono dado, quantas diagonais você vai traçar partindo de um mesmo vértice? E quantos triângulos você vai transportar? Converse com os colegas. 5 diagonais; 5 triângulos.

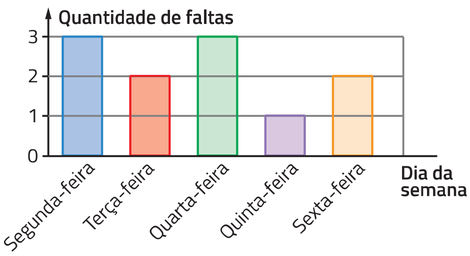
7 Esta roleta está dividida em 5 setores iguais. Girando o ponteiro dela, qual é a probabilidade de ele parar no amarelo? 40% $\left(2 \text{ em } 5 = \frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\%\right)$



Banco de imagens/Arquivo da editora

8 Considerando este gráfico, qual foi a média diária de faltas nessa semana?

Faltas durante a semana



Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráfico elaborado para fins didáticos.

9 Considerando as coordenadas dos pontos $A(1, 3)$, $B(-2, 2)$, $C(-2, -3)$ e $D(0, -2)$ os vértices do quadrilátero $ABCD$, o menor lado desse quadrilátero é:

a) $\overline{AB}$.

b) $\overline{BC}$.

X c) $\overline{CD}$.

d) $\overline{DA}$.

8. 2,2 faltas por dia. $\left(\frac{3 + 2 + 3 + 1 + 2}{5} = \frac{11}{5} = 2{,}2\right)$

Atividade 4

Desenvolve a escrita das fórmulas do termo geral e de recorrência e a descoberta de termos de sequências dadas.

Inicialmente, solicite que os alunos escrevam as fórmulas do termo geral e de recorrência dos exemplos dados.

Exemplos de resposta para os itens desta atividade:

a) $a_n = 5(n - 1)$ ou $a_1 = 0$ e $a_n = a_{n-1} + 5$

$a_6 = 5(6 - 1) = 5 \times 5 = 25$

$a_7 = 5(7 - 1) = 5 \times 6 = 30$

b) $a_n = 5(n - 1) + 1$ ou

$a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 5$

$a_6 = 5(6 - 1) + 1 = 5 \times 5 + 1 = 26$

$a_7 = 5(7 - 1) + 1 = 5 \times 6 + 1 = 31$

c) $a_n = 5(n - 1) + 2$ ou

$a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 5$

$a_6 = 5(6 - 1) + 2 =$
$= 5 \times 5 + 2 = 27$

$a_7 = 5(7 - 1) + 2 =$
$= 5 \times 6 + 2 = 32$

d) $a_n = 4(n - 1) + 1$ ou

$a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 4$

$a_6 = 4(6 - 1) + 1 =$
$= 4 \times 5 + 1 = 21$

$a_7 = 4(7 - 1) + 1 =$
$= 4 \times 6 + 1 = 25$

Após a resolução desta atividade, converse com os alunos sobre as escolhas de fórmulas que fizeram (do termo geral ou de recorrência) e se perceberam relações entre as fórmulas de cada sequência.

Atividades 5 e 6

Estas atividades apresentam a construção de polígonos convexos com mais de 3 lados a partir da construção de triângulos e do transporte de segmentos de reta.

Destaque que devem ser traçadas as diagonais referentes a apenas um dos vértices.

Na atividade 6, peça aos alunos que construam um octógono convexo no caderno e troquem com um colega para que um reproduza a figura do outro.

Atividade 7

Esta atividade retoma o uso de porcentagens para representar probabilidades ou frações calculadas a partir das imagens fornecidas.

Se necessário, chame a atenção da turma para a quantidade de setores com a cor desejada.

Atividade 8

Esta atividade revisa o cálculo da média aritmética usando os dados fornecidos por um gráfico.

Atividade 9

Esta atividade trabalha com a construção de um quadrilátero a partir das coordenadas cartesianas dadas e a comparação das medidas de comprimento dos lados dessa figura.

Representando o quadrilátero no plano cartesiano, os alunos podem medir o comprimento dos lados do quadrilátero e comparar as medidas obtidas ou podem transportar os lados para uma mesma semirreta e comparar os segmentos de reta obtidos.

Veja a resolução desta atividade na página XLIX deste manual.

Testes oficiais

Principal habilidade da BNCC

EF08MA17

Peça que resolvam os testes oficiais, acompanhe-os na tarefa. Observe se mobilizam conhecimentos para as resoluções e faça intervenções, se necessário.

Atividades 1, 3 e 4

Estas atividades trabalham alguns elementos de circunferências (arco, ângulo central e raio).

Na atividade 1, se houver oportunidade, pergunte aos alunos se já viram o símbolo apresentado e onde viram. É preciso conscientizá-los da importância do respeito a esse símbolo frequentemente visto nos assentos do transporte público, em banheiros, em vagas de estacionamento, desenvolvendo o tema contemporâneo *educação em direitos humanos*.

Atividades 2 e 5

Estas atividades abordam as definições de circunferência e mediatriz de um segmento como lugares geométricos.

5. Para estar na mesma medida de distância entre o local de trabalho da mãe e do pai, deve estar na mediatriz do segmento de reta formado pelos pontos que representam esses locais; essa mediatriz é a rua 4. Para estar na mesma medida de distância da escola, deve estar a mesma quantidade de lados dos quadradinhos, ou seja, a 3 lados dos quadradinhos.

Não escreva no livro!

Testes oficiais

1 **(Enem)** O símbolo internacional de acesso, mostrado na figura, anuncia local acessível para o portador de necessidades especiais. Na concepção desse símbolo, foram empregados elementos gráficos geométricos elementares.

Reprodução/ENEM PPL, 2013

Regras de acessibilidade ao meio físico para o deficiente. Disponível em: www.ibdd.org.br. Acesso em: 28 jun. 2011 (adaptado).

Os elementos geométricos que constituem os contornos das partes claras da figura são:

a) retas e círculos.

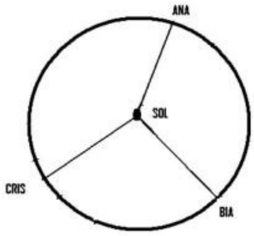
b) retas e circunferências.

c) arcos de circunferências e retas.

d) coroas circulares e segmentos de retas.

X e) arcos de circunferências e segmentos de retas.

2 **(Saresp)** No jardim da cidadezinha que Ana, Bia e Cris moram há um canteiro em forma de um círculo de dois metros de raio, com pequenos caminhos que se encontram no centro, onde há um relógio de sol, conforme representado na figura. As três meninas estão posicionadas como mostra a figura.



Reprodução/Saresp, 2011

A que distância as três estão do relógio de sol?

a) Ana a 1 m, Bia a 2 m e Cris a 3 m do relógio de sol.

b) Ana a 1 m, Bia e Cris a 2 m do relógio de sol.

c) Ana, Bia e Cris estão a 2 m do relógio de sol.

X d) Ana, Bia e Cris estão a 1 m do relógio de sol.

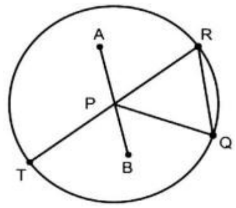
3 **(Saresp)** Na circunferência da figura, um segmento que representa o raio é:

a) $\overline{AB}$

b) $\overline{RQ}$

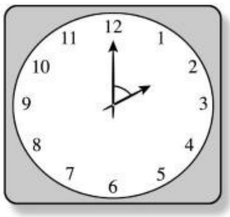
X c) $\overline{PQ}$

d) $\overline{TR}$



Reprodução/Saresp, 2011

4 **(Obmep)** Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando ele marca 2 horas? (Exemplo de resolução: $360° \div 12 = 30°$; $2 \times 30° = 60°$)



Reprodução/Obmep, 2005

a) 30°

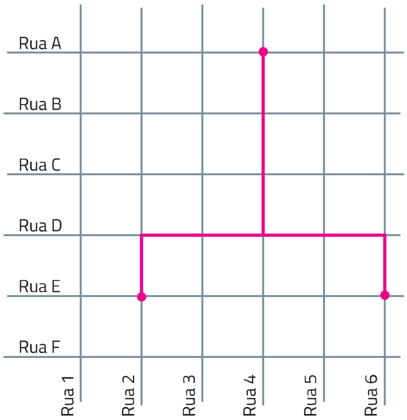
b) 45°

X c) 60°

d) 75°

e) 90°

5 **(Enem)** Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão representadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.



Reprodução/ENEM, 2016

A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A.

Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas:

a) 3 e C.

b) 4 e C.

X c) 4 e D.

d) 4 e E.

e) 5 e C.

Verifique o que estudou

Principal habilidade da BNCC

EF08MA15

Atividades 1 e 2

Estas atividades abordam as definições de mediatriz de um segmento, bissetriz de um ângulo e circunferência como lugar geométrico e as construções delas com régua, compasso e transferidor, além de relacionar as medidas de comprimento do raio e do diâmetro de uma circunferência.

Veja a resolução da atividade 2 na página XLIX deste manual.

Atividade 3

Esta atividade apresenta a identificação de construções geométricas feitas com diferentes instrumentos. Confira as respostas:

a) Foi construído um ângulo de medida de abertura de 40° e, em seguida, o ângulo oposto pelo vértice, que também tem medida de abertura de 40°.

VERIFIQUE O QUE ESTUDOU

Não escreva no livro!

1 Copie as frases no caderno e complete-as.

a) Em uma circunferência com raio de medida de comprimento de 3,8 cm, o diâmetro tem medida de comprimento de ▇. 7,6 cm ($2 \times 3,8 = 7,6$)

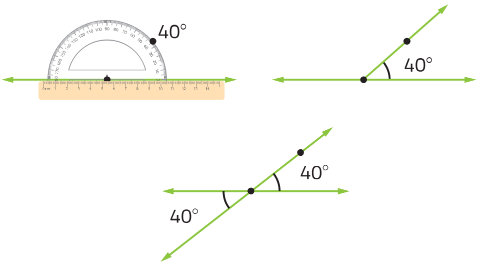
b) Um segmento de reta $\overline{AB}$ tem medida de comprimento de 6 cm e m é o lugar geométrico dos pontos equidistantes das extremidades desse segmento de reta, intersectando-o no ponto M. Então, o segmento de reta $\overline{AM}$ tem medida de comprimento de ▇. 3 cm ($6 \div 2 = 3$)

c) O ângulo $E\hat{F}G$ tem medida de abertura de 70° e tem a semirreta $\overrightarrow{FR}$ como lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados desse ângulo. Então, o ângulo $E\hat{F}R$ tem medida de abertura de ▇. 35° ($70° \div 2 = 35°$)

2 Usando régua, compasso e transferidor, construa no caderno as figuras citadas nos itens **a**, **b** e **c** da atividade 1.

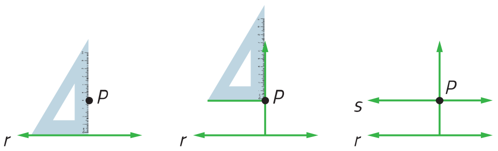
3 Em cada item, descubram o que foi construído e descrevam no caderno as etapas da construção.

a) Com régua e transferidor. MP

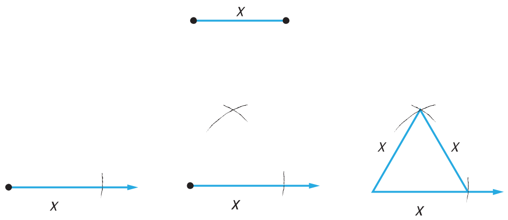


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

b) Com régua e esquadro.



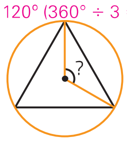
c) Com régua e compasso.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

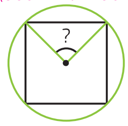
4 Descubra e escreva no caderno qual é a medida de abertura do ângulo central cujos lados definem 2 vértices consecutivos de cada polígono regular.

a) 120° ($360° \div 3 = 120°$)



Triângulo equilátero (triângulo regular).

b) 90° ($360° \div 4 = 90°$)



Quadrado (quadrilátero regular).

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

c) Decágono regular. 36° ($360° \div 10 = 36°$)

d) Eneágono regular. 40° ($360° \div 9 = 40°$)

e) Dodecágono regular (12 lados). 30° ($360° \div 12 = 30°$)

f) Icoságono regular (20 lados). 18° ($360° \div 20 = 18°$)

5 Em um polígono regular, a medida de abertura do ângulo central é de 24°. Quantos lados esse polígono tem? 15 lados. ($360 \div 24 = 15$; 24° "cabem" 15 vezes em 360°; é o pentadecágono.)

6 Volte às páginas de abertura deste capítulo e converse com um colega sobre como descobrir o local onde será construída a creche. Imaginem que a prefeitura, o posto de saúde e a escola sejam 3 pontos do plano.

Atenção

Retome os assuntos que você estudou neste capítulo. Verifique em quais teve dificuldade e converse com o professor, buscando maneiras de reforçar seu aprendizado.

6. Traçar o triângulo com vértices nos 3 pontos. Em seguida, traçar as mediatrizes dos lados. O encontro delas é o local da creche.

Autoavaliação

Algumas atitudes e reflexões são fundamentais para melhorar o aprendizado e a convivência na escola. Reflita sobre elas. Respostas pessoais.

- Tenho retomado em casa a matéria que vi em sala de aula?
- Minha participação nos trabalhos em grupos foi ativa, com interesse e respeito pelos colegas?
- Quais outras atitudes positivas e importantes eu tomei para aprimorar meus estudos?
- Estou tomando o cuidado necessário para a conservação deste livro?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

Atividade 6

Esta atividade retoma o problema inicial deste capítulo: a construção de uma creche em local equidistante da prefeitura, do posto de saúde e da escola.

Para ajudar na resolução, pergunte aos alunos: "Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes às extremidades do segmento de reta?"; "Será que conseguimos usá-lo para 3 pontos equidistantes a um local?"; "Como podemos fazer isso?". Na lousa, represente a situação e siga as orientações da turma. Se necessário, faça intervenções.

Veja a resposta desta atividade:

A creche ficará na intersecção das mediatrizes dos segmentos de reta que ligam, 2 a 2, os pontos que representam a escola, o posto de saúde e a papelaria.

Autoavaliação

As questões de autoavaliação apresentadas propiciam aos alunos refletir sobre os estudos, as atitudes e as aprendizagens. Dê um tempo para que cada aluno reflita individualmente sobre elas e registre as respostas no caderno. Em seguida, àqueles que desejarem, permita que compartilhem as respostas com os colegas.

Ao longo do ano, é importante a retomada dos registros de autoavaliação feitos no fim de cada capítulo, para que os alunos possam perceber e mensurar quanto aprenderam e melhoraram em diversos aspectos.

Em relação às perguntas propostas nesta página, converse com a turma sobre a importância de participar ativamente das aulas e dos trabalhos em grupo propostos em sala de aula. Enfatize também a necessidade de ter cuidado e zelo com todos os materiais escolares, assim como com os objetos, os materiais e os espaços da sala de aula e da escola.

Avaliação

Para mais informações, veja a **avaliação** do 1º bimestre.

b) Com uma reta r e um ponto P fora dela, foi construída uma reta perpendicular a r, passando por P e, em seguida, a reta s, passando por P e paralela à reta r.

c) Foi construído um triângulo equilátero, com lados de medida de comprimento x dada.

Atividades 4 e 5

Estas atividades trabalham com a medida de abertura do ângulo central cujos lados definem 2 vértices consecutivos de polígonos regulares para a determinação dessa medida ou do polígono regular referente a ela.

Na atividade 4, converse com os alunos sobre o porquê de não serem citados ou construídos polígonos regulares de 7 ou 11 lados, por exemplo. Esperamos que eles percebam que ao dividir os 360° da circunferência por 7 ou por 11, não se obtém uma medida inteira.

A atividade 8 também aborda o transporte de ângulos e operações aritméticas com eles.

Abertura

Principal habilidade da BNCC
EF08MA06

Comente com a turma que neste capítulo serão aprofundados alguns assuntos vistos no 7º ano: expressões algébricas, equações e proporcionalidade.

Peça aos alunos que observem a imagem e pergunte: "O que as meninas estão jogando?"; "Vocês costumam assistir a jogos de basquete?"; "Conhecem as regras?"; "Qual é o formato da quadra?"; "Quanto medem as dimensões da quadra?". Incentive a turma a compartilhar conhecimentos e experiências sobre basquete.

Se achar conveniente, solicite uma pesquisa sobre a origem do jogo, as regras (inclusive as medidas das dimensões da quadra), os principais campeonatos e jogadores, os melhores resultados do basquete brasileiro e tudo mais que os alunos acharem interessante sobre o tema. Essa exploração pode ser desenvolvida em conjunto com as aulas de Educação Física.

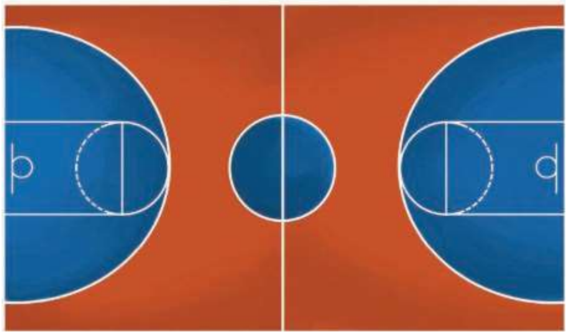
Plano de desenvolvimento
Para mais informações, veja o **plano de desenvolvimento** do 2º bimestre.

CAPÍTULO
3 Expressões algébricas, equações e proporcionalidade

Michel Ramalho/Arquivo da editora

Em uma quadra de basquete profissional, como a desta imagem, a largura tem medida de comprimento de 13 metros a mais do que a profundidade.

Estúdio Lab307/Arquivo da editora



x

$x + 13$

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

As medidas de comprimento da largura e da profundidade da quadra de basquete estão representadas por letras e números. Para obter as expressões que representam a medida de perímetro e a medida de área, foram efetuados cálculos.

Medida de comprimento da profundidade, em metros: x

Medida de comprimento da largura, em metros: $x + 13$

Medida de perímetro, em metros: $x + x + 13 + x + x + 13$ ou $4x + 26$

Medida de área, em metros quadrados: $x \cdot (x + 13)$ ou $x^2 + 13x$

As expressões $4x + 26$ e $x^2 + 13x$ obtidas recebem o nome de **expressões algébricas** e serão um dos assuntos deste capítulo.

Não escreva no livro!

Converse com os colegas sobre estas questões e registre as respostas no caderno.

1. Considerando que a medida de comprimento da profundidade da quadra de basquete seja de 15 m, calcule o que é pedido em cada item.

a) Medida de comprimento da largura da quadra de basquete. 28 m ($15 + 13 = 28$)

b) Medida de perímetro da quadra de basquete. 86 m ($15 + 28 + 15 + 28 = 86$ ou $4 \times 15 + 26 = 86$)

c) Medida de área da quadra de basquete. 420 m² ($15 \times 28 = 420$ ou $15^2 + 13 \times 15 = 420$)

2. Considerando que a largura de um terreno tenha a medida de comprimento de 8 m a mais do que a profundidade, qual deve ser a medida de comprimento da profundidade para que a medida de comprimento da largura seja de 35 m? 27 cm ($x + 8 = 35 \Rightarrow x = 27$)

3. No caso de a medida de comprimento da profundidade de um terreno ser y e a medida de comprimento da largura ser o dobro da profundidade, como serão representadas a medida de comprimento da largura, a medida de perímetro e a medida de área desse terreno? Medida de comprimento da profundidade: $2y$; medida de perímetro: $y + 2y + y + 2y$ ou $6y$; medida de área: $y \times 2y$ ou $2y^2$.

Abertura

Apresente aos alunos a fala do professor do livro e pergunte: "A informação dada é suficiente para sabermos as medidas das dimensões de uma quadra de basquete profissional?"; "Como podemos indicar as medidas desconhecidas usando a relação fornecida?". Leve-os a concluir que as medidas de comprimento da profundidade e da largura são, respectivamente, x e $x + 13$.

A partir disso, explore com a turma algumas possibilidades, como:

- se a medida de comprimento da profundidade da quadra for de 5 m, a medida de comprimento da largura será de 18 m;
- se a medida de comprimento da profundidade da quadra for de 6 m, a medida de comprimento da largura será de 19 m;
- se a medida de comprimento da profundidade da quadra for de 10 m, a medida de comprimento da largura será de 23 m.

Então, com a turma, calcule as medidas de perímetro e de área da quadra de basquete profissional, usando as expressões algébricas x e $x + 13$.

Em seguida, peça que respondam às questões em grupo, intervindo quando necessário, e que compartilhem as resoluções com a turma.

1 Expressões algébricas

Principal habilidade da BNCC

EF08MA06

Na lousa, apresente os exemplos de expressões algébricas dadas no livro e, com a turma, determine quais são as variáveis utilizadas, relembrando que recebem esse nome por poderem assumir diferentes valores.

Em seguida, peça aos alunos que determinem a expressão algébrica que define a medida de perímetro de um quadrado cujos lados medem a de comprimento e o valor numérico dessa expressão para alguns valores de a.

Então, escreva, com os alunos, as expressões algébricas correspondentes às frases dos exemplos fornecidos no material e solicite a eles que calculem o valor numérico de cada uma delas para $n = 5$.

Bate-papo

Propomos a relação entre os possíveis valores numéricos de uma expressão com a infinitude do conjunto dos números naturais.

Atividades 1, 2 e 3

Estas atividades desenvolvem a escrita de expressões algébricas que representam situações apresentadas em linguagem usual.

A atividade 2 trabalha também o cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica.

Sequência didática

Para mais informações, veja a **sequência didática 1** do 2º bimestre.

1 Expressões algébricas

A ideia de expressão algébrica

No 7º ano, você já estudou que as **expressões algébricas** são usadas para indicar operações matemáticas envolvendo números e letras. Veja alguns exemplos de expressões algébricas.

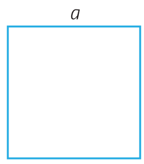
$$2 + x \qquad \frac{y}{3} \qquad 2(x - 3) \qquad a^2 - b \qquad 5x$$

Lembre-se: $5x$ significa $5 \cdot x$ (5 vezes x).

As letras que aparecem nas expressões algébricas são chamadas de **variáveis**. Na expressão $2 + x$, por exemplo, a variável é x.

Valor numérico de uma expressão algébrica

A medida de perímetro deste quadrado é representada pela expressão algébrica $a + a + a + a$ ou $4a$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- Se $a = 2$ cm, então a medida de perímetro é $4 \cdot 2$ cm $= 8$ cm.
- Se $a = 3{,}5$ cm, então a medida de perímetro é $4 \cdot 3{,}5$ cm $= 14$ cm.

Dizemos que o **valor numérico** da expressão algébrica $4a$ é igual a 8 cm, quando a é igual a 2 cm, e é igual a 14 cm, quando a é igual a 3,5 cm.

O valor numérico de uma expressão algébrica é o valor que ela assume quando substituímos cada letra pelo número correspondente e efetuamos as operações indicadas.

Veja mais um exemplo. Vamos escrever as expressões algébricas que correspondem às sentenças a seguir. Em seguida, vamos calcular o valor numérico de cada uma para $n = 5$.

- 1,5 menos n

  $1{,}5 - n$

  $n = 5 \Rightarrow 1{,}5 - 5 = -3{,}5$

- $1\frac{3}{4}$ mais n

  $1\frac{3}{4} + n$

  $n = 5 \Rightarrow 1\frac{3}{4} + 5 = \frac{7}{4} + 5 = \frac{7 + 20}{4} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$

Bate-papo

Quantos valores numéricos a expressão algébrica $3x + 2$ pode assumir considerando x um número natural? Converse com os colegas e justifique sua resposta.

Infinitos valores, um para cada valor de x natural.

Atividades

Não escreva no livro!

1 Felipe tem 44 anos. Escreva no caderno uma expressão algébrica que representa a idade que ele teve há x anos e a idade que ele terá daqui a y anos, sendo x e y números naturais. $44 - x$; $44 + y$.

2 Ivo comprou 1 calça de R\$ 150,00 e 2 camisas.

a) Escreva no caderno uma expressão algébrica que represente o valor a pagar nessa situação. Use a letra x. $150 + 2x$

b) O que representa a letra x neste caso? **b)** O preço de 1 camisa.

c) Se o preço de 1 camisa é de R\$ 80,00, então quanto ele gastou? R\$ 310,00 ($150 + 2x \Rightarrow 150 + 2 \times 80 = 150 + 160 = 310$)

3 Em um retângulo, o comprimento de um lado mede 4 cm a mais do que outro. Representando por x a medida de comprimento, em centímetros, do menor lado, escreva no caderno as expressões algébricas que representam:

a) a medida de comprimento, em centímetros, do maior lado; $x + 4$

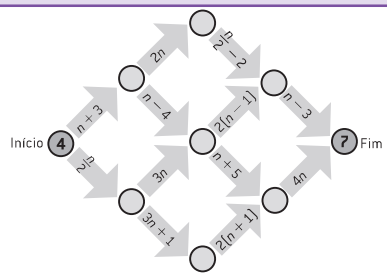
b) a medida de perímetro, em centímetros, do retângulo; $4x + 8$ ($x + (x + 4) + x + (x + 4) = 4x + 8$)

c) a medida de área, em centímetros quadrados, da região retangular correspondente. $x \cdot (x + 4)$ ou $x^2 + 4x$

Sugestão de atividade

A seguir apresentamos um divertimento matemático que usa a determinação de valor numérico de uma expressão algébrica.

Apresente aos alunos a figura a seguir. Começando pelo número 4, eles devem descobrir um caminho que leve ao número 7. Para isso, devem calcular o valor numérico de cada expressão algébrica substituindo o n pelo valor escrito no círculo, começando pelo 4; colocar o resultado no círculo indicado pela seta em que se encontra a expressão algébrica e seguir o caminho indicado pelas setas.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Expressões algébricas particulares: monômios

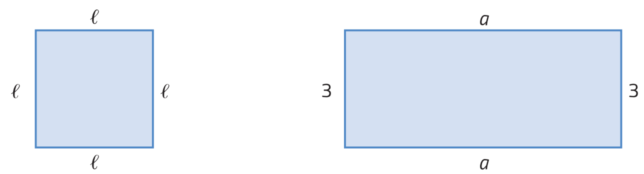
Expressões algébricas que apresentam somente multiplicações entre números e letras e, além disso, os expoentes das letras são números naturais são chamadas de **monômios**.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Um monômio tem uma **parte numérica (coeficiente)** e uma **parte literal**. Veja alguns exemplos.

- Sabendo que as medidas de comprimento dos lados desta região quadrada e desta região retangular são dadas na mesma unidade de medida de comprimento, podemos calcular a medida de área de cada região.

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

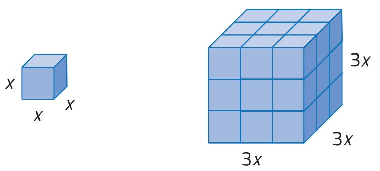


A medida de área da região quadrada é $\ell \cdot \ell$ ou ℓ^2. Nesse caso, 1 é o coeficiente e ℓ^2 é a parte literal.

A medida de área da região retangular é $3 \cdot a$ ou $3a$. Nesse caso, 3 é o coeficiente e a é a parte literal.

- Considerando o primeiro cubo como unidade de medida de volume, podemos calcular a medida de volume do outro cubo.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Thiago Neumann/Arquivo da editora

A medida de volume do cubo menor é $x \cdot x \cdot x$ ou x^3. Nesse caso, 1 é o coeficiente e x^3 é a parte literal.

A medida de volume do cubo maior é $3x \cdot 3x \cdot 3x$ ou $27x^3$. Nesse caso, 27 é o coeficiente e x^3 é a parte literal.

Monômios semelhantes ou termos semelhantes

Considere os monômios $3xy$, $-\frac{1}{2}xy$ e $13xy$. Observe que eles apresentam a mesma parte literal xy.

Monômios que apresentam a mesma parte literal são chamados de **monômios semelhantes** ou **termos semelhantes**.

Veja outro exemplo de monômios semelhantes: $-\frac{1}{2}ab^2$, $3ab^2$ e $2{,}5ab^2$.

Observe agora os monômios $2x$ e $3xy$. Eles **não são semelhantes**, pois não têm a mesma parte literal.

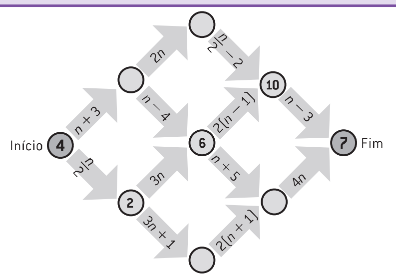
1 Expressões algébricas

Explique o que é um monômio, destacando o significado do prefixo "mono" e mostrando que um monômio é composto de parte numérica (coeficiente) e parte literal.

Então, na lousa, com os alunos, determine os monômios que representam as medidas de área e de volume dos exemplos fornecidos pelo livro, definindo os coeficientes e as partes literais dessas expressões algébricas.

Neste momento, explique que monômios ou termos semelhantes apresentam a mesma parte literal e apresente exemplos na lousa para que os alunos os classifiquem em semelhantes ou não semelhantes.

O caminho correto é dado pela figura a seguir.



1 Expressões algébricas

Atividades 4, 8 e 9

Estas atividades desenvolvem os conceitos de coeficiente e parte literal de monômios.

Veja a resposta de cada item da atividade 4.

a) Coeficiente: 1; parte literal: xy.

b) Coeficiente: $-\frac{2}{3}$; parte literal: t^2.

c) Coeficiente: -1; parte literal: c^2d^3.

d) Coeficiente: $\frac{1}{5}$; parte literal: a^2.

e) Coeficiente: -10; parte literal: a^4.

f) Coeficiente: $\frac{2}{3}$; parte literal: xy.

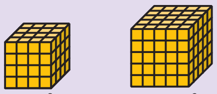
g) Coeficiente: 1; parte literal: x^3.

h) Coeficiente: -20; parte literal: ab.

i) Coeficiente: 1,5; parte literal: xy^2.

j) Coeficiente: 1; parte literal: a^2b^2.

A atividade 8 apresenta uma sequência de cubos e relaciona a parte literal dos monômios que definem as medidas de volume desses cubos. Veja um exemplo de resposta do item **a**.



$64x^3$ $125x^3$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Na atividade 9, os alunos devem analisar a parte literal dos monômios dados, comparando-a com a definição de monômio.

Atividades 5, 6 e 7

Estas atividades trabalham monômios semelhantes e não semelhantes.

Nos itens **a** e **b** da atividade 6, destaque que os coeficientes devem ser, respectivamente, números opostos e inversos, enquanto a parte literal deve ser a mesma por serem monômios semelhantes.

Atividade 10

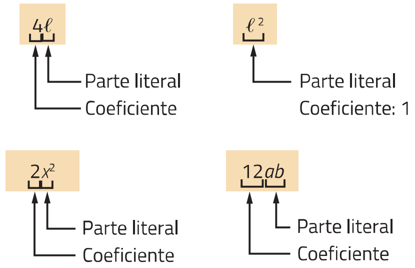
Esta atividade aborda a escrita da expressão algébrica (monômio) que representa a medida de área desejada e o cálculo do valor da variável para determinado valor numérico da expressão.

9. Na primeira expressão algébrica, o x tem expoente fracionário e, na segunda, o x tem como expoente um número inteiro negativo.

Não escreva no livro!

Atividades

4 Examine estes monômios.



Escreva no caderno o coeficiente e a parte literal de cada monômio. MP

a) xy

b) $-\frac{2}{3}t^2$

c) $-c^2d^3$

d) $\frac{a^2}{5}$

e) $-10a^4$

f) $\frac{2}{3}xy$

g) x^3

h) $-20ab$

i) $1{,}5xy^2$

j) a^2b^2

5 Analise os monômios de cada item e escreva no caderno se eles são ou não semelhantes.

a) $4x^2$ e $4x^3$. Não.

b) $5xy^2$ e $7xy^2$. Sim.

c) $9y$ e $-2y$. Sim.

d) $\frac{3x}{5}$ e $-x$. Sim.

e) $7ab$ e $6ba$. Sim.

f) $4xy^3$ e $4x^3y$. Não.

g) $9x$ e $9y$. Não.

h) $\frac{8a}{3}$ e $\frac{3a}{8}$. Sim.

i) xy e $-xy$. Sim.

j) $10mn$ e $10nm$. Sim.

6 Escreva no caderno o que é pedido em cada item. Depois, compare suas respostas com as de um colega. Exemplos de resposta:

a) 2 monômios semelhantes cujos coeficientes são números opostos. $-4x^2$ e $4x^2$.

b) 2 monômios semelhantes cujos coeficientes são números inversos. $5xy$ e $\frac{1}{5}xy$.

c) 2 monômios semelhantes a $5ax^2$. $-3ax^2$ e $10ax^2$.

d) 1 monômio que não é semelhante a $5ax^2$. $3ax$

7 Quais destes monômios são semelhantes? Itens **a**, **d** e **e**; itens **b** e **f**.

a) $\frac{1}{3}ab$

b) $2x$

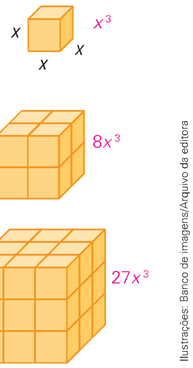
c) $3a^3$

d) $4ab$

e) $-1{,}5ab$

f) $\frac{2}{3}x$

8 Examine esta sequência de cubos.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

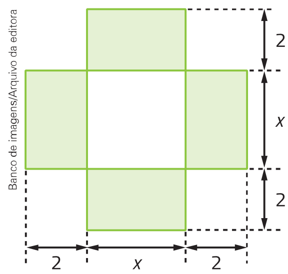
a) Quais são os próximos 2 cubos da sequência? Desenhe-os no caderno. MP

b) Determine no caderno a medida de volume de cada um dos 5 cubos. Exemplo de resposta: x^3, $8x^3$, $27x^3$, $64x^3$ e $125x^3$.

c) O que ocorre com a parte literal de todos os monômios encontrados? São iguais a x^3.

9 A expressão algébrica $3\sqrt{x}$ ou $3x^{\frac{1}{2}}$ e a expressão algébrica $\frac{2}{x}$ ou $2x^{-1}$ não são consideradas monômios. Converse com um colega e justifiquem o porquê disso.

10 A prefeitura de uma cidade construiu 4 jardins em torno de uma praça quadrada, conforme indicado nesta figura. As partes coloridas representam a superfície ocupada por esses jardins.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Considere as medidas de comprimento dadas em metros.

a) Qual é a medida de área de todos os jardins juntos, em metros quadrados? $8x$ $(2x + 2x + 2x + 2x = 8x)$

b) Para qual valor de x todos os jardins juntos têm medida de área de 72 m²? $x = 9$ $(8x = 72 \Rightarrow x = 9)$

Polinômios

Todas as medidas de comprimento são dadas na mesma unidade de medida.

Observe a figura ao lado.

Vamos determinar a medida de área total dela. Para isso, vamos calcular a medida de área de cada uma das partes **I**, **II** e **III** e somá-las.

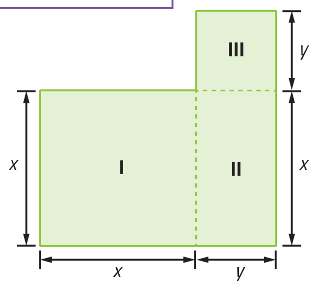
Medida de área de **I**: x^2

Medida de área de **II**: xy

Medida de área de **III**: y^2

Medida de área total: $x^2 + xy + y^2$

A expressão algébrica $x^2 + xy + y^2$ indica uma adição de monômios não semelhantes.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Toda expressão que indica um monômio ou uma adição ou subtração de monômios não semelhantes é chamada de **polinômio**. Cada monômio é chamado de **termo** do polinômio.

Em alguns casos, os polinômios recebem nomes especiais: monômio, que você já viu, binômio ou trinômio. Veja alguns exemplos.

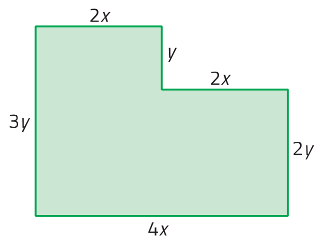
O binômio tem 2 termos não semelhantes e o trinômio tem 3.

Número de termos	Nome	Exemplos
1	Monômio	$2xy$ b^2
2	Binômio	$a^2 - 2ab$ $2x + 6$
3	Trinômio	$x^2 + 2xy + y^2$ $5a^2 - 3a + 1$ $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y + 5$

Redução de termos semelhantes

Podemos simplificar uma expressão algébrica que apresenta termos semelhantes determinando a **forma reduzida** dela.

Veja, por exemplo, como podemos indicar a medida de perímetro de um canteiro de jardim, representado por esta região poligonal.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$2x + y + 2x + 2y + 4x + 3y$$

Usando as propriedades comutativa e associativa da adição.

ou

$$\underbrace{(2x + 2x + 4x)}_{8x} + \underbrace{(y + 2y + 3y)}_{6y}$$

ou

$$8x + 6y$$

Reduzindo os termos semelhantes.

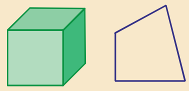
O polinômio $8x + 6y$ obtido indica a medida de perímetro do canteiro. Ele está escrito na forma reduzida.

Examine estes outros exemplos de redução de termos semelhantes de polinômios.

- $3y - 7y + 5y - 2x = (3 - 7 + 5)y - 2x = 1y - 2x = \underbrace{y - 2x}_{\text{forma reduzida}}$
- $x + xy + \frac{1}{5}xy = x + \left(1 + \frac{1}{5}\right)xy = \underbrace{x + \frac{6}{5}xy}_{\text{forma reduzida}}$

Bate-papo

Você sabe o que é ginásio poliesportivo? Nos seus estudos em Matemática, você trabalhou várias vezes com as palavras poliedros e polígonos. Agora, conheceu a palavra polinômio. Converse com um colega sobre o que quer dizer o prefixo *poli* e sobre os significados dessas palavras.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Poli: muitos, vários. Poliedros: muitas faces. Polígonos: muitos ângulos. Polinômios: muitos monômios. Lembre-se: um único monômio também pode ser chamado de polinômio.

1 Expressões algébricas

Na lousa, apresente a figura dada no livro e calcule a medida de área dela com os alunos. Incentive-os a calcular a medida de área de cada uma das partes e, em seguida, somá-las. Pergunte: "Qual é a expressão que indica o resultado?"; "Os monômios dessa expressão são semelhantes?". Após as respostas, explique que não podemos somar ou subtrair os coeficientes dos monômios desta expressão por não serem semelhantes, devendo apenas deixar essas operações indicadas.

Então, apresente a definição de polinômio e termo do polinômio, informando que polinômios com 2 e com 3 termos são chamados, respectivamente, de binômios e trinômios. Depois, na lousa, escreva os polinômios dados como exemplo e peça que os classifiquem.

Bate-papo

Pergunte se sabem o que é um ginásio poliesportivo. Chame a atenção para o prefixo poli presente em poliesportivo, poliedro, polígono e polinômio.

Se necessário, peça aos alunos que pesquisem o significado desse prefixo e dessas palavras.

Após o *Bate-papo*, na lousa, desenhe a figura do canteiro de jardim fornecida no material e solicite que calculem a medida de perímetro dela. Nesse momento, destaque que podemos somar ou subtrair os termos semelhantes do polinômio, simplificando a expressão algébrica e obtendo a forma reduzida do polinômio.

Ao final, coloque na lousa os 2 exemplos de expressões algébricas e desafie os alunos a simplificá-las.

1 Expressões algébricas

Coloque o monômio $7x^2y$ na lousa e indique que ele é do 3º grau. Pergunte aos alunos se conseguem imaginar o motivo de o grau desse monômio ser 3. Espera-se que alguns deles respondam que $2 + 1 = 3$, tal que 2 é o grau da variável x e 1 é o grau da variável y.

Em seguida, apresente os outros exemplos de monômios fornecidos no livro e peça aos alunos para indicar o grau deles. Destaque o monômio -4, mostrando que é equivalente a $-4x^0$ e, portanto, é de grau zero.

Neste momento, questione os alunos se conseguem descobrir o motivo do polinômio $xy^2 + y$ ser do 3º grau. Se necessário, explique que o grau de um polinômio é dado pelo termo de maior grau quando a expressão algébrica está na forma reduzida. Depois, apresente os exemplos de polinômios dados no material para os alunos definirem o grau deles.

Ao final, sugira aos alunos que compartilhem tudo o que viram de importante sobre expressões algébricas, monômios e polinômios, inclusive grau de polinômios, e anotem o que considerarem mais importante no painel de descobertas. Peça que evitem copiar as definições do livro, dando preferência à escrita do que entenderam sobre esses assuntos.

Atividades 11, 12 e 13

Estas atividades desenvolvem a escrita de polinômios na forma reduzida e a classificação deles em relação ao número de termos.

A atividade 13 mostra também a representação das medidas de perímetro de um quadrado e de um retângulo usando expressões algébricas.

Atividade 14

Esta atividade trabalha a determinação do grau de cada polinômio.

No item **i**, a expressão algébrica deve ser reduzida antes de identificar o grau dela.

Atividade 15

Esta atividade aborda a escrita de polinômios que representam as medidas de perímetro de um retângulo e de um trapézio e o cálculo do valor das variáveis para o valor numérico fornecido para cada expressão.

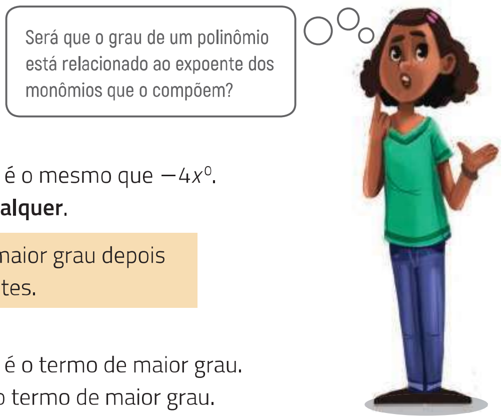
Grau de um polinômio

Vejamos primeiramente **grau de um monômio**.

O grau de um monômio é dado pela adição de todos os expoentes da parte literal.

Por exemplo, $7x^2y$ é um monômio do 3º grau, pois $7x^2y$ é o mesmo que $7x^2y^1$ e a soma dos expoentes é $2 + 1 = 3$. Veja outros exemplos.

- $5x^4$ é um monômio do 4º grau.
- $\frac{2x}{9}$ é um monômio do 1º grau.
- $3xy$ é um monômio do 2º grau.
- Atenção! -4 é um monômio de grau zero, pois -4 é o mesmo que $-4x^0$.



Thiago Neumann/Arquivo da editora

Agora, veja o significado de **grau de um polinômio qualquer**.

O grau de um polinômio é dado pelo termo de maior grau depois de reduzidos os termos semelhantes.

Veja estes exemplos.

- $4x^3 - 3x^2 + 5$ é um polinômio do 3º grau, pois $4x^3$ é o termo de maior grau.
- $2x + xy - 6y$ é um polinômio do 2º grau, pois xy é o termo de maior grau.

Atividades

Não escreva no livro!

11 No caderno, escreva o nome de cada polinômio de acordo com o número de termos.

a) $6x^2 - 4x + 9$ Trinômio.

b) $7x^2 + 5x$ Binômio.

c) $4x^4$ Monômio.

d) $-3r + \frac{1}{2}s$ Binômio.

e) $-2abc$ Monômio.

f) $x^3 + x^2 - x + 1$ Polinômio de 4 termos.

g) $-\frac{2}{5}a^2b$ Monômio.

h) $a + b - 5$ Trinômio.

i) $3x - y$ Binômio.

j) $7x + 8x$ Monômio. ($7x + 8x = 15x$)

12 Escreva no caderno cada polinômio na forma reduzida.

a) $2x^2 - 5x + 3 - 3x^2 - 3 + 7x$ $-x^2 + 2x$

b) $3y^3 + 2y^2 + y - 1 - 3y^3 - y^2 - 5y + 3$ $y^2 - 4y + 2$

c) $-5xy + 2y^2 + xy - 3y^2 + 2 + 3xy - 1$ $-xy - y^2 + 1$

d) $4x^3 - 5y - 6x^3 + 7y + 3x^3 - 2y$ x^3

13 Escreva no caderno o polinômio correspondente a cada item, na forma mais reduzida possível, e se é um monômio, um binômio ou um trinômio.

a) Medida de perímetro de um quadrado com cada lado de medida de comprimento $3x$. $12x$; monômio.

b) Medida de perímetro de uma região retangular com dimensões de medida de comprimento $2x$ e y. $4x + 2y$; binômio.

14 Indique no caderno o grau de cada polinômio.

a) $9x^5$ 5º grau.

b) $8x^2y^3$ 5º grau. ($2 + 3 = 5$)

c) 6 Grau zero.

d) $19abc$ 3º grau. ($1 + 1 + 1 = 3$)

e) $\frac{x^2}{7}$ 2º grau.

f) $5x^4 + 3x^2 - 5$ 4º grau.

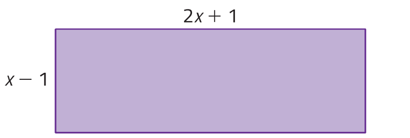
g) $2xy^2 - 4x^2y$ 3º grau.

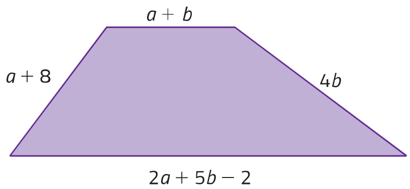
h) $3y^2 - y^3$ 3º grau.

i) $x^2 + 4x - x^2 + 10$ 1º grau.

j) $4 + z^2$ 2º grau.

15 Em um clube de campo foram construídas 2 piscinas, que estão representadas por estas regiões poligonais. As medidas de comprimento dadas estão todas em metros.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Escreva no caderno a medida de perímetro de cada piscina usando polinômios na forma reduzida. $6x$; $4a + 10b + 6$.

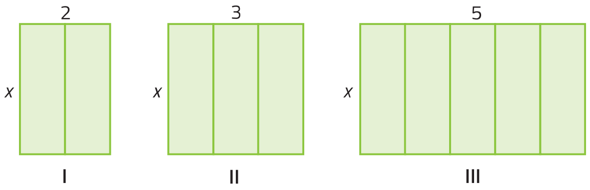
b) Se a medida de perímetro da piscina retangular é de 24 m, então qual é o valor de x? $x = 4$ ($6x = 24 \Rightarrow x = 4$)

c) Se a outra piscina tem medida de perímetro de 84 m e $a = 7$, então qual é o valor de b? $b = 5$ ($4 \times 7 + 10b + 6 = 84 \Rightarrow 10b = 84 - 28 - 6 \Rightarrow$ $\Rightarrow 10b = 50 \Rightarrow b = 5$)

Operações com polinômios

Adição e subtração de monômios

Observe estas figuras.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Medida de área de **I**: $2x$
Medida de área de **II**:$3x$
Medida de área de **I** e **II** juntas: $2x + 3x$
Medida de área de **III**: $5x$
Então: $2x + 3x = 5x$

Usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, comprovamos esse resultado.

$$2x + 3x = \underbrace{(2+3)}_{5}x = 5x$$

Então, temos: $2x + 3x = 5x$

Na adição e na subtração de monômios semelhantes, devemos adicionar ou subtrair os coeficientes e manter a parte literal.

Quando os monômios não são semelhantes, devemos deixar as operações de adição e de subtração indicadas.

Observe que a adição ou a subtração de monômios são análogas à redução de termos semelhantes de um polinômio.

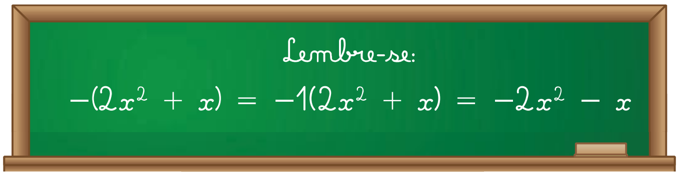
Veja os exemplos.

$9a^2 + 3a^2 = 12a^2$ $\quad$ $14xy - 3xy = 11xy$ $\quad$ $7x + 3y - 2x = 5x + 3y$

Adição e subtração de polinômios

Dados os polinômios $A = 3x^2 + 2x$ e $B = 2x^2 + x$, vamos indicar a adição por $A + B$ e a diferença por $A - B$. Para calculá-las, eliminamos os parênteses e reduzimos os termos semelhantes.

- $A + B = (3x^2 + 2x) + (2x^2 + x) = 3x^2 + 2x + 2x^2 + x = 5x^2 + 3x$
- $A - B = (3x^2 + 2x) - (2x^2 + x) = 3x^2 + 2x - 2x^2 - x = x^2 + x$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Observe mais este exemplo.

$2A = A + A = (3x^2 + 2x) + (3x^2 + 2x) = 3x^2 + 2x + 3x^2 + 2x =$
$= 6x^2 + 4x$

Não escreva no livro!

Atividades

16 Efetue no caderno as adições e subtrações de monômios semelhantes.

a) $8x^3 + 4x^3$ $12x^3$

b) $17ab - 6ab$ $11ab$

c) $\frac{x^2}{6} - \frac{2x^2}{9} + x^2$

16. c) $\frac{17x^2}{18}$ $\left(\frac{3x^2}{18} - \frac{4x^2}{18} + \frac{18x^2}{18} = \frac{17x^2}{18}\right)$

17 Sendo $A = x^2 + 1$ e $B = -2x^2 + x + 2$, determine no caderno o valor de:

a) $A + B$ $-x^2 + x + 3$

b) $A - B$ $3x^2 - x - 1$

c) $B - A$ $-3x^2 + x + 1$

18 Escreva no caderno uma adição de 2 polinômios do 2º grau cujo resultado é um polinômio do 1º grau.

Exemplo de resposta: $(-x^2 + 3x - 1) + (x^2 + 4x + 5) = = 7x + 4$.

1 Expressões algébricas

Converse com os alunos sobre a impossibilidade de adicionar ou subtrair monômios que não sejam semelhantes.

Na lousa, apresente as figuras dadas no livro e oriente os alunos a calcularem a medida de área de cada uma delas, somando as medidas de área de **I** e **II**. Esperamos que verifiquem que a soma das medidas de área de **I** e **II** é igual à medida de área de **III**. Então, pergunte: "O que devemos fazer para adicionar ou subtrair monômios semelhantes?"; "E para monômios não semelhantes?". Leve os alunos a perceber que, para monômios semelhantes, devemos adicionar ou subtrair os coeficientes, mantendo intacta a parte literal; para monômios não semelhantes, efetuamos a soma ou a subtração dos monômios semelhantes, enquanto mantemos os monômios não semelhantes intactos.

Depois, peça aos alunos que efetuem a adição de monômios proposta no material. Também peça que efetuem os exemplos de operações com polinômios, lembrando-os de que polinômios são compostos de monômios e que $2A = A + A$. Se necessário, mostre que $-B = -(2x^2 + x) = -2x^2 - x$.

As atividades desenvolvem adições e subtrações com monômios e com polinômios.

Atividade 17

Se achar conveniente, peça aos alunos que comparem os itens **b** e **c** e faça-os perceber que são opostos, ou seja, $A - B = -(-A + B) = -(B - A)$. Assim, as respostas também devem ser opostas: $3x^2 - x - 1 = -(-3x^2 + x + 1)$.

Atividade 18

Esta atividade trabalha também com o grau de polinômios.

Se necessário, destaque que os 2 polinômios escolhidos inicialmente devem ser do 2º grau e a soma entre eles deve resultar um polinômio do 1º grau.

Multiplicação de monômios

Dados 2 monômios, **semelhantes ou não**, podemos sempre obter um novo monômio pela multiplicação deles. Para isso, usamos algumas propriedades da multiplicação e da potenciação.

Veja este exemplo.

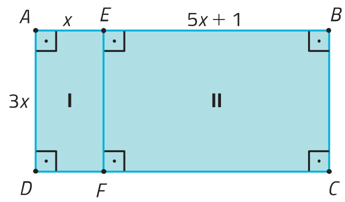
$$\underbrace{(9x^2)\cdot(5x^3)}_{\text{Propriedades comutativa e associativa da multiplicação.}} = (9\cdot 5)\cdot \underbrace{(x^2\cdot x^3)}_{\text{Propriedade do produto de potências de mesma base.}} = 45x^{2+3} = 45x^5$$

Observe mais alguns exemplos.

- $(3a)\cdot(-4b) = 3\cdot(-4)\cdot a\cdot b = -12ab$
- $(5x)\cdot(3x) = 5\cdot 3\cdot x\cdot x = 15x^2$
- $(-a^2)\cdot(2ab) = (-1)\cdot 2\cdot a^2\cdot a\cdot b = -2a^3b$
- $\left(\frac{3}{4}x^4\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^4\cdot x^2 = \frac{3}{8}x^6$
- $(-x)\cdot(-7x^2) = (-1)\cdot(-7)\cdot x\cdot x^2 = 7x^3$
- $(7ab)\cdot(2ab^2c) = 7\cdot 2\cdot a\cdot b\cdot a\cdot b^2\cdot c = 14\,a^2b^3c$

Multiplicação de monômio por polinômio

Vamos determinar a medida de área desta região retangular *ABCD* de 2 maneiras diferentes, usando a multiplicação de polinômios.



Banco de imagens/Arquivo da editora

1ª maneira: calculando a medida de área de cada uma das regiões **I** e **II** e, depois, adicionando-as.

Medida de área de **I**: $3x\cdot x = 3x^2$

Medida de área de **II**: $3x(5x+1) = 15x^2 + 3x$

Assim: medida de área da região *ABCD* = medida de área de **I** + medida de área de **II**.

$$A_{ABCD} = 3x^2 + 15x^2 + 3x = 18x^2 + 3x$$

2ª maneira: calculando diretamente a medida de área total da região retangular *ABCD*.

As medidas de comprimento dos lados são $3x$ e $x + 5x + 1$.

$$A_{ABCD} = 3x(\underbrace{x+5x}_{6x}+1) = 3x(6x+1) = 18x^2 + 3x$$

Assim, na multiplicação de um monômio por um polinômio, devemos multiplicar o monômio por todos os termos do polinômio.

Veja outro exemplo.

$$2x\cdot(4x^2+3x-5) = 2x\cdot 4x^2 + 2x\cdot 3x - 2x\cdot 5 = 8x^3 + 6x^2 - 10x$$

1 Expressões algébricas

Retome com os alunos as propriedades da potenciação estudadas anteriormente.

$a^x\cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x : a^y = a^{x-y}, a \neq 0$

$(a^x)^y = a^{x\cdot y}$

Depois, na lousa, apresente uma multiplicação de monômios, como $(2xy)\cdot(2x^2y)$, para os alunos efetuarem-na. Verifique as hipóteses da turma, corrigindo ou completando as ideias dos alunos. Mostre o cálculo passo a passo:

$(2xy)\cdot(2x^2y) =$

$= (2\cdot 2)\cdot(x\cdot x^2)\cdot(y\cdot y) =$

$= 4\cdot x^{1+2}\cdot y^{1+1} =$

$= 4\cdot x^3\cdot y^2 = 4x^3y^2$

Em seguida, escreva os exemplos de multiplicação de monômios do livro na lousa e proponha que os alunos os efetuem. Acompanhe-os na tarefa e faça intervenções para promover a aprendizagem.

Neste momento, apresente a região retangular *ABCD* e solicite que eles calculem a medida de área dela começando pelo cálculo das medidas de área das regiões **I** e **II**. Caso os alunos apresentem dificuldades para o cálculo da medida de área da região **II**, relembre-os da propriedade distributiva. Se necessário, relembre-os também de que ainda falta somar as medidas de área das regiões **I** e **II** para terminar o cálculo da medida de área da região retangular *ABCD*.

Então, mostre uma segunda maneira de calcular essa medida de área: calcular diretamente a medida de área total. Seguindo as indicações dos alunos, efetue esse cálculo na lousa.

Ao final, comente o outro exemplo de multiplicação de monômio por polinômio e peça aos alunos que o efetuem; pergunte como poderíamos definir uma regra para multiplicar monômio por polinômio, levando-os a concluir que devemos multiplicar o monômio por todos os termos do polinômio.

Multiplicação de 2 polinômios

Na multiplicação de 2 polinômios, devemos multiplicar cada termo de um polinômio por todos os termos do outro e reduzir os termos semelhantes.

Veja os exemplos.

- $(x + 3) \cdot (x + 5) = x \cdot x + x \cdot 5 + 3 \cdot x + 3 \cdot 5 = x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$
- $(x + 2) \cdot (x^2 - 3x + 4) = x \cdot x^2 - x \cdot 3x + x \cdot 4 + 2x^2 - 2 \cdot 3x + 2 \cdot 4 =$
  $= x^3 - 3x^2 + 4x + 2x^2 - 6x + 8 = x^3 - x^2 - 2x + 8$

Não escreva no livro!

Atividades

19 Efetue no caderno as multiplicações de monômios.

a) $(7x^5) \cdot (-3x^2)$ $-21x^2$

b) $(4a^3b)(3b)$ $12a^3b^2$

c) $\left(\frac{2}{3}xy^3\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)x^2y^2$ $\frac{1}{6}x^3y^5$

20 Efetue no caderno cada multiplicação.

a) $3ab(2a + 4b)$ $6a^2b + 12ab^2$

b) $(2x + y)3x^2$ $6x^3 + 3x^2y$

c) $-y \cdot (y^2 - 2y)$ $-y^3 + 2y^2$

d) $3(2x^3 - x^2 + 2x + 1)$ $6x^3 - 3x^2 + 6x + 3$

e) $-2x(x^2 - 3x + 2)$ $-2x^3 + 6x^2 - 4x$

f) $(a^2 + 2ab + b^2) \times 3a^2$ $3a^4 + 6a^3b + 3a^2b^2$

21 Efetue estas multiplicações no caderno. Use o processo que preferir.

a) $(a + 1) \cdot (a + 2)$ $a^2 + 3a + 2$

b) $(r + 5) \cdot (r - 3)$ $r^2 + 2r - 15$

c) $(x + 3)(x + 4)$ $x^2 + 7x + 12$

d) $(3m - 5)(2m - 1)$ $6m^2 - 13m + 5$

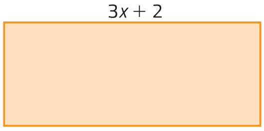
e) $(y + 2)^2$ $y^2 + 4y + 4$ $((y + 2)(y + 2) = y^2 + 4y + 4)$

f) $(x + 6)(x - 6)$ $x^2 - 36$

g) $(x - 2)(x^2 - 5x + 6)$ $x^3 - 7x^2 + 10x - 12$

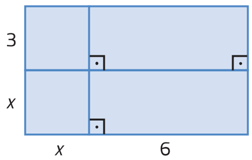
22 Nestas regiões retangulares, as medidas de comprimento dos lados são dadas na mesma unidade de medida. Determine no caderno os polinômios que representam a medida de área de cada região.

a)



$3x^2 + 8x + 4$

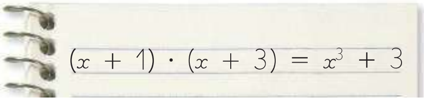
b)



$x^2 + 9x + 18$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

23 **Avaliação de resultados.** Alessandra efetuou a multiplicação $(x + 1)(x + 3)$ no caderno.



Paulo Manzi/ Arquivo da editora

A multiplicação que ela fez está correta? Por quê?
Não; o correto seria $(x + 1)(x + 3) = x^2 + 4x + 3$.

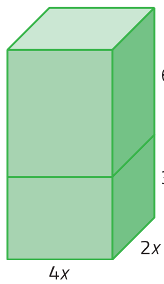
24 Dados $A = x + 1$, $B = x^2 - 2x + 1$ e $C = x^2 - 3$, efetue as multiplicações no caderno.

a) $A \cdot B$ $x^3 - x^2 - x + 1$

b) $A \cdot C$ $x^3 + x^2 - 3x - 3$

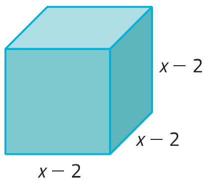
25 Escreva no caderno um polinômio para representar a medida de volume de cada bloco retangular.

a)



$48x^3 + 24x^2$
$(4x \times 2x \times (6x + 3) = 48x^3 + 24x^2)$

b)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

26 **Desafio.** Agora que você está craque em multiplicação de polinômios, resolva esta: Sabendo que um produto de binômios com coeficientes naturais é igual a $x^2 + 5x + 6$, quais são os binômios?
$x + 3$ e $x + 2$.

25. b) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ $((x - 2)^3 = (x - 2)(x - 2)(x - 2) = (x^2 - 4x + 4)(x - 2) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$

1 Expressões algébricas

Inicialmente, questione como podemos efetuar a multiplicação de 2 polinômios, fazendo os alunos relacionarem com a multiplicação de monômio por polinômio. Se necessário, explique que devemos multiplicar cada termo de um polinômio por cada termo do outro polinômio e simplificar a expressão algébrica obtida.

Depois, efetue com os alunos o primeiro exemplo de multiplicação de 2 polinômios e sugira que efetuem o outro exemplo.

As atividades desenvolvem multiplicações entre monômios, entre monômio e polinômio e entre polinômios.

Atividade 21

O item **e** apresenta uma potência de polinômio. Sugira aos alunos que escrevam essa potência como uma multiplicação e efetuem-na.

Atividades 22 e 25

Estas atividades trabalham a representação de medidas de área e de volume usando expressões algébricas.

No item **b** da atividade 25, mostre que poderíamos escrever a medida de volume na forma de potência: $(x - 2)^3$.

Atividades 23 e 26

Na atividade 23, converse sobre a maneira como Alessandra pensou e sobre a propriedade da multiplicação em relação à adição e à subtração, o que ajudará na resolução da atividade 26.

Veja a resolução da atividade 26.

Temos que $x^2 + 5x + 6 = (x + a) \cdot (x + b)$, com a e b números naturais

$(x + a) \cdot (x + b) = x \cdot x + x \cdot b + x \cdot a + a \cdot b = x^2 + (a + b)x + (a \cdot b)$

Então, $a + b = 5$ e $a \cdot b = 6$

Por tentativa e erro, temos que $a = 2$ e $b = 3$.

Logo, os binômios são $x + 2$ e $x + 3$.

1 Expressões algébricas

Se considerar necessário, retome novamente as propriedades da potenciação estudadas anteriormente.

Depois, apresente o primeiro exemplo na lousa e efetue a divisão com os alunos; mostrando os outros exemplos de divisão de monômio por monômio para serem efetuados pela turma. Acompanhe-os na tarefa e faça intervenções com perguntas e sugestões para favorecer reflexões.

Quando eles terminarem, questione: "Todos os resultados são polinômios?". Faça-os perceber que os 2 últimos exemplos não são. Destaque que esses exemplos têm variável no denominador, recebendo o nome de frações algébricas.

Bate-papo

Converse com os alunos sobre a indicação de que o 2º monômio, na divisão de monômios, seja diferente de zero, relembrando-os de que, mesmo na divisão aritmética, existe essa condição por ser impossível dividir por zero.

Divisão de polinômio por monômio

Mostre aos alunos que, ao colocarmos a divisão à direita, podemos usar a propriedade distributiva, como nos exemplos numéricos:

- $(15 + 6) \div 3 = 15 \div 3 + 6 \div 3$;
- $(8 + 4 + 2) \div 2 = (8 \div 2) + (4 \div 2) + (2 \div 2)$.

Então, escreva na lousa a divisão de polinômio por monômio dada no exemplo e incentive-os a indicar o valor que x não pode assumir para garantir que o denominador da expressão algébrica seja diferente de zero. Depois, efetue a divisão, passo a passo, com os alunos.

Em seguida, proponha que efetuem a divisão proposta no exemplo seguinte, destacando que a divisão de polinômio por monômio é uma simplificação de expressão algébrica.

Ao final, sugira aos alunos que compartilhem e anotem, no painel de descobertas, o que considerarem mais importante sobre as operações com polinômios.

Divisão de monômios

Dados 2 monômios, **considerando que o segundo represente um número diferente de zero**, podemos efetuar a divisão do primeiro pelo segundo.

Nesse caso, na divisão de 2 monômios com as mesmas variáveis, usamos a propriedade da divisão de potências de mesma base.

Veja os exemplos.

- $(12x^6) : (3x^2) = \dfrac{12x^6}{3x^2} = \dfrac{12}{3} \cdot \dfrac{x^6}{x^2} = 4x^{6-2} = 4x^4$
- $(28x^2) : (4x^2) = \dfrac{28x^2}{4x^2} = \dfrac{28}{4} \cdot \dfrac{x^2}{x^2} = 7x^{2-2} = 7x^0 = 7 \cdot 1 = 7$
- $\dfrac{21x^3y}{7xy} = \dfrac{21}{7} \cdot \dfrac{x^3y}{xy} = 3 \cdot \dfrac{x^3}{x} \cdot \dfrac{y}{y} = 3 \cdot x^2 \cdot 1 = 3x^2$
- $(10x^2) \div (2x^3) = \dfrac{10}{2} \cdot \dfrac{x^2}{x^3} = 5 \cdot x^{2-3} = 5 \cdot x^{-1} = 5 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{x}\ (x \neq 0)$
- $(5a) : (15b) = \dfrac{5}{15} \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{3b}\ (b \neq 0)$

Atenção: Os 2 últimos exemplos mostram que o quociente de um monômio por outro monômio pode não ser um monômio.

Bate-papo

Converse com os colegas sobre o motivo de considerarmos o 2º monômio diferente de zero na divisão de monômios.

Porque não existe divisão por zero.

As expressões $\dfrac{5}{x}$ e $\dfrac{a}{3b}$ não são polinômios, pois têm variável no denominador. Expressões algébricas desse tipo são chamadas de **frações algébricas.**

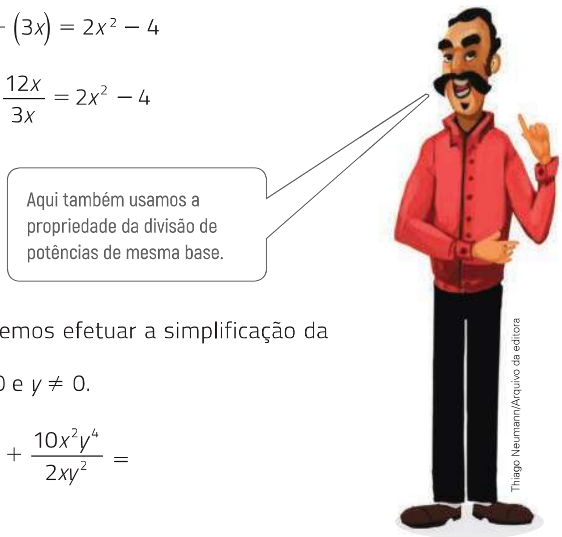
Divisão de polinômio por monômio

Podemos simplificar expressões algébricas efetuando uma divisão de um polinômio por um monômio diferente de zero.

Por exemplo, a expressão $\dfrac{6x^3 - 12x}{3x}$, com $x \neq 0$, é equivalente à divisão $(6x^3 - 12x) \div (3x)$ e aqui podemos aplicar a propriedade distributiva, pois a divisão está à direita.

$$(6x^3 - 12x) \div (3x) = (6x^3) \div (3x) - (12x) \div (3x) = 2x^2 - 4$$

Ou, de outra maneira: $\dfrac{6x^3 - 12x}{3x} = \dfrac{6x^3}{3x} - \dfrac{12x}{3x} = 2x^2 - 4$



Thiago Neumann/Arquivo da editora

Observe agora um exemplo de como podemos efetuar a simplificação da expressão $\dfrac{6x^3y^2 + 8x^4y^5 + 10x^2y^4}{2xy^2}$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

$$\frac{6x^3y^2 + 8x^4y^5 + 10x^2y^4}{2xy^2} = \frac{6x^3y^2}{2xy^2} + \frac{8x^4y^5}{2xy^2} + \frac{10x^2y^4}{2xy^2} =$$

$$= 3x^2y^0 + 4x^3y^3 + 5xy^2 = 3x^2 + 4x^3y^3 + 5xy^2$$

Não escreva no livro!

Atividades

27 ▸ Efetue no caderno mais estas operações com monômios.

a) $3x^4 + 12x^4$ $15x^4$

b) $9xy - xy$ $8xy$

c) $(3x^3) \cdot (2x^2)$ $6x^5$

d) $(16x^{10}) : (2x^2)$ $8x^8$

e) $(3x^3)^4$ $81x^{12}$

f) $(-2xy^2)^3$ $-8x^3y^6$

g) $\dfrac{25x}{5x}$, para $x \neq 0$. 5

h) $6x^2 - 10x^2$ $-4x^2$

i) $\left(\dfrac{2}{3}x\right)^{-1}$, para $x \neq 0$. **i)** $\dfrac{3}{2x}$

j) $9x^2y + 3x^2y$ $12x^2y$

k) $7x^2 + 3x$ $7x^2 + 3x$

l) $(6r) \cdot (4s)$ $24rs$

m) $(12x^2) \div 6$ $2x^2$

n) $7x + 3x - 4x$ $6x$

o) $(-2xy^2)^4$ $16x^4y^8$

28 ▸ Efetue no caderno as divisões de monômio por monômio e, em cada item, escreva se o resultado é um monômio ou uma fração algébrica. Considere o divisor não nulo.

a) $(7a^2) : (7a)$ a; monômio.

b) $(8x) : (4x^3)$ $\dfrac{2}{x^2}$; fração algébrica.

c) $\dfrac{30x^3}{5x^3}$ 6; monômio.

29 ▸ Simplifique estas expressões algébricas no caderno, considerando os denominadores diferentes de zero.

a) $\dfrac{10a^3b^3 + 8ab^2}{2ab^2}$ $5a^2b + 4$

b) $\dfrac{9x^2y^3 - 6x^3y^2}{3x^2y}$ $3y^2 - 2xy$

c) $\dfrac{2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x}{x}$ $2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

d) $\dfrac{3x + 6x^2 + 9x^4}{3x}$ $1 + 2x + 3x^3$

30 ▸ **Desafio.** Qual é o polinômio que multiplicado por $2x$ resulta em $2x^3 + 2x^2y + 2xy^2$?
$x^2 + xy + y^2$ ($(2x^3 + 2x^2y + 2xy^2) \div (2x) = x^2 + xy + y^2$)

Um pouco de História

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

A Álgebra foi criada há milênios por povos antigos, como os mesopotâmios e os egípcios. A princípio, o estudo tinha foco na resolução de problemas que envolviam quantidades desconhecidas.

Alguns dos problemas algébricos mais antigos de que se tem conhecimento estão registrados no papiro de Rhind, documento egípcio copiado pelo escriba Ahmes por volta do ano 1650 a.C. e descoberto em 1858 na cidade de Luxor, no Egito, pelo antiquário escocês Henry Rhind (1833-1863). Muitos problemas registrados nesse papiro utilizavam a incógnita **aha** para representar valores desconhecidos.

Diofante (c. 221-305), matemático grego que viveu em Alexandria, no Egito, foi o primeiro a usar sistematicamente símbolos para representar as incógnitas.

Embora a Álgebra, como área de estudo da Matemática, tenha sido criada na Antiguidade, a palavra **álgebra** foi usada para denominar esse campo de estudo apenas muito tempo depois. Essa palavra deriva da expressão árabe **al-jabr** ("reunir"), usada no título do livro *Hisab al-jabr w'al-mugabalah (ou A arte de reunir desconhecidos para igualar uma quantidade conhecida)*, escrito por volta do ano 825 por Al-Khwarizmi, o mesmo matemático árabe que introduziu o sistema decimal e os algarismos indo-arábicos no Ocidente. A partir do século XI, quando a obra de Al-Khwarizmi foi traduzida para o latim, o estudo das equações com 1 ou mais incógnitas passou a ser chamado de Álgebra na Europa.

Atualmente, a Álgebra é muito mais ampla, pois envolve outros assuntos além do estudo das equações. Considerada peça fundamental na Matemática moderna, ela tem aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento humano, como Engenharia, Medicina, Arquitetura, Economia, Informática e muitas outras.

Fonte de consulta: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 1996.

Royal Astronomical Society/SPL/Fotoarena

Capa da obra *Aritmética*, de Diofante. Edição de 1621.

Reprodução/Arquivo da editora

Página da obra *Hisab al-jabr w'al-mugabalah*, de Al-Khwarizmi, escrita por volta do ano 825.

1 Expressões algébricas

Atividades 27 e 28

Estas atividades desenvolvem operações de adição, subtração, multiplicação e divisão entre monômios.

Os itens **e**, **f** e **o** da atividade 27 apresentam potenciações. Então, sugira aos alunos que resolvam esses itens escrevendo as potências como multiplicações de fatores iguais e, depois, tentem efetuá-las.

Na atividade 28, os alunos devem classificar os quocientes como monômios ou frações algébricas.

Atividade 29

Esta atividade trabalha a simplificação de expressões algébricas com adições, subtrações e divisões.

Atividade 30

Esta atividade aborda a divisão de polinômio por monômio.

Se necessário, ajude os alunos a relembrar que a operação inversa da multiplicação é a divisão.

Um pouco de História

Peça aos alunos que leiam o texto e conversem sobre o que entenderam da leitura. Incentive-os a localizar, no tempo e no espaço, as informações apresentadas. Ou seja, devem pesquisar em quais regiões do planeta esses fatos ocorreram e quais são as alterações dessas regiões em relação aos tempos atuais, respondendo a perguntas como: "Por que se fala em Europa na Antiguidade sem especificar países?"; "Quais países ocupam hoje a região da antiga Mesopotâmia?". Esta exploração da atividade poderá ser ampliada nas aulas de História e de Geografia.

Se achar conveniente, solicite uma pesquisa sobre Ahmes, Diofante e Al-Khwarizmi para que os alunos compartilhem as informações mais interessantes que encontrarem.

Principal habilidade da BNCC

EF08MA09

Relembre que os alunos já viram equações do 1º grau com 1 incógnita no 7º ano, retomando o motivo de serem chamadas do 1º grau com 1 incógnita e explicando que, agora, podemos chamá-las de equações polinomiais do 1º grau com 1 incógnita.

Neste momento, apresente a situação aplicada no livro como exemplo para que retomem o assunto de resolução de equações do 1º grau com uma incógnita e a resolva com os alunos na lousa. Destaque que, se o conjunto universo fosse o dos números naturais ou o dos números inteiros, essa equação não teria solução, pois $\frac{3}{4} \notin \mathbb{N}$ e $\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$.

Proponha, em seguida, que resolvam a equação do segundo exemplo. Acompanhe-os durante a resolução e faça intervenções se necessário.

As atividades desenvolvem a escrita e a resolução de problemas a partir de equações polinomiais do 1º grau com 1 incógnita.

Atividades 31 a 35

Estas atividades contextualizam a resolução de equações do 1º grau com 1 incógnita, apresentando situações cotidianas em que pode ser usado esse assunto para facilitar a resolução.

Na atividade 32, destaque que queremos saber a idade atual de Ana relacionando a idade dela há 5 anos à que terá daqui a 8 anos.

A atividade 34 trabalha a descoberta das medidas de comprimento das dimensões de um campo de futebol (um retângulo) a partir da medida de perímetro dada.

Atividade 36

Nesta atividade, permita aos alunos que inventem um problema relacionado a qualquer assunto que preferirem, desde que possa ser resolvido pela equação dada.

Em seguida, peça que resolvam essa equação e compartilhem, com a turma, o problema criado.

2 Equações

No 7º ano, você já estudou as **equações do 1º grau com 1 incógnita**, também chamadas de equações polinomiais do 1º grau com 1 incógnita.

Veja alguns exemplos.

- Pensei em um número racional, somei $\frac{1}{2}$ a ele e obtive $\frac{5}{4}$. Em qual número pensei?

  Representando o número pensado por x, a equação pode ser $x + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$.

> A equação é "do 1º grau" porque pode ser reduzida à forma $ax = b$, com $a \neq 0$ $(4x = 3)$, e é "com 1 incógnita" porque há somente 1 elemento desconhecido (x).

Resolução

$$x + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

Sabendo que $\text{mmc}(1, 2, 4) = 4$, obtemos:

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{4x}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

Multiplicamos ambos os membros por 4 e eliminamos os denominadores.

$4x + 2 = 5$

Adicionamos -2 a ambos os membros.

$4x + 2 - 2 = 5 - 2 \Rightarrow 4x = 3$

Dividimos ambos os membros por 4.

$$\frac{4x}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

Verificação

$$x + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

Resposta

Logo, o número racional pensado é $\frac{3}{4}$.

- Vamos resolver a equação $3(x - 1) = 1 - (-7x + 1)$ no conjunto universo dos números racionais.

  $3(x - 1) = 1 - (-7x + 1) \Rightarrow 3x - 3 = 1 + 7x - 1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow 3x - 3 = 7x \Rightarrow 3x - 7x = 3 \Rightarrow -4x = 3 \Rightarrow$

  $\Rightarrow x = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$

Resolver uma equação é determinar as raízes ou soluções em um conjunto universo $\mathbb{U}$ considerado. Observe que, se o conjunto universo considerado para essa equação fosse o dos números naturais ou o dos números inteiros, então essa equação não teria solução.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Atividades

Não escreva no livro!

31 › Paulo pensou em um número racional. Somou $\frac{1}{3}$ a ele e obteve 11. Em qual número Paulo pensou?

31. $10\frac{2}{3}$ $\left(x + \frac{1}{3} = 11\right)$

32 › Há 5 anos, Ana tinha a metade da idade que terá daqui a 8 anos. Qual é a idade de Ana?

32. 18 anos. $\left(x - 5 = \frac{x + 8}{2}\right)$

33 › Gilberto teve o salário reajustado em $\frac{2}{5}$ do que era e passou a receber R\$ 4 800,00. Qual era o salário de Gilberto antes do reajuste?

33. R\$ 4 000,00 $\left(x + \frac{2}{5}x = 4\,800\right)$

34 › Um campo de futebol tem medida de perímetro de 300 metros. A medida de comprimento da largura desse campo é o dobro da medida de comprimento da profundidade. Quais são as medidas das dimensões desse campo?

34. Medida de comprimento da largura: 100 m; medida de comprimento da profundidade: 50 m. $(x + 2x + x + 2x = 300)$

35 › Um tanque de água tem medida de capacidade de 1 000 litros. Com ele inicialmente cheio, foram retirados 10 baldes de água de mesma medida de capacidade e restaram 850 litros no tanque. Qual é a medida de capacidade de cada balde?

35. 15 litros. $(1\,000 - 10x = 850)$

36 › Invente um problema que pode ser resolvido pela equação $x + \frac{1}{2}x = 120$. Resposta pessoal.

Audiovisual

Para mais informações, veja o **audiovisual** *Equações do primeiro grau e frações* do 2º bimestre.

Equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$

Toda equação com 1 incógnita que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com *a*, *b* e *c* dados e $a \neq 0$, é chamada de **equação do 2º grau com 1 incógnita**.

Temos que *a*, *b* e *c* são os coeficientes da equação e *x* é a incógnita. Note que *a* é o coeficiente do termo de 2º grau; *b* é o coeficiente do termo de 1º grau e *c* é o coeficiente do termo de grau zero.

Veja alguns exemplos.

- $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow$ coeficientes: $a = 1$; $b = 25$; $c = 6$.
- $x^2 - 49 = 0 \rightarrow$ coeficientes: $a = 1$; $b = 0$; $c = 249$.
- $2x^2 - 4x = 0 \rightarrow$ coeficientes: $a = 2$; $b = 24$; $c = 0$.
- $5x^2 = 0 \rightarrow$ coeficientes: $a = 5$; $b = 0$; $c = 0$.

Quando, além de $a \neq 0$, temos $b \neq 0$ e $c \neq 0$, dizemos que a equação do 2º grau é **completa**. Quando pelo menos um dos coeficientes *b* ou *c* é nulo, dizemos que a equação do 2º grau é **incompleta**. Assim, nesses exemplos, a primeira equação é completa e as demais são incompletas.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Raízes ou soluções de uma equação do 2º grau

A raiz ou solução de uma equação com 1 incógnita, independentemente do grau, é um valor do conjunto universo considerado que, atribuído à incógnita, torna a sentença matemática verdadeira.

Por exemplo, no conjunto dos números racionais, as raízes da equação do 2º grau $x^2 - 5x + 4 = 0$ são 4 e 1. Indicamos essas raízes por: $x' = 4$ e $x'' = 1$.

Observe como as sentenças são verdadeiras para essas raízes.

- Substituindo *x* por 4, obtemos:
  $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow 4^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 0 \Rightarrow 16 - 20 + 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$
- Substituindo *x* por 1, obtemos:
  $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow 1^2 - 5 \cdot 1 + 4 = 0 \Rightarrow 1 - 5 + 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Resolução de equações do 2º grau

Neste capítulo, você aprenderá a resolver equações incompletas do 2º grau em que $b = 0$, ou seja, equações que podem ser escritas na forma $ax^2 + c = 0$ ou na forma $ax^2 = c$, com $a \neq 0$. Veja um exemplo.

Joana estava pensando no seguinte problema: Se o triplo do quadrado de um número é igual a 147, então qual é esse número?

Representando esse número por *x*, temos a equação $3x^2 = 147$. Então:

$$3x^2 = 147 \Rightarrow x^2 = \frac{147}{3} \Rightarrow x^2 = 49$$

Temos que *x* é um número que, elevado ao quadrado, é igual a 49. Logo, $x = 7$ ou $x = -7$, pois $7^2 = 49$ e $(-7)^2 = 49$.

2 Equações

Coloque na lousa a equação $ax^2 + bx + c = 0$ e pergunte: "Qual é o grau dessa equação se $a = 0$ e $b \neq 0$?"; "E se $a \neq 0$?". Após as respostas, explique que toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, é chamada de equação do 2º grau e que *a*, *b* e *c* são coeficientes da equação.

Destaque que, quando todos os coeficientes são diferentes de zero, temos uma equação completa do 2º grau, enquanto que, se pelo menos um dos coeficientes *b* e *c* for igual a zero, temos uma equação incompleta do 2º grau. Então, apresente os exemplos de equações dados no livro e sugira aos alunos que identifiquem os coeficientes e classifiquem em completas ou incompletas.

Neste momento, leia, com os alunos, o texto que retoma o significado de raiz ou solução de uma equação com 1 incógnita. Apresente o exemplo dado e pergunte: "Quais valores satisfazem a igualdade expressa na equação do 2º grau $x^2 - 5x + 4 = 0$?". Peça que substituam a incógnita *x* por 4 e, depois, por 1, questionando: "Esses 2 valores satisfazem a igualdade?". Conclua, com eles, que esses 2 valores são as raízes ou soluções dessa equação.

Em seguida, apresente o problema de Joana, escreva e resolva, com a turma, a equação do 2º grau que representa a situação.

Sequência didática

Para mais informações, veja a **sequência didática 2** do 2º bimestre.

2 Equações

Destaque que podemos resolver algumas equações completas usando equações incompletas e apresente o exemplo da equação incompleta $(x - 1)^2 = 4$, que é equivalente à equação completa $x^2 - 2x - 3 = 0$. Ajude os alunos a resolver a equação incompleta e incentive-os a substituir, na equação completa, as raízes encontradas para verificar se elas satisfazem a igualdade.

Então, peça que escrevam, no painel de descobertas, as informações mais importantes sobre equações do 1º e do 2º grau, enfatizando a resolução das equações do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$, e o uso delas para a resolução de equações completas do 2º grau.

As atividades desenvolvem a resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$.

Atividades 38 a 40

Estas atividades trabalham com equações completas do 2º grau que resolveremos a partir das equações do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$, equivalentes.

Na atividade 38, os alunos também podem achar a medida de comprimento do lado do novo quadrado (cuja área mede 9 m²) e substituir a medida de comprimento do lado do quadrado inicial (2 m), ou seja, $A = 9\text{ m}^2 \Rightarrow \ell = 3$ m e $x = 3 - 2 = 1$ m.

A atividade 40 aborda a descoberta do valor da incógnita a partir da medida de área dada. Para isso, os alunos devem determinar inicialmente as medidas de comprimento dos lados dos quadrados de medida de área $16x^2$ e 4 cm².

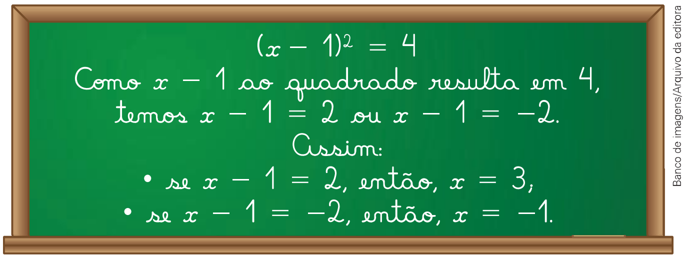
Atividade 41

Incentive os alunos a criar, em duplas, uma situação-problema envolvendo equações do 2º grau. Permita que usem equações completas equivalentes a equações do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$. Depois, peça que troquem com outra dupla para que uma resolva o problema criado pela outra.

Algumas equações completas do 2º grau podem ser resolvidas usando as equações incompletas. Por exemplo, para resolver a equação $(x - 1)^2 = 4$, se efetuássemos a potenciação indicada, chegaríamos a uma equação do 2º grau completa:

$$x^2 - 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

Veja, então, como podemos resolver essa equação.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Logo, as 2 raízes da equação $(x - 1)^2 = 4$ são $x' = 3$ e $x'' = -1$.

Atividades

Não escreva no livro!

37 Resolva as equações no caderno, no conjunto universo dos números racionais.

a) $2x^2 = 50$ $x' = 5$ e $x'' = -5$.

b) $6x^2 = 0$ $x = 0$

c) $-x^2 = 16$ Não existe valor racional para x. $(x^2 = -16)$.

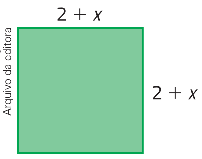
d) $9x^2 = 36$ $x' = 2$ e $x'' = -2$.

e) $\frac{3x^2}{5} = 6$ Não existe valor racional para x.

f) $-x^2 = -\frac{1}{9}$ $x' = \frac{1}{3}$ e $x'' = -\frac{1}{3}$.

g) $3x(x + 2) = 6x$ $x = 0$

38 Um canteiro com a forma quadrada tinha 2 m de medida de comprimento dos lados e essa medida foi ampliada em x metros, mantendo a forma quadrada.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que o novo canteiro tem medida de área de 9 m²:

a) represente no caderno essa situação usando uma equação do 2º grau; $(2 + x)^2 = 9$ ou $x^2 + 4x - 5 = 0$.

b) determine em quantos metros foi aumentada a medida de comprimento do lado do canteiro. Em 1 m. $(2 + x = 3 \Rightarrow x = 1)$

39 Resolva no caderno estas equações usando o mesmo raciocínio dado no início desta página e escreva as raízes racionais.

a) $(x + 5)^2 = 9$ $x' = -2$ e $x'' = -8$.

b) $(x + 1)^2 = -16$ Não existe raiz racional.

c) $(x - 5)^2 = 0$ $x = 5$

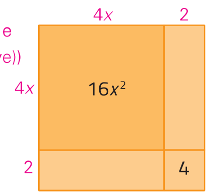
d) $(2x - 1)^2 = 9$ $x' = 2$ e $x'' = -1$.

e) $(y - 3)^2 = 36$ $y' = 9$ e $y'' = -3$.

f) $(7a - 2)^2 = 0$ $a = \frac{2}{7}$

40 Determine no caderno o valor de x sabendo que a medida de área da maior região quadrada nesta figura é de 1 156 cm².

$x = 8$ $((4x + 2)^2 = 1\,156 \Rightarrow x' = 8$ e $x'' = -9$ (não serve))



Banco de imagens/Arquivo da editora

41 Reúna-se com um colega e criem juntos uma situação-problema envolvendo equações do 2º grau com 1 incógnita. Depois, troquem com outra dupla; vocês resolvem a situação-problema deles e eles resolvem a de vocês. Resposta pessoal.

MATEMÁTICA
E TECNOLOGIA

O Mathway

O Mathway é uma ferramenta *on-line* de resolução de problemas matemáticos que pode ser utilizada em diversos conteúdos de Álgebra, Geometria, Estatística e outras áreas de estudo de Matemática, e em todos os níveis de ensino.

No endereço <www.mathway.com/pt/Algebra>, você pode acessar a versão destinada aos problemas de Álgebra. Há também um aplicativo para celular, que pode ser baixado no *site*. Nesse caso, peça para alguém mais experiente ajudá-lo com a instalação.

Resolução de equação do 2º grau

Iremos aprender a resolver no Mathway equações incompletas do 2º grau na forma $ax^2 = c$, com $a \neq 0$ e $c \geqslant 0$. Veja a seguir os passos que devem ser seguidos para resolver a equação $2x^2 = 8$.

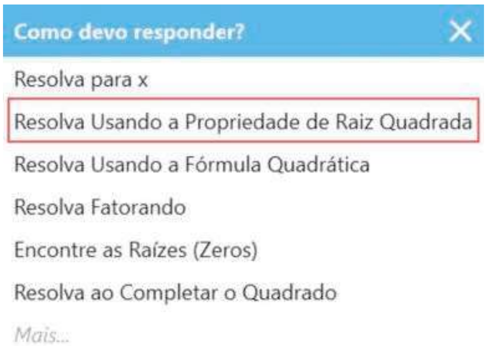
1º passo: No campo "Insira um problema", digite com o teclado do computador a equação **2x^2=8** e tecle "enter". Observe que o sinal ^ indica a operação de potenciação.

Outra possibilidade é usar o *mouse* para selecionar os botões no teclado virtual do programa.

2º passo: Uma janela vai aparecer para você escolher o que quer que o programa faça. Escolha "Resolva usando a propriedade de raiz quadrada".

3º passo: Observe o resultado gerado pelo programa; no caso, as raízes ou soluções da equação $2x^2 = 8$. Quais são as raízes? $x' = 2$ e $x'' = -2$.

Você também pode observar a resolução detalhada clicando em "Toque para ver os passos…".



Fotos: MathWay/<www.mathway.com>

Questões

Não escreva no livro!

1. Resolva estas equações incompletas do 2º grau usando o Mathway.
   a) $3x^2 = 27$ $x' = 3$ e $x'' = -3$.
   b) $2x^2 = 50$ $x' = 5$ e $x'' = -5$.
   c) $-3x^2 = -108$ $x' = 6$ e $x'' = -6$.

2. No caderno, represente cada situação usando uma equação e resolva-a. Depois, confira o resultado usando o Mathway e registre a resposta. **a)** $x^2 \times 5 = 245$ ou $5x^2 = 245$; $x = 7$; Carlos pensou no número natural 7. ($5x^2 = 245 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$ ($x = -7$ não é natural.))
   a) Carlos e Márcia estão brincando de adivinhar números. Carlos pensou em um número natural, o elevou ao quadrado, depois multiplicou por 5 e disse à Márcia que o resultado foi 245. Em qual número Carlos pensou?
   b) A idade de João, que é 48 anos, é igual ao triplo do quadrado da idade do filho dele. Qual é a idade do filho de João?
   $3x^2 = 48$; $x = 4$; O filho de João tem 4 anos. ($3x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ ($x = -4$ não é natural.))

Matemática e tecnologia

Principal habilidade da BNCC
EF08MA09

Nesta seção, iniciaremos a apresentação do Mathway, uma ferramenta *on-line* que pode ser usada em várias áreas da Matemática. Ela pode funcionar apenas como uma calculadora, mostrando o resultado, ou, se o usuário desejar, pode também fornecer a resolução de uma operação ou de uma equação, por exemplo.

Neste momento, usaremos o Mathway para a resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$. No entanto, ele resolve todo tipo de equação do 2º grau, até mesmo as equações cujas raízes são números complexos. Além disso, resolve equações do 1º grau, do 3º grau, do 4º grau, e assim sucessivamente, mostrando inclusive quando uma equação não tem solução.

Peça aos alunos que inicialmente sigam os passos apresentados no livro para aprenderem como funciona essa ferramenta. Destaque que algumas operações são indicadas por alguns sinais, como multiplicação por * e potenciação por ^.

Sugira aos alunos que testem a resolução de algumas equações do 2º grau (completas e incompletas) e, até mesmo, do 1º grau para se acostumarem com o Mathway e, depois, respondam às questões, que apresentam equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$.

Questão 2

Esta questão trabalha a representação das situações como equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$, e a resolução dessas equações.

Nesta questão, o Mathway deve ser usado apenas para conferir as respostas obtidas.

3 Proporcionalidade

Principais habilidades da BNCC

EF08MA12 EF08MA13

Relembre que já vimos, no 7º ano, grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e não proporcionais, além de regra de 3 simples, que usamos para resolver problemas com grandezas proporcionais.

Apresente os 3 exemplos de situação propostos no livro e peça aos alunos que definam quais são as grandezas e se elas são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.

Depois, oriente-os a resolver os problemas que envolvem grandezas proporcionais (direta ou inversamente) por regra de 3 simples e a indicar a resposta.

As atividades apresentam problemas que envolvem grandezas direta ou inversamente proporcionais e podem ser resolvidas por regra de 3 simples.

Atividades 44 a 46

Se necessário, destaque que, na regra de 3 com grandezas inversamente proporcionais, devemos inverter o segundo termo da proporção.

Na atividade 46, peça aos alunos que criem 2 problemas relacionados ao cotidiano deles, usando o tema que preferirem, para trabalharem grandezas direta e inversamente proporcionais. Em seguida, organize-os em duplas para trocarem e resolverem os problemas.

3 Proporcionalidade

No 7º ano, você já estudou o que são **grandezas diretamente proporcionais**, o que são **grandezas inversamente proporcionais** e situações de **não proporcionalidade**.

Estudou também a **regra de 3 simples**, uma ferramenta importante para resolver problemas que envolvem grandezas proporcionais. Vamos relembrar algumas situações que envolvem grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais e resolvê-las.

- Elisa comprou 6 m de um tecido por R$ 420,00. Quanto ela pagaria por 9 m desse mesmo tecido?

Observe que, se o número de metros duplica, então o valor a pagar também duplica; se o número de metros triplica, então o valor a pagar também triplica; e assim por diante.
Neste caso, as grandezas "número de metros" e "preço" são **diretamente proporcionais.**
Sendo x o preço que ela pagaria por 9 m, escrevemos a proporção:

Número de metros	Preço
6	420
9	x

$$\frac{6}{9} = \frac{420}{x} \Rightarrow 6 \cdot x = 9 \cdot 420 \Rightarrow x = \frac{9 \cdot 420}{6} = 630$$

Logo, Elisa pagaria R$ 630,00 por 9 m de tecido.

- Darla demora 70 minutos para ir de carro de Rio Claro (SP) a Campinas (SP), com medida de velocidade média de 90 km/h. Quantos minutos ela gastaria para percorrer esse trajeto com medida de velocidade média de 100 km/h?

Observe que, se a medida de velocidade média do veículo dobra, então a medida de intervalo de tempo necessário diminui pela metade; se a medida de velocidade triplica, então a medida de intervalo de tempo necessário diminui pela terça parte; e assim por diante.
Neste caso, as grandezas "medida de velocidade média" e "medida de intervalo de tempo" são **inversamente proporcionais.**
Sendo x a medida de intervalo de tempo (em minutos) necessária para o veículo percorrer o trajeto com a medida de velocidade média de 100 km/h, escrevemos a seguinte proporção:

Medida de velocidade média (em km/h)	Medida de intervalo de tempo (em min)
90	70
100	x

$$\frac{100}{90} = \frac{70}{x} \Rightarrow 100 \cdot x = 90 \cdot 70 \Rightarrow x = \frac{90 \cdot 70}{100} = 63$$

Logo, com a medida de velocidade média de 100 km/h, Darla vai de Rio Claro a Campinas em 63 minutos.

- Se um time marcou 7 gols em 3 jogos, então quantos gols ele marcará em 6 jogos?

Como não é possível saber quantos gols serão marcados em 6 jogos, dizemos que as grandezas "número de jogos" e "número de gols" **não são direta nem inversamente proporcionais.**

42. 105 pães. $\left(\frac{5}{7} = \frac{75}{x}\right)$ **45.** 3 horas. $\left(\frac{10}{5} = \frac{6}{x}\right)$

Atividades

Não escreva no livro!

42 Com 5 kg de farinha de trigo, Noemi faz 75 pães. Quantos pães ela fará com 7 kg de farinha de trigo?

43 Com 3,5 L de tinta, Fernando pinta uma parede com 14 m² de medida de área.

a) Qual é a medida de área que ele pode pintar com 18 L dessa tinta? 72 m² $\left(\frac{3,5}{18} = \frac{14}{x}\right)$

b) Quantos litros de tinta serão necessários para pintar uma parede que tem medida de área de 36 m²? 9 L $\left(\frac{3,5}{x} = \frac{14}{36}\right)$

44 Dez pedreiros fazem um muro em 10 horas. Então, 25 pedreiros fazem esse mesmo muro em quantas horas? Em 4 horas. $\left(\frac{10}{x} = \frac{25}{10}\right)$

45 Uma torneira que jorra 5 L de água por minuto enche um tanque em 6 horas. Em quanto tempo 2 torneiras iguais a essa encherão o mesmo tanque?

46 Elabore 2 problemas, um com grandezas diretamente proporcionais e um com grandezas inversamente proporcionais. Depois, troque-os com um colega; ele resolve os seus problemas e você resolve os dele. Respostas pessoais.

Regra de 3 composta

Agora, vamos estudar a **regra de 3 composta**. Considere a situação a seguir.

Com 600 kg de ração, é possível alimentar 20 cavalos durante 30 dias. Com 800 kg de ração, é possível alimentar 25 cavalos durante quantos dias?

Considerando que todos os cavalos comem a mesma quantidade de ração, podemos organizar os dados em uma tabela.

Alimentação dos cavalos

Medida de massa de ração (em kg)	Número de cavalos	Número de dias
600	20	30
800	25	x

Tabela elaborada para fins didáticos.

Vamos resolver essa situação de 2 maneiras diferentes.

- **1ª maneira:** usando 2 regras de 3 simples.

Vamos analisar o comportamento de cada grandeza, separadamente, em relação à grandeza cujo valor queremos descobrir.

"Medida de massa de ração" com "número de dias": Considerando o mesmo número de cavalos, quando dobramos a medida de massa de ração, o número de dias também dobra. Logo, são grandezas diretamente proporcionais.

$$\frac{600}{800} = \frac{30}{y} \Rightarrow 600y = 24\,000 \Rightarrow y = 40$$

Usamos a incógnita y, pois ainda não é a resposta final (valor de x).

Com este resultado, a tabela fica assim:

Alimentação dos cavalos

Medida de massa de ração (em kg)	Número de cavalos	Número de dias
600	20	40
800	25	x

Tabela elaborada para fins didáticos.

"Número de cavalos" com "número de dias": Considerando a mesma medida de massa de ração, quando dobramos o número de cavalos, o número de dias diminui pela metade. Logo, as grandezas são inversamente proporcionais.

$$\frac{20}{25} = \frac{x}{40} \Rightarrow 25x = 20 \cdot 40 \Rightarrow 25x = 800 \Rightarrow x = 32$$

Portanto, com 800 kg de medida de massa de ração, é possível alimentar 25 cavalos durante 32 dias.

- **2ª maneira:** modo prático.

Considerando o mesmo número de cavalos, a medida de massa de ração e o número de dias são diretamente proporcionais; então, mantemos a ordem dos termos da ração.

Considerando a mesma medida de massa de ração, o número de cavalos e o número de dias são inversamente proporcionais; então, precisamos inverter a ordem dos termos da razão envolvendo o número de cavalos. Assim:

razão invertida

$$\frac{30}{x} = \frac{600}{800} \cdot \frac{25}{20} \Rightarrow \frac{30}{x} = \frac{15\,000}{16\,000} \Rightarrow 15\,000x = 480\,000 \Rightarrow x = 32$$

Logo, com 800 kg de medida de massa de ração, é possível alimentar 25 cavalos durante 32 dias.

3 Proporcionalidade

Comente que, agora, vamos estudar regra de 3 composta e leia a situação dada no livro, apresentando, na lousa, a tabela com os valores.

Em seguida, peça aos alunos que tentem criar uma forma de resolver esse problema. Após alguns minutos, verifique as hipóteses da turma e, com eles, faça as 2 resoluções do material na lousa.

Mostre que na 1ª maneira trabalhamos com as grandezas 2 a 2, como na regra de 3 simples, sendo algo que os alunos sabem fazer. Já a 2ª maneira é prática, trabalhando as 3 grandezas juntas após verificarmos se cada uma das grandezas é direta ou inversamente proporcional à grandeza que queremos descobrir o valor.

3 Proporcionalidade

Leia o problema apresentado no livro e, na lousa, coloque a tabela dada.

Então, peça aos alunos que resolvam essa situação usando as 2 maneiras apresentadas na página anterior. Acompanhe a resolução para observar o quanto eles estão entendendo a regra de 3 composta.

Destaque que, ao usarmos 2 regras de 3 simples (1ª maneira), temos 2 resoluções possíveis, pois podemos analisar:

- inicialmente número de horas diárias e número de funcionários, e depois número de caixas e número de funcionários;
- inicialmente número de caixas e número de funcionários, e depois número de horas diárias e número de funcionários.

No método prático (2ª maneira), auxilie os alunos a escrever a expressão algébrica para o cálculo do valor desejado a partir da consideração de que as grandezas são direta ou inversamente proporcionais à grandeza que queremos descobrir o valor.

Ao final, sugira que anotem o que considerarem mais importante sobre regra de 3 simples e, principalmente, regra de 3 composta no painel de descobertas.

Veja outro exemplo. Trabalhando 8 horas por dia, 16 funcionários com o mesmo ritmo de trabalho descarregam 240 caixas de um caminhão. Se trabalhassem 10 horas por dia nesse mesmo ritmo, então quantos funcionários seriam necessários para descarregar 600 caixas?

Trabalho dos funcionários

Número de horas diárias	Número de funcionários	Número de caixas
8	16	240
10	x	600

Tabela elaborada para fins didáticos.

Novamente vamos resolver essa situação de 2 maneiras diferentes.

- **1ª maneira:** usando 2 regras de 3 simples.
  Vamos analisar separadamente.
  "Número de horas diárias" e "número de funcionários": Considerando o mesmo número de caixas, quando dobramos o número de horas diárias, o número de funcionários se reduz à metade. Portanto, são grandezas inversamente proporcionais.

$$\frac{8}{10} = \frac{y}{16} \Rightarrow 10y = 8 \cdot 16 \Rightarrow 10y = 128 \Rightarrow y = 12{,}8 \text{ (resultado provisório)}$$

A tabela fica assim:

Trabalho dos funcionários

Número de horas diárias	Número de funcionários	Número de caixas
8	12,8	240
10	x	600

Tabela elaborada para fins didáticos.

"Número de caixas" e "número de funcionários": Considerando o mesmo número de horas diárias, quando dobramos o número de caixas, dobra também o número de funcionários necessários. Logo, as grandezas são diretamente proporcionais.

$$\frac{240}{600} = \frac{12{,}8}{x} \Rightarrow 240x = 600 \cdot 12{,}8 \Rightarrow 240x = 7\,600 \Rightarrow x = 32$$

Portanto, seriam necessários 32 funcionários para descarregar 600 caixas em 10 horas.

- **2ª maneira:** modo prático.
  O número de horas diárias e o número de funcionários são grandezas inversamente proporcionais (considerando o mesmo número de caixas). Precisamos, então, inverter a ordem dos termos da razão envolvendo o número de horas diárias, $\frac{8}{10}$, colocando $\frac{10}{8}$.
  O número de caixas e o número de funcionários são grandezas diretamente proporcionais (considerando o mesmo número de horas por dia). Então, mantemos a ordem dos termos da razão envolvendo o número de caixas. Assim:

$$\frac{16}{x} = \frac{10}{8} \cdot \frac{240}{600} \Rightarrow \frac{16}{x} = \frac{2\,400}{4\,800} \Rightarrow \frac{16}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 32$$

Logo, seriam necessários 32 funcionários para descarregar 600 caixas em 10 horas.

47. 3 horas. $\left(\frac{5}{x} = \frac{6}{3} = \frac{5\,000}{6\,000}\right)$

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

55. 32 dias. $\left(\frac{30}{x} = \frac{1500}{3000} = \frac{600}{400} = \frac{10}{8}\right)$

Não escreva no livro!

Atividades

47 Três torneiras despejam 5 000 litros de água em um reservatório em 5 horas. Em quantas horas 6 torneiras despejam 6 000 litros de água?

48 Um pacote com 40 cadernos de 70 páginas cada um tem medida de massa de 36 kg. Qual é a medida de massa de um pacote com 35 cadernos de 60 páginas? 27 kg $\left(\frac{36}{x} = \frac{40}{35} = \frac{70}{60}\right)$

49 Oito metalúrgicos produzem 400 peças em 6 dias. São necessários quantos metalúrgicos para produzir 300 peças em 3 dias?

Ernesto Rodrigues/Agência Estado

Metalúrgico.

12 metalúrgicos. $\left(\frac{8}{x} = \frac{400}{300} = \frac{3}{6}\right)$

50 Uma máquina produz 450 painéis de medida de área de 2 m² cada um, trabalhando 6 horas por dia durante 5 dias. Quantos painéis de medida de área de 3 m² essa máquina produzirá trabalhando durante 6 dias, 5 horas por dia? $\left(\frac{450}{x} = \frac{3}{2} = \frac{6}{5} = \frac{5}{6}\right)$ 300 painéis.

51 Em uma república de estudantes, moram 4 pessoas que gastam R$ 490,00 com alimentação a cada 10 dias. Se mais 2 pessoas passarem a morar nessa república, mantendo a mesma despesa por pessoa, então de quanto será o gasto com alimentação a cada 15 dias? $\left(\frac{490}{x} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15}\right)$ R$ 1 102,50

52 Em outra república, moram 8 pessoas que gastam R$ 1 280,00 com alimentação a cada 4 dias. Se chegarem mais 2 pessoas, mantendo a mesma despesa por pessoa, então a quantia de R$ 1 600,00 para alimentação será suficiente para quantos dias? 4 dias. $\left(\frac{4}{x} = \frac{10}{8} = \frac{1280}{1600}\right)$

53 Uma máquina, trabalhando durante 6 minutos, produz 80 peças. Se for usada uma máquina com o dobro de potência, então em quanto tempo ela produzirá 120 peças? (**Sugestão:** Use 1 para a potência da primeira máquina e 2 para a da segunda.)

54 Vinte funcionários pavimentam uma estrada com medida de comprimento de 6 km, em 15 dias. Quantos funcionários serão necessários para pavimentar uma estrada com medida de comprimento de 8 km, em 10 dias?

João Prudente/Pulsar Imagens

Funcionários pavimentando estrada.

40 funcionários. $\left(\frac{20}{x} = \frac{6}{8} = \frac{10}{15}\right)$

55 Trabalhando 8 horas por dia, os 3 000 operários de uma indústria automobilística, com o mesmo ritmo de trabalho, produzem 600 veículos em 30 dias. Quantos dias serão necessários para que 1 500 desses operários produzam 400 veículos, trabalhando 10 horas por dia?

56 Um campo de futebol com medida de área de 6 000 m² teve a grama podada por 4 homens que trabalharam 6 horas por dia durante 3 dias. Quantos homens com o mesmo ritmo de trabalho seriam necessários para podar a grama de um campo de 8 000 m², trabalhando 8 horas por dia durante 2 dias? 6 homens. $\left(\frac{4}{x} = \frac{6\,000}{8\,000} = \frac{8}{6} = \frac{2}{3}\right)$

57 Para cobrir o piso de uma sala, foram necessárias 750 peças retangulares de cerâmica com lados de medida de comprimento de 45 cm por 8 cm. Quantas peças com lados de medida de comprimento de 40 cm por 7,5 cm serão necessárias para cobrir um piso cuja medida de área é o dobro da anterior? 1 800 peças. $\left(\frac{750}{x} = \frac{40}{45} = \frac{7{,}5}{8} = \frac{360}{720}\right)$

58 Cinquenta e quatro operários trabalhando 5 horas por dia levaram 45 dias para construir um jardim retangular com lados de medida de comprimento de 225 m por 180 m. Quantos operários trabalhando 12 horas por dia, no mesmo ritmo, seriam necessários para construir, em 18 dias, outro jardim retangular com lados de medida de comprimento de 195 m por 120 m? 33 operários. $\left(\frac{54}{x} = \frac{12}{5} = \frac{18}{45} = \frac{40\,500}{23\,400}\right)$

53. 4,5 minutos ou 4 min 30 s. $\left(\frac{6}{x} = \frac{2}{1} = \frac{80}{120}\right)$

3 Proporcionalidade

As atividades contextualizam a resolução de problemas a partir de regra de 3 composta. Permita que os alunos usem a maneira que preferirem para resolverem as situações propostas. Peça para prestarem atenção às grandezas citadas em cada atividade e aos respectivos valores, destacando que alguns foram apresentados por extenso.

Atividades 50, 55 a 58

Estas atividades trabalham situações que apresentam 4 grandezas.

Inicialmente, verifique se os alunos percebem que não são 3 grandezas, como nos outros problemas que resolveram, e como devem proceder para resolver estas atividades.

Então, questione: "Usando a 1ª maneira apresentada, quantas regras de 3 simples são necessárias para resolver situações com 4 grandezas?"; "Usando o método prático (2ª maneira apresentada), o que muda com mais uma grandeza?". Esperamos que os alunos entendam que, para a 1ª maneira, devem utilizar 3 regras de 3 simples e que, para a 2ª maneira, só devem adicionar mais uma razão à igualdade. Leve-os a perceber que o método prático será menos trabalhoso do que o uso de regras de 3 simples quando tivermos uma grande quantidade de grandezas no problema.

3 Proporcionalidade

Explorar e descobrir

Organize os alunos em duplas e peça que leiam os três exemplos, classificando as grandezas envolvidas em cada um deles em direta ou inversamente proporcionais.

Oriente-os a verificar a tabela apresentada no livro para o exemplo **I** e peça que façam tabelas para os exemplos **II** e **III**. Para isso, solicite que, com os valores fornecidos no texto, descubram e coloquem:

- o número de máquinas necessárias para atingir a meta diária em 4, 2 ou 1 hora na tabela do exemplo **II**;
- a medida de massa do bolo para satisfazer 0, 20 ou 40 convidados na tabela do exemplo **III**.

Então, desafie-os a escrever uma equação que represente a relação entre as 2 grandezas de cada exemplo e, a partir das tabelas, construir gráficos dispondo os pares ordenados em um plano cartesiano, como feito para o exemplo **I** no material. Confira na página L deste Manual a resposta para cada item da atividade 1.

Finalmente, peça aos alunos que indiquem se é possível traçar uma reta unindo os pontos obtidos de cada gráfico e compartilhem hipóteses e conclusões com a turma. Pergunte: “Para quais grandezas conseguimos traçar uma reta que contenha todos os pontos da tabela?”. Provavelmente os alunos percebam que isso é possível apenas para as grandezas diretamente proporcionais.

Proporcionalidade e gráfico

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

Reúna-se com um colega e leiam cada um destes exemplos.

I O *chef* de um restaurante lucra R$ 1 500,00 quando recebe 50 clientes. Certo dia ele recebeu apenas 20 clientes e o lucro foi de R$ 600,00.

II Uma fábrica demora 8 horas para atingir a meta diária usando 24 máquinas. A dona da fábrica comprou mais 24 máquinas e passou a atingir a meta diária em 4 horas.

III José convidou 80 pessoas para a festa de aniversário dele e encomendou um bolo de 12 kg. Quando ele viu que apenas 60 pessoas confirmaram a presença, ele ligou na confeitaria e mudou o pedido para um bolo de 9 kg.

gpointstudio/Shutterstock

Chef cozinhando.

Observe que as grandezas do exemplo **I** são **diretamente proporcionais**. Veja ao lado como podemos construir uma tabela com os dados fornecidos no exemplo **I**.

Também é possível representar esses dados com esta equação: seja l o lucro, em reais, e n o número de clientes, a relação entre as grandezas pode ser representada por $l = n \cdot 30$.

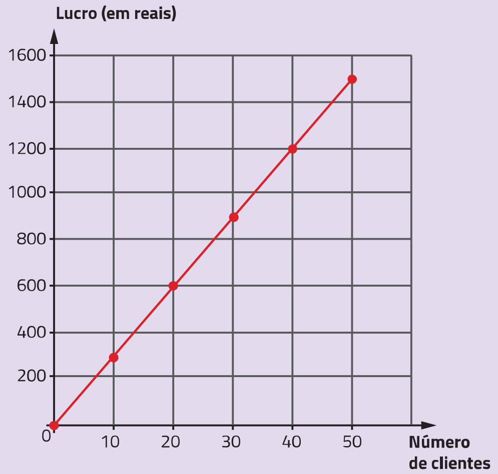
Finalmente, podemos construir um gráfico com os pontos indicados na tabela. Neste caso, colocamos a grandeza “lucro” no eixo y e a grandeza “número de clientes” no eixo x. Observe que todos os pontos estão contidos em uma mesma reta.

Relação entre o lucro e o número de clientes em um restaurante

Lucro (em reais)	0	300	600	900	1200	1500
Número de clientes	0	10	20	30	40	50

Tabela elaborada para fins didáticos.

Relação entre o lucro e o número de clientes em um restaurante



Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráfico elaborado para fins didáticos.

1 Faça no caderno o que é pedido em cada item, para os exemplos **II** e **III**. MP

a) Identifique se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

b) Construa uma tabela indicando a relação entre as 2 grandezas indicadas em cada exemplo.

c) Escreva a equação que representa a relação entre as 2 grandezas.

d) Use os dados da tabela do item **b** para marcar os pares ordenados em um plano cartesiano e formar, assim, um gráfico.

2 Agora, em cada gráfico, tente traçar uma reta que contenha todos os pontos que você marcou. Verifique com um colega em qual deles isso foi possível e, depois, anote no caderno suas conclusões.

2. Resposta esperada: No gráfico das grandezas diretamente proporcionais é possível traçar uma reta que contém todos os pontos indicados na tabela.

O gráfico de uma situação de **grandezas diretamente proporcionais** é sempre uma **reta** (ou parte dela) que passa pela origem dos eixos cartesianos.

Com essa informação, temos mais uma maneira de resolver os problemas de grandezas diretamente proporcionais. Veja outro exemplo.

Ronaldo dirige o automóvel dele em uma rodovia a uma **velocidade constante** de medida de 100 km/h. Nessas condições, a medida de distância que ele percorre é diretamente proporcional à medida de intervalo de tempo. Examine a tabela e o gráfico dessa situação.

Relação entre medida de intervalo de tempo e medida de distância percorrida

Medida de intervalo de tempo (em h)	Medida de distância (em km)
$\frac{1}{4}$	25
$\frac{1}{2}$	50
1	100
1,5	150
2	200
2,5	250

Tabela elaborada para fins didáticos.

Relação entre medida de intervalo de tempo e medida de distância percorrida

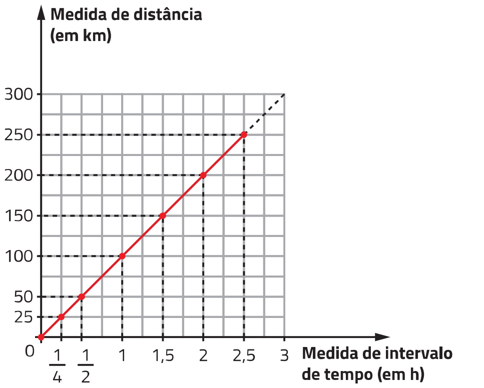


Gráfico elaborado para fins didáticos.

Observe que o gráfico do exemplo é uma parte de uma reta do plano (semirreta de origem no ponto (0, 0)).

59. c) 1 h 45 min $\left(1{,}75\text{ h} = 1\frac{3}{4}\text{ h} = 1\text{ h } 45\text{ min}\right)$

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro!

Atividades

59 Consultando apenas o gráfico acima, responda aos itens no caderno.

a) Depois de 3 horas de viagem, qual é a medida de distância percorrida? 300 km

b) Depois de 1 hora e 15 minutos de viagem, qual é a medida de distância percorrida? 125 km

c) Depois de quanto tempo Ronaldo percorreu 175 km?

d) Depois de quanto tempo ele percorrerá 400 km? 4 h

60 Construa uma tabela no caderno, relacionando o número de canetas e o preço a pagar usando o gráfico apresentado ao lado. MP

Relação entre o número de canetas e o preço a pagar

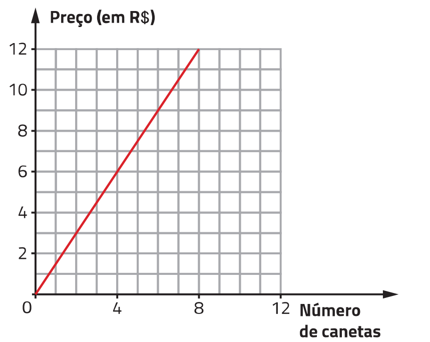


Gráfico elaborado para fins didáticos.

3 Proporcionalidade

Peça aos alunos que leiam as informações desta página e comparem com o que concluíram no *Explorar e descobrir* da página anterior, registrando, no painel de descobertas, essas conclusões com as correções necessárias.

Incentive-os a observar a tabela e o gráfico apresentados no material, destacando que o gráfico é uma semirreta, ou seja, parte de uma reta, por não ser impossível obtermos medidas de distância e de intervalos de tempo negativos.

Seguindo as indicações dos alunos, verifique que os intervalos de tempo $\frac{1}{4}$ h e $\frac{1}{2}$ h representam, respectivamente, 15 e 30 minutos.

Em seguida, pergunte: "Observando o gráfico, podemos identificar o intervalo de tempo para percorrer uma medida de distância que não é apresentada na tabela?"; "E identificar a medida de distância percorrida em um intervalo de tempo?". Após as respostas, explique que farão isso na próxima atividade.

Atividades 59 e 60

Estas atividades desenvolvem a interpretação dos dados fornecidos em gráficos de grandezas diretamente proporcionais.

Na atividade 59, verifique, com a turma, quanto representa a medida de lado de cada quadradinho para a medida de intervalo de tempo e para a medida de distância.

Na atividade 60, os alunos devem construir a tabela referente ao gráfico fornecido. Se considerar conveniente, desafie os alunos a descobrir algum valor que não está no gráfico para colocar na tabela, como o preço de 12 canetas. Confira a resposta desta atividade.

Relação entre o número de canetas e o preço a pagar

Número de canetas	Preço a pagar
0	0
4	6
8	12
12	18

Tabela elaborada para fins didáticos.

Revisando seus conhecimentos

Principais habilidades da BNCC

EF08MA06 EF08MA13

Atividades 1, 2 e 3

Estas atividades desenvolvem a escrita e a simplificação de polinômios que representam medidas de perímetro e de área.

Além disso, a atividade 2 aborda o cálculo do valor numérico das expressões algébricas obtidas na atividade 1.

Na atividade 3, destaque que devemos descobrir a medida de área total da superfície do paralelepípedo, não apenas de alguma face.

Atividade 4

Oriente como medir o comprimento de um giz de cera usando uma régua para que os alunos verifiquem se a afirmação de Paula está correta ou não.

Atividade 5

Esta atividade retoma os assuntos adição de frações e inverso de um número elevado a um expoente negativo.

Atividade 6

Esta atividade revisa a divisão de um número em partes inversamente proporcionais.

Atividades 7 e 8

Estas atividades trabalham a representação e a resolução de situações a partir de equações do 1º grau.

A atividade 7 revisa conceitos de ângulos formados por retas paralelas "cortadas" por uma transversal. Destaque que queremos descobrir a medida de abertura do ângulo $\hat{B}$, ou seja, quanto é $x + 10°$.

Atividade 9

Esta atividade trabalha a interpretação dos dados fornecidos em um gráfico de grandezas diretamente proporcionais.

Se necessário, chame a atenção dos alunos para a necessidade de fazer aproximações em alguns itens.

Atividade 10

Esta atividade aborda adições e subtrações com polinômios.

Chame a atenção dos alunos para o item **c**, pois, além da subtração do segundo polinômio, deve-se multiplicá-lo por 3.

2. a) 34 cm; **b)** 58 cm; **c)** 70 cm²; **d)** 210 cm²; **e)** 24 cm; **f)** 140 cm².

8. $6\left(\frac{x}{4} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow x = 6\right)$

Revisando seus conhecimentos

Não escreva no livro!

1 Um retângulo **A** tem medidas de comprimento da base igual a x e da altura igual a $x - 3$. Um retângulo **B** é obtido de **A** aumentando 5 unidades na medida de comprimento da base e dobrando a medida de comprimento da altura.

Indique no caderno, usando expressões algébricas:

a) a medida de perímetro de **A**; $4x - 6$

b) a medida de perímetro de **B**; $6x - 2$

c) a medida de área de **A**; $x^2 - 3x$

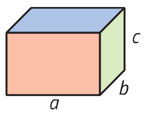
d) a medida de área de **B**; $2x^2 + 4x - 30$

e) a diferença entre as medidas de perímetro de **B** e de **A**, nessa ordem. $2x + 4$

f) a diferença entre as medidas de área de **B** e de **A**, nessa ordem. $x^2 + 7x - 30$

2 Considerando $x = 10$ cm, calcule os valores indicados nos itens de **a** a **f** da atividade anterior.

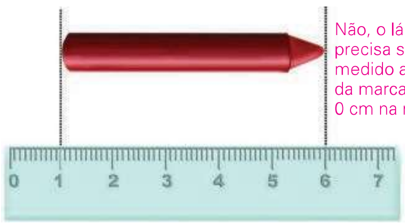
3 Considere um paralelepípedo cujas dimensões têm medidas a, b e c. $2ab + 2ac + 2bc$ ou $2(ab + ac + bc)$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Escreva no caderno o polinômio mais simples que indica a medida de área total da superfície desse paralelepípedo.

4 Paula disse que o lápis de cera dela tem medida de comprimento de 6 cm. Ela está correta? Explique.



Estúdio Lab307/Arquivo da editora

Não, o lápis precisa ser medido a partir da marcação de 0 cm na régua.

5 **(UFCE)** Se $a = \left(1 + \frac{2}{3}\right)^{-1}$ e b é tal que $ab = 1$, então o valor de b é:

a) $\frac{5}{2}$.

X b) $\frac{3}{5}$.

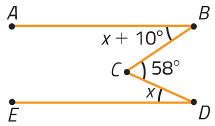
c) $\frac{5}{3}$.

d) $\frac{2}{5}$.

e) $\frac{2}{3}$.

6 Um pai resolveu repartir a quantia de R$ 3 000,00 entre as filhas Gabriela, Janaína e Larissa, em partes inversamente proporcionais às idades delas, que são 20 anos, 15 anos e 12 anos, respectivamente. Determine no caderno a quantia que cada uma receberá.
Gabriela: R$ 750,00, Janaína: R$ 1 000,00; Larissa: R$ 1 250,00.

7 Observe esta figura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que $\overline{AB} \mathbin{/\!/} \overline{DE}$, qual é a medida de abertura do ângulo $\hat{B}$?

a) 33°

X b) 34°

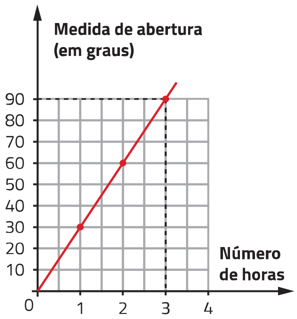
c) 35°

d) 36°

8 Pensei em um número, dividi por 4 e tirei $\frac{2}{3}$, obtendo $\frac{5}{6}$. Em qual número pensei?

9 Este gráfico refere-se ao giro do ponteiro das horas de um relógio. Observe-o e responda aos itens no caderno.

Relação entre número de horas e medida de abertura do giro do ponteiro das horas



Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráfico elaborado para fins didáticos.

a) Qual é a medida de abertura (em graus) do giro que esse ponteiro dá em 2 horas? 60°

b) Em quantas horas esse ponteiro dá um giro de medida de abertura de 45°? 1,5 h ou 1 hora e meia. (90 minutos)

c) Em quantas horas esse ponteiro dá um giro de $\frac{1}{4}$ de volta? 3 horas. $\left(\frac{1}{4} \text{ de } 360° = 90°\right)$

d) Qual é a medida de abertura (em graus) do giro que esse ponteiro dá em meia hora? E em 6 horas? 15°; 180°.

10 Efetue estas adições e subtrações de polinômios no caderno.

a) $(x^2 + 3x - 1) + (-2x + 3)$ $x^2 + x + 2$

b) $(-ab^2 + ab - 4) + (2ab^2 - ab - 5)$ $ab^2 - 9$

c) $(-x^3 - 3x^2 + x) - 3(x^3 + 2x^2)$ $-4x^3 - 9x^2 + x$

d) $(a^3 + 2a^2 - 5) - (a^3 - a^2 - 5)$ $3a^2$

11. $\left(1\text{ cm}^3 = 1\text{ mL}; \frac{1}{400} = \frac{28}{x} = x = 400 \times 28 = 11\,200\right)$

11 **(Enem)** Em alguns países anglo-saxões, a unidade de volume utilizada para indicar o conteúdo de alguns recipientes é a onça fluida britânica. O volume de uma onça fluida britânica corresponde a 28,4130625 mL.

A título de simplificação, considere uma onça fluida britânica correspondendo a 28 mL.

Nessas condições, o volume de um recipiente com capacidade de 400 onças fluidas britânicas, em cm^3, é igual a:

X a) 11 200
b) 1 120
c) 112
d) 11,2
e) 1,12

12 Observe as expressões algébricas nas placas. Cada uma delas indica como deve ser feito o pagamento de uma compra, sendo *E* o valor da entrada e *P* o valor de cada prestação, em reais.

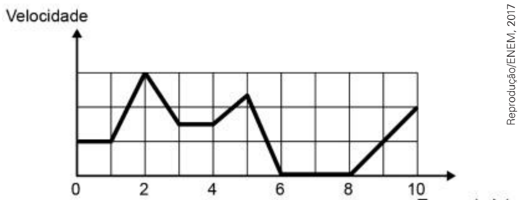
Ilustrações: Paulo Manzi/Arquivo da editora

a) Na loja **A**, uma geladeira está sendo vendida com entrada de R$ 850,00 e prestações de R$ 400,00 cada uma. Na Loja **B**, a mesma geladeira está sendo vendida com E = R$ 550,00 e P = R$ 250,00.

Em qual dessas lojas o valor total da geladeira é menor? Quanto ela custa a menos do que na outra loja?

b) Se um fogão está sendo vendido por R$ 1 220,00 na loja **A**, com entrada de R$ 320,00, então qual é o valor de cada prestação?

13 **(Enem)** Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.



Reprodução/ENEM, 2017

(De 6 a 8 minutos, a medida de velocidade é nula; 8 − 6 = 2.)

Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?

a) 4
b) 3
X c) 2
d) 1
e) 0

14. Estão juntos, pois $\frac{4}{10} = \frac{6}{15}$. $\left(\frac{4}{10} = \frac{12}{30}; \frac{6}{15} = \frac{12}{30}\right)$

14 Em uma corrida, um carro azul já percorreu $\frac{4}{10}$ do percurso e um carro verde, $\frac{6}{15}$. Qual deles está na frente? Justifique sua resposta.

15 Com um estoque de ração é possível alimentar 30 carneiros durante 20 dias. Considerando que todos os carneiros comem a mesma quantidade de ração, se fossem 40 carneiros, então esse estoque de ração daria para quantos dias? 15 dias. $\left(\frac{40}{30} = \frac{20}{x}\right)$

16 **(Obmep)** Uma formiguinha andou sobre a borda de uma régua, da marca de 6 cm até a marca de 20 cm. Ela parou para descansar na metade do caminho.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

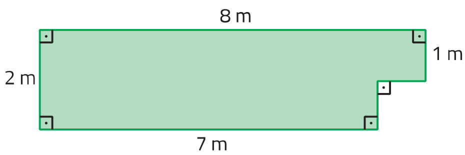
Reprodução/Obmep, 2011

(20 − 6 = 14; 14 ÷ 2 = 7; 6 + 7 = 13)

Em que marca ela parou?

a) 11 cm
b) 12 cm
X c) 13 cm
d) 14 cm
e) 15 cm

17 Determine no caderno a medida da área desta região plana. 15 m^2 ($A = 2 \times 8 - 1 \times 1 = 16 - 1 = 15$ ou $A = 2 \times 7 + 1 \times 1 = 14 + 1 = 15$)

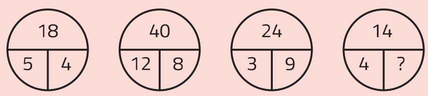


Banco de imagens/Arquivo da editora

18 O piso de uma sala de aula retangular, cujos lados têm medidas de comprimento de 8 m por 4 m, será revestido com lajotas quadradas, cujos lados têm medida de comprimento de 25 cm. Quantas lajotas serão necessárias? 512 lajotas. (800 ÷ 25 = 32; 400 ÷ 25 = 16; 32 × 16 = 512)

Raciocínio lógico 3 (A soma dos números da parte inferior de cada figura é a metade do número na parte superior.)

Descubra um padrão na sequência e determine no caderno o valor de **?**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

12. a) Na loja **B**; R$ 200,00 a menos. (**A**: 850 + 6 × 400 = 850 + 2 400 = 3 250; **B**: 550 + 10 × 250 = 550 + 2 500 = 3 050; 3 050 < 3 250; 3 250 − 3 050 = 200)
b) R$ 150,00 (1 220 = 320 + 6P ⇒ 6P = 900 ⇒ P = 900 ÷ 6 = 150)

Revisando seus conhecimentos

Atividade 11

Esta atividade apresenta a unidade de medida de volume onça fluida britânica e a correspondência entre ela e unidades de medida de volume e de capacidade.

Atividade 12

Esta atividade trabalha o cálculo do valor numérico das expressões algébricas fornecidas e a resolução de uma equação do 1º grau.

Atividade 13

Esta atividade aborda a interpretação dos dados apresentados em um gráfico.

Atividade 14

Esta atividade retoma a comparação de frações de denominadores diferentes.

Verifique se os alunos percebem que, embora a representação das frações seja diferente, elas são equivalentes, ou seja, representam a mesma quantidade do percurso.

Atividade 15

Esta atividade retoma uma situação de grandezas inversamente proporcionais, que permite a resolução por regra de 3 simples.

Atividades 17 e 18

Nestas atividades, os alunos aplicam os cálculos de medidas de área de regiões retangulares e regiões quadradas.

Raciocínio lógico

Após os alunos completarem o número na última figura da sequência, peça que verbalizem o padrão que identificaram. É possível que eles primeiro tentem achar um padrão entre os números de uma figura e da próxima para, então, descobrir que um possível padrão é encontrado entre os próprios números de cada figura.

Testes oficiais

Principais habilidades da BNCC

EF08MA06 EF08MA13

Atividades 1 e 3

Estas atividades trabalham operações com polinômios.

Na atividade 3, os alunos podem escrever diretamente a expressão algébrica que representa a situação ou efetuar cada operação separadamente.

Atividades 2 e 5

Estas atividades desenvolvem a escrita e resolução de equações do 1º grau.

Na atividade 5, explique que, sendo x a medida de distância entre Pirajuba e Quixajuba, representamos a medida de capacidade do álcool usado na viagem de ida por $\frac{x}{12}$ e a medida de capacidade da gasolina usada na viagem de volta por $\frac{x}{15}$.

Atividades 4, 6 e 7

Estas atividades contextualizam a resolução de problemas a partir de regra de 3 simples.

Na atividade 4, mostre que, embora seja apresentado o intervalo de tempo de 8 horas, como ele não se altera, comparamos apenas 2 grandezas (quantidade de gotas e medida de massa corporal), não sendo necessário o uso de regra de 3 composta.

Na atividade 6, oriente-os a considerar a nova barra de chocolate como sendo a quantidade total (100%). Assim, podem calcular qual é a porcentagem correspondente à diferença entre as medidas de massa das barras, ou seja, 50 g.

Na atividade 7, peça que calculem a medida de capacidade de água que entrará no barco durante o tempo que Alvino demora para chegar até a praia. Em seguida, oriente-os a calcular a medida de capacidade de água que Alvino terá que tirar do barco neste tempo e por minuto para que o barco não afunde.

1. $\left(\frac{2a + 4ba}{2a} = \frac{2a}{2a} + \frac{4ba}{2a} = 1 + 2b\right)$

5. $\left(\frac{x}{12} + \frac{x}{15} = 18 \Rightarrow \frac{5x}{60} + \frac{4x}{60} = \frac{1080}{60} \Rightarrow 9x = 1080 \Rightarrow x = 120\right)$

Testes oficiais

Não escreva no livro!

1 **(Saresp-SP)** Considere estas expressões:

$$A = 2a + 4ba$$
$$B = 2a$$

O resultado da divisão de A por B é:

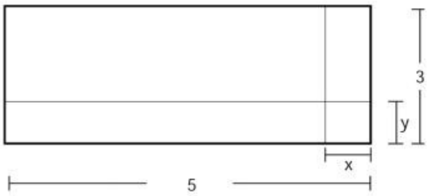
a) $4ba$.
X c) $1 + 2b$.
b) $4a + 4ab + b$.
d) 2.

2 **(Prova Brasil)** Uma prefeitura aplicou R$ 850 mil na construção de 3 creches e um parque infantil. O custo de cada creche foi de R$ 250 mil. A [equação] que representa o custo do parque, em mil reais, é:

a) $x + 850 = 250$.
c) $850 = x + 250$.
b) $x - 850 = 750$.
X d) $850 = x + 750$.

3 **(Enem)** Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)(3 - y)$.

Reprodução/ENEM, 2012



Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

a) $2xy$.
d) $25y - 3x$.
b) $15 - 3x$.
X e) $5y + 3x - xy$.
c) $15 - 5y$.

$(15 - (5 - x)(3 - y) = 15 - 15 + 5y + 3x - xy = 5y + 3x - xy)$

4 **(Enem)** Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de: $\left(\frac{2}{x} = \frac{5}{30} \Rightarrow x = 12\right)$

X a) 12 kg.
d) 36 kg.
b) 16 kg.
e) 75 kg.
c) 24 kg.

5 **(Obmep)** João fez uma viagem de ida e volta entre Pirajuba e Quixajuba em seu carro, que pode rodar com álcool e com gasolina. Na ida, apenas com álcool no tanque, seu carro fez 12 km por litro e na volta, apenas com gasolina no tanque, fez 15 km por litro. No total, João gastou 18 litros de combustível nessa viagem. Qual é a distância entre Pirajuba e Quixajuba?

a) 60 km
d) 150 km
b) 96 km
e) 180 km
X c) 120 km

6 **(Obmep)** Um fabricante de chocolate cobrava R$ 5,00 por uma barra de 250 gramas. Recentemente o "peso" da barra foi reduzido para 200 gramas, mas seu preço continuou R$ 5,00. Qual foi o aumento percentual do preço do chocolate desse fabricante?

Reprodução/Obmep, 2006

$\left(250 - 200 = 50; \frac{200}{50} = \frac{100\%}{x} \Rightarrow x = 25\%\right)$

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

a) 10%
c) 20%
e) 30%
b) 15%
X d) 25%

7 **(Obmep)** Alvino está a meio quilômetro da praia quando começa a entrar água em seu barco, a 40 litros por minuto. O barco pode suportar, no máximo, 150 litros de água sem afundar. A velocidade do barco é 4 quilômetros por hora.

Reprodução/Obmep, 2011

Quantos litros de água por minuto, no mínimo, Alvino deve tirar do barco para chegar à praia?

X a) 20
c) 28
e) 32
b) 24
d) 30

7. $\left(0,5 \div 4 = 0,125;\ 0,125\text{ h} = 7,5\text{ min};\ \frac{40}{y} = \frac{1}{7,5} \Rightarrow y = 300;\ 300 - 150 = 150;\ \frac{150}{x} = \frac{7,5}{1} \Rightarrow x = 20\right)$

VERIFIQUE O QUE ESTUDOU

5. a) $((-1)^4 - 1 = 1 - 1 = 0$ (V))

Não escreva no livro!

1 Considere estes polinômios:

$3x^4$	$5x + y^2$	$9x - 4$	$x^2 - 10x + 25$
$5xy^2$	$x^2 + 5x + 16$	$x^3 - 1$	$x^2 - 1$

Indique no caderno:

a) todos os trinômios; $x^2 - 10x + 25$; $x^2 + 5x + 16$.

b) todos os monômios; $3x^4$; $5xy^2$.

c) todos os binômios; $5x + y^2$; $9x - 4$; $x^3 - 1$; $x^2 - 1$.

d) o monômio com 2 variáveis; $5xy^2$

e) o monômio com 1 variável; $3x^4$

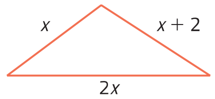
f) o binômio com 2 variáveis; $5x + y^2$

g) o binômio do 2º grau com 1 variável; $x^2 - 1$

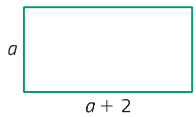
h) o polinômio equivalente a $(x + 1)(x - 1)$; $x^2 - 1$

2 Represente as medidas no caderno usando expressões algébricas.

a) A medida de perímetro de um triângulo cujos lados têm medidas de comprimento x, $x + 2$ e $2x$, na mesma unidade de medida. $4x + 2$



b) A medida de perímetro de um retângulo cujos lados têm medidas de comprimento a e $a + 2$, na mesma unidade de medida. $4a + 4$



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

3 Efetue no caderno as operações com monômios.

a) $3x + 2y$ $3x + 2y$

b) $4x^2 + 5x^2$ $9x^2$

c) $7xy - xy$ $6xy$

d) $(2x^2)(3y)$ $6x^2y$

e) $(10x^6) \div (2x^2)$ $5x^4$

f) $(5x)(2x)$ $10x^2$

g) $(5x^5)^2$ $25x^{10}$

h) $\dfrac{12x^2y}{4xy}$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$. $3x$

i) $9x^2 - 6x^2 + x^2$ $4x^2$

j) $(3x^3) \cdot (2x^2)$ $6x^5$

4 Efetue no caderno as operações com polinômios.

a) $(3x + y) + (x - 2y) - (4x - 3y)$ $-4y$

b) $(2x)(3x^2 - 4x + 1)$ $6x^3 - 8x^2 + 2x$

c) $(x + 6)(x - 1)$ $x^2 + 5x - 6$

d) $\dfrac{6x^2 - 3x}{3x}$, para $x \neq 0$. $2x - 1$

5 Copie no caderno apenas as afirmações verdadeiras.

X a) Para $x = -1$ a expressão $x^4 - 1$ tem valor 0.

b) 7 é raiz da equação $2x + 3 = 19$. $(17 = 19$ (F))

X c) 7 é raiz da equação $2x^2 = 98$. $(2 \times 49 = 98$ (V))

d) $2x^2 = 98$ tem uma única raiz, entre os números racionais. $(x' = 7$ e $x'' = -7$ (F))

6 Lendo 15 páginas por dia, Marcos leu um livro em 9 dias. 45 páginas. $\left(\dfrac{15}{x} = \dfrac{3}{9} \Rightarrow 3x = 135 \Rightarrow x = 45\right)$
Para ler esse mesmo livro em 3 dias, quantas páginas ele deveria ler por dia?

7 Com 6 kg de ração é possível alimentar 3 cães durante 8 dias. Considerando que todos os cães comam a mesma quantidade de ração, quantos quilogramas são necessários para alimentar 4 cães durante 10 dias? 10 kg $\left(\dfrac{6}{x} = \dfrac{3 \times 8}{4 \times 10} \Rightarrow x = 10\right)$

8 Para percorrer certa distância, João demora 3 horas a uma medida de velocidade de 80 km/h. Quantas horas seriam necessárias para realizar o mesmo percurso com medida de velocidade de 120 km/h?

Atenção

Retome os assuntos que você estudou neste capítulo. Verifique em quais teve dificuldade e converse com o professor, buscando maneiras de reforçar seu aprendizado.

8. 2 horas. $\left(\dfrac{3}{x} = \dfrac{120}{80} \Rightarrow x = 2\right)$

Autoavaliação

Algumas atitudes e reflexões são fundamentais para melhorar o aprendizado e a convivência na escola. Reflita sobre elas. Respostas pessoais.

- Mostrei interesse e participei das conversas na sala de aula?
- Retomei os principais conteúdos trabalhados na sala de aula?
- Ouvi com atenção as orientações do professor e contribuições dos colegas?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

Verifique o que estudou

Principais habilidades da BNCC

EF08MA06 EF08MA09 EF08MA13

Atividade 1

Esta atividade trabalha a classificação dos polinômios dados em relação à quantidade de monômios que os compõem, à quantidade de variáveis e ao grau.

Além disso, os alunos devem também efetuar uma multiplicação de 2 binômios para descobrir o polinômio equivalente ao produto.

Atividade 2

Esta atividade desenvolve a representação de medidas de perímetro de um triângulo e de um retângulo usando expressões algébricas.

Atividades 3 e 4

Estas atividades abordam operações com monômios e polinômios, inclusive potenciação.

Atividade 5

Esta atividade apresenta a verificação de raízes das equações dadas e a resolução de uma equação do 2º grau da forma $ax^2 = b$, $a \neq 0$.

Atividades 6 e 8

Estas atividades trabalham a resolução de situações que envolvem grandezas inversamente proporcionais a partir de regra de 3 simples.

Atividade 7

Esta atividade contextualiza a resolução de problemas utilizando regra de 3 composta.

Permita que os alunos resolvam da forma que preferirem e verifique qual das 2 maneiras apresentadas a turma prefere.

Autoavaliação

As questões de autoavaliação apresentadas propiciam aos alunos refletir sobre os estudos, as atitudes e as aprendizagens. Dê um tempo para que cada aluno reflita individualmente sobre elas e registre as respostas no caderno. Em seguida, àqueles que desejarem, permita que compartilhem as respostas com os colegas.

Ao longo do ano, é importante a retomada dos registros de autoavaliação feitos no fim de cada capítulo, para que eles possam perceber e mensurar o quanto aprenderam e melhoraram em diversos aspectos.

Em relação às perguntas propostas nesta página, converse com a turma sobre a importância de retomar os estudos em outros momentos, fora da sala de aula, verificando e garantindo a aprendizagem. Enfatize a necessidade de respeitar os colegas e os professores em todos os momentos, assim como respeitar os demais funcionários da escola.

Abertura

Neste capítulo, serão retomadas explorações envolvendo ângulos, triângulos e quadriláteros.

Peça aos alunos que observem a gravura e pergunte: "Qual é o nome desse prédio?"; "Onde fica?"; "Qual é o formato dele?"; "Vocês sabem algo mais sobre ele?". Se necessário, peça que pesquisem mais informações sobre a Torre Mosfilm para compartilharem com os colegas o que considerarem mais importante.

Combine com os alunos de tirarem fotos de construções da cidade onde moram em que seja possível identificar triângulos e quadriláteros. Em um dia combinado previamente, peça a eles que as levem para a sala de aula e compartilhem-nas com os colegas.

CAPÍTULO 4

Triângulos e quadriláteros

123RF/Easypix Brasil

Torre Mosfilm, na Rússia, construída em 2011. Foto de 2017.

A precisão das medidas de abertura dos ângulos e as propriedades das figuras geométricas, como triângulos e quadriláteros, garantem funcionalidade, praticidade e segurança, o que fez com que estruturas com as formas dessas figuras sempre fossem muito usadas nas construções.


Eranicle/Shutterstock

Panteão de Roma, na Itália, construído por volta de 27 a.C. Foto de 2017.


kataleewan intarachote/Shutterstock

Pirâmides de Gizé, no Egito, construídas há mais de 4 milênios. Foto de 2018.


Diego Grandi/Shutterstock

Atual prédio do Museu de Arte de São Paulo (MASP), da arquiteta Lina Bo Bardi, inaugurado em 1968. Foto de 2017.

Ao longo dos anos escolares, você estudou de maneira concreta, experimental (ou seja, medindo, recortando e constatando propriedades), diversas figuras geométricas, como os triângulos e os quadriláteros.

Mas se quisermos **demonstrar**, ou seja, provar **logicamente** as propriedades que constatamos de modo experimental, devemos recorrer à **Geometria dedutiva**.

Neste capítulo, vamos estudar a Geometria dedutiva, demonstrando algumas propriedades dos triângulos e dos quadriláteros a partir de definições e de outras propriedades aceitas como verdadeiras.


Coleção Particular/foto: Hulton Archive/Getty Images

O matemático grego Euclides de Alexandria (c. 330 a.C.-260 a.C.) foi um dos primeiros a tratar a Geometria de maneira dedutiva e o primeiro a organizar e sistematizar logicamente todos os estudos de Geometria até então conhecidos, reunindo-os em uma obra de 13 volumes chamada *Os Elementos* (em grego: Στοιχεῖα).

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Converse com os colegas sobre estas questões.

Não escreva no livro!

1. Em qual das construções que aparecem nas fotos destas páginas é possível identificar detalhes que lembram triângulos? Cite pelo menos 3 características de um triângulo. Exemplo de resposta: Nas pirâmides de Gizé; um triângulo tem 3 lados, 3 vértices e 3 ângulos internos e a medida de área da região limitada por ele é dada por $\frac{b \times a}{2}$, em que b é a medida de comprimento da base do triângulo e a é a medida de comprimento da altura.
2. Localize pelo menos 4 detalhes nas fotos das construções que dão ideia de ângulo reto. Exemplos de resposta: Nos cantos do prédio do MASP ou entre os pilares do Panteão de Roma e o chão.
3. Um triângulo pode ter ângulos retos? Quantos? Sim; apenas 1 ângulo reto.
4. E um trapézio pode ter ângulos retos? Quantos? Sim; até 2 ângulos retos.

Abertura

Peça aos alunos que leiam o texto de abertura do capítulo e observem as fotos do Panteão de Roma, das Pirâmides de Gizé e do Museu de Arte de São Paulo (MASP). Explore as observações e comentários deles em relação ao formato desses prédios. Pergunte sobre triângulos e quadriláteros que os compõem e quais as características dessas formas geométricas.

Explique que, neste capítulo, vamos estudar demonstrações que provam logicamente algumas propriedades que já constatamos experimentalmente ao longo dos anos de estudo. Explique, também, que essas demonstrações fazem parte de uma área de estudo chamada Geometria dedutiva.

Peça que observem a imagem e leiam a legenda, que contém algumas informações sobre o matemático grego Euclides e a obra *Os Elementos*.

Em seguida, peça que, em grupo, localizem, nas fotos do livro, detalhes que lembram triângulos e ângulos retos. Além disso, devem identificar ângulos retos em triângulos e trapézios.

1 Ampliando o estudo dos triângulos

Principal habilidade da BNCC

EF08MA15

Os alunos estudaram a congruência de segmentos de reta e a congruência de ângulos no livro do 7º ano desta coleção. Neste capítulo, faremos uma breve retomada para aplicar esses conhecimentos à congruência de outras figuras, relembrando que segmentos congruentes têm a mesma medida de comprimento e que ângulos congruentes têm a mesma medida de abertura.

Nesta página, iniciaremos o estudo da congruência de triângulos. Peça que reproduzam os triângulos *ABC*, *PQR* e *EFG* em papel vegetal, recortem essas figuras e tentem sobrepor umas às outras. Pergunte: "É possível fazer a sobreposição das 3 figuras para que coincidam?"; "Quais coincidem ao ser sobrepostas e quais não coincidem?".

Então, peça que observem os ângulos e os lados dos triângulos que coincidem ao serem sobrepostos e pergunte: "Os ângulos são congruentes?"; "Os lados são congruentes?". Após as respostas, explique que, quando os 3 lados e os 3 ângulos de 2 triângulos são congruentes, esses triângulos são congruentes e que, quando 2 triângulos são congruentes, os lados e os ângulos deles são congruentes.

Em seguida, solicite que vejam no livro como indicar a congruência dos 6 elementos (3 lados e 3 ângulos). Os alunos podem verificar experimentalmente a congruência dos triângulos *ABC* e *PQR* usando régua para medir o comprimento dos lados e transferidor para medir a abertura dos ângulos.

Atividade 1

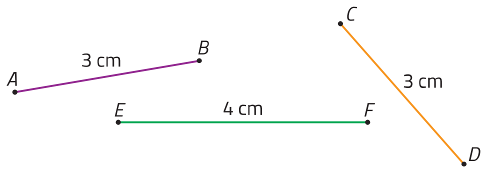
Esta atividade desenvolve, a partir dos triângulos congruentes dados, a determinação das medidas de comprimento dos lados e de abertura dos ângulos respectivamente congruentes.

Oriente os alunos a imaginarem um movimento para sobrepor essas 2 figuras, de forma que os lados e ângulos congruentes coincidam.

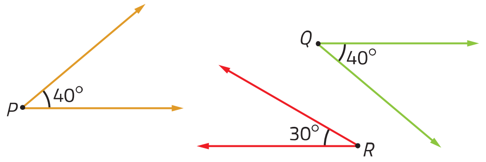
1 Ampliando o estudo dos triângulos

Figuras congruentes

Você já estudou a congruência de segmentos de reta e a congruência de ângulos. Relembre!



Entre estes segmentos de reta, são congruentes o $\overline{AB}$ e o $\overline{CD}$. Indicamos assim: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$



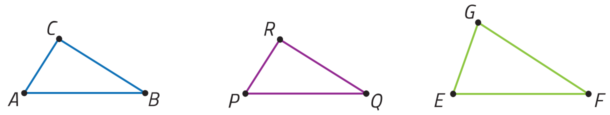
Entre estes ângulos, são congruentes o $\hat{P}$ e o $\hat{Q}$. Indicamos assim: $\hat{P} \cong \hat{Q}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Agora, imagine 2 figuras tais que seja possível transportar uma figura plana sobre a outra de modo que elas coincidam. Dizemos que essas figuras são **congruentes**.

Congruência de triângulos

Destes 3 triângulos, temos que 2 deles podem coincidir por meio de um movimento no plano. Quais são eles? Vamos descobrir.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

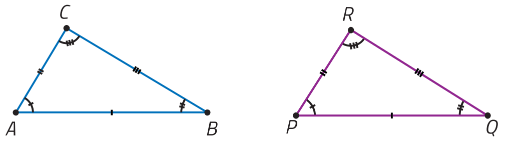
- Os triângulos *ABC* e *PQR* são congruentes. Indicamos assim: $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.
- *A*, *B* e *C* são os vértices correspondentes aos vértices *P*, *Q* e *R*, respectivamente.
- $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ $\quad \overline{AC} \cong \overline{PR}$ $\quad \overline{BC} \cong \overline{QR}$ $\quad \hat{A} \cong \hat{P}$ $\quad \hat{B} \cong \hat{Q}$ $\quad \hat{C} \cong \hat{R}$

A congruência dos 6 elementos de 2 triângulos (3 lados e 3 ângulos) determina a congruência dos triângulos.

A congruência de 2 triângulos determina a congruência dos 6 elementos deles.

Quando falamos em ângulos do triângulo, fica subentendido que são os ângulos internos dele.

Veja nas figuras destes triângulos como podemos indicar a congruência dos 6 elementos.



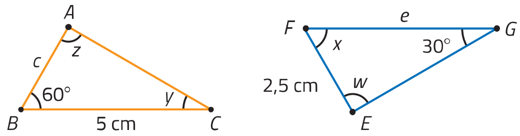
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Atividade

Não escreva no livro!

1 ▸ Os triângulos *ABC* e *EFG* são congruentes ($\triangle ABC \cong \triangle EFG$). Determine no caderno as medidas indicadas pelas letras *c*, *z*, *y*, *e*, *x*, *w*. $c = 2{,}5$ cm; $e = 5$ cm; $x = 60°$; $y = 30°$; $z = 90°$; $w = 90°$. ($z = 180° - (60° + 30°) = 90°$; $w = z$).



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Audiovisual

Para mais informações, veja o **audiovisual** *Ângulos internos de um triângulo* do 2º bimestre.

Casos de congruência de triângulos

Gustavo estava acompanhando a aula de Matemática, mas começou a achar tudo aquilo muito trabalhoso.

Para saber se 2 triângulos são congruentes, sempre vou ter de verificar a congruência dos 6 elementos (3 lados e 3 ângulos)?

Você pode escolher convenientemente 3 elementos dos triângulos e verificar a congruência deles. Se a congruência ocorrer, então os outros 3 elementos também serão respectivamente congruentes e, consequentemente, os triângulos serão congruentes.

Ilustrações: Thiago Neumann/Arquivo da editora

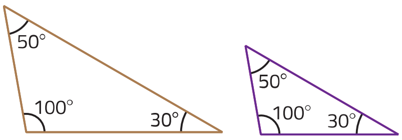
Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

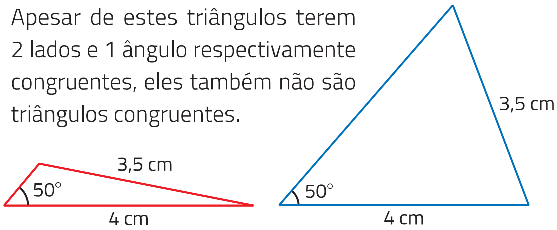
1. Usem régua, transferidor e compasso para construir no caderno um triângulo no qual um dos ângulos tenha medida de abertura de 60° e esse ângulo seja formado por lados de medida de comprimento de 5 cm e 3 cm. Depois, comparem-no com os triângulos que os colegas construíram e respondam: Os triângulos são todos congruentes? Sim.
2. Usem régua e compasso para construir um triângulo com lados de medida de comprimento de 8 cm, 5 cm e 7 cm. Comparem-no com os triângulos que os colegas construíram e respondam: Os triângulos são todos congruentes? Sim.

Veja agora, nos exemplos a seguir, que nem sempre acontece o mesmo que nas atividades do *Explorar e descobrir*.

- A congruência dos 3 ângulos não garante a congruência dos triângulos.



- Apesar de estes triângulos terem 2 lados e 1 ângulo respectivamente congruentes, eles também não são triângulos congruentes.



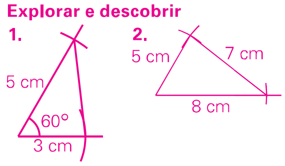
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Então como posso escolher "convenientemente" os 3 elementos dos triângulos?

Para isso, é preciso conhecer os 4 casos em que a congruência de 3 elementos garante a congruência dos triângulos.

Ilustrações: Thiago Neumann/Arquivo da editora

Explorar e descobrir



Banco de imagens/Arquivo da editora

1 Ampliando o estudo dos triângulos

Explique aos alunos que, para determinar se 2 triângulos são congruentes, não é necessário verificar se os 6 elementos deles são congruentes. Basta verificar que 3 elementos são congruentes, que os outros 3 também serão congruentes. Pergunte se podem ser escolhidos quaisquer 3 elementos congruentes de 2 triângulos para determinarmos a congruência entre essas figuras e, após as respostas, alerte que veremos a seguir.

Explorar e descobrir

Se necessário, relembre como construir os triângulos pedidos com régua, compasso e transferidor. Então, solicite que desenhem no caderno os 2 triângulos conforme indicado no livro e comparem com as figuras dos colegas para verificar se são congruentes.

Após o *Explorar e descobrir*, para que os alunos não tirem conclusões precipitadas, peça que observem os 2 exemplos apresentados de 3 elementos congruentes que não garantem a congruência dos triângulos.

Conclua, com eles, que há alguns casos em que apenas 3 elementos congruentes definem a congruência de triângulos, como no *Explorar e descobrir*, e destaque que veremos esses casos nas próximas páginas.

1 Ampliando o estudo dos triângulos

Leia com a turma o 1º caso de congruência: LAL (lado, ângulo, lado). Peça aos alunos que construam, no caderno, 2 triângulos congruentes por esse caso.

Depois, desafie-os a construir triângulos não congruentes em que há congruência de 2 lados e 1 ângulo sem que o ângulo seja formado pelos lados congruentes. Assim, os alunos devem perceber que é uma condição necessária que o ângulo congruente esteja entre os lados congruentes.

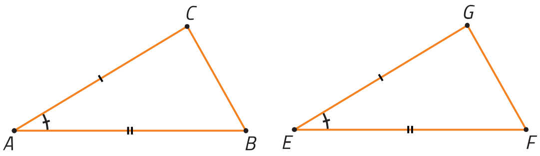
Proponha, em seguida, o estudo do 2º caso: LLL (lado, lado, lado). Peça que construam, no caderno, 2 triângulos que tenham os 3 lados congruentes. Pergunte a eles: "É possível construir triângulos não congruentes, se os 3 lados são respectivamente congruentes?".

Neste momento, retome a construção da bissetriz de um ângulo com régua e compasso para demonstrar, pelo caso de congruência LLL, que realmente os ângulos formados entre a bissetriz e os lados do ângulo inicial são congruentes.

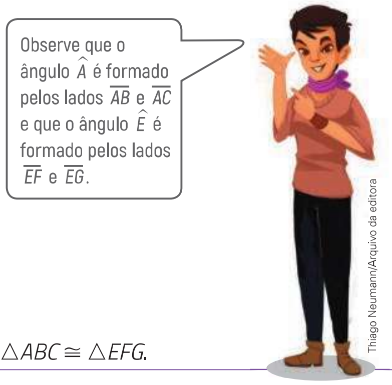
Então, peça que observem o 3º caso: ALA (ângulo, lado, ângulo). Solicite que construam 2 triângulos com 1 lado e os 2 ângulos adjacentes a ele respectivamente congruentes. Incentive-os a observar as construções feitas pelos colegas para constatarem que são congruentes. Em seguida, desafie-os a construir 2 triângulos com 1 lado e 2 ângulos não adjacentes a ele respectivamente congruentes e pergunte: "Ocorre a congruência?"; "Por que isso acontece?". Faça-os perceber que a condição de que os 2 ângulos sejam adjacentes ao lado é necessária.

1º caso: **LAL (lado, ângulo, lado)**

Dois triângulos são congruentes quando têm 2 lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

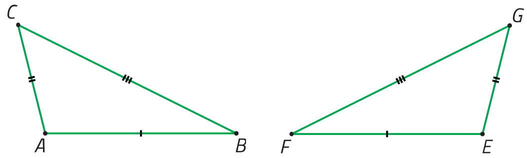


Thiago Neumann/Arquivo da editora

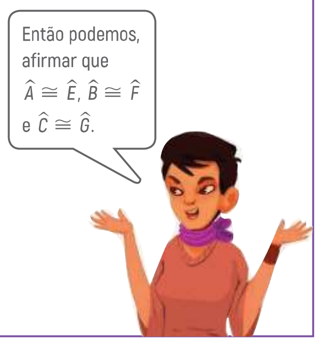
Se $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\hat{A} \cong \hat{E}$ e $\overline{AC} \cong \overline{EG}$, então podemos garantir que $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

2º caso: **LLL (lado, lado, lado)**

Dois triângulos são congruentes quando têm os 3 lados respectivamente congruentes.



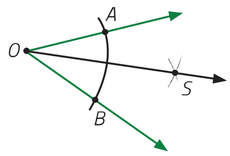
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Thiago Neumann/Arquivo da editora

Se $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{EG}$ e $\overline{BC} \cong \overline{FG}$, então $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

Observação: Pelo caso de congruência LLL dos triângulos, podemos justificar a construção, com régua e compasso, da bissetriz de um ângulo. Observe.



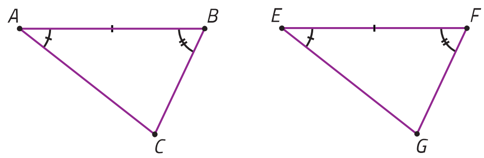
Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Observando o $\triangle OAS$ e o $\triangle OBS$, temos que $\overline{OA} \cong \overline{OB}$, $\overline{AS} \cong \overline{BS}$ e $\overline{OS} \cong \overline{OS}$.
Assim, pelo caso LLL, temos que $\triangle OAS \cong \triangle OBS$.
Logo, $A\hat{O}S \cong B\hat{O}S$, ou seja, $\overrightarrow{OS}$ é bissetriz do $A\hat{O}B$.

3º caso: **ALA (ângulo, lado, ângulo)**

Dois triângulos são congruentes quando têm 1 lado e os 2 ângulos adjacentes a ele respectivamente congruentes.

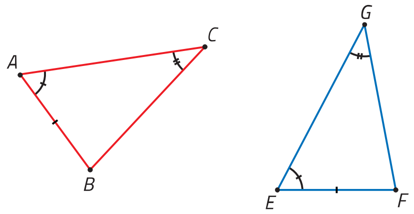


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Se $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\hat{A} \cong \hat{E}$ e $\hat{B} \cong \hat{F}$, então $\hat{C} \cong \hat{G}$, $\overline{AC} \cong \overline{EG}$ e $\overline{BC} \cong \overline{FG}$ e, portanto, $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.

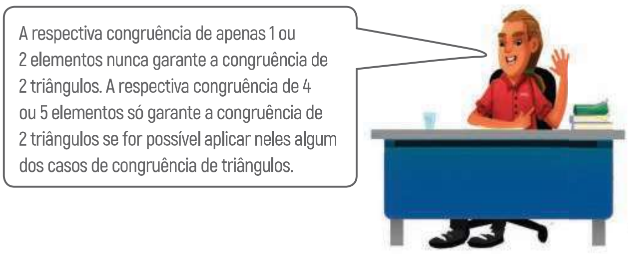
4º caso: **LAA$_o$ (lado, ângulo, ângulo oposto)**

Dois triângulos são congruentes quando têm 1 lado, 1 ângulo adjacente a esse lado e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

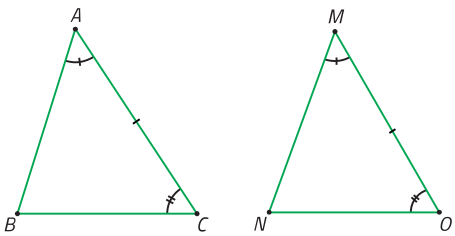
Se $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\hat{A} \cong \hat{E}$ e $\hat{C} \cong \hat{G}$, então $\triangle ABC \cong \triangle EFG$.



Thiago Neumann/Arquivo da editora

Veja mais alguns exemplos.

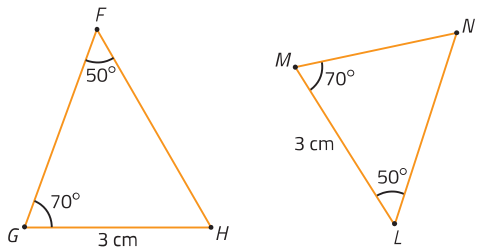
- Os triângulos *ABC* e *MNO* têm $\overline{AC} \cong \overline{MO}$, $\hat{A} \cong \hat{M}$ e $\hat{C} \cong \hat{O}$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Então, podemos afirmar que $\triangle ABC \cong \triangle MNO$ (caso ALA).
Assim, os demais elementos dos triângulos são respectivamente congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{MN}$, $\overline{BC} \cong \overline{NO}$ e $\hat{B} \cong \hat{N}$.

- Não podemos garantir a congruência dos triângulos *FHG* e *LMN*.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabemos que 1 lado e 2 ângulos são respectivamente congruentes, mas isso não corresponde ao caso ALA nem ao caso LAA$_o$. Analise essa afirmação com os colegas.

1 Ampliando o estudo dos triângulos

Incentive os alunos a estudar o 4º caso de congruência: LAA$_o$ (lado, ângulo, ângulo oposto). Oriente-os a construir, no caderno, 2 triângulos congruentes por esse caso, desafiando-os a construir também 2 triângulos não congruentes pelo mesmo caso.

Sugira que leiam as informações sobre a congruência de 1, 2, 4 ou 5 elementos de 2 triângulos e, em seguida, converse com a turma para que compartilhem as hipóteses e conclusões em relação a esse assunto e aos casos estudados. Pergunte: "Por que a respectiva congruência de apenas 1 ou 2 elementos nunca garante a congruência de 2 triângulos?"; "Por que a respectiva congruência de 4 ou 5 elementos nem sempre garante a congruência de 2 triângulos?".

Então, solicite a eles que analisem os 2 exemplos apresentados no livro, um de congruência e outro em que não se pode garantir a congruência dos triângulos. Incentive-os a identificar quais elementos garantem a congruência no primeiro exemplo e qual elemento impede que se possa garantir a congruência no segundo exemplo. Peça que compartilhem as conclusões com a turma.

Neste momento, oriente-os a registrar com as próprias palavras, no painel de descobertas, a definição de congruência de triângulos e os casos de congruência, destacando que a ordem dos elementos é necessária para garantir a congruência.

1 Ampliando o estudo dos triângulos

Atividades 2 e 5

Estas atividades trabalham, a partir dos triângulos congruentes dados, a determinação das medidas de comprimento dos lados e de abertura dos ângulos respectivamente congruentes.

Na atividade 5, deve ser indicado também o caso de congruência dos 2 triângulos fornecidos.

Atividades 3 e 4

Estas atividades desenvolvem a classificação dos triângulos como congruentes a partir dos elementos fornecidos e dos casos de congruência estudados.

Na atividade 4, oriente os alunos a sempre fazer um esboço das figuras para melhor visualização. Além disso, lembre-os de indicar os outros elementos respectivamente congruentes nos itens em que os triângulos são congruentes.

4. b) Podemos afirmar que os triângulos são congruentes (caso LLL); demais elementos: $\hat{R} \cong \hat{E}$, $\hat{S} \cong \hat{F}$ e $\hat{P} \cong \hat{G}$.

d) Os triângulos são congruentes (caso LAL); demais elementos: $\hat{P} \cong \hat{M}$, $\hat{Q} \cong \hat{N}$ e $\overline{PQ} \cong \overline{MN}$.

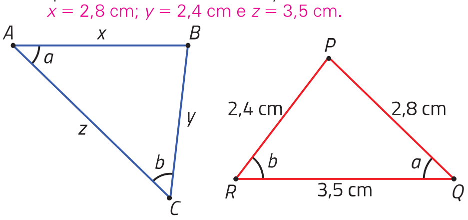
Não escreva no livro!

Atividades

e) Os triângulos são congruentes (caso LLL); ambos têm lados de medida de comprimento de 4 cm, 4 cm e 4 cm.

f) Os triângulos são congruentes (caso LAA_o); demais elementos: $\hat{C} \cong \hat{P}$, $\overline{AB} \cong \overline{RQ}$ e $\overline{BC} \cong \overline{PQ}$.

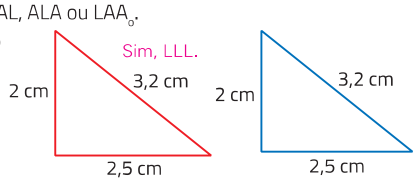
2 Sabendo que estes triângulos são congruentes, quais são os valores de x, y e z?
$x = 2{,}8$ cm; $y = 2{,}4$ cm e $z = 3{,}5$ cm.



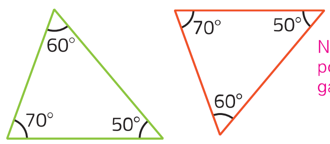
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

3 Em cada item, verifique no caderno se podemos ou não garantir que os triângulos são congruentes sem fazer novas medições. Em caso positivo, indique o caso que garante a congruência: LLL, LAL, ALA ou LAA_o.

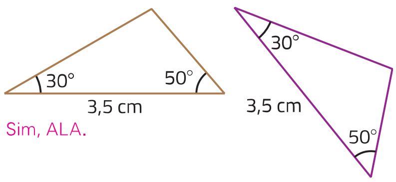
a) Sim, LLL.



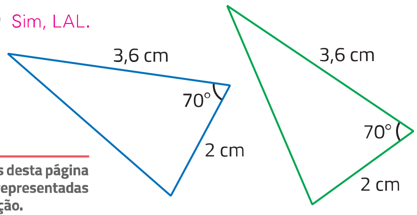
b) Não podemos garantir.



c) Sim, ALA.

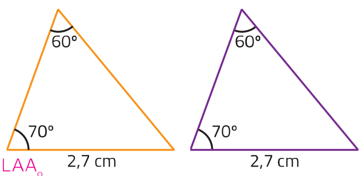


d) Sim, LAL.



As imagens desta página não estão representadas em proporção.

e) Sim, LAA_o



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4 Verifique em cada item se é possível afirmar que os triângulos são congruentes. Em caso positivo, escreva no caderno qual caso garante a congruência dos triângulos e quais são os demais elementos congruentes.

a) O $\triangle PQR$ tem ângulos de medida de abertura de 75°, 90° e 15° e o $\triangle XYZ$ tem ângulos de medida de abertura de 75°, 90° e 15°.
Não podemos garantir a congruência dos triângulos.

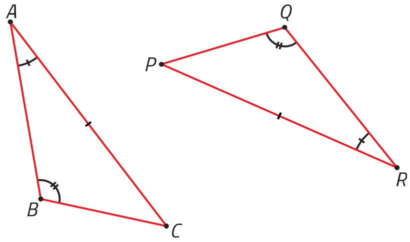
b) No $\triangle RSP$ temos $RS = 8$ cm, $RP = 10$ cm e $SP = 13$ cm e, no $\triangle EFG$, $EG = 10$ cm, $FG = 13$ cm e $EF = 8$ cm.

c) O $\triangle EFG$ e o $\triangle XYZ$ são tais que $\overline{EF} \cong \overline{XY}$, $\overline{EG} \cong \overline{XY}$ e $\hat{F} \cong \hat{Y}$. Não podemos garantir a congruência dos triângulos.

d) O $\triangle PQR$ e o $\triangle MNO$ têm o $\hat{R}$ reto, o $\hat{O}$ reto, $\overline{PR} \cong \overline{MO}$ e $\overline{QR} \cong \overline{NO}$.

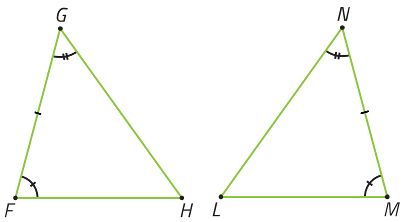
e) O $\triangle EFG$ é equilátero com medida de perímetro de 12 cm e o $\triangle PQR$ é equilátero com medida de perímetro de 12 cm.

f)

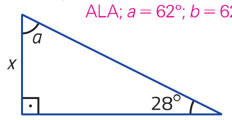


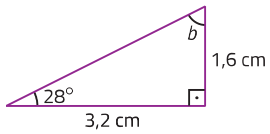
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

g)



5 Qual é o caso que garante a congruência destes 2 triângulos? E qual é o valor de *a*, de *b* e de *x*?
ALA; $a = 62°$; $b = 62°$ e $x = 1{,}6$ cm.





Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

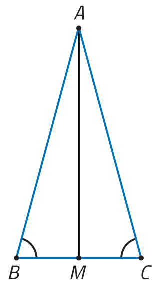
4. g) Os triângulos são congruentes (caso ALA); demais elementos: $\hat{H} \cong \hat{L}$, $\overline{HF} \cong \overline{ML}$ e $\overline{GH} \cong \overline{NL}$.

Aplicação de um caso de congruência de triângulos

Você já deve ter percebido que podemos chegar às propriedades geométricas sem a necessidade de efetuar medições. Esse método de raciocínio é chamado de **demonstração**.

Para demonstrar uma propriedade geométrica, devemos seguir alguns passos. Vamos, por exemplo, demonstrar esta propriedade.

Em todo triângulo isósceles, os ângulos opostos aos lados congruentes são também congruentes.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Nesse triângulo isósceles ABC, sabemos que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e queremos provar que $\hat{B} \cong \hat{C}$.

Para isso, vamos usar o segmento de reta $\overline{AM}$, que liga o vértice A ao ponto médio de $\overline{BC}$ (ponto M), e verificar que $\triangle ABM \cong \triangle ACM$.

- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (dado inicial)
- $\overline{BM} \cong \overline{CM}$ (pois M é o ponto médio de $\overline{BC}$)
- $\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (segmento de reta comum aos $\triangle ABM$ e $\triangle ACM$)

Pelo caso LLL, podemos afirmar que $\triangle ABM \cong \triangle ACM$ e, a partir disso, concluir que $\hat{B} \cong \hat{C}$.

Observações

- Essa propriedade dos triângulos isósceles também pode ser enunciada desta maneira:

  Em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

- O triângulo equilátero é um caso particular de triângulo isósceles. Nele, qualquer lado pode ser considerado base.
  Podemos, então, enunciar esta propriedade.

  Em um triângulo equilátero, os 3 ângulos são congruentes e cada um deles tem medida de abertura de 60° (180° ÷ 3 = 60°).

Por exemplo, se o $\triangle EFG$ é equilátero, então podemos escrever:

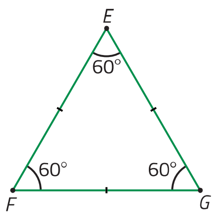
$m(\overline{EF}) = m(\overline{FG}) = m(\overline{EG})$ e $m(\hat{E}) = m(\hat{F}) = m(\hat{G}) = 60°$

Podemos comparar as medidas de comprimento dos lados escrevendo assim:

$$m(\overline{EF}) = m(\overline{FG}) = m(\overline{EG})$$

Ou assim:

$$EF = FG = EG$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

1 Ampliando o estudo dos triângulos

Incentive os alunos a compartilhar experiências e conhecimentos em relação a demonstrações em geral e explique que, agora, demonstraremos uma propriedade dos triângulos isósceles: os ângulos opostos aos lados congruentes são também congruentes.

Se necessário, relembre que triângulos isósceles têm 2 lados congruentes.

Em seguida, siga, com a turma, os passos indicados no livro para demonstrar a propriedade apresentada e mostre que ela pode ser enunciada de outra forma. Peça a eles que comparem os 2 enunciados e pergunte: “Quais são os ângulos opostos aos lados congruentes em um triângulo isósceles?”; “Quais são os ângulos da base em um triângulo isósceles?”. Conduza a conversa para que concluam que são os mesmos ângulos.

Depois, explique que o triângulo equilátero é um caso particular de triângulo isósceles, pois tem 3 lados congruentes, e que, a partir da propriedade demonstrada nesta página, podemos concluir que os 3 ângulos dele são congruentes.

Logo, como a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo é 180°, cada ângulo do triângulo equilátero tem medida de abertura de 60°.

Então, chame a atenção dos alunos para as 2 notações que podemos usar para representar medidas de comprimento de segmentos ou de lados de figuras.

Retome com os alunos a construção do hexágono regular, pela divisão da circunferência em 6 arcos iguais, que foi feita na página 59 do livro. Na construção do hexágono foi usada, sem demonstração, a propriedade dos triângulos isósceles que é enunciada e demonstrada nesta página.

Ao final, sugira a eles que anotem, no painel de descobertas, as propriedades de triângulos isósceles e equilátero vistas nesta página.

1 Ampliando o estudo dos triângulos

Apresente a atividade aos alunos, desenhando o triângulo na lousa, e peça que indiquem quais informações dadas no enunciado podem ser registradas na figura.

Então, pergunte a eles o que podemos fazer e quais conceitos podemos usar para resolver a atividade, conduzindo-os a criar uma estratégia e escrevendo-a na lousa.

Depois, incentive-os a realizar essa estratégia e acompanhe-os nesse processo. Após a resolução, peça que confiram se a resposta obtida faz sentido e a apresentem.

Ao final, apresente a ampliação da atividade e, na lousa, siga as indicações dos alunos para resolvê-la.

Não escreva no livro!

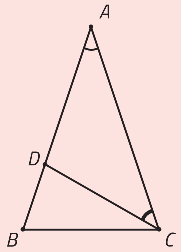
Atividade resolvida passo a passo

(Obmep) O triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$ e o ângulo $B\hat{A}C$ mede 30°.

O triângulo BCD é isósceles de base $\overline{BD}$.

Determine a medida do ângulo $D\hat{C}A$.

a) 45° b) 50° c) 60° d) 75° e) 15°



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Lendo e compreendendo

O enunciado nos apresenta o triângulo isósceles ABC. O lado não congruente $\overline{BC}$ é a base e os ângulos da base são congruentes (têm medidas de abertura iguais). O triângulo BCD também é isósceles e de base $\overline{BD}$. O enunciado nos fornece a medida de abertura do ângulo $B\hat{A}C$ e pede a medida de abertura do ângulo $D\hat{C}A$.

Planejando a solução

Vamos, basicamente, usar os conceitos de que a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo é de 180° e que os ângulos da base de um triângulo isósceles têm a mesma medida de abertura. Partiremos da medida de abertura do $B\hat{A}C$ e aplicaremos os conceitos citados.

Executando o que foi planejado

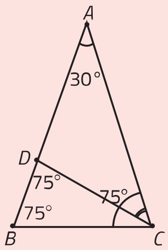
Sabemos que a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo é de 180°.

Como $m\left(B\hat{A}C\right) = 30°$, temos: $m\left(A\hat{B}C\right) = m\left(A\hat{C}B\right) = \dfrac{180° - 30°}{2} = \dfrac{150°}{2} = 75°$

Analogamente, no triângulo isósceles de base $\overline{BD}$, temos: $m\left(B\hat{D}C\right) = m\left(C\hat{B}D\right) = 75°$

Fazendo uso dos mesmos conceitos, obtemos: $m\left(D\hat{C}B\right) = 180° - \left(2 \cdot 75°\right) =$
$= 180° - 150° = 30°$

Logo: $m\left(D\hat{C}A\right) = m\left(A\hat{C}B\right) - m\left(D\hat{C}B\right) = 75° - 30° = 45°$

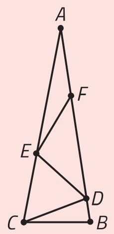


Verificando

Basta observarmos que $m\left(A\hat{C}D\right) + m\left(D\hat{C}B\right) = 45° + 30° = 75° = m\left(A\hat{B}C\right)$, mostrando que a solução comprova que o triângulo ABC é isósceles, conforme o enunciado da questão.

Emitindo a resposta

$m\left(D\hat{A}C\right) = 45°$ (alternativa **a**)



Ampliando a atividade

Este triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$. Temos ainda que $BC = CD = DE = EF = FA$. Determine a medida de abertura do ângulo interno desse triângulo, no vértice A.

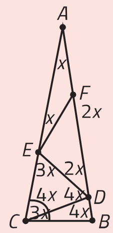
Solução

Para esta atividade usaremos basicamente 2 conceitos.

- A soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo é de 180°.
- A soma das medidas de abertura de 2 ângulos internos de um triângulo é igual à medida de abertura do ângulo externo não adjacente.

Chamemos de x a medida de abertura do ângulo $B\hat{A}C$. Então, temos:

- $m\left(A\hat{E}F\right) = x$, pois o $\triangle AFE$ é isósceles de base $\overline{AE}$;
- $m\left(D\hat{F}E\right) = x + x = 2x$ ($D\hat{F}E$ é ângulo externo do $\triangle AFE$) e, então, $m\left(E\hat{D}F\right) = 2x$, pois o $\triangle DEF$ é isósceles de base $\overline{FD}$;
- $m\left(D\hat{E}C\right) = x + 2x = 3x$ ($D\hat{E}C$ é ângulo externo do $\triangle AED$) e, então, $m\left(D\hat{C}E\right) = 3x$;
- $m\left(C\hat{D}B\right) = x + 3x = 4x$ ($C\hat{D}B$ é ângulo externo do $\triangle ADC$) e, então, $m\left(C\hat{B}D\right) = 4x$;
- $m\left(A\hat{C}B\right) = 4x$ (o $\triangle ABC$ é isósceles).



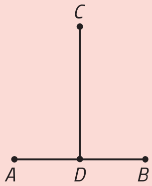
Finalmente teremos que: $4x + 4x + x = 180° \Rightarrow 9x = 180° \Rightarrow x = 20°$

Um pouco de História

Geometria dedutiva

Na Geometria experimental, física, desenvolvida até o início do século VI a.C., as propriedades e as relações entre figuras geométricas eram feitas pela "aparência" e por medições aproximadas das figuras.

Mas as aparências podem nos enganar. Por exemplo, nesta figura, qual segmento de reta tem maior medida de comprimento: $\overline{AB}$ ou $\overline{CD}$? Meça e confira sua estimativa.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Na primeira metade do século VI a.C. surgiu um novo modo de ver a Geometria. O filósofo, matemático, engenheiro e astrônomo Tales de Mileto (640 a.C.-550 a.C.) foi um dos primeiros gregos a insistir que fatos geométricos devem ser estabelecidos por raciocínio lógico, por demonstrações, e não apenas por observação, experimentação, tentativa e erro. Surgiu, assim, a *Geometria dedutiva*.

Os estudos de Tales também serviram de base para a obra *Os elementos*, do matemático Euclides (aprox. III e II a.C.). Tales, Euclides e outros gregos elevaram a Geometria de um nível puramente físico para um nível mais lógico e abstrato.

> *Os Elementos*, obra memorável de Euclides, é uma cadeia dedutiva única de 465 proposições compreendendo, de maneira clara e harmoniosa, geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega. [...]
>
> Os três geômetras gregos mais importantes da Antiguidade foram Euclides (300 a.C.), Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.) e Apolônio (225 a.C.). Não é exagero dizer que quase tudo o que se fez de significativo em Geometria até os dias de hoje, e ainda hoje, tem sua semente original em algum trabalho desses três grandes eruditos.
>
> EVES, Howard. *Tópicos de história da Matemática*: Geometria. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

Grande parte da Geometria que estudamos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio faz parte da Geometria dedutiva e dos trabalhos desenvolvidos por esses gregos.

6. a) 5,5 cm e 5,5 cm. $(20 - 9 = 11$ e $11 \div 2 = 5{,}5)$
b) 11 cm, 9,5 cm e 9,5 cm ou 11 cm, 11 cm e 8 cm.
$(30 - 11 = 19,\ 19 \div 2 = 9{,}5$ e $9{,}5 + 9{,}5 > 11$; ou $30 - 22 = 8$ e $8 + 11 > 11)$
c) 90°, 45° e 45°. $(x + x + 90° = 180° \Rightarrow 2x = 90° \Rightarrow x = 45°)$

Atividades

Não escreva no livro!

6 Responda no caderno.

a) Quais são as medidas de comprimento dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do $\triangle ABC$, isósceles de base $\overline{BC}$, com $BC = 9$ cm e com medida de perímetro de 20 cm?

b) Se um triângulo isósceles tem medida de perímetro de 30 cm e um dos lados tem medida de comprimento de 11 cm, então quais são as medidas de comprimento dos 3 lados?

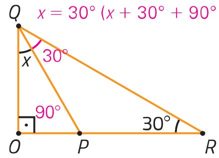
c) Quais são as medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo retângulo e isósceles?

d) Em um triângulo isósceles, a medida de abertura de um dos ângulos internos é de 80°. Quais são as medidas de aberturas dos outros ângulos internos desse triângulo?

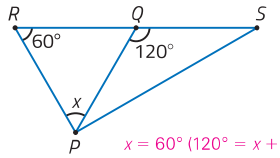
e) Se a medida de abertura de um dos ângulos internos de um triângulo isósceles é de 120°, então quais são as medidas de abertura dos 3 ângulos internos desse triângulo?

7 Em cada triângulo isósceles PQR dado, temos $\overline{PQ} \cong \overline{PR}$. Qual é o valor de x, em graus?

a) $x = 30°$ $(x + 30° + 90° + 30° = 180° \Rightarrow x = 30°)$



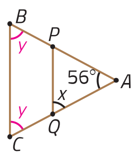
b)



$x = 60°$ $(120° = x + 60° \Rightarrow x = 60°)$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

8 O triângulo ABC é isósceles, com $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Calcule mentalmente o valor de x, em graus, sabendo que os lados $\overline{BC}$ e $\overline{PQ}$ são paralelos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

6. d) 80° e 20° ou 50° e 50°. $(80° + 80° + x = 180° \Rightarrow x = 180° - 160° = 20°$ ou $80° + x + x = 180° \Rightarrow 2x = 100° \Rightarrow x = 50°)$
e) 120°, 30° e 30°. $(120° + x + x = 180° \Rightarrow 2x = 60° \Rightarrow x = 30°)$

8. $x = 62°$ $(y + y + 56° = 180° \Rightarrow y = 62°$; $y = x$, pois são as medidas de abertura de ângulos correspondentes com $\overline{BC}$ e $\overline{PQ}$ paralelas.)

1 Ampliando o estudo dos triângulos

Um pouco de História

Peça aos alunos que leiam o texto e incentive-os a medir os 2 segmentos de reta para constatarem que a aparência dos elementos geométricos pode nos enganar.

Se achar conveniente, oriente-os a pesquisar informações interessantes sobre Tales, Euclides, Arquimedes e Apolônio e compartilhá-las com a turma.

As atividades desta página desenvolvem a determinação das medidas de comprimento de lados e de abertura de ângulos de triângulos isósceles.

Atividade 6

Fornece as medidas de perímetro e de comprimento de um dos lados dos triângulos dados para o cálculo da medida de comprimento dos outros 2 lados. Também apresenta a medida de abertura de um ângulo de triângulos retângulos, acutângulos e obtusângulos para o cálculo das medidas de abertura dos outros 2 ângulos.

Atividade 8

Se necessário, relembre conceitos de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, pois, para a resolução desta atividade, os alunos devem considerar que os ângulos $A\hat{C}B$ e $A\hat{Q}P$ são correspondentes.

1 Ampliando o estudo dos triângulos

A abordagem destes conceitos pode ser feita por meio de dobraduras, como apresentado na sugestão de atividade a seguir.

Neste momento, explique o que é mediana de um triângulo, relacionando-a com o ponto médio do lado referente a ela.

Explorar e descobrir

Relembre com os alunos o processo de construção de um triângulo conhecendo-se as medidas de comprimento dos 3 lados. Pergunte a eles como podem determinar, apenas com a régua graduada, o ponto médio *M* do lado $\overline{AB}$: medindo 3 cm nesse lado a partir de *A* ou de *B*. Outra possibilidade é construir, com régua e compasso, a mediatriz do lado $\overline{AB}$ e marcar o ponto médio *M* na intersecção dela com esse lado. A construção da mediatriz de um segmento de reta foi estudada no capítulo 2 do livro.

Após o primeiro *Explorar e descobrir*, explique que, ao traçarmos as 3 medianas de um triângulo, elas se intersectam em um ponto chamado baricentro do triângulo, que é conhecido como o ponto de equilíbrio do triângulo.

Explorar e descobrir

Depois que os alunos traçarem as 3 medianas e marcarem o baricentro, solicite que meçam a distância entre o baricentro e os pontos médios e a distância entre o baricentro e os vértices, verificando se há alguma relação entre essas medidas. Se necessário, mostre que o baricentro divide a mediana na razão de 1 para 2.

Atividade 9

Esta atividade trabalha o cálculo da medida de comprimento das partes das medianas divididas pelo baricentro.

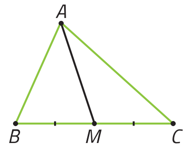
Sequência didática

Para mais informações, veja a **sequência didática 3** do 2º bimestre.

Mediana, bissetriz, altura e mediatriz relacionadas a um triângulo

Além dos vértices, lados e ângulos (internos ou externos), podemos relacionar outros importantes elementos aos triângulos: **medianas**, **bissetrizes dos ângulos internos**, **alturas** e **mediatrizes dos lados**.

Mediana de um triângulo



Banco de imagens/Arquivo da editora

Observe o $\triangle ABC$.

O ponto *M* é o **ponto médio** do lado $\overline{BC}$, ou seja, $\overline{BM} \cong \overline{CM}$.

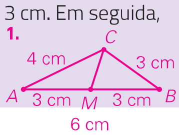
O segmento de reta $\overline{AM}$ é uma **mediana** do $\triangle ABC$.

A **mediana de um triângulo** é o segmento de reta que tem como extremidades um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

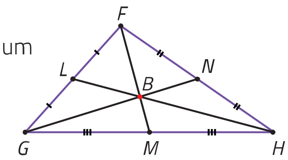
1. Com régua e compasso, construa no caderno um $\triangle ABC$ no qual $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm e $BC = 3$ cm. Em seguida, trace a mediana $\overline{CM}$ desse triângulo.

1.


Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Quantas medianas um triângulo tem? Converse com um colega e tentem descobrir.
3 medianas. (1 mediana relativa a cada vértice e o ponto médio do lado oposto.)

Baricentro de um triângulo



Banco de imagens/Arquivo da editora

Veja o que acontece com as 3 medianas do $\triangle FGH$: elas se intersectam em um mesmo ponto, chamado de **baricentro** do triângulo.

Em todo triângulo, as 3 medianas se intersectam em um mesmo ponto, chamado de baricentro do triângulo.

Os segmentos de reta $\overline{FM}$, $\overline{GN}$ e $\overline{HL}$ são as medianas do $\triangle FGH$.

O ponto *B*, intersecção das 3 medianas, é o baricentro do $\triangle FGH$.

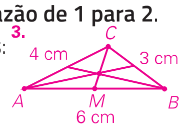

Sérgio Dotta Jr./Arquivo da editora

O baricentro é conhecido como ponto de equilíbrio do triângulo. Suspensa pelo baricentro, uma região triangular fica equilibrada, paralela ao plano da mesa.

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

3. Retome o $\triangle ABC$ e a mediana $\overline{CM}$ que você construiu. Trace as outras medianas desse triângulo e marque o baricentro dele.

3.


Banco de imagens/Arquivo da editora

O baricentro de qualquer triângulo divide a mediana **na razão de 1 para 2**.

Por exemplo, no $\triangle FGH$ dado acima, de baricentro *B*, temos:

$$\frac{MB}{FB} = \frac{NB}{GB} = \frac{LB}{HB} = \frac{1}{2}$$

9. a) 7,5 cm $\left(\frac{MH}{15} = \frac{1}{2} \Rightarrow MH = 15 \div 2 = 7{,}5\right)$ **b)** 16 mm $\left(\frac{8}{FN} = \frac{1}{2} \Rightarrow FN = 2 \times 8 = 16\right)$

c) 8 m; 12 m $\left(\frac{4}{BH} = \frac{1}{2} \Rightarrow BH = 2 \times 4 = 8;\ 4 + 8 = 12\right)$

Atividade

Não escreva no livro!

9. Considerando novamente o triângulo *FGH* acima, copie as afirmações no caderno e substitua cada ▇ pela medida de comprimento adequada.

a) Se $GH = 15$ cm, então $MH =$ ▇.

b) Se $FN = 8$ mm, então $FH =$ ▇.

c) Se $LB = 4$ m, então $BH =$ ▇ e $LH =$ ▇.

d) Se $GN = 45$ cm, então $NB =$ ▇ e $GB =$ ▇.

15 cm; 30 cm. ($NB = 45 \div 3 = 15$; $GB = 2 \times 15 = 30$)

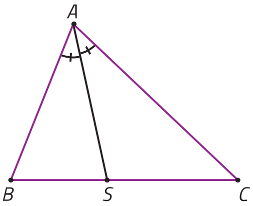
Bissetriz do ângulo interno de um triângulo

Você já estudou, no capítulo 2, o que é a bissetriz de um ângulo e aprendeu a construí-la com régua e compasso. Agora vamos estudar esse conceito aplicado aos ângulos internos de um triângulo.

Observe o $\triangle ABC$.

O segmento de reta $\overline{AS}$ divide o ângulo interno $\hat{A}$ em 2 ângulos congruentes (ou seja, $B\hat{A}S \cong C\hat{A}S$), e o ponto S pertence ao lado $\overline{BC}$.

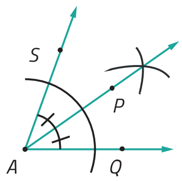
O segmento de reta $\overline{AS}$ é a **bissetriz** do ângulo interno $B\hat{A}C$ do $\triangle ABC$.



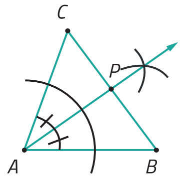
Banco de imagens/Arquivo da editora

A **bissetriz de um ângulo interno de um triângulo** é o segmento de reta que tem uma extremidade em um vértice do triângulo, divide o ângulo interno desse vértice em 2 ângulos congruentes e tem a outra extremidade no lado oposto a esse vértice.

Observação: Assim como construímos, com régua e compasso, a bissetriz de qualquer ângulo, podemos construir a bissetriz do ângulo interno de um triângulo.



Ângulo $Q\hat{A}S$ e bissetriz $\overrightarrow{AP}$ desse ângulo.



Triângulo ABC e bissetriz $\overline{AP}$ do ângulo interno.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Explorar e descobrir

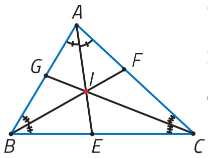
Não escreva no livro!

1› Use régua e transferidor para construir no caderno um $\triangle ABC$ no qual $AB = 6$ cm, $m(\hat{A}) = 50°$ e $m(\hat{B}) = 70°$. Em seguida, trace a bissetriz $\overline{BS}$.

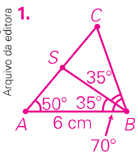
2› Converse com um colega e respondam: Quantas bissetrizes há nos ângulos internos de um triângulo?
3 bissetrizes. (1 bissetriz relativa a cada ângulo interno.)

Incentro de um triângulo

Veja o que acontece com as 3 bissetrizes dos ângulos internos do $\triangle ABC$: elas se intersectam em um mesmo ponto, chamado de **incentro** do triângulo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

1.


Banco de imagens/Arquivo da editora

O segmento de reta $\overline{AE}$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$ do $\triangle ABC$, o segmento de reta $\overline{BF}$ é bissetriz do ângulo $\hat{B}$ e o segmento de reta $\overline{CG}$ é bissetriz do ângulo $\hat{C}$. O ponto I, intersecção das 3 bissetrizes, é o incentro do $\triangle ABC$.

Em todo triângulo, as 3 bissetrizes dos ângulos internos se intersectam em um mesmo ponto, chamado de incentro do triângulo.

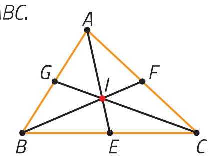
Atividades

Não escreva no livro!

11. $x = 50°$, $y = 50°$ e $m(S\hat{B}M) = 80°$. $(x + (y + x) + 30° = 180° \Rightarrow 2x + y = 150$. Como $x = y$, obtemos $x = 50°$ e $y = 50°$; $m(S\hat{B}M) = 180° - (50° + 50°) = 80$.)

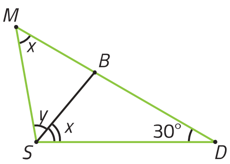
10› Observe o triângulo ABC e, considerando as informações dadas, calcule $m(B\hat{I}E)$.

- I é o incentro do $\triangle ABC$.
- $m(\hat{A}) = 82°$
- $m(\hat{B}) = 62°$



Banco de imagens/Arquivo da editora

11› **Desafio.** Neste $\triangle MSD$, o segmento de reta $\overline{SB}$ é uma bissetriz. Determine no caderno os valores de x e y e a medida do $S\hat{B}M$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

10. $m(B\hat{I}E) = 72°$ (No $\triangle ABE$: $82° \div 2 = 41°$; $41° + 62° = 103°$; $m(B\hat{E}A) = 180° - 103° = 77°$; no $\triangle BEI$: $62° \div 2 = 31°$; $31° + 77° = 108°$; $m(B\hat{I}E) = 180° - 108° = 72°$.)

1 Ampliando o estudo dos triângulos

Peça aos alunos que verifiquem o que escreveram sobre bissetriz de um ângulo no painel de descobertas e, a partir disso, explique a bissetriz de um ângulo interno de um triângulo, destacando que a mesma construção que fizemos para bissetriz de um ângulo, usando régua e compasso, pode ser feita agora.

Explorar e descobrir

Novamente, relembre com os alunos o processo de construção de um triângulo conhecendo-se a medida de comprimento de um lado e as medidas de abertura de 2 ângulos internos. Para a construção da bissetriz, eles podem usar o transferidor para medir 35° ou podem usar régua e compasso para construí-la, como aprenderam no capítulo 2 do livro.

Após o *Explorar e descobrir*, explique que, ao traçarmos as 3 bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo, elas se intersectam em um ponto chamado incentro do triângulo.

Atividades 10 e 11

Estas atividades desenvolvem o cálculo das medidas de abertura dos ângulos solicitados a partir dos conceitos de incentro e bissetriz.

Na atividade 10, como I é o incentro do triângulo, destaque que $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CG}$ são as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo.

Na atividade 11, se necessário, explique que, embora as incógnitas x e y sejam diferentes, elas podem representar a mesma medida de abertura dos ângulos.

1 Ampliando o estudo dos triângulos

Retome o que é a altura de um triângulo, fazendo os alunos observar que um triângulo tem 3 alturas, cada uma relativa a um dos lados.

Chame a atenção da turma para o fato de que a altura do triângulo pode intersectar o lado oposto ao vértice ou o prolongamento dele. Além disso, em triângulos retângulos, 2 alturas coincidem com os lados.

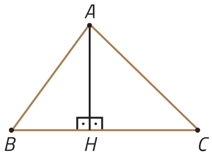
Depois, explique o que é o ortocentro e peça que observem os 3 triângulos com as 3 alturas de cada um deles, destacando a localização do ortocentro em relação ao triângulo.

Altura de um triângulo

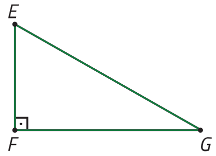
Thiago Neumann/Arquivo da editora

A **altura de um triângulo** é o segmento de reta com uma extremidade em um vértice do triângulo e a outra extremidade no lado oposto ou no prolongamento dele, formando ângulos retos com esse lado ou com o prolongamento dele.

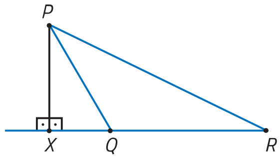
Observe estes triângulos.



O segmento de reta $\overline{AH}$ é uma altura do $\triangle ABC$, relativa ao lado $\overline{BC}$.



O lado $\overline{EF}$ é uma altura do $\triangle EFG$, relativa ao lado $\overline{FG}$.

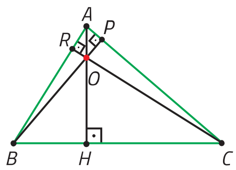


O segmento de reta $\overline{PX}$ é uma altura do $\triangle PQR$, relativa ao lado $\overline{QR}$.

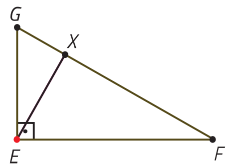
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ortocentro de um triângulo

Observe os triângulos. Em cada um deles, estão traçadas as 3 alturas.

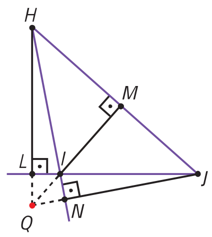


O $\triangle ABC$ é acutângulo.
Os segmentos de reta $\overline{AH}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CR}$ são as alturas desse triângulo.
As 3 alturas se intersectam no ponto O, chamado de **ortocentro** do $\triangle ABC$.
Neste caso, o ortocentro é interno ao triângulo.



O $\triangle EFG$ é retângulo em E.
Os segmentos de reta $\overline{GE}$, $\overline{EX}$ e $\overline{FE}$ são as alturas desse triângulo.
O ponto E é o **ortocentro** do $\triangle EFG$, pois é comum às 3 alturas dele.
Neste caso, o ortocentro é o vértice do ângulo reto.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



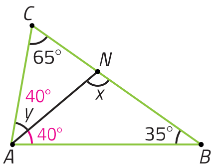
O $\triangle HIJ$ é obtusângulo.
Os segmentos de reta $\overline{HL}$, $\overline{IM}$ e $\overline{JN}$ são as alturas desse triângulo.
O ponto Q, **ortocentro** do $\triangle HIJ$, é a intersecção dos prolongamentos das 3 alturas.
Neste caso, o ortocentro é externo ao triângulo.

Em todo triângulo, as 3 alturas ou os prolongamentos delas se intersectam em um mesmo ponto, chamado de ortocentro do triângulo.

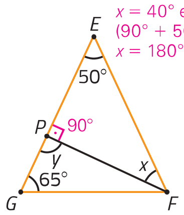
Atividades

12 Calcule no caderno o valor de x e de y em cada figura.

a) $\overline{AN}$ é bissetriz de um ângulo interno do $\triangle ABC$.



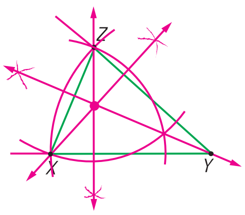
b) $\overline{FP}$ é uma altura do $\triangle EFG$.



$x = 40°$ e $y = 90°$. ($90° + 50° = 140°$; $x = 180° - 140° = 40°$)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

13 Considere este $\triangle XYZ$.

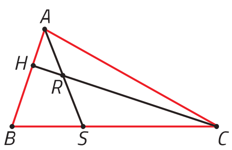


a) O ortocentro desse triângulo será interno a ele, externo ou estará sobre um vértice? Justifique sua resposta. Será interno, pois o triângulo é acutângulo.

b) Reproduza o triângulo no caderno, trace as 3 alturas dele, determine o ortocentro e verifique sua resposta do item **a**.

14 Considere um $\triangle EFG$, em que $m(\hat{E}) = 100°$ e $m(\hat{F}) = 20°$. Considere também o ponto O que é a intersecção da altura $\overline{EH}$ desse triângulo e a bissetriz $\overline{GS}$ do ângulo $E\hat{G}F$. Determine no caderno a medida de abertura do ângulo $E\hat{O}G$.

15 Neste $\triangle ABC$, o ponto R é a intersecção da bissetriz $\overline{AS}$ e da altura $\overline{CH}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que $m(A\hat{B}C) = 70°$ e $m(B\hat{C}A) = 30°$, determine no caderno a medida de abertura de cada ângulo dado.

a) $A\hat{H}C$ 90°

b) $S\hat{A}C$ 40°

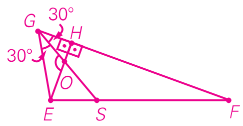
c) $A\hat{R}C$ 130°

d) $A\hat{S}B$ 70°

e) $A\hat{C}H$ 10°

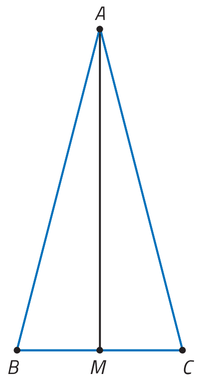
f) $B\hat{C}H$ 20°

14. $m(E\hat{O}G) = 120°$ ($m(\hat{G}) = 180° - (100° + 20°) = 60°$; $m(E\hat{O}G) = 30° + 90° = 120°$)



Banco de imagens/Arquivo da editora

16 Este triângulo $\triangle ABC$ é isósceles, de base $\overline{BC}$, e o segmento de reta $\overline{AM}$ é mediana dele.

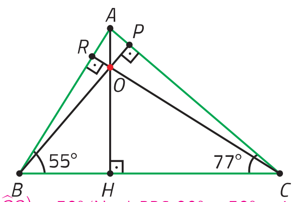


Banco de imagens/Arquivo da editora

Demonstre no caderno que o $\overline{AM}$ é também altura desse triângulo e bissetriz de um ângulo interno dele, ou seja, demonstre a seguinte propriedade: MP

Em todo triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.

17 Neste $\triangle ABC$, $\overline{AH}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CR}$ são as alturas e o ponto O é o ortocentro dele. Se $m(B\hat{A}C) = 77°$ e $m(A\hat{B}C) = 56°$, então qual é o valor de $m(H\hat{O}C)$?



Banco de imagens/Arquivo da editora

12. a) $x = 105°$ e $y = 40°$. ($65° + 35° = 100°$; $180° - 100° = 80°$; $y = 80 \div 2 = 40$; $40° + 35° = 75°$; $x = 180° - 75° = 105°$ ou $x = 40° + 65° = 105°$)

17. $m(H\hat{O}C) = 56°$ (No $\triangle RBC$: $90° + 56° = 146°$; $m(B\hat{C}R) = 180° - 146° = 34°$; no $\triangle HOC$: $90° + 34° = 124°$; $m(H\hat{O}C) = 180° - 124° = 56°$.)

d) $m(A\hat{S}B) = 180 - (70 + 40) = 180 - 110 = 70°$

e) $m(A\hat{C}H) = 180 - (80 + 90) = 180 - 170 = 10°$

f) $m(A\hat{C}H) = 30 - 10 = 20°$

A atividade 17 apresenta também o ortocentro do triângulo.

Atividade 13

Aborda a localização do ortocentro em um triângulo acutângulo, além da construção das alturas e a determinação desse ponto.

Relembre com os alunos a construção que usaram para traçar a altura relativa a cada lado: construção da reta que passa pelo vértice e é perpendicular ao lado oposto a esse vértice. Em alguns triângulos pode ser necessário prolongar os lados para fazer as construções.

Atividade 16

Trabalha a demonstração, usando congruência de triângulos, de que, em qualquer triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também altura relativa à base e bissetriz relativa ao ângulo interno oposto à base. Observe a resolução desta atividade.

O $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$ e $\overline{AM}$ é mediana. Considerando o $\triangle AMB$ e o $\triangle AMC$, temos:

- $\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (lado comum dos triângulos);
- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (o $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$);
- $\overline{BM} \cong \overline{CM}$ (M é o ponto médio de $\overline{BC}$).

Pelo caso LLL, podemos afirmar que $\triangle ABC \cong \triangle ACM$. Dessa congruência, obtemos:

- $B\hat{A}M \cong C\hat{A}M$, ou seja, $\overline{AM}$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$ do $\triangle ABC$;
- $B\hat{M}A \cong C\hat{M}A$, ou seja, $B\hat{M}A$ e $C\hat{M}A$ são retos ou, ainda, $\overline{AM}$ é altura do $\triangle ABC$.

1 Ampliando o estudo dos triângulos

Atividades 12, 14, 15 e 17

Estas atividades desenvolvem o cálculo das medidas de abertura de ângulos a partir dos conceitos de bissetriz dos ângulos internos e altura de um triângulo.

Na atividade 14, peça aos alunos que desenhem o triângulo descrito e, se necessário, desenhe-o na lousa.

Confira a resolução da atividade 15.

a) $m(A\hat{H}C) = 90°$, pois $\overline{CH}$ é altura

b) $m(B\hat{A}C) = 180 - (70 + 30) = 180 - 100 = 80°$

$m(S\hat{A}C) = 80 : 2 = 40°$, pois $\overline{AS}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$

c) $m(H\hat{A}R) = m(S\hat{A}C) = 40°$, pois $\overline{AS}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$

$m(A\hat{R}H) = 180 - (90 + 40) = 180 - 130 = 50°$

$m(A\hat{R}C) = 180 - 50 = 130°$

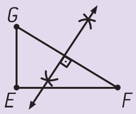
1 Ampliando o estudo dos triângulos

Peça aos alunos que verifiquem o que escreveram sobre mediatriz de um segmento no painel de descobertas e, a partir disso, explique a mediatriz do lado de um triângulo, destacando que a mesma construção que fizemos para mediatriz de um segmento, usando régua e compasso, pode ser feita agora.

Atividades 18, 19 e 21

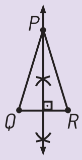
Estas atividades trabalham a construção da mediatriz do lado de um triângulo ou de um segmento de reta.

Veja a resposta da atividade 18.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Após a resolução da atividade 19, destaque que, em um triângulo isósceles, a mediatriz da base passa pelo vértice oposto à base. Confira a resposta desta atividade.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Na atividade 21, se necessário, relembre com os alunos a construção de retas paralelas usando régua e compasso, que foi estudada no capítulo 2 do livro.

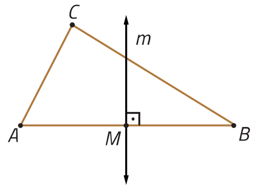
Atividade 20

Esta atividade aborda a demonstração, a partir de congruência de triângulos, de que todo ponto da mediatriz de um segmento é equidistante às extremidades do segmento, ou seja, a propriedade, apresentada no capítulo 2, que define mediatriz como lugar geométrico.

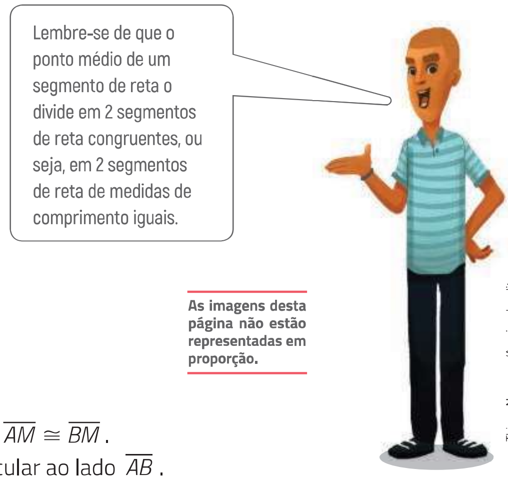
Mediatriz do lado de um triângulo

Você já estudou, no capítulo 2, o que é a mediatriz de um segmento de reta e aprendeu a construí-la, com régua e compasso. Agora vamos estudar esse conceito aplicado aos lados de um triângulo.

Observe o $\triangle ABC$.



Banco de imagens/Arquivo da editora



Thiago Neumann/Arquivo da editora

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

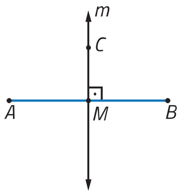
O ponto M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$, ou seja, $\overline{AM} \cong \overline{BM}$.

A reta m passa pelo ponto médio M e é perpendicular ao lado $\overline{AB}$.

A reta m é a **mediatriz** do lado $\overline{AB}$ do $\triangle ABC$.

A **mediatriz de um lado de um triângulo** é a reta perpendicular a esse lado e que passa pelo ponto médio dele.

Observação: Os lados de um triângulo são segmentos de reta. Então, assim como construímos, com régua e compasso, a mediatriz de qualquer segmento de reta, podemos construir a mediatriz do lado de um triângulo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A reta m é a mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$ formando um ângulo reto com ele ($C\widehat{M}B$ é reto) e o dividindo em 2 segmentos de reta congruentes ($\overline{AM} \cong \overline{BM}$).

Atividades

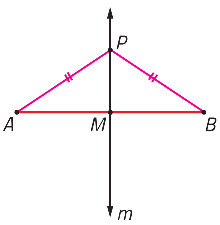
Não escreva no livro!

18 Construa no caderno um $\triangle EFG$, retângulo em E, e trace a mediatriz do lado $\overline{FG}$. MP

19 Agora, construa no caderno um $\triangle PQR$, isósceles de base $\overline{QR}$, e trace a mediatriz da base. MP

20 **Desafio.** Faça no caderno a demonstração da seguinte proposição.

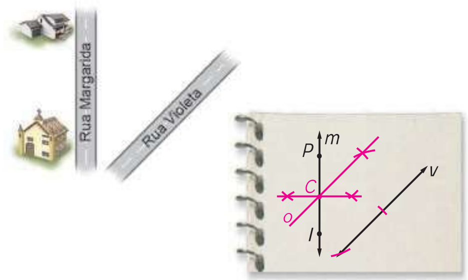
Se P é um ponto da mediatriz m de $\overline{AB}$, então P é equidistante de A e de B, ou seja, $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

21 Em uma cidade, a prefeitura (P), o cinema (C) e a igreja (I) ficam na rua Margarida (m). O cinema está situado no ponto médio entre a prefeitura e a igreja e está também na rua Orquídea (o), que é paralela à rua Violeta (v).

No caderno, copie e complete o desenho, usando régua, compasso e esquadro, e localize o ponto C, correspondente ao cinema, e a reta o, que representa a rua Orquídea.



Ilustrações: Paulo Manzi/Arquivo da editora

20. Traçando o $\overline{PA}$ e o $\overline{PB}$, obtemos o $\triangle PAM$ e o $\triangle PBM$, que tem $\overline{PM} \cong \overline{PM}$ (lado comum); $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ (M é o ponto médio do $\overline{AM}$) e $P\widehat{M}A \cong P\widehat{M}B$ (ângulos retos). Então, pelo caso LAL, temos $\triangle PAM \cong \triangle PBM$ e, portanto, $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

Circuncentro de um triângulo

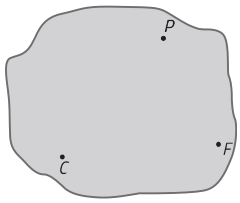
Veja o que acontece com as 3 mediatrizes dos lados de um triângulo nesta situação-problema.

Em uma cidade, será construído o prédio de uma agência bancária. Para a escolha do local, pensou-se no seguinte: ele deve ficar à mesma medida de distância da prefeitura (P), do fórum (F) e do centro de saúde (C).

Bate-papo

Observe a figura, converse com os colegas e respondam: Onde deve ser construída a agência bancária (B)?
Resposta pessoal.

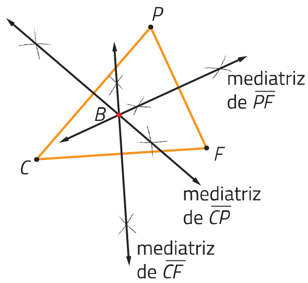
Thiago Neumann/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Veja como localizar o ponto B no $\triangle PCF$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

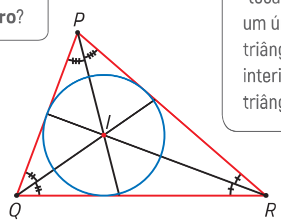
Thiago Neumann/Arquivo da editora

O ponto B, intersecção das mediatrizes dos lados do $\triangle PFC$, é chamado de **circuncentro** do triângulo.

Em todo triângulo, as 3 mediatrizes dos lados se intersectam em um mesmo ponto, chamado de circuncentro do triângulo.

Os triângulos e as circunferências

Thiago Neumann/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

Thiago Neumann/Arquivo da editora

1 Ampliando o estudo dos triângulos

Apresente a situação-problema dada no livro e a figura que a representa.

Bate-papo

Dê um tempo para que os alunos conversem entre si sobre a posição do ponto B e peça que compartilhem ideias deles. É provável que surjam respostas como "deve ficar 'no meio' desses pontos", "deve ser equidistante a esses pontos".

Após o *Bate-papo*, peça aos alunos que verifiquem a resolução apresentada no livro, observando a localização do ponto B e a construção feita para localizá-lo. Peça que conversem sobre essa construção.

Explique que esse ponto B é a intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo, chamado de circuncentro.

Os triângulos e as circunferências

Na lousa, construa 3 triângulos (um acutângulo, um retângulo e um obtusângulo), trace as 3 bissetrizes em cada triângulo, marque o incentro de cada um deles e mostre que podemos construir uma circunferência interna, inscrita, a cada triângulo.

Em seguida, construa os mesmos triângulos, trace as 3 mediatrizes em cada triângulo, marque o circuncentro de cada um deles e mostre que podemos construir uma circunferência externa, circunscrita, a cada triângulo.

Então, explique o significado dos termos **inscrito** e **circunscrito** e solicite que compartilhem com a turma as hipóteses e conclusões a que chegaram sobre o circuncentro, o incentro e as circunferências traçadas a partir deles. Se necessário, faça intervenções para complementar ou corrigir as ideias apresentadas pelos alunos.

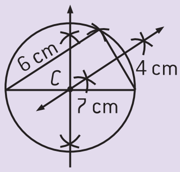
1 Ampliando o estudo dos triângulos

Atividade 22

Esta atividade relaciona a posição do circuncentro na região triangular de acordo com a classificação do triângulo quanto aos ângulos.

Atividade 23

Esta atividade trabalha a localização do circuncentro de um triângulo e a construção da circunferência circunscrita a esse triângulo. Confira a resposta.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Você sabia?

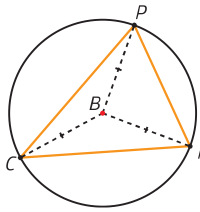
Peça aos alunos que leiam o texto e citem outras situações em que são usados conceitos de triangulações.

Se achar conveniente, solicite aos alunos que procurem mais informações sobre as triangulações apresentadas no livro e pesquisem também outras ocasiões em que esse conceito é utilizado.

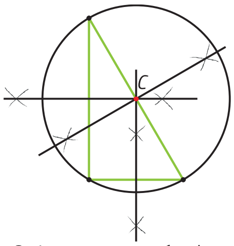
Caso seja possível, em conjunto com as aulas de Educação Física, analise a triangulação no esporte, apresentando a motivação para que ela ocorra e mostrando-a em diversas modalidades esportivas, não apenas no futebol.

No exemplo visto, o circuncentro está localizado no interior da região determinada pelo triângulo, como também se vê ao lado.

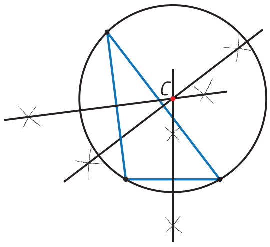
Mas isso nem sempre acontece. Observe nestes exemplos a localização do circuncentro *C*.



O circuncentro está no interior da região determinada pelo triângulo.



O circuncentro está sobre o triângulo.



O circuncentro está fora da região determinada pelo triângulo.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Thiago Neumann/Arquivo da editora

Atividades

22. Triângulo retângulo: o circuncentro fica no ponto médio do maior lado; triângulo acutângulo: ele fica no interior da região triangular correspondente; triângulo obtusângulo: ele fica fora da região triangular correspondente.

Não escreva no livro!

22 Com um colega, relacione a posição do circuncentro com o tipo do triângulo quanto aos ângulos.

23 Construa no caderno um triângulo com lados de medida de comprimento de 7 cm, 6 cm e 4 cm, localize o circuncentro *C* e trace a circunferência circunscrita a esse triângulo. MP

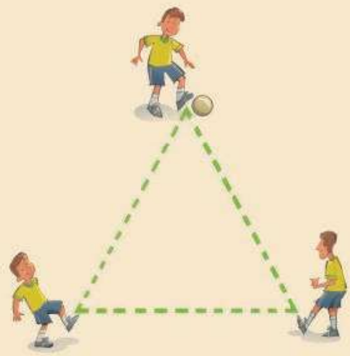
Você sabia?

Triangulação é um termo usado em diversas áreas da atividade humana. Ele define, por exemplo, a divisão de uma superfície terrestre em uma rede de triângulos cujos vértices são pontos bem visíveis e fixos (como torres de igrejas, capelas ou outros edifícios, pirâmides ou marcos geodésicos e chaminés). Esses 3 vértices estão situados em lugares mais ou menos elevados, de modo que de cada um se avistem os 2 outros vértices. A partir dessa rede de triângulos, mede-se a menor distância entre 2 pontos ou efetua-se o levantamento da carta de um país ou de uma região.

No futebol a triangulação descreve o lance em que os jogadores se movimentam formando linhas supostamente triangulares.

No voo livre, a triangulação é uma modalidade de competição em que se estipula um percurso que passa por vários pontos de contorno.

A triangulação de satélites monitora o sistema GPS (sigla de *Global Positioning System*, sistema de posicionamento global), um receptor que indica exatamente a direção, o local e a medida de velocidade de um veículo (barco, navio, avião, carro) ou de uma pessoa (um mergulhador, por exemplo).



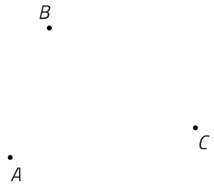
Mauro Souza/Arquivo da editora

Uma aplicação da mediatriz: traçado da circunferência que passa por 3 pontos não alinhados

Leia esta afirmação.

É sempre possível traçar uma circunferência que passa por 3 pontos não alinhados.

Para traçar a circunferência que passa pelos pontos *A*, *B* e *C* dados, que não estão alinhados, precisamos localizar o centro dela.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Bate-papo

Converse com os colegas e justifiquem a afirmação feita.

Temos que 3 pontos não alinhados sempre podem ser os vértices de um triângulo e, em todo triângulo, é possível obter o circuncentro.

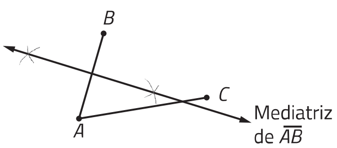
Já sei! O centro da circunferência está nas mediatrizes de cada segmento de reta $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

Então, basta traçar 2 mediatrizes e localizar o centro da circunferência na intersecção delas.

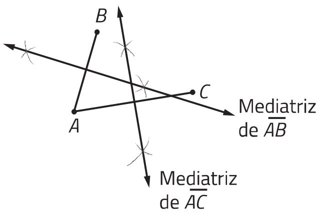
Ilustrações: Thiago Neumann/Arquivo da editora

Observe a construção.

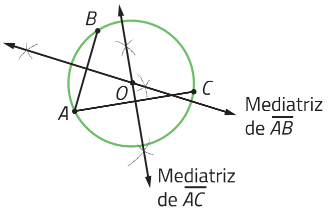
- Traçamos a mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$.



- Traçamos a mediatriz do segmento de reta $\overline{AC}$.



- Marcamos o ponto *O*, na intersecção das 2 mediatrizes traçadas, e traçamos a circunferência com centro nesse ponto.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

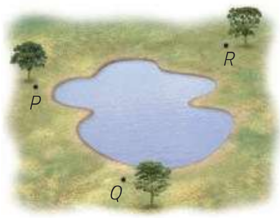
As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Atividades

Não escreva no livro!

24 No caderno, marque 3 pontos não alinhados e, em seguida, trace a circunferência que passa por esses pontos, usando régua e compasso. Resposta pessoal.

25 Nesta imagem, observe um lago e 3 árvores fora dele, que estão representadas pelos pontos *P*, *Q* e *R*. Uma pista circular será construída passando bem próxima a cada uma dessas árvores. Reproduza a imagem no caderno e faça um desenho da pista. (Traçado da circunferência que passa pelos pontos *P*, *Q* e *R*.)



Paulo Manzi/Arquivo da editora

1 Ampliando o estudo dos triângulos

Peça aos alunos que leiam a afirmação dada no livro.

Bate-papo

Incentive os alunos a explorar essa afirmação, questionando: “Qual figura é construída a partir de 3 pontos não alinhados?”; “Como podemos traçar uma circunferência que passa pelos 3 vértices desse triângulo?”. Leve-os a concluir que sempre é possível traçar uma circunferência que passa por 3 pontos não colineares, cujo centro é o circuncentro do triângulo com vértices nesses 3 pontos iniciais.

Após o *Bate-papo*, peça que verifiquem o método apresentado no material para traçar uma circunferência por 3 pontos não alinhados e pergunte: “É necessário traçar as 3 mediatrizes para determinar o circuncentro?”; “Por que a menina disse que basta traçar 2 mediatrizes?”. Esperamos que eles percebam que, ao traçar a 3ª mediatriz, ela só pode intersectar as outras 2 mediatrizes no ponto de intersecção delas.

Em seguida, peça aos alunos que registrem, no painel de descobertas, tudo que considerarem importante sobre mediana, bissetriz, altura e mediatriz relacionadas a um triângulo e sobre baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro.

Atividades 24 e 25

Estas atividades desenvolvem a construção de circunferências a partir de 3 pontos não colineares.

Destaque que, na atividade 24, devem usar régua e compasso, mas, na atividade 25, podem usar os instrumentos que preferirem.

2 Ampliando o estudo dos quadriláteros

Principal habilidade da BNCC

EF08MA14

Incentive os alunos a recordar o que é um quadrilátero e os tipos estudados no 6º ano. Depois, peça que leiam a definição de quadrilátero e observem as figuras de paralelogramos, trapézios e quadriláteros que não são nem paralelogramos nem trapézios.

Bate-papo

Para ajudá-los a comparar as características de paralelogramos e trapézios, pergunte: “Quantos lados paralelos têm os paralelogramos e os trapézios?”; “Todos os paralelogramos apresentados são iguais?”; “Todos os trapézios dados são iguais?”.

Veja exemplos de resposta: Os paralelogramos são quadriláteros que têm 2 pares de lados paralelos; entre os paralelogramos, os losangos têm 4 lados congruentes, os retângulos têm 4 ângulos retos e os quadrados têm 4 lados congruentes e 4 ângulos retos; os trapézios são quadriláteros que têm apenas 1 par de lados paralelos; entre os trapézios, os que são isósceles têm os lados não paralelos congruentes e os que são retângulos têm 2 ângulos retos.

Atividades 26 e 27

Estas atividades apresentam classificações de quadriláteros e relações entre essas classificações a partir da construção de figuras e da verificação de afirmações.

Na atividade 26, oriente os alunos a usar régua para desenhar os quadriláteros, e régua e esquadro ou régua e compasso para construir lados paralelos.

Na atividade 27, oriente-os a consultar os exemplos de quadriláteros fornecidos no livro para facilitar a resolução da atividade.

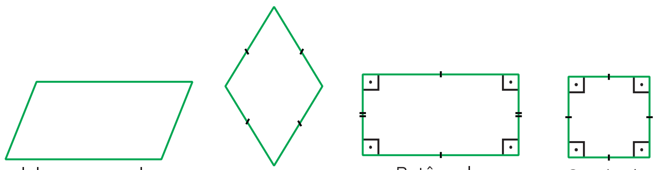
2 Ampliando o estudo dos quadriláteros

Você já estudou a definição e os tipos de quadrilátero. Vamos agora retomar e aprofundar esse estudo.

Quadrilátero é todo polígono de 4 lados.

Alguns quadriláteros recebem nomes de acordo com a posição relativa dos lados deles. Relembre esses tipos de quadrilátero e veja alguns exemplos.

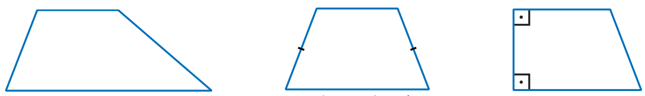
Paralelogramos



Paralelogramo qualquer. Losango. Retângulo. Quadrado.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Trapézios



Trapézio qualquer. Trapézio isósceles. Trapézio retângulo.

Quadriláteros que não são nem paralelogramos nem trapézios.

“Pipa” ou “papagaio”. Quadrilátero convexo qualquer. Quadrilátero não convexo.

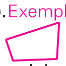
Bate-papo

Conversem sobre as características dos paralelogramos e as características dos trapézios. MP

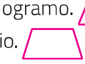
Atividades

Não escreva no livro!

26 Faça os desenhos no caderno. Exemplos de resposta:

a) Um quadrilátero qualquer. 

b) Um quadrilátero que seja paralelogramo. 

c) Um quadrilátero que seja trapézio. 

d) Um quadrilátero que não seja nem paralelogramo nem trapézio. 

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

27 Copie no caderno apenas as afirmações verdadeiras.

X a) Todo retângulo é paralelogramo.

X b) Todo quadrado é retângulo.

c) Todo paralelogramo é losango.

X d) Todo quadrado é losango.

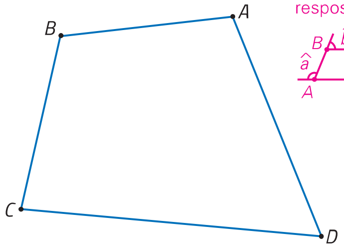
Características de um quadrilátero convexo

Amplie e aplique seus conhecimentos sobre os quadriláteros convexos resolvendo estas atividades.

Atividades

Não escreva no livro!

28 Considerando este quadrilátero *ABCD*, indique no caderno quantos e quais são os elementos dele.



Banco de imagens/Arquivo da editora

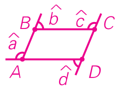
a) Lados. 4 lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

b) Vértices. 4 vértices: *A*, *B*, *C* e *D*.

c) Diagonais. 2 diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

d) Ângulos internos. 4 ângulos internos: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$.

29. Exemplo de resposta:



29 Desenhe no caderno um quadrilátero convexo e identifique os ângulos externos dele.

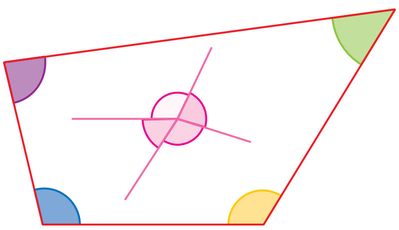
30 Responda no caderno.

a) Como podemos calcular a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um polígono convexo de *n* lados? Calculando $(n - 2) \times 180°$.

b) Qual é a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero convexo? $360°$ $((4 - 2) \times 180° = 2 \times 180° = 360°)$

c) Qual é a soma das medidas de abertura dos ângulos externos de um quadrilátero convexo? $360°$ (Como em todos os polígonos convexos.)

31 Desenhe um quadrilátero qualquer em uma folha de papel sulfite. Pinte os ângulos internos, recorte e faça colagens para verificar a soma das medidas de abertura dos 4 ângulos internos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

32 O quadrilátero que você desenhou na atividade anterior é um caso particular. Mas a propriedade que você verificou vale sempre.

> Em todo quadrilátero convexo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 360°.

Sabendo disso, copie cada item no caderno e substitua os ■ pelas medidas adequadas.

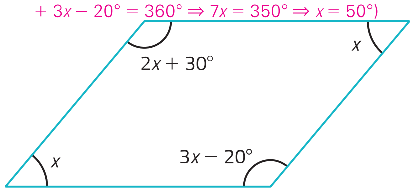
a) Em um quadrilátero *ABCD*, temos $m(\hat{A}) = 45°$, $m(\hat{B}) = 100°$, $m(\hat{C}) = 48°$ e $m(\hat{D}) =$ ■. **a)** $167°$ $(45° + 100° + 48° = 193°;\ 360° - 193° = 167°)$

b) Se um quadrilátero tem 2 ângulos retos e um ângulo cuja medida de abertura é de 66°, então o quarto ângulo tem medida de abertura de ■. $114°$ $(90° + 90° + 66° = 246°;\ 360° - 246° = 114°)$

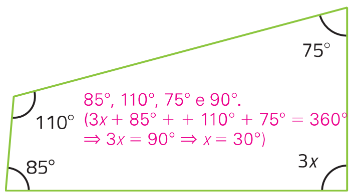
c) Se um quadrilátero *MNOP* é tal que $m(\widehat{M}) + m(\widehat{N}) = 205°$, então $m(\hat{O}) + m(\hat{P}) =$ ■. $155°$ $(360° - 205° = 155°)$

33 Considerando cada quadrilátero dado, determine a medida de abertura de cada ângulo interno dele. $50°$, $130°$, $50°$ e $130°$. $(x + x + 2x + 30° + 3x - 20° = 360° \Rightarrow 7x = 350° \Rightarrow x = 50°)$

a)



b)



$85°$, $110°$, $75°$ e $90°$. $(3x + 85° + 110° + 75° = 360° \Rightarrow 3x = 90° \Rightarrow x = 30°)$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

34 Quais são as medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero, sabendo que a medida de abertura de um dos ângulos é *x*, em graus, e as medidas de abertura dos outros ângulos internos são o dobro, o triplo e o quádruplo de *x*? $36°$, $72°$, $108°$ e $144°$. $(x + 2x + 3x + 4x = 360° \Rightarrow 10x = 360° \Rightarrow x = 36°)$

2 Ampliando o estudo dos quadriláteros

Pergunte aos alunos: "O que são quadriláteros convexos?". Se necessário, complemente ou corrija as informações apresentadas pelos alunos.

Atividades 28 e 29

Estas atividades abordam a identificação dos elementos de quadriláteros convexos.

Na atividade 29, incentive os alunos a usar régua para desenhar e destaque que pode ser desenhado qualquer quadrilátero convexo.

Atividades 30 e 31

Estas atividades definem que o valor da soma das medidas de abertura dos ângulos internos de qualquer quadrilátero convexo é 360°.

A atividade 30 define também a fórmula da soma das medidas de abertura dos ângulos internos de qualquer polígono convexo e o valor da soma das medidas de abertura dos ângulos externos de qualquer quadrilátero convexo.

No livro do 7º ano desta coleção, os alunos deduziram a fórmula da soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer $[S_i = (n - 2) \cdot 180°]$ pensando na divisão do polígono em triângulos e sabendo que essa soma é 180° em qualquer triângulo. Então, se necessário, retome essa exploração para ajudar na resolução desta atividade.

Para ampliar a atividade 31, peça aos alunos que realizem o mesmo procedimento para os ângulos externos de qualquer quadrilátero convexo, verificando que a soma das medidas de abertura dos ângulos externos de qualquer quadrilátero convexo é 360°.

Atividades 32, 33 e 34

A partir da soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero convexo, desenvolvem o cálculo das medidas de abertura dos ângulos solicitados.

Nas atividades 33 e 34, os alunos devem resolver equações para descobrir as medidas de abertura dos ângulos.

No item **b** da atividade 33, destaque que não é necessário saber o valor de *x*, apenas de 3*x*.

2 Ampliando o estudo dos quadriláteros

Relembre a definição de paralelogramo e apresente a 1ª propriedade dos paralelogramos: 2 ângulos opostos são congruentes e 2 ângulos não opostos são suplementares.

Na lousa, relembre também as relações entre ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal e desenvolva, com os alunos, a demonstração de que 2 ângulos não opostos no paralelogramo são suplementares, a partir de ângulos colaterais internos.

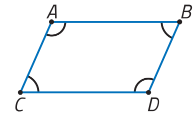
Explorar e descobrir

Incentive-os a completar a demonstração, provando que 2 ângulos opostos no paralelogramo têm medidas de abertura iguais.

Após o *Explorar e descobrir*, desenvolva, com os alunos, a demonstração da 2ª propriedade (em paralelogramos, os lados opostos são congruentes), a partir de ângulos alternos internos e congruência de triângulos pelo caso ALA.

Paralelogramos

Você já estudou a definição de paralelogramo.



$\overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD}$ e $\overline{AC} \,/\!/\, \overline{BD}$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Paralelogramo é todo quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

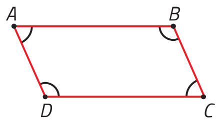
Propriedades dos paralelogramos

Acompanhe a demonstração de algumas propriedades dos paralelogramos.

1ª propriedade

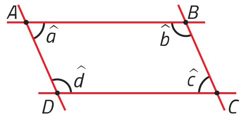
Em todo paralelogramo, 2 ângulos opostos são congruentes (têm medidas de abertura iguais) e 2 ângulos não opostos são suplementares (a soma das medidas de abertura é igual a 180°).

Demonstração



Se *ABCD* é um paralelogramo, então temos $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD}$ e podemos considerar o $\overline{AD}$ como uma transversal. Então, o $\hat{a}$ e o $\hat{b}$ são ângulos colaterais internos.

Com base nisso, podemos afirmar que $m(\hat{a}) + m(\hat{d}) = 180°$ ou que o $\hat{a}$ e o $\hat{d}$ são ângulos suplementares (**I**).



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Da mesma maneira, considerando:

- $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD}$ e a transversal $\overline{BC}$, concluímos que $m(\hat{b}) + m(\hat{c}) = 180°$ (**II**);
- $\overline{AD} \,/\!/\, \overline{BC}$ e a transversal $\overline{AB}$, concluímos que $m(\hat{a}) + m(\hat{b}) = 180°$ (**III**);
- $\overline{AD} \,/\!/\, \overline{BC}$ e a transversal $\overline{CD}$, concluímos que $m(\hat{c}) + m(\hat{d}) = 180°$ (**IV**).

Explorar e descobrir — Não escreva no livro!

Usando as afirmações acima, complete no caderno a demonstração e conclua que $m(\hat{a}) = m(\hat{c})$ e $m(\hat{b}) = m(\hat{d})$. Se $m(\hat{a}) + m(\hat{d}) = 180°$ e $m(\hat{c}) + m(\hat{d}) = 180°$, então $m(\hat{a}) + \cancel{m(\hat{d})} = m(\hat{c}) + \cancel{m(\hat{d})} \Rightarrow m(\hat{a}) = m(\hat{c})$. Se $m(\hat{a}) + m(\hat{b}) = 180°$ e $m(\hat{a}) + m(\hat{d}) = 180°$, então $\cancel{m(\hat{a})} + m(\hat{b}) = \cancel{m(\hat{a})} + m(\hat{d}) \Rightarrow m(\hat{b}) = m(\hat{d})$.

2ª propriedade

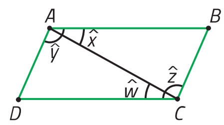
Em todo paralelogramo, os lados opostos são congruentes.

Devemos demonstrar que $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

Demonstração

Traçamos $\overline{AC}$.

No $\triangle ABC$ e no $\triangle ADC$, temos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

- $\hat{x} = \hat{w}$ (medidas de abertura dos ângulos alternos internos, com $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{DC}$);
- $\hat{y} = \hat{z}$ (medidas de abertura dos ângulos alternos internos, com $\overline{AD} \,/\!/\, \overline{BC}$);
- $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (lado comum dos triângulos).

Pelo caso ALA, concluímos que $\triangle ABC \cong \triangle ADC$. Logo, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

3ª propriedade

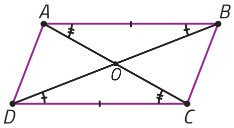
Em todo paralelogramo, as diagonais se intersectam no ponto médio delas.

Demonstração

Considerando o paralelogramo *ABCD* e as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$, obtemos o ponto *O* de intersecção das diagonais.

Pelo caso ALA, temos $\triangle AOB \cong \triangle COD$.

Da congruência desses triângulos, deduzimos que $\overline{AO} \cong \overline{CO}$ e $\overline{BO} \cong \overline{DO}$, ou seja, o ponto *O* é o ponto médio de cada diagonal.



Banco de imagens/Arquivo da editora

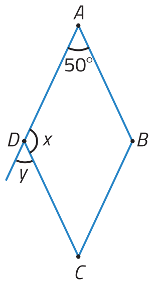
38. Sim, pois os losangos, os retângulos e os quadrados são casos particulares dos paralelogramos.

Não escreva no livro!

Atividades

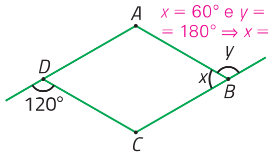
35 Determine no caderno os valores de *x* e *y* para cada paralelogramo dado.

a)



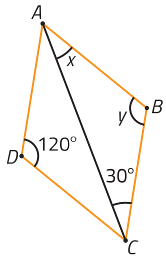
$x = 130°$ e $y = 50°$. $(x + 50° = 180° \Rightarrow x = 180° - 50° = 130°)$

b)



$x = 60°$ e $y = 120°$. $(x + 120° = 180° \Rightarrow x = 180° - 120° = 60°)$

c)

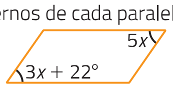


$x = 30°$ e $y = 120°$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

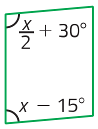
36 Calcule as medidas de abertura dos 4 ângulos internos de cada paralelogramo.

a)



55°, 55°, 125° e 125°.

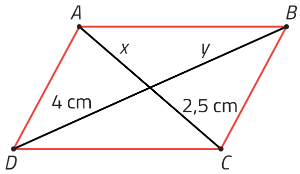
b)



95°, 85°, 95° e 85°.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

37 Determine as medidas de comprimento *x* e *y* neste paralelogramo *ABCD*. $x = 2{,}5$ cm e $y = 4$ cm.



Banco de imagens/Arquivo da editora

38 As 3 propriedades que demonstramos para os paralelogramos são válidas para os losangos, os retângulos e os quadrados? Justifique.

39 Copie no caderno apenas as afirmações verdadeiras.

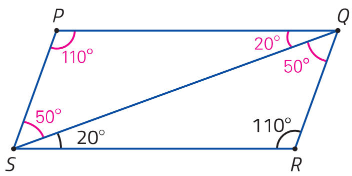
X a) As diagonais do retângulo se intersectam no ponto médio delas.

b) As diagonais do trapézio se intersectam no ponto médio delas.

X c) As diagonais do quadrado se intersectam no ponto médio delas.

X d) As diagonais do losango se intersectam no ponto médio delas.

40 Considerando o paralelogramo *PQRS*, determine a medida de abertura de cada ângulo dado.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) $S\hat{P}Q$ 110°

b) $P\hat{S}R$ 70°

c) $S\hat{Q}R$ 50°

2 Ampliando o estudo dos quadriláteros

Leia com os alunos a 3ª propriedade (em paralelogramos, as diagonais se intersectam no ponto médio delas) e, na lousa, demonstre-a, usando ângulos alternos internos, a 2ª propriedade de paralelogramos e congruência de triângulos pelo caso ALA. Faça a demonstração passo a passo e retome sempre que os alunos apresentarem dúvidas.

Atividades 35, 36, 37 e 40

Estas atividades desenvolvem o cálculo das medidas de abertura dos ângulos e de comprimento de metade das diagonais de paralelogramos a partir das propriedades demonstradas.

Na atividade 35, se necessário, relembre que um ângulo interno e o ângulo externo correspondente a ele são suplementares.

Veja a resolução da atividade 36.

a) $5x = 3x + 22 \Rightarrow x = 11$

$5x = 55$

$180 - 55 = 125$

Os 4 ângulos medem 55°, 55°, 125° e 125°.

b) $x - 15 + \frac{x}{2} + 30 = 180 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - 30 + x + 60 =$

$= 360 \Rightarrow 3x = 330 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 100$

$x - 15 = 110 - 15 = 95$

$\frac{x}{2} + 30 = \frac{110}{2} + 30 = 85$

ou $180 - 95 = 85$

Os 4 ângulos medem 95°, 85°, 95° e 85°.

Confira também a resolução da atividade 40.

a) 110°

b) $180° - 110° = 70°$

c) $70° - 20° = 50°$ ou $180° - (110° + 20°) = 180° - 130° = 50°$

Atividades 38 e 39

Estas atividades relacionam as 3 propriedades dos paralelogramos com losangos, retângulos, quadrados e trapézios.

Se necessário, peça aos alunos que vejam na página 120 do livro quais desses quadriláteros são classificados como paralelogramos e, em seguida, verifiquem se as propriedades valem para trapézios.

2 Ampliando o estudo dos quadriláteros

Converse com os alunos acerca das características do retângulo. Pergunte a eles: "O retângulo é um caso particular de paralelogramo?"; "Quais são as características do retângulo?"; "As propriedades do paralelogramo são válidas para o retângulo?".

Em seguida, apresente a propriedade dos retângulos de que as diagonais são congruentes e prove-a com os alunos. Essa demonstração usa a característica de retângulos de que todos os ângulos internos são retos, a 2ª propriedade de paralelogramos e congruência de triângulos por LAL.

Então, leia com eles a afirmação de que as diagonais de um retângulo são congruentes e se intersectam no ponto médio, incentivando-os a justificá-la. Comente com os alunos que essa propriedade das diagonais congruentes de um retângulo vale também para os quadrados, que são casos particulares de retângulos, mas não vale para os quadriláteros que não são retângulos.

Depois, apresente a propriedade dos losango: as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos do losango. Na lousa, faça a demonstração, usando a característica de losangos de que todos os lados são congruentes, a 3ª propriedade de paralelogramos e congruência de triângulos por LLL.

Se achar conveniente, desafie os alunos a demonstrar, usando o $\triangle ABD$ e o $\triangle CBD$, que $\hat{1} \cong \hat{2}$ e $\hat{6} \cong \hat{5}$, ou seja, a diagonal $\overline{BD}$ está sobre as bissetrizes de $\hat{B}$ e $\hat{D}$. Verifique essa demonstração.

O $\triangle ABD$ e o $\triangle CBD$ têm:

- $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (são lados do losango);
- $\overline{AD} \cong \overline{CD}$ (são lados do losango);
- $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (lado comum dos triângulos).

Pelo caso LLL, temos $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ e, então, $\hat{1} \cong \hat{2}$ e $\hat{6} \cong \hat{5}$.

Logo, $\overline{BD}$ está sobre as bissetrizes de $\hat{B}$ e $\hat{D}$.

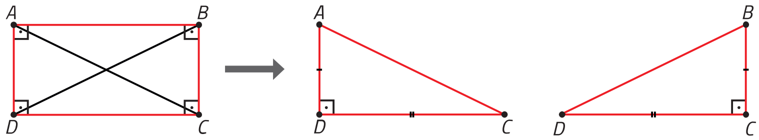
Propriedade dos retângulos

Agora, acompanhe a demonstração de uma propriedade dos retângulos (paralelogramos que têm os 4 ângulos internos retos).

As diagonais de um retângulo são congruentes.

Demonstração

Considerando este retângulo *ABCD*, devemos demonstrar que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.



Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Analisando os elementos do $\triangle ADC$ e do $\triangle BCD$, temos:

- $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (são lados opostos de um retângulo, que é um paralelogramo);
- $\hat{D} \cong \hat{C}$ (são ângulos retos);
- $\overline{DC} \cong \overline{DC}$ (lado comum dos triângulos).

Pelo caso LAL, temos $\triangle ADC \cong \triangle BCD$ e, portanto, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Considerando as propriedades demonstradas para os paralelogramos e a propriedade do retângulo, podemos afirmar:

As diagonais de um retângulo são congruentes e se intersectam no ponto médio.

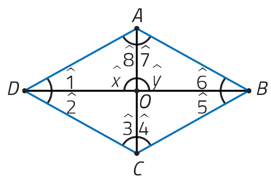
Propriedade dos losangos

Agora, acompanhe a demonstração de uma propriedade dos losangos (paralelogramos que têm os 4 lados congruentes).

As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos do losango.

Demonstração

Considere este losango *ABCD*.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

<u>1ª parte</u>

O $\triangle AOB$ e o $\triangle AOD$ têm:

- $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ (são lados do losango);
- $\overline{OB} \cong \overline{OD}$ (*O* é ponto médio da diagonal, pois o losango é um paralelogramo);
- $\overline{AO} \cong \overline{AO}$ (lado comum dos triângulos).

Pelo caso LLL, temos $\triangle AOB \cong \triangle AOD$ e, então, $m(\hat{x}) = m(\hat{y})$.

Como $m(\hat{x}) + m(\hat{y}) = 180°$, obtemos $m(\hat{x}) = 90°$ e $m(\hat{y}) = 90°$.

Logo, $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ são perpendiculares entre si.

<u>2ª parte</u>

O $\triangle ABC$ e o $\triangle ADC$ têm:

- $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ (são lados do losango);
- $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (lado comum dos triângulos).

Pelo caso LLL, temos $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ e, então, $\hat{7} \cong \hat{8}$ e $\hat{4} \cong \hat{3}$.

Então, $\overline{AC}$ está sobre as bissetrizes de $\hat{A}$ e de $\hat{C}$.

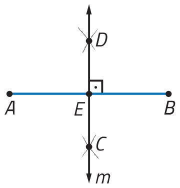
Da mesma maneira, usando o $\triangle ABD$ e o $\triangle CBD$, podemos demonstrar que $\hat{1} \cong \hat{2}$ e $\hat{6} \cong \hat{5}$, ou seja, a diagonal $\overline{BD}$ está sobre as bissetrizes de $\hat{B}$ e $\hat{D}$.

Observação: Com essa propriedade podemos justificar a construção com régua e compasso da mediatriz de um segmento de reta. Observe.

$ACBD$ é um losango e $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as diagonais dele.

Então, $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ e $C\hat{E}B$ é reto, pois as diagonais do losango se intersectam no ponto médio e são perpendiculares.

Podemos então afirmar que $\overline{CD}$ pertence à mediatriz m do $\overline{AB}$.



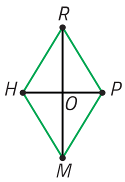
Banco de imagens/Arquivo da editora

44. $x = 64°$ ($90° - 26° = 64°$ e ângulos alternos internos de paralelas cortadas por transversais têm medidas iguais; então $x = 64°$; ou $x + 26° + 90° = 180° \Rightarrow x = 64°$.)

Atividades

Não escreva no livro!

41 Desenhe no caderno este losango $RHMP$ e, depois, copie apenas as afirmações que são corretas para ele e para qualquer outro losango.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) $\hat{R}$ é reto.

X b) $\hat{R} \cong \hat{M}$

X c) $\overline{RM} \perp \overline{HP}$

d) $\overline{RM} \cong \overline{HP}$

X e) $\overline{OH} \cong \overline{OP}$

X f) $M\hat{O}P$ é reto.

g) $H\hat{M}P \cong M\hat{P}R$

X h) $R\hat{P}O \cong M\hat{P}O$

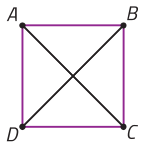
X i) $\overline{RP} \cong \overline{PM}$

X j) $\overline{RH} \parallel \overline{PM}$

k) $\overline{OP} \cong \overline{OM}$

X l) $OR = RM \div 2$

42 Considerando as definições e demonstrações já feitas e lembrando que todo quadrado é um quadrilátero convexo, um paralelogramo, um retângulo e um losango, responda no caderno.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Como são os lados opostos em um quadrado? Paralelos e congruentes.

b) O quadrado é um polígono regular? Sim.

c) Qual é a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrado? 360°

d) Qual é a medida de abertura de cada ângulo externo em um quadrado? 90°

e) As diagonais de um quadrado são congruentes? Sim.

f) As diagonais de um quadrado se intersectam no ponto médio delas? Sim.

g) As diagonais de um quadrado são perpendiculares? Sim.

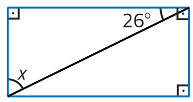
h) As diagonais de um quadrado estão sobre as bissetrizes dos ângulos internos? Sim.

43 Escreva no caderno. Exemplos de resposta:

a) Uma propriedade dos losangos que não vale para todos os retângulos. Os losangos têm as diagonais perpendiculares.

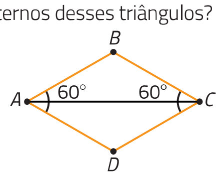
b) Uma propriedade dos retângulos que não vale para todos os losangos. Os retângulos têm as diagonais congruentes.

44 Determine no caderno o valor de x neste retângulo.

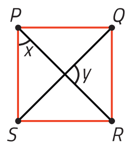


Banco de imagens/Arquivo da editora

45 Os ângulos opostos agudos de um losango têm medida de abertura de 60°. A diagonal maior desse losango separa-o em 2 triângulos congruentes. Quais são as medidas de abertura dos ângulos internos desses triângulos? $\triangle ABC$: 30°, 30° e 120°; $\triangle ADC$: 30°, 30° e 120°.

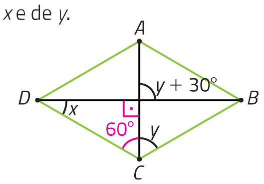


46 Considerando este quadrado $PQRS$, determine no caderno o valor de x e de y. $x = 45°$ e $y = 90°$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

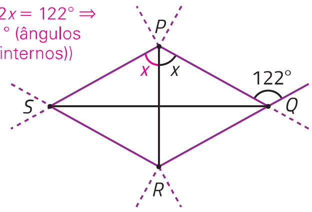
47 Dado este losango $ABCD$, determine no caderno o valor de x e de y.



Banco de imagens/Arquivo da editora

48 Para este losango $PQRS$, determine no caderno o valor de x.

$x = 61°$ ($2x = 122° \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 61°$ (ângulos alternos internos))



Banco de imagens/Arquivo da editora

47. $x = 30°$ e $y = 60°$. ($y + 30° = 90° \Rightarrow y = 60°$; $x + 90° + 60° = 180° \Rightarrow \Rightarrow x = 30°$)

2 Ampliando o estudo dos quadriláteros

Retome a construção da mediatriz de um segmento de reta com régua e compasso e incentive os alunos a verificar que os procedimentos dessa construção são justificados pela propriedade das diagonais de um losango.

Em seguida, sugira que eles conversem sobre tudo o que foi visto até o momento sobre quadriláteros e anotem, no painel de descobertas, as classificações dos quadriláteros de acordo com as características deles, a soma das medidas de abertura dos ângulos internos e dos ângulos externos de quadriláteros convexos e as propriedades dos paralelogramos, dos retângulos e dos losangos.

Atividades 41, 42 e 43

Estas atividades abordam a validade ou não das propriedades dos paralelogramos, dos retângulos e dos losangos para losangos, quadrados e retângulos.

Nas atividades 41 e 42, também devem ser consideradas as características de losangos e de quadrados.

Atividade 44

Desenvolve os conhecimentos sobre as características dos retângulos, pois essa figura tem lados paralelos e a diagonal dela é uma transversal, o que permite resolver esta atividade pela relação entre ângulos alternos internos.

Além disso, ao traçar a diagonal, formamos 2 triângulos, o que possibilita também a resolução a partir da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Atividades 45, 46, 47 e 48

Estas atividades trabalham o cálculo de medidas de abertura de ângulos a partir da propriedade dos losangos.

Na atividade 46, esperamos que os alunos lembrem que os ângulos internos do quadrado são ângulos retos e usem a propriedade dos losangos (quadrado é losango) para determinar as medidas de abertura de ângulos desejadas.

Na atividade 48, se necessário, mostre que o ângulo $Q\hat{P}S$ é alterno interno com o ângulo de medida de abertura de 122° apresentado na figura. Caso algum aluno tenha resolvido de outra forma, peça que compartilhe com a turma.

2 Ampliando o estudo dos quadriláteros

Relembre com os alunos a definição de trapézio e peça que observem a figura. Pergunte a eles: "Quais são os lados paralelos nesse trapézio?"; "Qual é a base maior?"; "Qual é a base menor?".

Atividade 49

Relaciona os ângulos internos de trapézios para a constatação de uma propriedade dos trapézios: 2 ângulos em bases diferentes e não opostos são suplementares.

Se necessário, ajude-os a verificar que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são colaterais internos, assim como $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Atividades 50, 52 e 53

Estas atividades utilizam a propriedade descoberta no item **c** da atividade 49 para determinar medidas de abertura dos ângulos internos e relações entre elas.

Na atividade 50, relembre que ângulos opostos pelos vértices são congruentes.

Observe a resolução da atividade 53.

$x + 3x = 180° \Rightarrow 4x = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 180° \div 4 = 45°$

$3x = 3 \times 45° = 135°$

$y + 4y = 180° \Rightarrow 5y = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 180° \div 5 = 36°$

$4y = 4 \times 36° = 144°$

Atividade 51

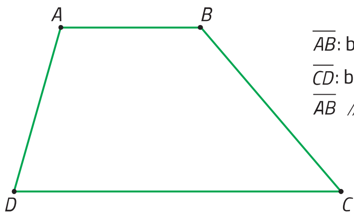
A atividade trabalha a descoberta das medidas de comprimento dos lados de um trapézio a partir da medida de perímetro dada e da resolução de uma equação.

Trapézios

Você já estudou a definição de trapézio.

Trapézio é todo quadrilátero que tem apenas 2 lados paralelos (base maior e base menor).

Banco de imagens/Arquivo da editora



$\overline{AB}$: base menor

$\overline{CD}$: base maior

$\overline{AB} \mathbin{/\mkern-6mu/} \overline{CD}$

PhotoHouse/Shutterstock

Ralador cujas laterais lembram a forma de um trapézio.

Atividades

Não escreva no livro!

49. a) Suplementares, pois as bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ estão sobre retas paralelas. Considerando $\overline{AD}$ sobre uma transversal, temos que $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são colaterais internos e, portanto, são suplementares ($m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180°$).

49 Responda no caderno considerando o trapézio *ABCD* dado acima.

a) $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são congruentes, complementares ou suplementares? Justifique.

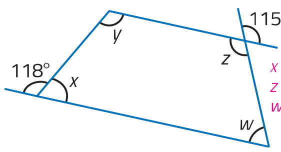
b) $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são congruentes, complementares ou suplementares? Justifique.

c) As respostas dos itens **a** e **b** nos mostram uma propriedade dos trapézios. Como você enunciaria essa propriedade?

50 Determine no caderno as medidas de abertura representadas pelas letras que aparecem nos trapézios.

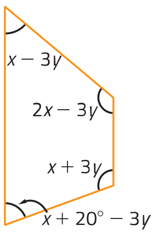
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a)



$x = 62°$, $y = 118°$, $z = 115°$ e $w = 65°$.

b)

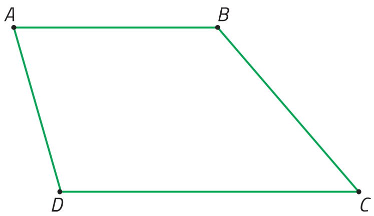


$x = 80°$ e $y = 10°$

51 Determine a medida de comprimento dos lados de um trapézio *PQRS* que tem medida de perímetro de 41 cm e medidas de comprimento dos lados, em centímetro, dadas por $PQ = 3x + 2$, $QR = x + 1$, $RS = x$ e $OS = 2x - 4$.

$PQ = 20$ cm, $QR = 7$ cm, $RS = 6$ cm, $PS = 8$ cm. $(3x + 2 + x + 1 + x + 2x - 4 = 41 \Rightarrow 7x - 1 = 41 \Rightarrow 7x = 42 \Rightarrow x = 6)$

52 Este quadrilátero é um trapézio ($\overline{AB} \mathbin{/\mkern-6mu/} \overline{CD}$).



Banco de imagens/Arquivo da editora

No caderno, copie o trapézio e apenas as afirmações verdadeiras.

X a) $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360°$

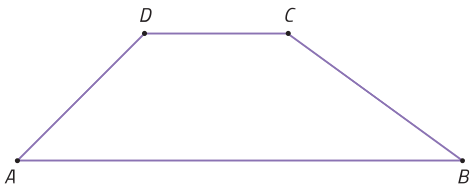
b) $m(\hat{B}) = m(\hat{D})$

X c) $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$

d) $m(\hat{D}) + m(\hat{C}) = 180°$

X e) $m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180°$

53 *ABCD* é um trapézio de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que $m(\hat{A}) = x$, $m(\hat{D}) = 3x$, $m(\hat{B}) = y$ e $m(\hat{C}) = 4y$, determine as medidas de abertura dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ desse trapézio.

$m(\hat{A}) = 45°$, $m(\hat{B}) = 36°$, $m(\hat{C}) = 144°$, $m(\hat{D}) = 135°$.

49. b) Suplementares, pelo mesmo motivo: as bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelas e $\overline{BC}$ é transversal.

c) Resposta esperada: Em todo trapézio, 2 ângulos não opostos, que estejam em bases diferentes, são suplementares.

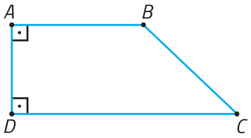
Tipos de trapézio

Vamos analisar 2 importantes tipos de trapézio.

Trapézio retângulo é aquele que tem 2 ângulos internos retos.

No trapézio retângulo, um dos lados que não é base é perpendicular às 2 bases.
Por exemplo, este trapézio *ABCD* é um trapézio retângulo.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



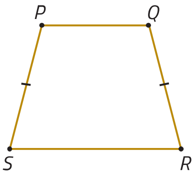
$\hat{A}$ e $\hat{D}$ são ângulos retos ($\overline{AD} \perp \overline{AB}$ e $\overline{AD} \perp \overline{DC}$).

$\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são as bases do trapézio ABCD.

Trapézio isósceles é aquele que tem os 2 lados não paralelos congruentes, isto é, de medidas de comprimento iguais.

Você pode verificar, experimentalmente, medindo a abertura dos ângulos e medindo o comprimento dos lados deste trapézio isósceles *PQRS*.

Banco de imagens/ Arquivo da editora



$\hat{P} \cong \hat{Q}$, $\hat{S} \cong \hat{R}$ e $\overline{PR} \cong \overline{SQ}$.

PQRS é um trapézio isósceles de bases $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$. Então, $\overline{PS} \cong \overline{QR}$.

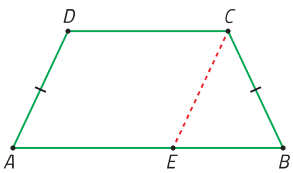
É possível demonstrar que esses fatos acontecem em todos os trapézios isósceles, ou seja:

Em um trapézio isósceles, os ângulos de uma mesma base são congruentes e as diagonais também são congruentes.

Demonstração

1ª parte

Considerando este trapézio isósceles *ABCD*, traçamos o segmento de reta $\overline{CE}$ paralelo ao lado $\overline{AD}$. Obtemos, assim, o paralelogramo *ADCE*.



Banco de imagens/ Arquivo da editora

Nesses quadriláteros, temos:

- $\overline{DA} \cong \overline{CE}$ (lados opostos do paralelogramo);
- $\overline{CE} \cong \overline{CB}$ (pois $\overline{DA} \cong \overline{CB}$ e $\overline{DA} \cong \overline{CE}$) e, então, o triângulo *CEB* é isósceles.

No triângulo isósceles *CEB*, temos $C\hat{E}B \cong C\hat{B}E$ (**I**). No paralelogramo *ADCE*, temos $D\hat{A}E \cong C\hat{E}B$ (**II**).
De **I** e **II**, concluímos que $D\hat{A}E \cong C\hat{B}E$, ou seja, no trapézio isósceles *ABCD*, $\hat{A} \cong \hat{B}$.
No trapézio isósceles *ABCD*, temos ainda que:

- $m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180° \Rightarrow m(\hat{D}) = 180° - m(\hat{A})$;
- $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180° \Rightarrow m(\hat{C}) = 180° - m(\hat{B}) \Rightarrow m(\hat{C}) = 180° - m(\hat{A})$.

De onde concluímos que $m(\hat{C}) = m(\hat{D})$, ou seja, $\hat{C} \cong \hat{D}$.

2 Ampliando o estudo dos quadriláteros

Apresente a definição de trapézio retângulo e de trapézio isósceles. Na lousa, desenhe um exemplo de cada um e peça que indiquem:

- no trapézio retângulo, o lado que é perpendicular aos lados paralelos e os 2 ângulos retos;
- no trapézio isósceles, os 2 lados paralelos, os 2 lados congruentes e os 2 pares de ângulos congruentes.

Então, trace as diagonais do trapézio isósceles e sugira que comparem as medidas de comprimento.

Em seguida, na lousa, demonstre que, em um trapézio isósceles, os ângulos adjacentes a uma mesma base são congruentes e as diagonais também são congruentes. Comece mostrando a congruência dos ângulos e, depois, prove a congruência das diagonais.

2 Ampliando o estudo dos quadriláteros

Peça aos alunos que leiam o problema, observem a figura e interpretem a situação, compartilhando o que entenderam. Chame a atenção deles para o fato de que a medida de comprimento da base maior é 10 cm e a medida de comprimento da base menor é o que queremos saber.

Em seguida, sugira que indiquem como podem resolver esta atividade, fazendo-os perceber que, na figura, podem identificar paralelogramos, pois têm lados paralelos congruentes, e usá-los para comparar as medidas de comprimento dos lados.

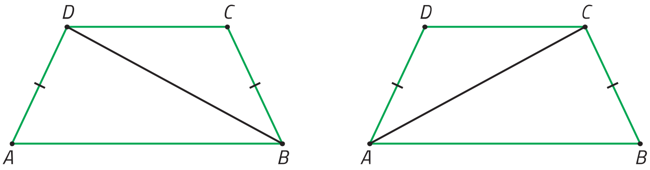
Permita que os alunos tentem descobrir a medida de comprimento da base menor a partir das ideias apresentadas e, depois, com eles, resolva a situação na lousa.

Então, solicite que verifiquem a resposta obtida e a apresentem.

Para finalizar, apresente a ampliação da atividade para que os alunos a resolvam. Se necessário, faça intervenções.

2ª parte

Considerando o mesmo trapézio isósceles $ABCD$, traçamos as diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$. Obtemos, assim, os triângulos DBC e ACD.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Nesses triângulos, temos que:

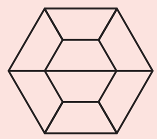
- $\overline{DC}$ é lado comum;
- $D\hat{C}B \cong A\hat{D}C$ (como demonstrado na 1ª parte);
- $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ (pois o trapézio $ABCD$ é isósceles).

Então, pelo caso LAL, triângulos DBC e ACD são congruentes e concluímos que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$.

Atividade resolvida passo a passo

(Obmep) A figura foi formada por oito trapézios isósceles idênticos, cuja base maior mede 10 cm. Qual é a medida, em centímetros, da base menor de cada um desses trapézios?

a) 4 b) 4,5 c) 5 d) 5,5 e) 6



Banco de imagens/Arquivo da editora

Lendo e compreendendo

Lembramos que as bases dos trapézios são paralelas e que, na figura dada, os trapézios são idênticos, ou seja, são congruentes. Dada a medida de comprimento da base maior, o enunciado pede a medida de comprimento da base menor.

Planejando a solução

Nos paralelogramos, os lados paralelos são congruentes. Vamos tentar identificar paralelogramos na figura dada e comparar as medidas de comprimento dos lados.

Executando o que foi planejado

Banco de imagens/Arquivo da editora

Como os trapézios são congruentes entre si, temos $AE = FD$. Observando o paralelogramo $FECD$ concluímos que $FD = EC$.

Temos: $AC = AE + EC \Rightarrow AC = AE + FD \Rightarrow AC = FD + FD \Rightarrow AC = 2 \cdot FD$

Agora, no paralelogramo $ACNM$, temos $AC = MN$ e, então:

$$MN = 2 \cdot FD \Rightarrow 10 = 2 \cdot FD \Rightarrow FD = 5$$

Verificando

$$FD = 5 \Rightarrow EC = 5 \Rightarrow AC = AE + EC \Rightarrow 5 + 5 = 10$$

Se $AC = 10$, então $MN = 10$ (pois são lados opostos de um paralelogramo). Logo, mostramos que, se a base menor tem a medida de comprimento de 5 cm, então a base maior tem medida de comprimento de 10 cm, o que confirma a solução.

Emitindo a resposta

Alternativa **c**.

Ampliando a atividade

Na figura dada podemos observar 2 hexágonos regulares. Qual é a medida de comprimento da maior diagonal do maior hexágono?

Solução

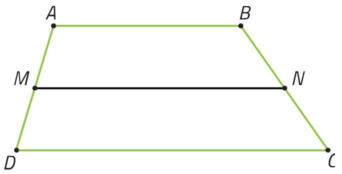
O segmento de reta $\overline{AQ}$ é uma das diagonais de maior medida de comprimento do maior hexágono.

Temos: $AE = EC = CP = PQ = 5$

Então: $AQ = AE + EC + CP + PQ = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$

Base média de um trapézio

Observe este trapézio *ABCD*, no qual $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases e *M* e *N* são os pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Thiago Neumann/Arquivo da editora

> Em todo trapézio, a medida de comprimento da base média é igual à média aritmética das medidas de comprimento das bases maior e menor do trapézio.

Assim, neste trapézio *ABCD* temos:

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

54. b) $m(\hat{E}) = 135°$, $m(\hat{F}) = 45°$, $m(\hat{G}) = 90°$ e $m(\hat{H}) = 90°$. $(x + 3x = 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow 4x = 180° \Rightarrow x = 45°; 3x = 135°)$

56. 72°, 72°, 108° e 108°. $\left(x + \frac{2x}{3} = 180° \Rightarrow 3x + 2x = 540° \Rightarrow x = 108°; \frac{2}{3} \text{ de } 108° = 72°\right)$

Atividades

Não escreva no livro!

54 Responda no caderno.

a) Em um trapézio retângulo, um dos ângulos internos tem medida de abertura de 53°. Quais são as medidas de abertura dos outros 3 ângulos internos? 90°, 90° e 127°. $(53° + 90° + 90° = 233°; 360° - 233° = 127°)$

b) Em um trapézio retângulo *EFGH*, a medida de abertura do ângulo obtuso $\hat{E}$ é o triplo da medida de abertura do ângulo agudo $\hat{F}$. Quais são as medidas de abertura dos ângulos $\hat{E}$, $\hat{F}$, $\hat{G}$ e $\hat{H}$?

55 Considere um trapézio isósceles *PQRS* tal que $\overline{PS} \cong \overline{QR}$. Desenhe-o no caderno e classifique cada afirmação a seguir em verdadeira ou falsa.

a) $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$

b) $\overline{PQ} \,/\!/\, \overline{RS}$

c) $\overline{PR} \cong \overline{SQ}$

d) $\hat{P} \cong \hat{Q}$

e) $\hat{P} + \hat{S} = 180°$

f) $\hat{R} + \hat{S} = 180°$

Verdadeiras: **b**, **c**, **d**, **e**; falsas: **a**, **f**.

56 Um trapézio é isósceles e a medida de abertura de um dos ângulos agudos corresponde a $\frac{2}{3}$ da medida de abertura de um dos ângulos obtusos. Quais são as medidas de abertura dos 4 ângulos internos desse trapézio?

57 Meça o comprimento das bases maior, menor e média no trapézio *ABCD* acima e confira a propriedade enunciada. *CD* = 5 cm, *AB* = 3 cm; *MN* = 4 cm; $4 = \frac{5 + 3}{2}$.

58 Analise as afirmações referentes aos trapézios.

I. Têm apenas 2 lados paralelos.
II. Têm 2 ângulos retos.
III. Os 2 lados que não são bases são congruentes.
IV. Têm 2 pares de ângulos suplementares.
V. Têm as 2 diagonais congruentes.
VI. Têm os 2 ângulos de cada base congruentes.
VII. Têm um lado perpendicular às 2 bases.

Agora, responda no caderno.

a) Quais afirmações valem para todos os trapézios? **a) I** e **IV**.

b) Quais afirmações valem apenas para trapézios retângulos? **II** e **VII**.

c) Quais afirmações valem apenas para trapézios isósceles? **III**, **V** e **VI**.

59 Determine a medida de comprimento da base média de um trapézio em que a medida de comprimento da base maior é de 8,25 cm e a medida de comprimento da base menor é de 6,15 cm.

60 Sabendo que a base média de um trapézio tem medida de comprimento de 6,5 cm e a base maior tem medida de comprimento de 8 cm, qual é a medida de comprimento da base menor?

59. 7,2 cm $\left(\frac{8,25 + 6,15}{2} = 7,2\right)$

60. 5 cm $\left(6,5 = \frac{8 + x}{2} \Rightarrow 8 + x = 13 \Rightarrow x = 5\right)$

2 Ampliando o estudo dos quadriláteros

Peça aos alunos que observem a figura do trapézio *ABCD* com base média $\overline{MN}$, tal que *M* é o ponto médio de $\overline{AD}$ e *N* é o ponto médio de $\overline{BC}$, e explique que a medida de comprimento da base média é igual à média aritmética das medidas de comprimento das bases maior e menor do trapézio.

Se necessário, relembre o cálculo da média aritmética, visto no 6º ano.

Antes de solicitar a resolução das atividades, sugira que a turma use as próprias palavras para anotar, no painel de descobertas, a definição de trapézio, a propriedade descoberta na atividade 49 da página 126, os tipos de trapézios, a propriedade de trapézio isósceles e a definição e a propriedade da base média de um trapézio.

Atividades 54 e 56

Estas atividades desenvolvem o cálculo das medidas de abertura dos ângulos internos de trapézios retângulos e de trapézios isósceles a partir das relações entre as medidas de abertura dos ângulos internos desses trapézios.

Atividades 55 e 58

Estas atividades relacionam as afirmações dadas com as características de qualquer trapézio, de um trapézio retângulo e de um trapézio isósceles.

Atividades 57, 59 e 60

Usando a propriedade da base média de um trapézio, calculam a medida de comprimento da base média dos trapézios dados e a medida de comprimento de uma das bases de um trapézio.

Na atividade 60, se necessário, oriente os alunos a substituir os valores conhecidos na fórmula e resolver a equação obtida para descobrir a medida de comprimento da base menor do trapézio.

Revisando seus conhecimentos

Atividade 4

Veja a resolução desta atividade.

$x + x + 25 + 3x - 20 =$
$= 180 \Rightarrow x = 35$

$3x - 20° = 3 \times 35° - 20° = 85°$

$y = 180° - 85° = 95°$

$z = 180° - (35° + 95°) = 50°$

Atividade 2

Esta atividade trabalha a determinação das medidas de abertura de ângulos a partir da propriedade de que 2 ângulos não opostos em um paralelogramo são suplementares (1ª propriedade dos paralelogramos) e da relação de ângulos correspondentes (ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal).

Atividade 5

Esta atividade retoma a escrita e resolução de uma equação para a resolução de uma situação apresentada e o cálculo de porcentagens de números.

Veja a resolução desta atividade.

$0{,}6x \times 400 + 0{,}4x \times 300 =$
$= 216\,000 \Rightarrow 240x + 120x =$
$= 216\,000 \Rightarrow x = 600$

$0{,}6x = 0{,}6 \times 600 = 360$

$0{,}4x = 0{,}4 \times 600 = 240$

Atividade 6

Observe a tabela de possibilidades que deve constar na resposta desta atividade.

R$ 50,00	R$ 20,00	R$ 10,00
2	1	-
2	-	2
1	3	1
1	2	3
1	1	5
-	-	7
-	6	-
-	5	2
-	4	4
-	3	6
-	2	8
-	1	10
-	-	12

Atividade 7

Esta atividade contextualiza o cálculo de porcentagens envolvendo acréscimos e decréscimos.

Veja a resolução desta atividade.

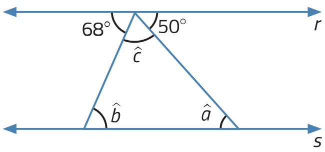
$0{,}10 \times 200 = 20$
$200 + 20 = 220$
$0{,}10 \times 220 = 22$
$220 - 22 = 198$

1. $\hat{a} = 50°$, $\hat{b} = 68°$ e $\hat{c} = 62°$. (Obtém-se $\hat{a}$ pela relação de alternos internos, $\hat{b}$ também pela relação de alternos internos e $\hat{c} = 180° - (50° + 68°) = 62°$.)

Revisando seus conhecimentos

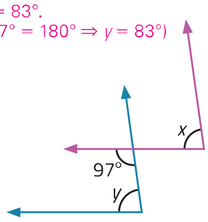
Não escreva no livro!

1 Sabendo que as retas *r* e *s* desta figura são paralelas, determine no caderno as medidas de abertura $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ dos ângulos internos do triângulo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

2 Os ângulos desta figura têm lados paralelos. Calcule no caderno o valor de *x* e de *y*.
$x = 83°$ e $y = 83°$.
($x = y$; $y + 97° = 180° \Rightarrow y = 83°$)

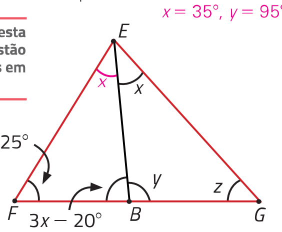


Banco de imagens/Arquivo da editora

3 Qual é a medida de abertura de cada ângulo interno de um dodecágono regular (polígono regular de 12 lados)? 150° ($(12 - 2) \times 180° = 10 \times 180° = 1\,800°$; $1\,800° \div 12 = 150°$)

4 Calcule no caderno as medidas de *x*, *y* e *z* neste triângulo *EFG*, sabendo que $\overline{EB}$ é bissetriz do triângulo. $x = 35°$, $y = 95°$ e $z = 50°$.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

5 Em uma escola particular, 60% dos alunos são do Ensino Médio, e cada um deles paga R$ 400,00 de mensalidade. Os alunos restantes são do Ensino Fundamental, e cada um deles paga R$ 300,00 por mês. Sabendo que a arrecadação mensal é de R$ 216 000,00, calcule no caderno o número de alunos no Ensino Médio e no Ensino Fundamental dessa escola.
360 e 240 alunos, respectivamente.

6 De quantas maneiras diferentes podemos fazer um pagamento de R$ 120,00 usando apenas cédulas de R$ 50,00, R$ 20,00 e R$ 10,00? Responda e construa no caderno uma tabela com todas as maneiras.
13 maneiras diferentes.

Reprodução/Casa da Moeda do Brasil/Ministério da Fazenda

7 Um produto custava R$ 200,00, teve um aumento de 10% e, em seguida, uma redução de 10%. Qual passou a ser o preço desse produto? R$ 198,00

8 No caderno, indique se esta afirmação é verdadeira ou falsa. No caso de ser verdadeira, dê 3 exemplos que a confirmem. No caso de ser falsa, dê 1 contraexemplo, ou seja, um exemplo que contesta a afirmação feita. MP

Dados 3 segmentos de reta, com medidas de comprimento diferentes, sempre é possível formar um triângulo tendo esses segmentos de reta como lados dele.

9 Calcule cada probabilidade e registre no caderno usando uma fração irredutível e uma porcentagem.

Dado.

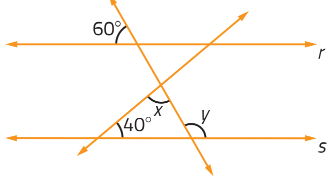
bilder/Shutterstock

a) No lançamento de um dado, a probabilidade de sair um divisor de 15.

b) No sorteio de uma letra da palavra ARARA, a probabilidade de sair a letra **R**.

c) Retirando uma bolinha de um saquinho que contém 3 bolas vermelhas, 5 azuis e 2 brancas, a probabilidade de sair uma bola vermelha.

10 As retas *r* e *s* desta figura são paralelas.
($y + 60° = 180° \Rightarrow y = 120°$; $x + 40° = 120° \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 80°$; $x + y = 80° + 120° = 200°$)



Banco de imagens/Arquivo da editora

Então, o valor de $x + y$ é igual a:

a) 220°.
b) 190°.
c) 210°.
X d) 200°.

11 **Projeto em grupo: trabalhando com Geometria.**
Vamos trabalhar em grupo com 3 projetos. Ao final, compartilhem os trabalhos com os outros grupos.
Respostas pessoais.

a) Recortem de jornais e revistas trechos de plantas de um bairro ou de uma cidade e localizem neles: ângulos adjacentes e suplementares, ângulos opostos pelo vértice, ângulos formados por paralelas cortadas por uma transversal, triângulos e quadriláteros.

b) Construam vários tipos de ladrilhamento usando polígonos regulares.

c) Façam uma pesquisa sobre demonstração em Matemática apresentando exemplos não estudados neste capítulo.

9. a) $\frac{1}{2}$ e 50%. (3 em 6) **b)** $\frac{2}{5}$ e 40%. (2 em 5) **c)** $\frac{3}{10}$ e 30%. (3 em 10)

Atividade 8

Confira a resposta desta atividade.

Falsa; exemplo de contraexemplo: se os segmentos de reta tiverem medidas de comprimento de 2 cm, 3 cm e 6 cm, então não será possível construir um triângulo com esses segmentos de reta como lados. Para que seja possível a construção, a medida de comprimento do maior segmento de reta deve ser menor do que a soma das medidas de comprimento dos outros 2 lados (condição de existência de um triângulo).

Atividade 9

Esta atividade retoma o cálculo de probabilidades usando fração irredutível e porcentagem.

Veja a resolução de cada item desta atividade.

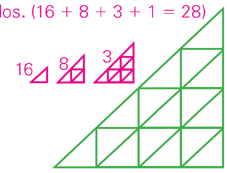
a) $\frac{1}{2}$ e 50% (3 em 6).

b) $\frac{2}{5}$ e 40% (2 em 5).

c) $\frac{3}{10}$ e 30% (3 em 10).

12 Observe esta figura e responda no caderno.

a) 28 triângulos. (16 + 8 + 3 + 1 = 28)



Banco de imagens/Arquivo da editora

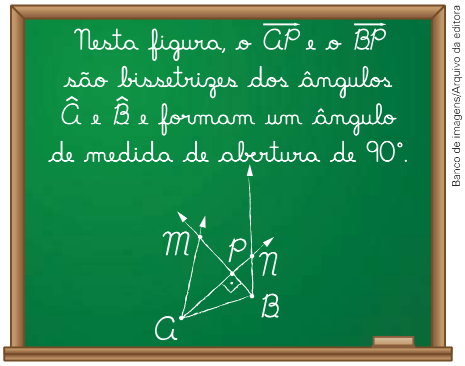
a) Quantos triângulos há nesta figura?

b) Quantos grupos de triângulos congruentes é possível observar nesta figura?
3 grupos. (Triângulos menores, médios e grandes.)

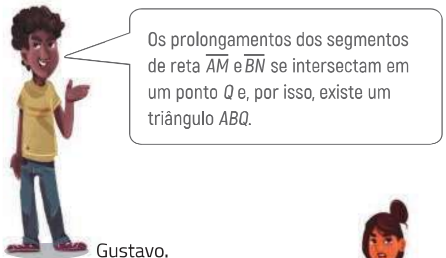
13 **Informações ausentes.** Gustavo e Mariana, alunos do 8º ano **A**, não estavam presentes na aula de Matemática do professor Sérgio sobre triângulos.

No dia seguinte, ao entrarem na sala de aula, perceberam que a lousa ainda continha alguns dados da aula que haviam perdido: uma figura, cuja parte superior havia sido apagada, e um comentário.

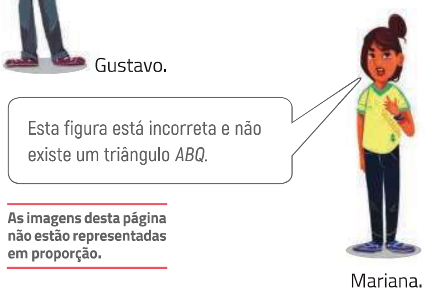
Veja o que eles disseram após analisar a figura e o comentário na lousa e responda e justifique no caderno: Qual deles tem razão? Mariana.



Banco de imagens/Arquivo da editora



Gustavo.



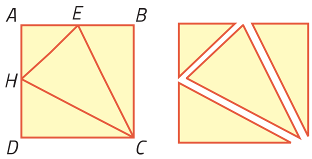
Mariana.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Ilustrações: Thiago Neumann/Arquivo da editora

14 **Brincando com barbante.** Clarissa cortou 2 pedaços de barbante: um com medida de comprimento de 5 cm e o outro, de 16 cm. Para que ela forme um triângulo usando os 2 pedaços como lados, qual é a menor medida de comprimento inteira, em centímetros, que um terceiro pedaço de barbante deve ter?
12 cm $(16 > 5 + x \Rightarrow x > 12)$

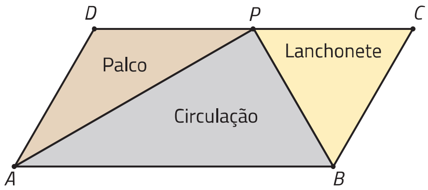
15 **Divirtam-se.** Pegue uma folha de papel sulfite e corte uma grande região quadrada $ABCD$. Marque o ponto médio E do $\overline{AB}$ e o ponto médio H do $\overline{AD}$. Em seguida, trace os segmentos de reta $\overline{CE}$, $\overline{CH}$ e $\overline{HE}$ e recorte a região quadrada em 4 regiões triangulares, como mostra esta figura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Embaralhe as regiões triangulares e dê para um colega montar uma região quadrada. Você verá que não é um quebra-cabeça tão simples para quem não conhece a solução. Resposta pessoal.

16 **Urbanismo.** Uma praça tem a forma de um paralelogramo como representado nesta figura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Nessa praça serão construídos um palco, na parte correspondente ao $\triangle ADP$, e uma lanchonete, na parte correspondente ao $\triangle BCP$. A parte correspondente ao $\triangle ABP$ será o espaço de circulação das pessoas. Sabe-se que a medida de área total da praça é de 520 m² e que as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ se intersectam no ponto P de $\overline{CD}$. Considerando 4 pessoas por metro quadrado, calcule no caderno quantas pessoas cabem no espaço reservado para a circulação.
1 040 pessoas. $(520 \div 2 = 260; 4 \times 260 = 1\,040)$

Raciocínio lógico

Copie as afirmações no caderno e complete logicamente.

Nenhum quadrilátero é triângulo.

Todo quadrado é um quadrilátero.

Portanto, ▇. Nenhum quadrado é triângulo.

bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo nunca podem ser perpendiculares. Veja a resolução desta atividade.

De início, podemos escrever $A = 2x$ e $B = 2y$, pois $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BP}$ são bissetrizes de $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Agora, vamos admitir que Gustavo esteja certo, ou seja, ABQ é um triângulo. Considerando-se o triângulo ABP, temos $x + y + 90° = 180°$, que nos leva à relação $x + y = 90°$. No entanto, se considerarmos o triângulo ABQ, teremos $A + B + Q = 180°$. Como $A = 2x$; $B = 2y$ e $x + y = 90°$, vem: $A + B + Q = 180° \Rightarrow 2x + 2y + Q = 180° \Rightarrow 2(x + y) + Q = 180° \Rightarrow 2 \times 90° + Q = 180° \Rightarrow Q = 0°$

Não pode existir um triângulo com um dos ângulos internos medindo 0°; portanto, Gustavo não está certo, pois 2 bissetrizes de um triângulo não podem formar um ângulo reto. Conclusão: 2 bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo nunca podem ser perpendiculares. Logo, Mariana está com a razão.

Atividade 14

Esta atividade desenvolve a determinação da medida de comprimento do 3º lado de um triângulo, usando a condição de existência de um triângulo.

Atividade 15

Esta atividade apresenta a construção de um quebra-cabeça de uma região quadrada cujas peças são regiões triangulares.

Atividade 16

Esta atividade retoma o cálculo da medida de área de uma região triangular a partir da medida de área de uma região limitada por um paralelogramo.

Raciocínio lógico

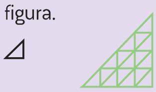
Apresenta 2 afirmações, relacionando quadriláteros, triângulos e quadrados, que, por lógica, devem levar a uma conclusão.

Revisando seus conhecimentos

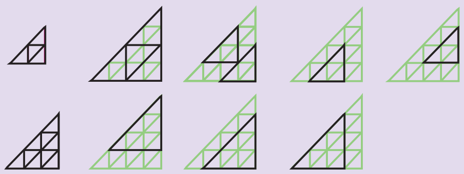
Atividade 12

Esta atividade trabalha com a identificação de triângulos congruentes na figura dada. Então, sugira aos alunos que copiem a figura no caderno e tracem os triângulos para facilitar a identificação e a contagem.

Confira os triângulos menores, médios e grandes identificados na figura.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividade 13

Esta atividade usa bissetriz de ângulos internos do triângulo para descobrir o que está faltando em uma figura, demonstrando que 2

Testes oficiais

Atividade 1

Esta atividade aborda a localização de um ponto equidistante a 3 pontos.

Se necessário, relembre aos alunos que esse ponto é a intersecção das mediatrizes dos lados do triângulo cujos vértices são os pontos dados.

Veja a resolução desta atividade na página LIII deste manual.

Atividade 2

Esta atividade compara características de um quadrado e de um retângulo.

Atividade 3

Esta atividade desenvolve a identificação de trapézios e triângulos.

Atividade 4

Esta atividade apresenta um trapézio retângulo para o cálculo de uma medida de abertura de ângulo.

Como foi traçada uma diagonal, formando 2 triângulos, os alunos podem descobrir a medida pela relação de ângulos alternos internos e pela soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo.

Atividade 5

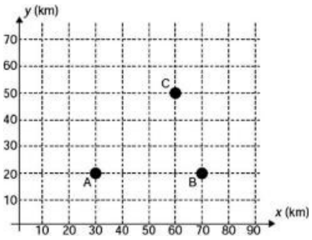
Esta atividade trabalha a descoberta da medida de abertura de um ângulo a partir da propriedade de que 2 ângulos não opostos em um paralelogramo são suplementares (1ª propriedade dos paralelogramos).

4. (A figura é um trapézio; $50° + x + 15° = 180° \Rightarrow x = 180° - 65° = 115°$; na questão oficial do Saresp, os itens **b** e **c** aparecem iguais.)

Testes oficiais

Não escreva no livro!

1 **(Enem)** Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas **A**, **B** e **C**, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



Reprodução/ENEM, 2013

A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas:

a) (65; 35).
b) (53; 30).
c) (45; 35).
d) (50; 20).
X e) (50; 30).

2 **(Prova Brasil)** Observe as figuras abaixo.

Retângulo. Quadrado.

Reprodução/Prova Brasil, 2011

Considerando essas figuras:

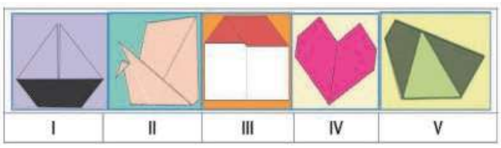
a) os ângulos do retângulo e do quadrado são diferentes.

b) somente o quadrado é um quadrilátero.

X c) o retângulo e o quadrado são quadriláteros.

d) o retângulo tem todos os lados com a mesma medida. (Os 2 polígonos são quadriláteros e os ângulos internos deles são todos congruentes.)

3 **(Saresp)** As figuras abaixo mostram origamis (dobraduras), vistos de frente, e que Mariana faz como artesanato. Eles serão usados para construir móbiles para uma aula de Geometria.

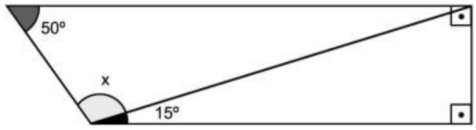


Reprodução/Saresp, 2008

Mariana só pode usar aqueles cujas faces são trapézios e triângulos. Ela deve escolher apenas os origamis representados nas figuras:

a) **I**, **II**.
b) **II**, **III** e **V**.
c) **II**, **III** e **IV**.
X d) **I** e **V**.

4 **(Saresp)** Pode-se calcular a medida do ângulo indicado por *x* na figura sem necessidade de uso do transferidor.

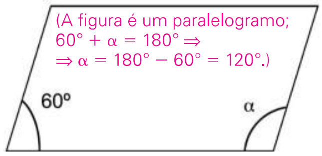


Reprodução/Saresp, 2008

Sua medida é igual a:

X a) 115°.
b) 125°.
c) 125°.
d) 135°.

5 **(Saresp)** Assinale a alternativa que mostra corretamente a medida do ângulo α desenhado na figura abaixo:

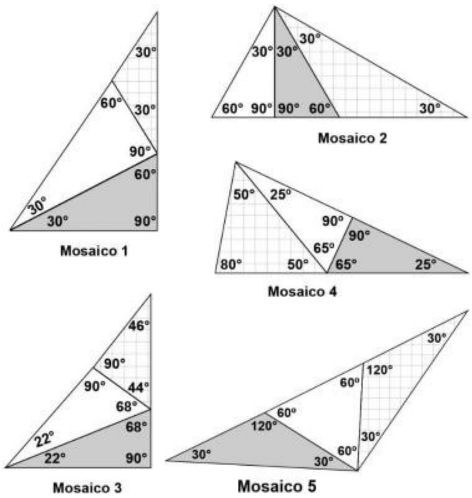


(A figura é um paralelogramo; $60° + \alpha = 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha = 180° - 60° = 120°$.)

Reprodução/Saresp, 2008

X a) 120°
b) 60°
c) 150°
d) 90°

6 **(Enem)** Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.



Reprodução/ENEM, 2016

Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o:

a) 1.
X b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

6. (**1**: Há 1 triângulo isósceles, mas não há triângulos congruentes; **2**: há 2 triângulos congruentes e o outro triângulo é isósceles; **3**: há 2 triângulos congruentes, mas o outro triângulo não é isósceles; **4**: o triângulo formado não é retângulo; **5**: o triângulo formado não é retângulo.)

Verifique o que estudou

Principal habilidade da BNCC

EF08MA15

Atividades 1 e 2

Estas atividades trabalham congruência de triângulos e os casos de congruência.

Veja a resolução da atividade 1.

Conhecer a congruência dos 3 ângulos internos e a congruência dos 3 lados garante a congruência dos triângulos. Além disso, conhecer a congruência de apenas alguns desses elementos, que satisfaçam os casos de congruência, também garante a congruência dos triângulos.

Veja a resolução da atividade 2.

Exemplo de resposta: Não precisar verificar a congruência dos 3 ângulos internos e dos 3 lados para determinar se os triângulos são congruentes ou não.

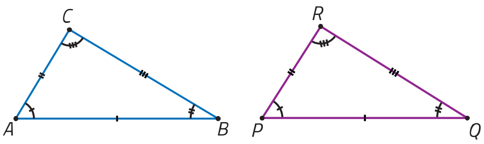
Atividade 3

Esta atividade apresenta a construção de um triângulo retângulo e de um paralelogramo usando régua e transferidor.

VERIFIQUE O QUE ESTUDOU

Não escreva no livro!

1 Para garantir a congruência de 2 triângulos, precisamos conhecer a congruência de quantos ângulos internos e a congruência de quantos lados? Converse com os colegas. MP



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2 Qual é a vantagem de conhecer os casos de congruência dos triângulos? MP

3 Use régua e transferidor e desenhe no caderno. MP

a) Um triângulo retângulo em que um dos ângulos internos tem medida de abertura de 20°.

b) Um paralelogramo *ABCD* no qual $AB = 5$ cm, $AD = 3$ cm e $m(\hat{A}) = 40°$.

4 Leiam, façam a construção, explorem e descubram!

Dada a grande importância do **ortocentro** (intersecção das alturas de um triângulo), do **incentro** (intersecção das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo), do **baricentro** (intersecção das medianas de um triângulo) e do **circuncentro** (intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo), esses pontos são chamados de **pontos notáveis de um triângulo**.

Construam um triângulo equilátero em uma folha de papel sulfite. Em seguida, localizem os 4 pontos notáveis desse triângulo usando régua e compasso.

O que vocês podem observar em relação a esses 4 pontos em um triângulo equilátero? MP

5 Utilizando régua e compasso, construa em uma folha de papel sulfite um triângulo isósceles *ABC* em que $AB = 12$ cm, $BC = 10$ cm e $AC = 10$ cm. Depois, faça o que se pede.

a) Localize os 4 pontos notáveis desse triângulo e nomeie-os. MP

b) Indique qual ponto você tomaria como centro para a circunferência inscrita no triângulo. O incentro.

c) E qual ponto seria o centro da circunferência circunscrita a esse triângulo? O circuncentro.

d) O que você percebe de curioso nos pontos notáveis do triângulo que você construiu?

5. d) Exemplos de resposta: Todos estão alinhados; todos pertencem à bissetriz do ângulo $\hat{C}$; todos pertencem à mediatriz do lado $\overline{AB}$; todos pertencem à mediana relativa ao vértice *C*; todos pertencem à altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

6 Marque no caderno 3 pontos *A*, *B* e *C* não colineares (não alinhados). Depois, com régua e compasso, construa a circunferência que passa pelos 3 pontos. MP

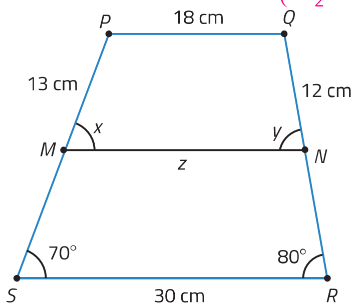
7 Dado o desenho de uma circunferência, como podemos determinar o centro dela?

7. Podemos escolher 3 pontos da circunferência que determinam um triângulo e traçamos a mediatriz de 2 lados desse triângulo. A intersecção das mediatrizes traçadas é o centro da circunferência.

8 Em um quadrilátero *ABCD*, a medida de abertura do $\hat{A}$ é 20° a mais do que a medida de abertura do $\hat{B}$, a medida de abertura do $\hat{C}$ é 20° a menos do que a medida de abertura do $\hat{B}$, e a medida de abertura do $\hat{D}$ é o dobro da medida de abertura do de $\hat{C}$. Quantos ângulos agudos esse quadrilátero tem? 2 ângulos agudos.

9 Sabendo que *M* é ponto médio de $\overline{PS}$, *N* é o ponto médio de $\overline{QR}$ e *PQRS* é um trapézio, determine no caderno os valores de *x*, *y* e *z*.

$x = 70°$; $y = 80°$ e $z = 24$ cm. $\left(\frac{30+18}{2} = 24\right)$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Atenção

Retome os assuntos que você estudou neste capítulo. Verifique em quais teve dificuldade e converse com o professor, buscando maneiras de reforçar seu aprendizado.

Autoavaliação

Algumas atitudes e reflexões são fundamentais para melhorar o aprendizado e a convivência na escola. Reflita sobre elas. Respostas pessoais.

- Colaborei com o professor e com os colegas nas atividades realizadas na escola?
- Tomei atitudes visando resolver minhas dúvidas sobre o conteúdo e ajudando os colegas naquilo que sei?
- Realizei as leituras do livro com atenção e resolvi todas as atividades que o professor propôs?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

Se necessário, relembre que nestas atividades é necessária a construção das mediatrizes dos segmentos que ligam os 3 pontos dados ou escolhidos.

Observe a construção da atividade 6 na página LIII deste Manual.

Atividade 8

Esta atividade trabalha a escrita e resolução de uma equação, usando a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero, para descobrir as medidas de abertura dos ângulos.

Além disso, devem classificar os ângulos quanto às medidas, indicando quantos ângulos agudos esse quadrilátero tem.

Confira a resolução desta atividade.

$m(\hat{B}) = x$

$x + 20° + x + x - 20° +$
$+ 2(x - 20°) = 360° \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x - 40° = 360° \Rightarrow x = 80°$

$m(\hat{A}) = 80° + 20° = 100°$

$m(\hat{C}) = 80° - 20° = 60°$

$m(\hat{D}) = 2 \times 60° = 120°$

Atividade 9

Esta atividade aborda a determinação das medidas de comprimento do segmento e de abertura dos ângulos solicitados a partir da propriedade de base média de um trapézio e das relações de ângulos formados por retas cortadas por uma transversal.

Autoavaliação

As questões de autoavaliação apresentadas propiciam aos alunos refletir sobre os estudos, as atitudes e as aprendizagens. Dê um tempo para que o aluno reflita individualmente sobre elas e registre as respostas no caderno. Em seguida, àqueles que desejarem, permita que compartilhem as respostas com os colegas.

Ao longo do ano, é importante a retomada dos registros de autoavaliação feitos no fim de cada capítulo, para que eles possam perceber e mensurar o quanto aprenderam e melhoraram em diversos aspectos.

Em relação às perguntas propostas nesta página, converse com a turma sobre a importância de sanar todas as dúvidas que surgirem no decorrer dos estudos, de modo a não prosseguir para outro capítulo ou conteúdo com dificuldades que prejudicarão as novas aprendizagens.

Veja exemplos de resposta desta atividade na página LIII deste Manual.

Atividades 4 e 5

Estas atividades abordam a construção de triângulos equiláteros e isósceles e a localização do ortocentro, incentro, baricentro e circuncentro deles usando régua e compasso.

A atividade 4 apresenta ortocentro, incentro, baricentro e circuncentro como pontos notáveis de um triângulo. Além disso, permite que os alunos percebam que esses pontos notáveis coincidem no triângulo equilátero. Observe a resposta desta atividade na página LIII deste Manual.

Na atividade 5, os alunos também devem identificar quais pontos seriam os centros para circunferências inscritas e circunscritas no triângulo. Veja a construção do item **a** desta atividade na página LIII deste Manual.

Atividades 6 e 7

A atividade 6 desenvolve a construção de uma circunferência por 3 pontos não colineares. Já a atividade 7 faz o oposto: apresenta a circunferência para determinarmos o centro dela, o que depende da escolha de 3 pontos não colineares pertencentes à circunferência.

Avaliação

Para mais informações, veja a **avaliação** do 2º bimestre.

CAPÍTULO 5

Sistemas de equações do 1º grau com 2 incógnitas

Abertura

Neste capítulo serão exploradas as equações do 1º grau com 2 incógnitas e os sistemas com 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas. É importante desenvolver o conteúdo considerando tanto a parte operacional – ou seja, os métodos de resolução que podem ser aplicados a um sistema de equações do 1º grau – quanto suas aplicações. Quando falamos em aplicações, estamos nos referindo ao trabalho com situações-problema que envolvam sistemas de equações do 1º grau.

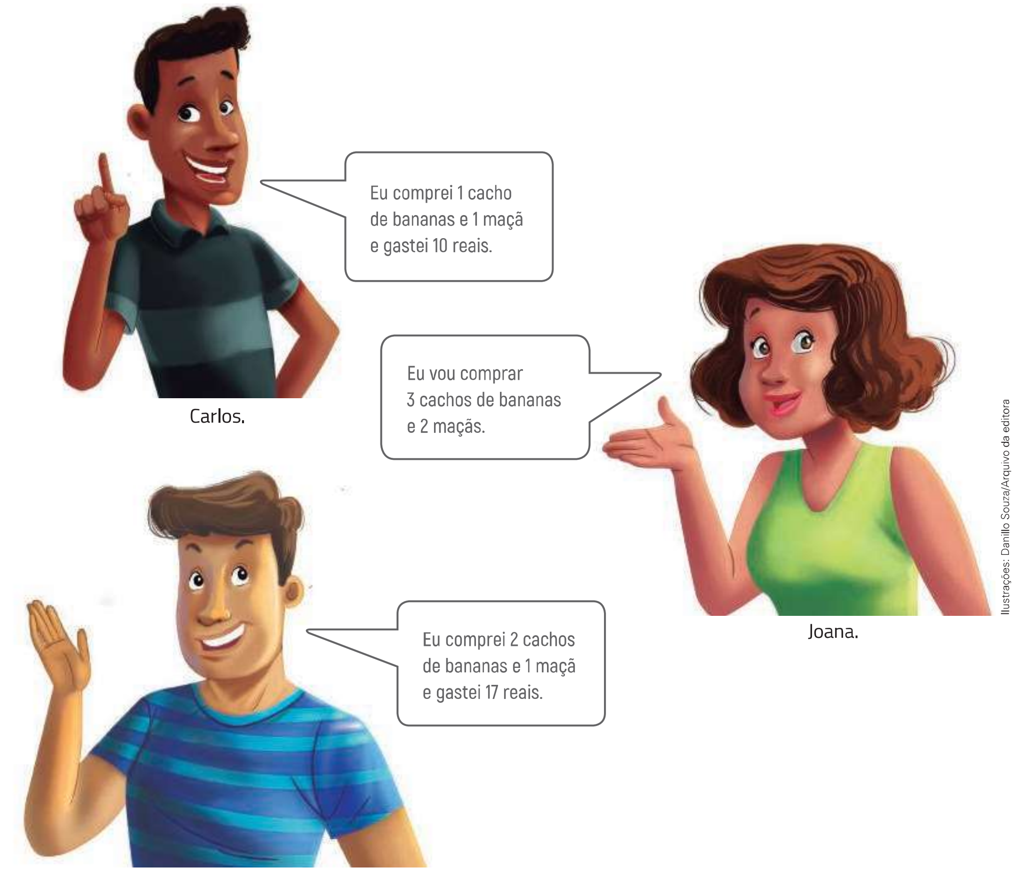
Quando possível, sugira aos alunos que se organizem em duplas para elaboração de problemas ou resolução dos problemas do livro; destacamos que as atividades de elaboração de problemas devem ser exploradas, pois podem permitir aos alunos que revisem os próprios conhecimentos, etapa imprescindível para a elaboração de um problema.

Acompanhe a leitura e a observação das informações apresentadas nesta página.

Plano de desenvolvimento

Para mais informações, veja o **plano de desenvolvimento** do 3º bimestre.

Danillo Souza/Arquivo da editora



Carlos.
Joana.
Daniel.

Veja as afirmações de Carlos e de Daniel. Para saber, a partir dessas afirmações, quanto Joana vai gastar, podemos usar um **sistema de equação do 1º grau com 2 incógnitas**.

Neste capítulo, vamos estudar esse conteúdo e muitas aplicações dele.

Não escreva no livro!

Converse com os colegas sobre estas questões e faça os registros no caderno.

1 Representando por x o preço de 1 cacho de bananas e por y o preço de 1 maçã, em reais, quais são as equações correspondentes às afirmações de Carlos e de Daniel? $x + y = 10$ e $2x + y = 17$.

2 Efetuando 17 − 10, o que vamos descobrir? O valor de x, ou seja, o preço de 1 cacho de bananas.

3 Qual é o preço de cada cacho de bananas? E de cada maçã? 7 reais; 3 reais. ($17 - 10 = 7$; $10 - 7 = 3$)

4 Quanto Joana vai gastar? 27 reais. ($3 \times 7 + 2 \times 3 = 21 + 6 = 27$)

Abertura

Organize os alunos em duplas para que possam conversar sobre as questões apresentadas.

Se achar conveniente, antes da análise das imagens, retome algumas situações-problema simples que envolvam equações do 1º grau; estas questões devem ter como objetivo rever a identificação de uma incógnita.

Em seguida, peça aos alunos que analisem a imagem desta página e questione-os: “Em que diferem as situações apresentadas das situações-problema que envolvem equações do 1º grau?”. Esperamos que os alunos percebam que a diferença está no número de incógnitas e que agora há mais de um valor desconhecido na situação.

É possível, também, estender o estudo pedindo aos alunos que elaborem novos problemas similares aos explorados. Solicite a eles que observem e criem uma situação-problema similar à dessa imagem e, em seguida, criem perguntas a respeito da situação e troquem com um colega. O objetivo aqui deve ser a identificação de equações e não a resolução, pois esta será explorada a seguir.

Questões 2 a 4

Sobre o método de resoluções, é importante notar que essas questões já dão indicação de como resolver esse modelo de sistema; caso os alunos tentem resolver os sistemas elaborados anteriormente, peça que descrevam os passos utilizados em sua resolução. Se possível, retome os sistemas após a leitura da teoria e compare os passos descritos pelos alunos com os apresentados no livro.

1 Equações do 1º grau com 2 incógnitas

Principal habilidade da BNCC

EF08MA07

Retome com os alunos o que são pares ordenados. Lembre-os, por exemplo, de que o par ordenado $(3, 4)$ é diferente do par ordenado $(4, 3)$.

Pergunte aos alunos: "Quantas respostas são possíveis para o problema apresentado nesta página?". Em sequência, explore com a turma a solução gráfica desse problema, retomando para isso a noção de plano cartesiano. É importante tomar cuidado com o conjunto numérico em que se apresenta a solução, já que esse problema só permite as soluções que pertencem ao conjunto dos números naturais.

Entretanto, a situação muda quando retiramos a equação do contexto e vamos estudar quantas soluções possíveis tem a equação $x + y = 20$. Nesse caso, as soluções pertencem ao conjunto dos números reais.

1 Equações do 1º grau com 2 incógnitas

Em uma partida de vôlei disputada em duplas, Raul e Felipe marcaram juntos 20 pontos.

Essa informação **não** permite saber quantos pontos cada um deles marcou, pois são várias as possibilidades. Veja nesta tabela possíveis pontuações de cada um deles.

Pontos de Raul e de Felipe

Pontos de Raul	Pontos de Felipe	Total
12	8	20
10	10	20
15	5	20
⋮	⋮	⋮

Tabela elaborada para fins didáticos.

Se representarmos por x o número de pontos feitos por Raul e por y o número de pontos feitos por Felipe, podemos indicar essa situação por uma equação com 2 incógnitas.

$$x + y = 20,$$

sendo x e y as incógnitas, com x e y números naturais ($x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$).

Observe que os **pares ordenados** (x, y) formados pelos números naturais desta tabela são **algumas das soluções** dessa equação: $(12, 8)$, $(10, 10)$ e $(15, 5)$.

> Uma equação é do 1º grau com 2 incógnitas x e y quando pode ser escrita na forma $ax + by = c$, sendo a, b e c coeficientes, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Assim, $x + y = 20$ é uma equação do 1º grau com 2 incógnitas, pois pode ser escrita na forma $1x + 1y = 20$ ($a = 1$, $b = 1$ e $c = 20$).

Observe outro exemplo de equação do 1º grau com 2 incógnitas:

$$3x + 2y = 10$$

Para determinar uma **solução** dessa equação, atribuímos **um valor qualquer a uma das incógnitas** e determinamos o valor da outra incógnita. Por exemplo, assumindo que $x = 0$ na equação $3x + 2y = 10$, podemos calcular o valor de y.

$$3 \cdot 0 + 2y = 10 \Rightarrow 0 + 2y = 10 \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{2} = 5$$

Logo, o par ordenado $(0, 5)$ é uma solução da equação $3x + 2y = 10$.

> **Atenção:** Nesta fase de estudos, vamos trabalhar apenas com as soluções que são pares de números racionais. Assim, temos que escolher um número racional para uma das incógnitas.

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

Considerem a equação $3x + 2y = 10$, sendo x e y números racionais $(x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{Q})$. Copiem e completem as frases no caderno.

a) $\frac{1}{2}$ $\left(\text{Fazendo } x = 3, \text{ obtemos: } 3 \times 3 + 2y = 10 \Rightarrow 9 + 2y = 10 \Rightarrow 2y = 10 - 9 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\right)$

a) Para $x = 3$, o par ordenado $(3, \blacksquare)$ é uma solução da equação $3x + 2y = 10$.

b) Para $y = 3\frac{1}{2}$, o par ordenado $\left(\blacksquare, 3\frac{1}{2}\right)$ é uma solução da equação $3x + 2y = 10$.

c) Para $y = -1$, o par ordenado $(\blacksquare, -1)$ é uma solução da equação $3x + 2y = 10$.

b) 1 $\left(\text{Fazendo } y = 3\frac{1}{2}, \text{ obtemos } 3x + 2 \times \frac{7}{2} = 10 \Rightarrow 3x + 7 = 10 \Rightarrow 3x = 10 - 7 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{3} = 1\right)$

Como podemos escolher infinitos valores racionais para uma das incógnitas dessa equação, obteremos infinitos pares ordenados que são soluções dela. Assim, essa equação tem **infinitas soluções**.

Observação: Em equações do 1º grau com 2 incógnitas, podem existir soluções que são pares de números que não são racionais. Essas soluções serão estudadas nos anos seguintes.

c) 4 $\left(\text{Fazendo } y = -1, \text{ obtemos } 3x + 2 \times (-1) = 10 \Rightarrow 3x - 2 = 10 \Rightarrow 3x = 10 + 2 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4\right)$

Atividades

1. a) Exemplos de resposta: (2, 18); (0, 20) e (20, 0).
b) Sim; não. $(1 + 19 = 20; 7 + 14 = 21 \neq 20)$
c) Não, pois (8, 12) indica que Raul fez 8 pontos e Felipe fez 12 pontos e (12, 8) indica que Raul fez 12 pontos e Felipe fez 8 pontos.

3. (3, 5) e $2x - y = 1$; (−1, 2) e $x + 3y = 5$; (0, 6) e $x + 2y = 12$; (4, −3) e $x - y = 7$; (−2, −3) e $x - 2y = 4$.

Não escreva no livro!

1 Considere a equação $x + y = 20$, da situação-problema da página anterior, com x e y números naturais, e responda aos itens no caderno.

a) Determine outras 3 soluções possíveis.

b) $(1, 19)$ é solução dessa equação? E $(7, 14)$?

c) $(8, 12)$ e $(12, 8)$ representam a mesma solução? Justifique.

2 Verifique e escreva no caderno para quais destas equações o par ordenado $(-2, 3)$ é solução.

a) $2a - 3b = 10$

X b) $5a + b = -7$

X c) $3a + 2b = 0$

X d) $\frac{a}{2} - \frac{b}{3} = -2$

3 Cada par ordenado do quadro da esquerda é solução de uma equação do quadro da direita. Registre todas as correspondências no caderno.

$(3, 5)$	$x + 2y = 12$
$(-1, 2)$	$x - y = 7$
$(0, 6)$	$2x - y = 1$
$(4, -3)$	$x - 2y = 4$
$(-2, -3)$	$x + 3y = 5$

4 Copie no caderno apenas os pares ordenados que são soluções da equação $2x + 3y = 7$.

X a) $(2, 1)$

X b) $(5, -1)$

X c) $(-1, 3)$

d) $(1, 1)$

e) $(3, 3)$

X f) $\left(-2, \frac{11}{3}\right)$

5 Maurício representou 2 números naturais algebricamente: o 1º número por x e o 2º número por y. Depois, ele escreveu sentenças matemáticas com esses números. Observe a descrição delas e escreva cada uma no caderno usando equações com as incógnitas x e y.

a) A diferença entre o 2º número e o 1º número é igual a 7. $y - x = 7$

b) O quociente do 1º número pelo 2º número é igual a 3. $x \div y = 3$ ou $\frac{x}{y} = 3$.

c) O 1º número é igual a 4. $x = 4$

d) O 2º número é igual à soma do 1º número com 5. $y = x + 5$

6 Entre as 4 equações que você escreveu na atividade anterior, há 3 que têm 2 incógnitas. Indique 2 possíveis soluções para cada uma dessas 3 equações.

7 Determine no caderno 3 soluções para cada equação, usando números racionais. Exemplos de resposta:

a) $7x - 4y = 14$ $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$; $(2, 0)$ e $\left(-1, -5\frac{1}{4}\right)$.

b) $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = \frac{1}{6}$ $\left(0, \frac{2}{9}\right)$; $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ e $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$.

8 Copie os itens no caderno, faça os cálculos necessários e complete os pares ordenados.

a) $(3, ■)$ é uma solução da equação $2x + 5y = 16$. 2 $(6 + 5y = 16 \Rightarrow y = 2)$

b) $(■, 3)$ é uma solução da equação $2x + 5y = 16$.

c) $(■, -1)$ é uma solução da equação $3x - y = 1$. 0 $(3x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0)$

d) $(-1, ■)$ é uma solução da equação $3x - y = 1$. −4 $(-3 - y = 1 \Rightarrow y = -4)$

9 No caderno, verifique se cada par ordenado é ou não solução da equação $\frac{3x}{5} + \frac{2y}{15} = \frac{1}{3}$.
(mmc(5, 15, 3) = 15; $9x + 2y = 5$)

a) $(1, -2)$ Sim. $(9 - 4 = 5)$

b) $(-1, 7)$ Sim. $(-9 + 14 = 5)$

c) $(7, -2)$ Não. $(63 - 4 = 59)$

d) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ Sim. $(3 + 2 = 5)$

10 Copie os itens no caderno e complete os pares ordenados com os números adequados.

a) O par ordenado $(5, ■)$ é uma solução da equação $3(x - 4) + 2y = x$. 1 $(2x + 2y = 12)$

b) O par ordenado $(■, -2)$ é uma solução de $\frac{3x}{4} - \frac{y}{3} = 1$. $\frac{4}{9}$ $(9x - 4y = 12)$

11 Carolina e Natália participaram de uma partida de futebol na escola e fizeram, ao todo, 7 gols.

Ilustranet/Arquivo da editora

a) Escreva no caderno uma equação para representar essa situação, considerando x o número de gols que Carolina fez e y o número de gols que Natália fez. $x + y = 7$

b) As incógnitas x e y dessa equação devem pertencer a qual conjunto numérico? Ao conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$).

c) Carolina pode ter marcado 3 gols? Sim. $(3 + y = 7 \Rightarrow y = 4)$

d) Natália pode ter marcado 8 gols? Não. $(x + 8 = 7 \Rightarrow x = -1; -1 \notin \mathbb{N})$

12 Considere a equação $2x + 3y = 1$.

a) O par ordenado $(0, 0)$ é uma solução dessa equação? Justifique. Não, pois $2 \times 0 + 3 \times 0 = 0 + 0 = 0 \neq 1$.

b) Por qual número podemos trocar o coeficiente c dessa equação para que $(0, 0)$ seja solução dela? Por $c = 0$.

6. Exemplos de resposta: a) (1, 8) e (3, 10); b) (6, 2) e (3, 1); d) (1, 6) e (0, 5).

8. b) $\frac{1}{2}$ $\left(2x + 15 = 16 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\right)$

1 Equações do 1º grau com 2 incógnitas

Se possível, peça aos alunos que resolvam na sala de aula, individualmente, as atividades de 1 a 12. Em seguida, realize a correção coletivamente.

Atividade 2

Veja a resolução de cada item desta atividade.

a) $2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3 =$
$= -4 - 9 = -13 \neq 10$
Logo, $(-2, 3)$ não é solução da equação $2a - 3b = 10$.

b) $5 \cdot (-2) + 3 = -10 + 3 =$
$= -7$
Logo, $(-2, 3)$ é solução da equação $5a + b = -7$.

c) $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 =$
$= -6 + 6 = 0$
Logo, $(-2, 3)$ é solução da equação $3a + 2b = 0$.

d) $\frac{-2}{2} - \frac{3}{3} = -1 - 1 = -2$
Logo, $(-2, 3)$ é solução da equação $\frac{a}{2} - \frac{b}{3} = -2$.

Atividade 3

Para complementar, peça aos alunos que determinem novos pares ordenados que também são soluções das equações listadas.

Atividade 4

Confira a resolução de cada item desta atividade.

a) $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 7$
Logo, $(2, 1)$ é solução da equação $2x + 3y = 7$.

b) $2 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) =$
$= 10 - 3 = 7$
Logo, $(5, -1)$ é solução da equação $2x + 3y = 7$.

c) $2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 =$
$= -2 + 9 = 7$
Logo, $(-1, 3)$ é solução da equação $2x + 3y = 7$.

d) $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 =$
$= 5 \neq 7$
Logo, $(1, 1)$ não é solução da equação $2x + 3y = 7$.

e) $2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 6 + 9 =$
$= 15 \neq 7$
Logo, $(3, 3)$ não é solução da equação $2x + 3y = 7$.

f) $2 \cdot (-2) + 3 \cdot \frac{11}{3} =$
$= -4 + 11 = 7$
Logo, $\left(-2, \frac{11}{3}\right)$ é solução da equação $2x + 3y = 7$.

Atividades 5 e 6

A atividade 5 pode ser ampliada pedindo-se aos alunos que criem descrições como essas para as equações da atividade 3 e depois as comparem com as descrições criadas pelos colegas.

Na atividade 6, as respostas para cada equação podem ser representadas no plano cartesiano.

Atividade 9

Nesta atividade, incentive os alunos a simplificar a equação utilizando o conhecimento adquirido sobre operações com frações; isso poderá facilitar os cálculos.

1 Equações do 1º grau com 2 incógnitas

É importante que os alunos possam ter contato com diferentes modos de resolução, por isso, sempre que possível, proponha que as atividades sejam resolvidas com o auxílio de papel milimetrado ou mesmo utilizando-se um *software* livre de geometria dinâmica como o GeoGebra.

Se for possível resolver usando ambos, sugerimos que o desenvolvimento seja feito, primeiro, em um papel milimetrado, com auxílio de régua. É importante certificar-se de que os alunos construíram o plano cartesiano corretamente. Em seguida, os alunos podem traçar as mesmas retas no *software* e comparar os resultados.

Atividades 13 e 14

Amplie a atividade 13 questionando quantas soluções são possíveis para a equação no conjunto dos números racionais. Os alunos podem representar todos os pares ordenados determinados pelos colegas em um único plano cartesiano.

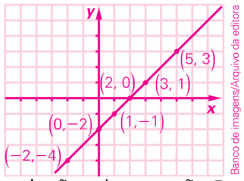
A atividade 14 também pode ser resolvida com o auxílio da tecnologia; além de ser possível ampliar a proposta pedindo aos alunos que escrevam outras equações com 2 incógnitas e que desenhem as retas correspondentes a essas equações. Se preferir, estas podem ser desenhadas em um mesmo plano cartesiano e os resultados serão utilizados posteriormente.

Gráfico das soluções de uma equação do 1º grau com 2 incógnitas

Vamos determinar algumas soluções da equação $3x + y = 1$, sendo x e y números racionais.

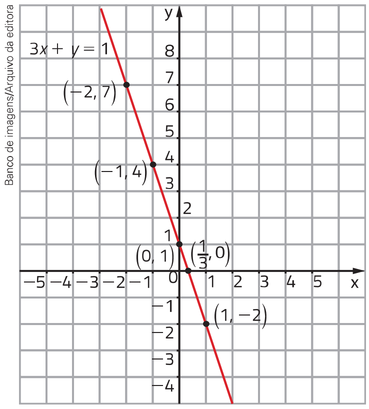
- Para $x = 0$, temos $y = 1$; logo, o par ordenado é $(0, 1)$.
- Para $x = 1$, temos $y = -2$; logo, o par ordenado é $(1, -2)$.
- Para $x = -1$, temos $y = 4$; logo, o par ordenado é $(-1, 4)$.
- Para $x = \frac{1}{3}$ temos $y = 0$; logo, o par ordenado é $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.
- Para $x = -2$, temos $y = 7$; logo, o par ordenado é $(-2, 7)$.

13. Exemplos de resposta: (2, 0); (0, −2); (3, 1); (1, −1); (5, 3); (−2, −4); os pontos correspondentes aos pares ordenados estão contidos na mesma reta.



Portanto, $(0, 1)$; $(1, -2)$; $(-1, 4)$; $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ e $(-2, 7)$ são algumas soluções da equação $3x + y = 1$.

Podemos representar graficamente esses pares ordenados em um sistema de eixos cartesianos.

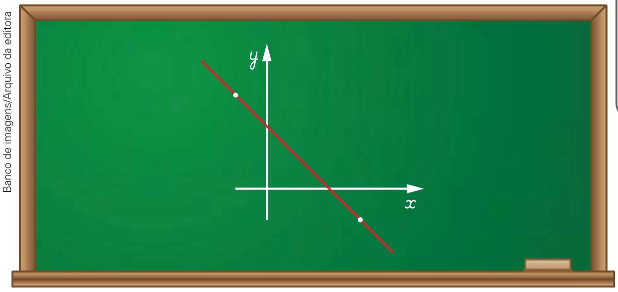


Observe que os pontos que correspondem a esses pares ordenados estão alinhados, ou seja, estão contidos na mesma reta, embora não “completem” toda a reta, pois estamos trabalhando apenas com números racionais.

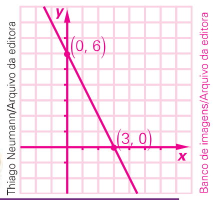
De modo geral, temos que:

Os pontos correspondentes aos pares ordenados de números racionais que são soluções de uma equação do 1º grau com 2 incógnitas estão todos contidos na **mesma reta**.

Assim, conhecendo 2 pares ordenados diferentes que são soluções de uma equação, podemos traçar a reta que contém todas as soluções dessa equação.



14. b)



Atividades

Não escreva no livro!

13 Determine no caderno algumas soluções da equação $x - y = 2$, com pares de números racionais. Represente os pares ordenados em um plano cartesiano e verifique em que posição ficaram.

14 Faça no caderno o que se pede em cada item.

a) Determine 2 soluções da equação $4x + 2y = 12$. Exemplos de resposta: (0, 6) e (3, 0).

b) Trace a reta que contém as soluções dessa equação.

c) O ponto $(3, 0)$ pertence à reta traçada? Sim.

d) O ponto $(0, 4)$ pertence à reta traçada? Não.

e) O par ordenado $(1, 4)$ é solução da equação? Sim.

f) O par ordenado $(-17, 40)$ é solução da equação? Sim.

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Veja se você conhece esta situação-problema.

> Em um quintal há galinhas e coelhos.
> Há 7 cabeças e 22 patas.
> Quantas são as galinhas? E os coelhos?


Valentina_S/Shutterstock
Galinha.


Zhukov Oleg/Shutterstock
Coelho.

Há várias maneiras de resolver esse problema. Observe o que cada aluno fez.

Luís fez por tentativas.


Thiago Neumann/Arquivo da editora

2 galinhas e 5 coelhos correspondem a 7 cabeças $(2 + 5 = 7)$.
Cálculo do número de patas: $2 \times 2 = 4$ e $5 \times 4 = 20 \Rightarrow 4 + 20 = 24$
Esta não é a solução do problema.
3 galinhas e 4 coelhos correspondem a 7 cabeças $(3 + 4 = 7)$.
Cálculo do número de patas: $3 \times 2 = 6$ e $4 \times 4 = 16 \Rightarrow 6 + 16 = 22$
Esta é a solução do problema.

Paulo Manzi/Arquivo da editora

Cibele organizou os dados do problema em uma tabela.

Números

Galinhas	Coelhos	Cabeças	Patas	
6	1	7	16	Não
5	2	7	18	Não
4	3	7	20	Não
3	4	7	22	Sim

Paulo Manzi/Arquivo da editora


Thiago Neumann/Arquivo da editora

Giovana escreveu as equações que representam o problema e montou um **sistema de equações** com elas.


Thiago Neumann/Arquivo da editora

Montei um sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas (x e y).

x: número de galinhas y: número de coelhos
$x + y = 7$ (são 7 cabeças, ou seja, 7 animais ao todo)
$2x + 4y = 22$ (cada galinha tem 2 patas e cada coelho tem 4 patas)
As 2 equações precisam ser satisfeitas ao mesmo tempo.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 4$$

Paulo Manzi/Arquivo da editora

Dependendo dos números envolvidos na situação, o procedimento de Giovana é mais prático e mais eficiente do que os demais.

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Principal habilidade da BNCC

EF08MA08

Ressalte que, na situação-problema apresentada, x e y são números naturais, pois representam a quantidade de galinhas e de coelhos.

Neste momento, sugerimos que se valorize o uso da tentativa e erro para resolução de problemas. Essa metodologia pode ser eficaz, principalmente, com problemas que utilizam números naturais, como o apresentado. Reforce com os alunos que é possível e adequado utilizar tabelas na construção dessas resoluções, quando a solução pertence ao conjunto dos números naturais. Entretanto, ressalte que, para números muito grandes ou quando as incógnitas não são números naturais, é muito mais fácil utilizar o sistema de equações.

Ressalte também que uma equação do 1º grau com 2 incógnitas tem infinitas soluções, mas o mesmo não ocorre com um sistema de equações. É possível que ele tenha infinitas soluções, uma única solução ou, em alguns casos, não tenha solução. Esse conceito será trabalhado graficamente em momento oportuno.

Quando a solução é fracionária, identificar os valores para x e y de um sistema, por meio de uma tabela, se torna um trabalho possível, mas demorado; nesses casos, dependemos de métodos algébricos para resolver.

Nessa etapa, é possível desafiar os alunos, por exemplo, propondo o sistema indicado abaixo, que será resolvido na próxima página.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$$

Questione-os sobre como resolveriam o sistema utilizando o que conhecem de matemática e equações do 1º grau. A expectativa é que alguns alunos percebam a possibilidade de isolar uma incógnita e substituí-la.

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Ressalte, mais uma vez, que as retas traçadas incluem pares ordenados com números que não são racionais, mas que serão vistos nos próximos anos.

Se possível, retome as atividades com um *software* de geometria analítica, questionando os alunos sobre o significado de as retas se cruzarem ao representarmos as 2 equações no gráfico.

Sequência didática

Para mais informações, veja a **sequência didática 1** do 3º bimestre.

Soluções de um sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Ao equacionar o problema sobre galinhas e coelhos, Giovana chegou a 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas (as mesmas incógnitas para as 2 equações). Por isso, ela montou um sistema de equações.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$$

A **solução de um sistema** de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas é um par ordenado que satisfaz, simultaneamente, as 2 equações, no conjunto numérico considerado.

No sistema de equações do problema das galinhas e dos coelhos, temos o conjunto universo dos números naturais e as soluções listadas a seguir.

- Possíveis soluções da equação $x + y = 7$: $(0, 7)$; $(1, 6)$; $(2, 5)$; $(3, 4)$; $(4, 3)$; $(5, 2)$; $(6, 1)$ e $(7, 0)$.
- Possíveis soluções da equação $2x + 4y = 22$: $(1, 5)$; $(3, 4)$; $(5, 3)$; $(7, 2)$; $(9, 1)$ e $(11, 0)$.

Observe que o único par ordenado comum entre todas as soluções das 2 equações é o par ordenado $(3, 4)$. Ou seja, essa é a solução do sistema de equações, pois é o único par ordenado que é solução das 2 equações ao mesmo tempo.

Sistema: $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$ Verificação: $\begin{cases} 3 + 4 = 7 \\ 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 6 + 16 = 22 \end{cases}$

Vamos considerar este mesmo sistema de equações para constatar, a partir do gráfico de cada equação, que a solução de um sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas é o **ponto de intersecção** das 2 retas que contêm as soluções das 2 equações.

Primeiro, determinamos 2 possíveis soluções de cada equação para poder traçar a reta de cada equação.

$x + y = 7$

x	y
0	7
7	0

Pares ordenados: $(0, 7)$ e $(7, 0)$.

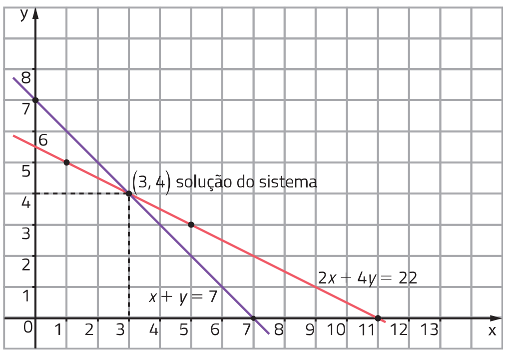
$2x + 4y = 22$

x	y
1	5
5	3

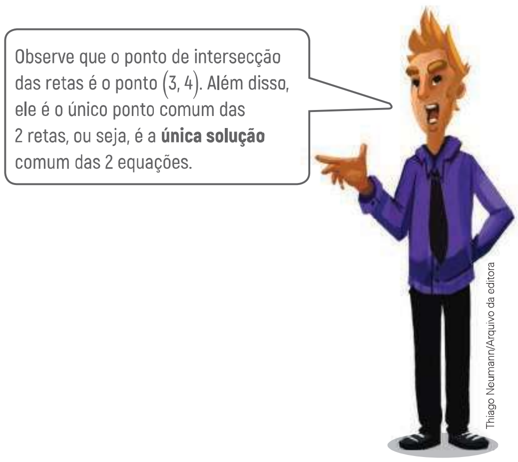
Pares ordenados: $(1, 5)$ e $(5, 3)$.

Depois, marcamos as soluções (os pares ordenados) no plano cartesiano e traçamos a reta que contém as soluções de cada equação.

Solução gráfica do sistema de equações



Banco de imagens/Arquivo da editora



Thiago Neumann/Arquivo da editora

16. Exemplos de resposta: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 6 \end{cases}$; 1º semestre: 18 alunos; 2º semestre: 12 alunos.

Não escreva no livro!

Atividades

15 Destes pares ordenados, qual é a solução do sistema de equações $\begin{cases} 2x + 5y = -14 \\ 4x - 3y = 24 \end{cases}$, sendo x e y números inteiros? Comparem a resposta com a de outra dupla e vejam como eles resolveram.

a) $(2, 1)$

X c) $(3, -4)$

b) $(-3, 4)$

d) $(-3, -4)$

$(2 \times 3 + 5 \times (-4) = -14$ e $4 \times 3 - 3 \times (-4) = 24)$

16 Crie no caderno um sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas cuja solução é o par ordenado $(1, 2)$.

17 No caderno, para cada item, construa a reta que contém as soluções de cada equação do sistema e encontre graficamente a solução dele, para x e y números racionais.

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ (2, 5)

b) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$ (−3, 4)

c) $\begin{cases} x + y = 20 \\ 3x + 4y = 72 \end{cases}$ (8, 12)

d) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 12 \end{cases}$ (6, 0)

18 **Solução de um sistema de equações usando cálculo mental.** Podemos resolver alguns sistemas de equações mentalmente. Por exemplo, para resolver mentalmente o sistema $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$, de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas, sendo x e y números naturais, basta pensar em 2 números naturais cuja soma é igual a 9 e cuja diferença é igual a 1. São os números 5 e 4, pois $5 + 4 = 9$ e $5 - 4 = 1$

Pensando nisso, determine mentalmente a solução de cada sistema de equações, para x e y naturais. Registre as respostas no caderno.

a) $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$ (7, 5)

b) $\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 12 \end{cases}$ (8, 4)

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$ (2, 3)

d) $\begin{cases} y = 3x \\ x - y = -6 \end{cases}$ (3, 9)

19 A soma de 2 números naturais é igual a 8 e a diferença entre eles é igual a 2. No caderno, monte um sistema de equações, resolva mentalmente e registre quais são os números.

20 Na turma da escola de Gabriel estudam 30 alunos. Subtraindo o número de alunos que fazem aniversário no 1º semestre do número de alunos que fazem aniversário no 2º semestre, obtemos o número 6.

Monte no caderno um sistema de equações para representar essa situação, resolva-o mentalmente e registre quantos alunos da turma de Gabriel fazem aniversário em cada semestre.

21 **Arredondamentos, cálculo mental e resultado aproximado.** Teresa gastou R$ 19,60 na compra de um tecido com 1 metro de medida de comprimento e de uma fita com 1 metro de medida de comprimento. O metro de tecido custa R$ 9,90 a mais do que o metro de fita.

Faça arredondamentos, monte no caderno um sistema de equações, resolva-o mentalmente e responda usando os valores aproximados obtidos: Qual destes valores é o preço de 2 m de tecido e 3 m de fita?

a) R$ 42,05

X c) R$ 44,05

b) R$ 39,05

d) R$ 48,05

19. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 5$ e $y = 3$

21. $\begin{cases} t + f = 20 \\ t = f + 10 \end{cases} \Rightarrow t = 15$ e $f = 5$; $2 \times 15 + 3 \times 5 = 30 + 15 = 45$

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Atividade 17

Veja a resolução desta atividade na página LV deste manual.

Atividade 18

Amplie esta atividade, organizando os alunos em duplas e propondo que cada aluno crie pelo menos dois sistemas que possam ser resolvidos mentalmente. Comente que é importante que estes sistemas tenham uma resposta e que, preferencialmente, pertençam ao conjunto dos inteiros. A ideia é que, em seguida, troquem o problema com outra dupla de maneira que uma dupla resolva os sistemas elaborados pela outra dupla.

Atividade 21

Esta atividade é muito importante para o desenvolvimento do conteúdo do capítulo. Acompanhe a resolução dos alunos verificando se conseguem escrever o sistema de equações formalmente utilizando os símbolos matemáticos adequados. Neste caso, mais importante do que encontrar a solução correta do sistema é conseguir escrevê-lo de maneira correta.

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Aqui apresentamos oficialmente o primeiro método de resolução de um sistema de equações, neste caso, o método da substituição. Sugerimos que nesse estudo sejam retomadas as passagens algébricas da forma em que aparecem no material, ou seja, respeitando os passos de resolução.

É importante também respeitar o tempo dos alunos e, se necessário, propor que outros problemas sejam resolvidos por esse método, inclusive retomando os problemas propostos anteriormente.

Métodos de resolução de um sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Nem sempre podemos resolver apenas mentalmente um sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas. Por isso, além do método geométrico (gráfico), que você já estudou, foram desenvolvidos outros métodos de resolução. A seguir, vamos estudar o **método da substituição** e o **método da adição**, que são **métodos algébricos** de resolução.

Método da substituição

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Considere o seguinte problema: A soma das idades de Janaína e Marisa é igual a 55 anos. A idade de Janaína mais o dobro da idade de Marisa resulta em 85 anos. Qual é a idade de cada uma delas?

Podemos resolver esse problema em 3 etapas.

1ª etapa: Representamos a idade de Janaína por x e a idade de Marisa por y, considerando x e y números naturais ($x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$).

2ª etapa: Montamos o sistema de equações usando as informações do problema.

$$\begin{cases} x + y = 55 \\ x + 2y = 85 \end{cases}$$

3ª etapa: Resolvemos o sistema de equações pelo **método da substituição**. Veja o passo a passo para usar esse método.

1º passo: "Isolamos", no 1º membro, uma das incógnitas em uma das equações. Por exemplo, o x na 1ª equação.

$$x + y = 55 \Rightarrow x = 55 - y$$

2º passo: Na outra equação, substituímos x por $55 - y$ e determinamos o valor de y.

$$x + 2y = 85 \Rightarrow 55 - y + 2y = 85 \Rightarrow -y + 2y = 85 - 55 \Rightarrow y = 30$$

3º passo: Voltamos à equação $x = 55 - y$ e substituímos y por 30 para determinar o valor de x.

$$x = 55 - y = 55 - 30 = 25$$

A solução do sistema de equações é o par ordenado de números naturais $(25, 30)$.

Finalmente, podemos verificar os resultados.

- A soma das idades: $25 + 30 = 55$.
- A idade de Janaína mais o dobro da idade de Marisa: $25 + 60 = 85$.

Logo, Janaína tem 25 anos e Marisa tem 30 anos.

Examine agora mais alguns exemplos de resolução de sistemas de equações pelo método da substituição. Considere x e y números racionais.

- $$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 2x - 5y = 16 \end{cases}$$

  1º passo: Isolamos o x. $\quad 3x + 4y = 1 \Rightarrow 3x = 1 - 4y \Rightarrow x = \dfrac{1 - 4y}{3}$

  2º passo: Substituímos o x na outra equação.

  $$2x - 5y = 16 \Rightarrow 2\left(\frac{1 - 4y}{3}\right) - 5y = 16 \Rightarrow \frac{2 - 8y}{3} - 5y = 16 \Rightarrow \frac{2 - 8y}{3} - \frac{15y}{3} = \frac{48}{3} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow 2 - 8y - 15y = 48 \Rightarrow -8y - 15y = 48 - 2 \Rightarrow -23y = 46 \Rightarrow 23y = -46 \Rightarrow y = -\frac{46}{23} = -2$$

  3º passo: Voltamos para a primeira equação para calcular o valor de x.

  $$x = \frac{1 - 4y}{3} = \frac{1 - 4(-2)}{3} = \frac{1 + 8}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

  Logo, a solução desse sistema de equações é o par ordenado $(3, -2)$.

- $\begin{cases} 3(x-1)+4(y-3)=4 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}=1 \end{cases}$

Neste sistema de equações, é conveniente transformá-las inicialmente para a forma $ax + by = c$.

1ª equação: $3(x-1)+4(y-3)=4 \Rightarrow 3x-3+4y-12=4 \Rightarrow 3x+4y=19$

2ª equação: $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}=1 \Rightarrow \dfrac{2x}{6}+\dfrac{y}{6}=\dfrac{6}{6} \Rightarrow 2x+y=6$

Novo sistema de equações: $\begin{cases} 3x+4y=19 \\ 2x+y=6 \end{cases}$

1º passo: Neste caso, é mais conveniente começar obtendo o valor de y na segunda equação. Então, isolamos o y.

$$2x+y=6 \Rightarrow y=6-2x$$

2º passo: Substituímos o y na outra equação.

$3x+4y=19 \Rightarrow 3x+4(6-2x)=19 \Rightarrow 3x+24-8x=19 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x-8x=19-24 \Rightarrow -5x=-5 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=\dfrac{5}{5}=1$

3º passo: Voltamos para a primeira equação para calcular o valor de y.

$$y=6-2x=6-2\cdot 1=6-2=4$$

Logo, a solução do sistema de equações dado é o par ordenado $(1, 4)$.

Agora, podemos resolver esse novo sistema de equações que é **equivalente** ao primeiro. Perceba que equivalente significa que eles têm a mesma solução.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

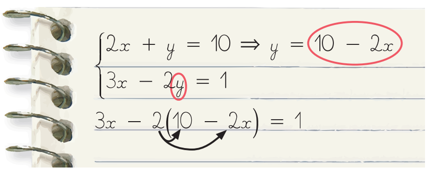
Atividades

Não escreva no livro!

22. (3, 4) ($3x-20+4x=1 \Rightarrow 7x=21 \Rightarrow x=3$; $y=10-2\times 3=10-6=4$)

22 Carlos estava resolvendo um sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas, pelo método da substituição, quando interrompeu o trabalho dele. Ajude-o a retomar o estudo e a encontrar a solução desse sistema de equações.

Mauro Souza/Arquivo da editora



Paulo Manzi/Arquivo da editora

23 Determine no caderno a solução de cada um destes sistemas de equações usando o método da substituição.

a) $\begin{cases} 5x+y=-1 \\ 3x+4y=13 \end{cases}$ $(-1, 4)$

b) $\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}=12 \\ \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=10 \end{cases}$ $(12, 0)$

c) $\begin{cases} 2(x-3)+y=-15 \\ \dfrac{x}{4}=\dfrac{x+y}{6}+\dfrac{2}{3} \end{cases}$ $(-2, -5)$

d) $\begin{cases} 2x-5=y-4 \\ 7x-y=y+4 \end{cases}$ $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

24 Resolva estes problemas no caderno.

a) A diferença entre 2 números racionais é igual a 7. Sabe-se também que a soma do dobro do primeiro com o quádruplo do segundo é igual a 11. Quais são esses números? $6\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

b) Josias comprou 5 canetas e 3 lápis e gastou R\$ 21,10. Mariana comprou 3 canetas e 2 lápis e gastou R\$ 12,90. Fernando comprou 2 canetas e 5 lápis. Quanto ele gastou? R\$ 13,00

c) Em uma sala de aula retangular, a medida de perímetro é de 44 m e a diferença entre a metade da medida de comprimento da largura e a quarta parte da medida de comprimento da profundidade é de 5 m. Descubra a medida de área dessa sala de aula. 112 m²

d) A soma de 2 números racionais é igual a 127 e a diferença entre eles é igual a 49. Quais são esses números? 88 e 39.

Logo, é esperado que alguns alunos acertem, outros errem e alguns até mesmo não saibam começar a resolver; é importante insistir para que, ao menos, tentem resolver antes da leitura do exemplo do livro.

Atividade 23

Nesta atividade, é importante que os alunos organizem as equações nos itens **b** e **c** antes de iniciar os cálculos por meio do mmc. Acompanhe essa passagem atentamente no desenvolvimento da atividade.

Atividade 24

Nesta atividade, a atenção estará voltada para a montagem do sistema de equações.

No item **a**, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x-\ y=7 \\ 2x+4y=11 \end{cases}$$

No item **b**, as incógnitas representam os preços do lápis e da caneta. Representado o preço do lápis por l e o da caneta por c, temos:

$$\begin{cases} 5c+3l=21{,}10 \\ 3c+2l=12{,}90 \end{cases}$$

Verifique se os alunos perceberam que a resposta do sistema não é a resposta do problema. A partir da resposta do sistema, os alunos deverão determinar quanto custa 2 canetas e 5 lápis, ou seja:

$$2c+5l=?$$

No item **c**, devemos determinar as medidas dos lados do retângulo com base no problema, o que gera o sistema:

$$\begin{cases} 2a+2b=44 \\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{4}=5 \end{cases}$$

Após determinar as medidas de a e b, determinamos a área do retângulo por:

$$a\times b=?$$

Veja nas páginas LV e LVI deste Manual a resolução completa desta atividade, escolhendo o processo da substituição.

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Converse com os alunos sobre por que é conveniente começar pelo y da segunda equação.

Para resolução, sugerimos algumas etapas.

- Peça aos alunos que fechem o livro e informe que o trabalho nessa etapa da aula será desenvolvido na lousa.
- Passe os dois exemplos do livro na lousa e peça que os alunos tentem resolvê-los com base nas explorações e nos estudos feitos até então.
- Indique as respostas esperadas para os sistemas, questione-os sobre quem acertou e quem errou e, em seguida, peça que abram o livro para comparar os passos apresentados no livro e a resolução por eles utilizada.

Se possível, peça que expliquem o que erraram, caso haja erros nessa primeira resolução; após a análise, é importante propor alguns exercícios de maneira imediata para que os alunos já tenham a oportunidade de corrigir aquilo que erraram.

Essa maneira de trabalhar tem como expectativa a análise do exemplo com base nas experiências adquiridas pelos alunos até o momento.

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Após a leitura do exemplo da página, convide os alunos a solucionar alguns sistemas resolvidos pelo método da substituição utilizando o método da adição. Essa proposta tem como objetivo questionar qual é a metodologia mais adequada para cada sistema. Espera-se que os alunos percebam que alguns sistemas se tornam mais simples pelo método da substituição, enquanto outros são resolvidos mais facilmente pelo método da adição.

Atividades 25 a 27

A atividade 25 é um exemplo clássico de sistemas que podem ser resolvidos mais facilmente pela adição do que pela substituição, mas, no decorrer do estudo, essa escolha acabará sendo de responsabilidade dos próprios alunos.

Na atividade 26, é importante ter cuidado na organização do sistema. Os alunos devem entender que a organização é um passo que facilita a resolução, nesse caso, permitindo a utilização do método da adição.

A atividade 27 apresenta um método para facilitar a resolução. Essa etapa deve ser trabalhada com cuidado e, se possível, com alguns exemplos complementares.

Método da adição

Antes de estudar esse novo método de resolução de um sistema de equações, leia o *Bate-papo* ao lado.

Agora, examine a seguinte situação: Quando Ricardo nasceu, o pai dele tinha 23 anos. Hoje, a soma das idades de Ricardo e do pai dele é igual a 59. Qual é a idade atual de cada um deles?

Bate-papo

Converse com os colegas sobre esta afirmação.
Quando adicionamos os membros correspondentes de 2 igualdades, obtemos uma nova igualdade.

$$\begin{array}{r} 2+3=5 \\ \underline{7-3=4} \\ 9+0=9 \\ 9=9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3+7=10 \\ \underline{4+5=9} \\ 7+12=19 \\ 19=19 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x+3=5 \\ \underline{x+1=3} \\ 2x+4=8 \end{array}$$

Podemos resolver essa situação em 3 etapas.

1ª etapa: Representamos a idade atual do pai por x e a idade atual de Ricardo por y, considerando x e y números naturais $(x \in \mathbb{N} \text{ e } y \in \mathbb{N})$.

2ª etapa: Montamos o sistema de equações usando as informações do problema.

$$\begin{cases} x + y = 59 \\ x - y = 23 \end{cases}$$

3ª etapa: Vamos usar o **método da adição** para resolver esse sistema de equações.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Ao somar os membros das 2 equações, podemos anular uma das incógnitas e obter uma equação que pode ser usada para o cálculo do valor da outra incógnita. Observe.

$$\begin{cases} x + \cancel{y} = 59 \\ x - \cancel{y} = 23 \end{cases}$$
$$2x \qquad = 82 \Rightarrow x = \frac{82}{2} = 41 \text{ (idade do pai)}$$

Agora, podemos substituir x por 41 em uma das equações do sistema e calcular o valor de y.

$$x + y = 59 \Rightarrow 41 + y = 59 \Rightarrow y = 59 - 41 = 18$$

Portanto, Ricardo tem hoje 18 anos e o pai dele tem 41 anos.

Atividades

Não escreva no livro!

25 Resolva no caderno estes sistemas de equações usando o método da adição.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 5x + 2y = 22 \end{cases}$ (4, 1)

b) $\begin{cases} -a + 2b = 7 \\ a - 3b = -9 \end{cases}$ (−3, 2)

c) $\begin{cases} a + 3b = 5 \\ 2a - 3b = -8 \end{cases}$ (−1, 2)

d) $\begin{cases} 2a - b = -3 \\ 6a + b = 7 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$

26 No caderno, transforme este sistema de equações em um sistema equivalente mais simples e resolva-o pelo método da adição.

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{8} = \dfrac{x+y}{3} \\ \dfrac{5x}{3} = -2y - 1 \end{cases}$$

$\begin{cases} -5x - 5y = 0 \\ 5x + 6y = -3 \end{cases}$; (3, −3).

27 O professor de Cibele retomou com a turma uma importante propriedade da igualdade.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

32. $(1, -1)$ e $\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$; $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ e $\begin{cases} a - 4b = 0 \\ 5a + 2b = 11 \end{cases}$; $\left(\frac{1}{5}, 2\right)$ e $\begin{cases} 5a + b = 3 \\ 10a - b = 0 \end{cases}$; $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ e $\begin{cases} a + 6b = 3 \\ 3a - 3b = 2 \end{cases}$.

Veja como Cibele usou essa propriedade e transformou um sistema de equações em um sistema equivalente para depois resolvê-lo pelo método da adição, eliminando uma das incógnitas.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Multipliquei os 2 membros da segunda equação por -3, obtendo uma equação equivalente. Com isso, em uma equação ficou $3a$ e na outra, $-3a$.

$$\begin{cases} 3a + 5b = 14 \\ a - 2b = 1 \cdot (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 5b = 14 \\ -3a + 6b = -3 \end{cases}$$

Paulo Manzi/Arquivo da editora

Agora, determine no caderno a solução do sistema de equações que ela criou usando o método da adição. $(3, 1)$

28 Vamos resolver, pelo método da adição, este sistema de equações $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Pense um pouco: por quanto devemos multiplicar os 2 membros da primeira equação e por quanto devemos multiplicar os 2 membros da segunda equação para obtermos $6x$ na primeira equação e $-6x$ na segunda?

Veja como indicar.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 11 & \cdot 3 \\ 3x + 6y = 3 & \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 15y = 33 \\ -6x - 12y = -6 \end{cases}$$

Somamos membro a membro para "eliminar o x".

$$\begin{cases} \cancel{6x} - 15y = 33 \\ \cancel{-6x} - 12y = -6 \end{cases}$$
$$-27y = 27$$

Agora você termina de resolver esse sistema de equações no caderno e determina a solução dele. $(3, -1)$

29 Crie um sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas, cuja solução seja $(10, 7)$, e escreva-o no caderno. Troque-o com um colega. Você resolve o dele e ele resolve o seu.
Resposta pessoal.

30 Resolva no caderno estes sistemas de equações utilizando o método que considerar mais conveniente. Considere números racionais para x e y.

a) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{2} - 3 = -2 \\ \dfrac{x}{3} - y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

c) $\begin{cases} 4(2 - y) = 3x \\ 4 - 5x = 2y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - \dfrac{1}{3}y = 3 \\ \dfrac{1}{4}x + 2y = 7 \end{cases}$

31 Determine no caderno o valor de cada ■ neste sistema de equações. 2; 5.

$$\begin{cases} 3x - \blacksquare y = 1 \\ \blacksquare x - 3y = 1 \end{cases}$$

Uma dica: a solução desse sistema de equações é $(-1, -2)$.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

32 Luís estava escrevendo sistemas de equações e as soluções correspondentes. Mas, distraído, misturou as equações. Faça os cálculos mentalmente e registre no caderno os 4 sistemas de equações e as respectivas soluções.

$3a + 2b = 1$
$a - 6b = 3$
$5a + b = 3$
$a - 4b = 0$
$10a - b = 0$
$3a - 3b = 2$
$2a + b = 1$
$5a + 2b = 11$
Soluções:
$\left(\frac{1}{5}, 2\right); \left(2, \frac{1}{2}\right); (1, -1); \left(1, \frac{1}{3}\right)$

Paulo Manzi/Arquivo da editora

30. a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$; $(3, -1)$.
c) $\begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$; $(0, 2)$.
d) $\begin{cases} 3x - y = 9 \\ x + 8y = 28 \end{cases}$; $(4, 3)$.

33 **Desafio.** Resolva esta situação no caderno de 2 maneiras diferentes: usando uma equação com 1 incógnita e usando um sistema de 2 equações com 2 incógnitas.

Em um concurso, a prova era constituída por 80 testes. Todos os testes deveriam ser respondidos, cada resposta certa valia $+3$ pontos e cada resposta errada valia -2 pontos. Se um candidato fez 155 pontos, então quantos testes ele acertou e quantos ele errou?

33. Acertou 63 testes e errou 17. (Com equação: acertos: x; erros: $80 - x$; $3x - 2(80 - x) = 155 \Rightarrow x = 63$; $80 - 63 = 17$.
Com sistema: acertos: x; erros y; $\begin{cases} x + y = 80 \\ 3x - 2y = 155 \end{cases} \Rightarrow x = 63$; $y = 17$)

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Atividade 28

Converse com os alunos sobre o fato de que podemos escolher qualquer uma das incógnitas na primeira parte da resolução. Neste caso, a eliminação do x permite que o sistema seja simplificado para uma equação do 1º grau com 1 incógnita. Por isso, devemos analisar qual delas é mais conveniente.

Atividade 33

Sugerimos que esta atividade seja feita individualmente. Os passos e a interpretação da atividade podem e devem ser compartilhados, seja na lousa, seja de maneira oral, mas só após o trabalho individual, em que os alunos se concentrem na escrita da equação e do sistema, explorando conversões de registros (linguagem usual e linguagem algébrica).

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Apresentamos uma sugestão de passo a passo para o desenvolvimento da resolução de uma situação-problema; uma possibilidade de exploração é propor, primeiramente, que os alunos resolvam o problema com seus próprios passos de resolução e, em seguida, analisem os passos propostos no livro, comparando-os.

Retome com os alunos a importância da organização do sistema de equações, mostrando-lhes que uma boa organização poderá favorecer a visualização e a minimização de possíveis erros operacionais. Explique que, neste caso, as resoluções devem vir acompanhadas de um registro legível, ou seja, que permita a observação e entendimento de um terceiro.

O trabalho com resolução de problemas pode ser mais bem compreendido se os alunos forem capazes de perceber e utilizar cada passo como, por exemplo: identificação da incógnita ou variável e das constantes, formulação de uma estratégia, aplicação da estratégia na resolução e verificação.

O último item, por vezes, é deixado um pouco de lado pelos alunos, o que os leva a não perceberem quando, por exemplo, as respostas obtidas não se encaixam no contexto da situação-problema. Dessa maneira, uma segunda sugestão é reforçar essa etapa de verificação.

Não escreva no livro!

Atividade resolvida passo a passo

(Vunesp) Maria tem em sua bolsa R$ 15,60 em moedas de R$ 0,10 e de R$ 0,25. Dado que o número de moedas de 25 centavos é o dobro do número de moedas de 10 centavos, o total de moedas na bolsa é:

a) 68. b) 75. c) 78. d) 81. e) 84.

Lendo e compreendendo

O problema mostra que Maria tem, ao todo, R$ 15,60. Esse valor é a soma de todas as moedas de 25 centavos e de 10 centavos que ela tem. Não há moedas com outro valor. De acordo com o enunciado, sabemos que o número de moedas de 25 centavos é o dobro do número de moedas de 10 centavos. É pedido o número total de moedas que Maria tem.

Planejando a solução

Vamos chamar a quantidade de moedas de 25 centavos de x e a quantidade de moedas de 10 centavos de y. A quantia que Maria tem com moedas de 25 centavos é $0{,}25x$ e de 10 centavos é $0{,}10y$. Essas quantias somadas resultam em R$ 15,60.

Temos ainda que $x = 2y$. Com isso, podemos montar um sistema com 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas.

Executando o que foi planejado

Temos o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} 0{,}25x + 0{,}10y = 15{,}60 \\ x = 2y \end{cases}$$

Podemos substituir o valor de x da 2ª equação, na 1ª equação.

$$0{,}25 \cdot (2y) + 0{,}10y = 15{,}60 \Rightarrow 0{,}50y + 0{,}10y = 15{,}60 \Rightarrow 0{,}60y = 15{,}60 \Rightarrow y = \frac{15{,}60}{0{,}60} = 26$$

Como x é o dobro de y, vamos ter que: $x = 2y = 2 \cdot 26 = 52$

Então, o total de moedas é $26 + 52 = 78$.

Verificando

26 moedas de 10 centavos representam um total de $26 \cdot 0{,}10 = 2{,}6$, ou seja R$ 2,60.

52 moedas de 25 centavos representam um total de $52 \cdot 0{,}25 = 13$, ou seja R$ 13,00.

Somando R$ 2,60 com R$ 13,00, obtemos R$ 15,60, o que confirma o enunciado.

Total de moedas: $26 + 52 = 78$.

Emitindo a resposta

Resposta: alternativa **c**.

Ampliando a atividade

Existem exemplos de problemas envolvendo sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas que podem ser resolvidos por meio de uma única equação. Veja um exemplo.

Iago usou apenas notas de R$ 20,00 e de R$ 5,00 para fazer um pagamento de R$ 140,00. Quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que no total foram 10 notas?

Podemos montar um sistema de equações, assumindo que x seja o número de notas de R$ 20,00 e y seja o número de notas de R$ 5,00.

$$\begin{cases} 20x + 5y = 140 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Podemos multiplicar a 2ª equação por -5 e adicionar as 2 equações.

$$\begin{cases} 20x + 5y = 140 \\ -5x - 5y = -50 \end{cases}$$

$$15x = 90 \Rightarrow x = 6$$

Assim, substituindo o valor de x em uma das equações, calculamos o valor de y.

$$x + y = 10 \Rightarrow 6 + y = 10 \Rightarrow y = 4$$

Outra maneira de resolver esse problema seria pensar que x é o número de notas de R$ 20,00 e, portanto, o número de notas de R$ 5,00 é $10 - x$.

Assim, podemos calcular da seguinte maneira:

$$20x + 5(10 - x) = 140 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20x + 50 - 5x = 140 \Rightarrow 15x = 90 \Rightarrow x = 6$$

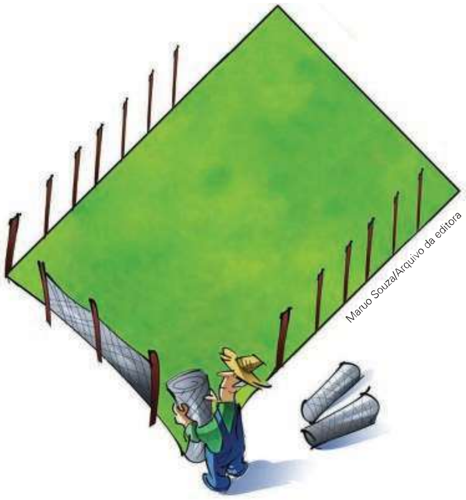
Então, o número de notas de R$ 5,00 é a diferença entre 10 e 6, que é igual a 4.

Logo, Iago usou 6 notas de R$ 20,00 e 4 notas de R$ 5,00.

Classificação de sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas quanto ao número de soluções

Cada sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas que trabalhamos neste capítulo, até aqui, teve sempre uma única solução. Agora, vamos analisar algumas situações-problema que nos levarão a diferentes tipos de sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas.

- Antônio comprou tela de arame para cercar uma parte retangular de um terreno. Ele gastou 48 metros de arame com a cerca e o fez de tal maneira que a medida de comprimento da largura da parte cercada resultou no triplo da medida de comprimento da profundidade. Quais são as medidas das dimensões dessa parte cercada do terreno?



Para resolver essa situação, podemos representá-la com um sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas, considerando apenas números positivos para x e y.

y (medida de comprimento da largura)

x (medida de comprimento da profundidade)

$$\begin{cases} 2x + 2y = 48 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 24 \\ y = 3x \end{cases}$$

Esse sistema de equações pode ser resolvido utilizando um dos **métodos algébricos** ou o **método gráfico** estudados. Vamos resolvê-lo das 2 maneiras.

Método algébrico

Vamos usar o método da substituição.

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ y = 3x \end{cases}$$

Substituindo y por $3x$ na primeira equação, obtemos o valor de x.

$$x + 3x = 24 \Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6$$

Depois, com esse valor, obtemos y usando a segunda equação.

$$y = 3x \Rightarrow y = 3 \cdot 6 = 18$$

O par ordenado $(6, 18)$ é, portanto, a solução do sistema de equações $\begin{cases} x + y = 24 \\ y = 3x \end{cases}$.

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Neste momento, o sistema será desenvolvido apenas pelo método algébrico; logo, deve-se estar atento à organização do sistema e aos passos de resolução. De preferência, peça aos alunos que organizem as respostas de acordo com os passos indicados na atividade da página anterior.

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Agora, a situação-problema do terreno de Antônio será resolvida graficamente. Para complementar, peça aos alunos que representem as retas em um papel milimetrado. Se possível, retome com os alunos o uso de *software* de geometria dinâmica e oriente-os a representar as retas no *software*.

Método gráfico

Determinamos 2 possíveis soluções de cada equação.

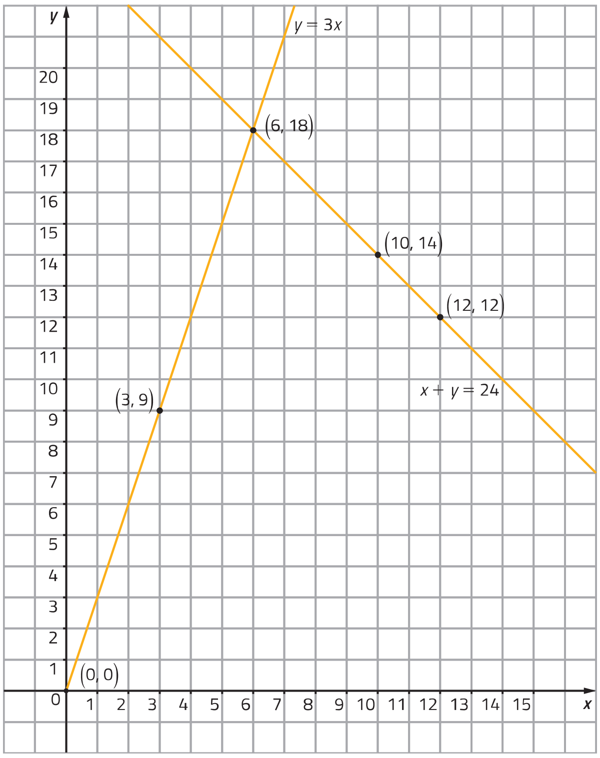
$x + y = 24$

x	y
12	12
10	14

$y = 3x$

x	y
0	0
3	9

Representando no plano cartesiano apenas as partes das retas nas quais x e y são números positivos, podemos construir este gráfico.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Thiago Neumann/Arquivo da editora

O par ordenado $(6, 18)$ é a solução do sistema de equações (o ponto com essas coordenadas é comum às 2 retas).

Assim, a parte cercada do terreno de Antônio tem medidas de dimensões de 6 m por 18 m.

Veja que o perímetro mede 48 m ($6 + 18 + 6 + 18 = 48$) e a medida de comprimento da largura é o triplo da medida de comprimento da profundidade ($18 = 3 \cdot 6$), o que confirma o enunciado.

Classificamos o sistema de equações $\begin{cases} 2x + 2y = 48 \\ y = 3x \end{cases}$ como **possível e determinado**, pois tem **uma única solução**.

Quando um sistema de equações é possivel e determinado, as retas que representam as equações se intersectam em um único ponto, que indica a solução do sistema.

- Vamos analisar agora o sistema de equações $\begin{cases} x + \ \ y = 5 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$, para x e y números racionais.

Método algébrico

$x + y = 5 \Rightarrow x = 5 - y$

$2x + 2y = 6 \Rightarrow 2(5 - y) + 2y = 6 \Rightarrow 10 - \cancel{2y} + \cancel{2y} = 6 \Rightarrow 10 = 6$ (sentença falsa)

Quando isso ocorre, dizemos que **não existe solução** para o sistema de equações ou que ele é **impossível**.

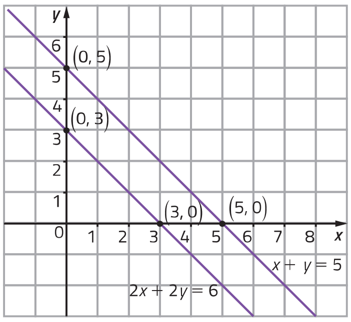
Método gráfico

$x + y = 5$

x	y
0	5
5	0

$2x + 2y = 6$

x	y
0	3
3	0



Quando um sistema de equações é impossível, as retas que representam as equações são distintas e paralelas (não têm ponto comum).

- Vamos resolver agora o sistema de equações $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$.

Método algébrico

$$\begin{cases} x + 2y = 5 & \cdot(-2) \\ 2x + 4y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 4y = -10 \\ \ \ \ 2x + 4y = 10 \end{cases}$$
$$\overline{\ \ 0x + 0y = 0\ \ }$$

Neste caso **qualquer** par ordenado de números racionais (x, y) que satisfaz um das equações também satisfaz a outra. Há, portanto, **infinitas soluções**.

Nesse caso, classificamos o sistema de equações como **possível e indeterminado** ou apenas que ele é **indeterminado**.

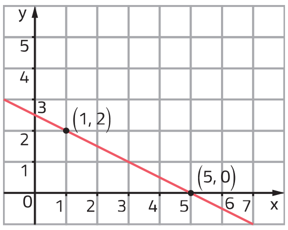
Método gráfico

$x + 2y = 5$

x	y
5	0
1	2

$2x + 4y = 10$

x	y
5	0
1	2



Observe que o sistema $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 4y = 10 \end{cases}$ tem equações equivalentes (basta verificar que a 2ª equação é a 1ª multiplicada por 2).

Quando um sistema de equações é indeterminado, as retas que representam as equações são coincidentes (são a mesma reta).

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Se possível, continue as explorações utilizando *softwares* para que os alunos possam visualizar de maneira lúdica o que são sistemas possíveis e indeterminados. Tais sistemas têm infinitas soluções e, por isso, não é possível determinar uma solução única, seja de maneira algébrica ou gráfica.

Os sistemas impossíveis não têm solução e, graficamente, apresentam duas retas paralelas. Ressalte que a visualização gráfica de um sistema pode ser demorada, principalmente quando estamos trabalhando em papel milimetrado, e que, para classificar um sistema, a visualização algébrica é suficiente.

Peça aos alunos que comparem o método algébrico dos dois exemplos apresentados. Reforce que, ao tentarmos determinar o valor da incógnita, podemos chegar a uma inconsistência matemática como no primeiro exemplo $(6 = 10)$. E isso significa que o sistema é impossível. Ou podemos chegar em $0 = 0$, como no segundo exemplo, e isso significa que o sistema é possível mas indeterminado e que as duas equações do sistema quando simplificadas serão as mesmas.

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Um pouco de História

Faça a leitura do texto da página com os alunos. Reforce que a intepretação do desenvolvimento histórico da Matemática contém um vício: por não compreendermos de verdade essa ciência da época, nós simplesmente pegamos a própria Matemática que já está sendo desenvolvida há milhares de anos e tentamos aplicá-la ao contexto da época.

Esse fato dificulta nossa real compreensão do desenvolvimento histórico da Matemática, mas atualmente há pesquisas que se preocupam em tentar retratar grandes passagens dessa ciência com base na análise de originais, aplicando o estudo típico da Matemática disponível no original.

Não escreva no livro!

Atividade

34 Classifique no caderno cada um destes sistemas de equações em determinado, indeterminado ou impossível, para x e y números racionais.

a) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$ Indeterminado.

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$ Impossível.

c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$ Determinado: solução (5, 1).

d) $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$ Indeterminado.

Um pouco de História

Na história da Matemática ocidental antiga, há poucos registros sobre sistemas de equações. Esse assunto, no entanto, acabou recebendo uma atenção maior no Oriente, principalmente na Babilônia e na China.

Os chineses e os sistemas de equações

Os chineses tinham um gosto especial por diagramas, escreviam sistemas de equações representando os coeficientes com barras de bambu sobre um tabuleiro. Para os coeficientes positivos, utilizavam uma coleção de barras de bambu vermelhas e, para os coeficientes negativos, uma coleção de barras pretas. No entanto, eles não aceitavam soluções negativas para as equações. Em *Nove capítulos sobre a arte matemática* (c. 111 a.C.), o mais influente texto de Matemática chinês, há registros de resolução de sistemas de equações.

Fonte de consulta: BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher Ltda., 1974. p. 143, 147.

Estudio Lab307/Arquivo da editora

Ilustração artística dando a ideia de como poderia ter sido a representação dos coeficientes dos sistemas de equações, pelos chineses.

Os babilônios e os sistemas de equações

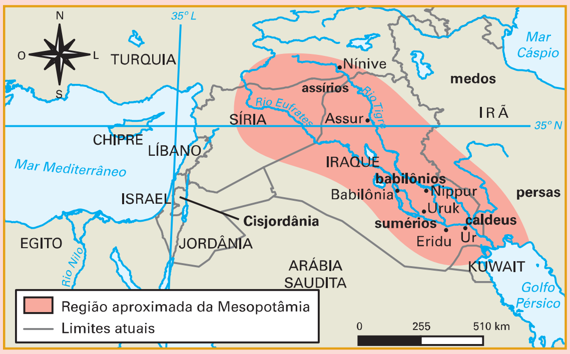
As imagens desta página não estão representadas em proporção.

As civilizações antigas da Mesopotâmia desempenharam um papel fundamental no desenvolvimento da Matemática, contribuindo em diversas áreas, como na Álgebra e na Geometria.

A Mesopotâmia fazia parte de uma região do Oriente Médio onde atualmente se encontram parte do Iraque, do Kuwait, da Síria, do Irã e da Turquia, como mostra este mapa.

Essa região foi habitada por vários povos ao longo dos séculos, entre eles, os babilônios, os assírios, os sumérios e os caldeus. O povo babilônio (1800 a.C.-539 a.C.) teve grande importância no desenvolvimento dos sistemas de 2 equações com 2 incógnitas. As equações babilônicas eram expressas na forma de problemas, como este:

A Mesopotâmia



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte de consulta: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 7. ed. Rio de Janeiro, 2016.

"Um quarto da medida da largura mais a medida do comprimento é igual a 7 mãos, e a medida do comprimento mais a medida da largura é igual a 10 mãos."

No documento em que se encontra esse problema, a solução é encontrada, primeiramente, substituindo cada "mão" por 5 "dedos". Observa-se, então, que uma largura com medida de 20 dedos e um comprimento com medida de 30 dedos satisfazem ambas as equações.

Em seguida, a solução é obtida de maneira equivalente ao método da adição. Considerando as medidas das dimensões em "mãos", adota-se x como a medida da largura e y como a medida do comprimento. Desse modo, encontram-se $x = 4$ mãos e $y = 6$ mãos.

Fonte de consulta: UOL EDUCAÇÃO. *Matemática*. Disponível em: <https://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/historia-da-matematica-2-sistema-de-equacoes.htm>. Acesso em: 27 set. 2018.

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Atividade 35

Esta atividade pode ser resolvida por uma equação do 1º grau, como $y + y + 18\,000 = 50\,000$, ou por um sistema de equações.

Lembrando que y é a parte da herança a ser recebida pelo irmão mais velho.

Veja a resolução desta atividade.

Irmão mais novo: x Irmão mais velho: y

Resolução de problemas que envolvem sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Você utilizou sistemas de equações para encontrar a solução de vários problemas. Resolva no caderno mais algumas situações.

Atividades

Não escreva no livro!

35 Uma herança de R$ 50 000,00 foi deixada para 2 irmãos. No testamento, ficou estabelecido que o filho mais novo deveria receber R$ 18 000,00 a mais do que o irmão mais velho. Qual é a quantia que cada um receberá? Mais novo: R$ 34 000,00; mais velho: R$ 16 000,00.

36 O "peso" de Camila e do gato dela Tico, juntos, é igual a 32 kg. O "peso" de Camila é 7 vezes o de Tico. Qual o "peso" de cada um? Tico: 4 kg; Camila: 28 kg.

37 Em um triângulo isósceles, a medida de perímetro é de 15 centímetros. Sabe-se que a medida de comprimento de um dos lados tem a metade da medida de comprimento de cada um dos outros 2 lados. Qual é a medida de comprimento dos 3 lados desse triângulo? Desenhe-o no caderno. 6 cm, 6 cm e 3 cm.

38 Beto fez uma prova de Matemática com o seguinte sistema de avaliação: em cada questão certa, o aluno ganha 5 pontos, e em cada questão errada, são descontados 3 pontos. Na prova com 10 questões, a pontuação de Beto foi de 26 pontos.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Mauro Souza/Arquivo da editora

a) Quantas questões Beto acertou? Quantas ele errou? 7 questões; 3 questões.

b) Qual é a pontuação máxima dessa prova? 50 pontos.

c) Qual seria a pontuação de Beto se ele acertasse 5 questões e errasse 5? 10 pontos.

39 Vivian e Marcos gostam muito das coleções deles de papéis de carta. Trocam, destrocam e a coleção vai sempre aumentando e se diversificando. Eles conversam o tempo todo sobre a coleção. Veja, por exemplo, o diálogo deles.

Ilustrações: Thiago Neumann/Arquivo da editora

Então, quantos papéis de carta cada um tem? Vivian: 15 papéis de carta; Marcos: 25 papéis de carta.

40 Reginaldo criava 75 animais na fazenda dele, entre cabras e marrecos. Quando um visitante perguntava quantos animais de cada espécie ele tinha, ele respondia: "Na última contagem, havia registrado 210 patas.". Mostre no caderno como decifrar a charada de Reginaldo usando um sistema de equações e calcule o número de cabras e de marrecos que Reginaldo criava. 30 cabras e 45 marrecos.

41 Em um aquário há 8 peixes, entre pequenos e grandes. Se o número dos peixes pequenos aumentasse em 1, então eles seriam o dobro dos grandes. Quantos são os peixes pequenos e os grandes? Pequenos: 5 peixes; grandes: 3 peixes.

42 Uma fração é equivalente a $\frac{4}{6}$. Diminuindo 1 no numerador e aumentando 2 no denominador, obtém-se uma nova fração, equivalente a $\frac{3}{5}$. Quais são as 2 frações citadas no problema? $\frac{22}{33}$ e $\frac{21}{35}$.

43 Luís comprou um livro e um DVD para o neto dele e pagou R$ 35,00. Roberto comprou 2 livros e um DVD do mesmo tipo e pagou R$ 55,00. Qual é o preço do DVD e o do livro? DVD: R$ 15,00; livro: R$ 20,00.

Grintan/Shutterstock

Livro.

DVD.

Discpicture/Shutterstock

$$\begin{cases} x + y = 50\,000 \\ x = y + 18\,000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 50\,000 \\ x - y = 18\,000 \end{cases}$$

Adicionando as duas equações, temos:

$x + y + x - y = 50\,000 + 18\,000$

Logo, ao irmão mais novo cabe a quantia de R$ 34 000,00, e, ao irmão mais velho, R$ 16 000,00.

Atividade 37

Esta atividade pode ter sua resolução auxiliada por um desenho sem escala, mas que mantenha a proporção indicada. É importante acompanhar a montagem do sistema: verifique se os alunos montam o sistema usando fração ou não.

$$\begin{cases} 2a + b = 15 \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2a + b = 15 \\ a = 2b \end{cases}$$

Explique aos alunos que ambas as montagens do sistema estão corretas; no segundo caso, já simplificamos para facilitar os cálculos. Veja a resolução dele.

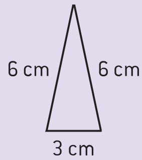
Substituindo $a = 2b$ na primeira equação, temos:

$2a + b = 15 \Rightarrow 2(2b) + b = 15 \Rightarrow 5b = 15 \Rightarrow b = 3$

Substituindo b na segunda equação, temos:

$a = 2b \Rightarrow a = 2 \times 3 \Rightarrow a = 6$

Logo, as medidas de comprimento dos lados do triângulo são 6 cm e 3 cm.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividade 36

Verifique a resolução desta atividade.

"Peso" de Camila: x

"Peso" de Tico: y

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ x = 7y \end{cases}$$

Substituindo $x = 7y$ na primeira equação, temos:

$x + y = 32 \Rightarrow 7y + y = 32 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8y = 32 \Rightarrow y = 4$

Substituindo y na segunda equação, temos:

$x = 7y \Rightarrow x = 7 \cdot 4 \Rightarrow x = 28$

Logo, as medidas de "peso" de Tico e de Camila são, respectivamente, 4 kg e 28 kg.

Atividades 38 e 39

Veja na página LVI deste Manual a resolução destas atividades.

Atividade 40

Nesta atividade, podemos identificar a quantidade de cabras como c e a quantidade de marrecos como m escrevendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c + m = 75 \\ 4c + 2m = 210 \end{cases}$$

Desafie os alunos a resolver sistemas deste tipo também pelo método da adição, para isso, basta multiplicar a primeira equação por (-2). Veja a resolução.

Cabras: c

Marrecos: m

$$\begin{cases} c + m = 75 \\ 4c + 2m = 210 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2c - 2m = -150 \\ 4c + 2m = 210 \end{cases}$$

Adicionando as duas equações, temos:

$-2c - 2m + 4c + 2m =$
$= -150 + 210 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2c = -60 \Rightarrow c = 30$

Substituindo c na primeira equação, temos:

$c + m = 75 \Rightarrow 30 + m = 75 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 45$

Portanto, Reginaldo criava 30 cabras e 45 marrecos.

Atividades 41 a 43

Veja a resolução destas atividades na página LVI deste Manual.

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Como na página anterior, os alunos serão convidados a resolver problemas. Retome e acompanhe o passo a passo de resolução dos alunos. Se perceber dificuldades, faça algumas atividades na lousa para que possam tirar algumas dúvidas sobre métodos já estudados.

Sugerimos que proponha que algumas atividades sejam resolvidas pelo método gráfico, com auxílio de *software* ou não.

Atividade 44

Nesta atividade, oriente os alunos a reescrever o número misto na forma de fração imprópria. Se necessário relembre-os:

$$1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Logo, o sistema pode ser escrito como:

$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{4} \\ x - y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Oriente os alunos a reescrever o sistema:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 5 \\ 4x - 4y = 1 \end{cases}$$

Nesse sistema será imediato o uso do método da adição. Veja o desenvolvimento da resolução.

Adicionando as duas equações, temos:

$$4x + 4y + 4x - 4y = 5 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

Substituindo x na primeira equação:

$$\frac{3}{4} + y = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Os números são: $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

Atividades 45 a 51

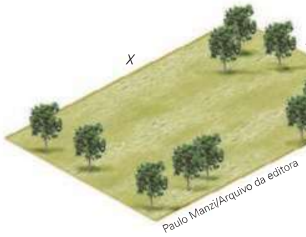
Na atividade 46, há outras maneiras de compor a quantia solicitada no problema, como com cédulas de 100 e de 10 reais. Para ampliar o aprendizado, explore algumas delas, pedindo aos alunos que reescrevam o problema e depois que o solucionem.

Veja nas páginas LVI e LVII deste Manual as resoluções destas atividades.

44. $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$. **46.** 7 cédulas de R$ 10,00 e 4 cédulas de R$ 50,00; sim; 5 cédulas de R$ 50,00 e 2 cédulas de R$ 10,00.

44 A soma de 2 números é igual a $1\frac{1}{4}$ e a diferença entre eles é igual a $\frac{1}{4}$. Quais são esses números?

45 Neste terreno retangular, a medida de perímetro é de 78 m e a diferença entre as medidas das dimensões é igual a 11 m. Qual é a medida de área desse terreno? 350 m²



Paulo Manzi/Arquivo da editora

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

46 Renato foi ao banco e retirou R$ 270,00 para pagar o aluguel. Ao todo, o caixa eletrônico deu a ele 11 cédulas, entre cédulas de R$ 10,00 e de R$ 50,00.

Quantas cédulas de R$ 10,00 o caixa deu a ele? O caixa poderia ter dado 1 cédula de R$ 50,00 a mais? Qual seria, então, o número de cédulas de R$ 50,00 e de R$ 10,00?

47 Ana e Marcelo economizaram as mesadas para comprar um presente para o pai deles. Juntando a quantia que eles têm é possível comprar este par de tênis e não sobra troco. A quantia que Ana tem ultrapassa em R$ 21,00 a quantia de Marcelo. Quantos reais cada um tem?
Ana: R$ 38,00; Marcelo: R$ 17,00.

Mauro S/Sérgio Dotta Jr./Arquivo da editora

48 Sandra comprou um conjunto de calça e blusa. Pela calça, pagou o dobro do preço que pagou pela blusa. Para fazer o pagamento, ela deu ao vendedor 1 cédula de R$ 50,00 e 2 de R$ 10,00, recebendo de troco 1 cédula de R$ 5,00 e 2 moedas de R$ 1,00. Quanto custou cada peça de roupa que Sandra comprou?
Calça: R$ 42,00; blusa: R$ 21,00.


Crystalfoto/Shutterstock

Manequim de loja.

49 **Desafio.** No início de uma reunião, o número de gestores era 3 a menos do que o número de analistas. Depois de 2 horas, o número de gestores havia aumentado em 8, o de analistas havia dobrado e a quantidade total de gestores e analistas era a mesma. Quantos gestores e quantos analistas havia no início da reunião? 2 gestores e 5 analistas.

50 **Matemática financeira: despesa e lucro.** Uma pequena indústria automobilística produz peças dos tipos **A** e **B**. A despesa mensal dessa indústria inclui um valor fixo de R$ 2000,00 mais R$ 2,00 por peça fabricada do tipo **A** e R$ 1,50 por peça do tipo **B**. Cada peça do tipo **A** é vendida por R$ 3,50, e cada peça do tipo **B** é vendida por R$ 2,50. No mês de janeiro de certo ano, essa indústria teve uma despesa total de R$ 20000,00 na produção de 10000 peças.

a) Calcule no caderno o lucro total desse mês, sabendo que toda a produção foi vendida. R$ 11000,00

b) Calcule no caderno a porcentagem desse lucro em relação à despesa. 55%

51 **Matemática financeira: descontos.** Na banca da feira de Alfredo, todo dia, depois das 13 horas, ele dá um desconto de 10% sobre o preço das frutas e de 15% sobre o preço das verduras. Iolanda, Lúcia e Raul são fregueses de Alfredo. Em certo dia, Iolanda foi à feira de manhã e gastou R$ 14,00 na compra de 2 kg de maçãs e 3 maços de espinafre. No mesmo dia, Lúcia foi à feira às 14 horas e gastou R$ 7,00 na compra de 1 kg de maçãs e 2 maços de espinafre. Amanhã, Raul vai comprar 3 kg de maçãs e 5 maços de espinafre. Quanto Raul vai gastar nessa compra? R$ 22,00 se fizer a compra até as 13 horas e R$ 19,30 se fizer a compra após as 13 horas.


Hans von Manteuffel/Tyba

Frutas em barraca de feira.

Não escreva no livro!

Atividade resolvida passo a passo

(Enem) Algumas pesquisas estão sendo desenvolvidas para se obter arroz e feijão com maiores teores de ferro e zinco e tolerantes à seca. Em média, para cada 100 g de arroz cozido, o teor de ferro é de 1,5 mg e o de zinco é de 2,0 mg. Para cada 100 g de feijão, é de 7 mg o teor de ferro e de 3 mg o de zinco. Sabe-se que as necessidades diárias dos dois micronutrientes para uma pessoa adulta é de aproximadamente 12,25 mg de ferro e 10 mg de zinco.

Disponível em: http://www.embrapa.br. Acesso em: 29 abr. 2010 (adaptado)

Considere que uma pessoa adulta deseja satisfazer suas necessidades diárias de ferro e zinco ingerindo apenas arroz e feijão. Suponha que seu organismo absorva completamente todos os micronutrientes oriundos desses alimentos.

Na situação descrita, que quantidade a pessoa deveria comer diariamente de arroz e feijão, respectivamente?

a) 58 g e 546 g. b) 200 g e 200 g. c) 350 g e 100 g. d) 375 g e 500 g. e) 400 g e 89 g.

Lendo e compreendendo

Para suprir suas necessidades diárias, uma pessoa precisa de 12,25 mg de ferro, sendo retirados 1,5 mg de cada porção de arroz e 7 mg da de feijão, e de 10 mg de zinco, sendo retirados 2 mg de cada porção de arroz e 3 mg da de feijão.

Planejando a solução

Sejam a e f, respectivamente, o número de porções de 100 g de arroz e de feijão que deverão ser ingeridos. Podemos montar 2 equações: a primeira relativa às necessidades diárias de ferro e a segunda, de zinco.

Executando o que foi planejado

De acordo com o enunciado, obtemos este sistema de equações:

$$\begin{cases} 1{,}5a + 7f = 12{,}25 \\ 2a + 3f = 10 \end{cases}$$

O menor número inteiro que pode ser dividido por 1,5 e por 2 é 6.

Temos que $6 \div 1{,}5 = 4$ e $6 \div 2 = 3$, então vamos multiplicar a 1ª equação por 4 e a 2ª equação por -3.

Atenção que os conceitos de múltiplos e de divisores são restritos ao conjunto dos números inteiros. A divisão de 6 por 1,5 é exata, mas nem por isso 6 pode ser considerado múltiplo de 1,5.

$$\begin{cases} 6a + 28f = 49 \\ -6a - 9f = -30 \end{cases}$$

$$19f = 19 \Rightarrow f = 1$$

$$2a + 3 \cdot 1 = 10 \Rightarrow 2a = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{2} \Rightarrow a = 3{,}5$$

Portanto, a quantidade de cada um desses 2 alimentos que deve ser ingerida é:

- arroz: $3{,}5 \cdot 100 = 350$;
- feijão: $1 \cdot 100 = 100$.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Verificando

Vejamos a medida de massa diária de ferro (em mg) necessária.

Massa de arroz	Massa de ferro
100 g	1,5 g
350 g	x g

As grandezas "Massa de arroz" e "Massa de ferro" são diretamente proporcionais.

Então: $\frac{100}{350} = \frac{1{,}5}{x} \Rightarrow 100 \cdot x = 350 \cdot 1{,}5 \Rightarrow 100x = 525$

Assim, em 100 g de feijão, encontraremos 7 mg de ferro.

Como $5{,}25 + 7 = 12{,}25$, isso confirma que em 350 g de arroz mais 100 g de feijão encontraremos 12,25 mg de ferro.

O mesmo raciocínio podemos fazer para o zinco, o que confirma a solução.

Emitindo a resposta

Para ingerir 12,25 mg de ferro e 10 mg de zinco, cumprindo as necessidades diárias de uma pessoa, são necessários 350 g de arroz e 100 g de feijão. (Alternativa **c**.)

2 Sistemas de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas

Antes de iniciar a leitura da atividade resolvida passo a passo sugerimos que convide os alunos a tentarem desenvolver a resolução sozinhos, com a maior riqueza de detalhes possível. Em seguida, eles podem, em duplas, comparar suas resoluções entre si e com a resolução do livro. Com isso, é possível fazer alguns questionamentos nesse momento como, por exemplo: "O que estava incompleto em sua resolução?", "Você resolveu da mesma maneira que o colega de dupla?".

Sugestão de leitura

MURRIE, Zuleika de Felice (coord.). *Matemática:* livro do estudante: ensino fundamental. Brasília: Ministério da Educação, INEP, 2006. p. 150. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/encceja/material_estudo/livro_estudante/matematica_ens_fund.pdf>. Acesso em: 17 out. 2018.

Revisando seus conhecimentos

Principais habilidades da BNCC

EF08MA07 EF08MA08

Atividade 1

Nesta atividade é retomada a ideia de sucessor de um número natural. Relembre aos alunos que o sucessor de um número natural n pode ser escrito como $n + 1$ e o sucessor deste pode ser escrito como $n + 2$ e assim por diante. Veja a resolução.

Os 3 números consecutivos pares podem ser escritos como: $x - 2$, x, $x + 2$.

$x - 2 + x + x + 2 = 132 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x = 132 \Rightarrow x = 44$

Substituindo x, temos:

$x - 2 = 44 - 2 = 42$

$x = 44$

$x + 2 = 44 + 2 = 46$

Portanto, os números são 42, 44 e 46.

Atividade 3

Esta atividade retoma conceitos da Geometria ligados ao estudo dos ângulos em um triângulo qualquer e os utilizamos na resolução: o ângulo externo do triângulo, a soma dos ângulos internos e ângulos opostos pelo vértice. Se perceber a necessidade, retome esses tópicos antes de propor a resolução.

Veja a resolução.

$$\begin{cases} x + y = 2y - 10 \\ 6x + 2y = 180 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = -10 \\ 6x + 2y = 180 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = -20 \\ 6x + 2y = 180 \end{cases}$$

Adicionando as duas equações, temos:

$2x - 2y + 6x + 2y = -20 +$
$+ 180 \Rightarrow 8x = 160 \Rightarrow x = 20$

Substituindo x na primeira equação, temos:

$2x - 2y = -20 \Rightarrow 2 \times 20 -$
$- 2y = -20 \Rightarrow -2y =$
$= -20 - 40 \Rightarrow y = 30$

Sabemos que $z + 2y +$
$+ 2y - 10 = 180$, então:

$z = 180 - (60 + 50) =$
$= 180 - 110 = 70$

Alternativa **a**.

Atividade 5

Uma atenção especial deve ser dada à atividade 5, que retoma a divisão de fração em uma

Revisando seus conhecimentos

Não escreva no livro!

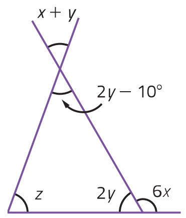
1 A soma de 3 números pares consecutivos é igual a 132. Quais são esses números?
42, 44 e 46. ($x - 2 + x + x + 2 = 132 \Rightarrow 3x = 132 \Rightarrow x = 44$)

2 Determine no caderno a solução desta equação.

$$\frac{t+2}{4} - \frac{t-2}{6} = \frac{2}{3} + t \quad t = \frac{2}{11}$$

3 Nesta figura, a medida de abertura indicada por z é igual a:

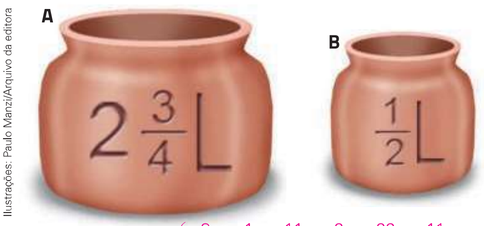
X a) 70°.
b) 68°.
c) 71°.
d) 69°.



4 O sistema de equações $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 6x - 2y = 1 \end{cases}$, com x e y racionais, é:

a) determinado com a solução $(2, -4)$.
b) determinado com a solução $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.
X c) impossível.
d) indeterminado.

5 Observe a medida de capacidade de cada vasilha e responda: Para encher a vasilha **A**, quantas vasilhas **B** são necessárias?



5 vasilhas **B** e meia. $\left(2\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{11}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}\right)$

Raciocínio lógico

Copie a igualdade no caderno e substitua os ▢ pelos sinais de operações que a tornam verdadeira.

18 ▢ 2 ▢ 9 ▢ 24 ▢ 5 ▢ = 100

$18 \div 2 \times 9 + 24 - 5 = 100$

6 Copie os sistemas de equações no caderno, resolva-os mentalmente e registre as soluções.

a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}$ (5, 3)

b) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 8 \end{cases}$ (14, 6)

7 Considerando o sistema de equações $\begin{cases} 3a - 2b = 20 \\ a + 5b = 1 \end{cases}$, qual é o valor de $2a + 3b$?
9 ($a = 6$ e $b = -1$; $12 - 3 = 9$)

8 Na escola de Raul, há aula em 3 períodos: manhã, tarde e noite. Considerando os dados que aparecem neste gráfico, descubra no caderno quantos alunos frequentam cada um dos períodos e o número total de alunos na escola. Em seguida, copie o gráfico e complete-o, indicando também o número de alunos do período da noite.

Alunos por período

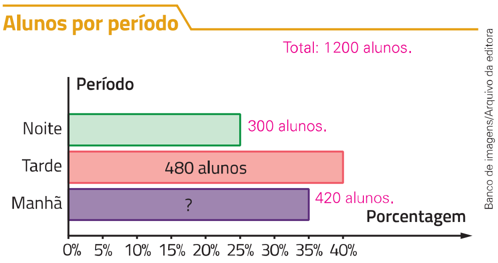
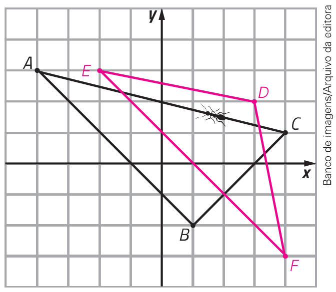


Gráfico elaborado para fins didáticos.

9 Calcule e depois confira com uma calculadora: Qual número aparecerá no visor digitando 2 5 6 √ √? 4 ($\sqrt{256} = 16$; $\sqrt{16} = 4$)

10 Uma formiga fez o percurso: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$, com $A(-4, 3)$, $B(1, -2)$, $C(4, 1)$.
Esse percurso tem a forma de um triângulo escaleno e retângulo.



Um besouro fez $D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D$, com $D(3, 2)$, $E(-2, 3)$, $F(4, -3)$.

Copie o desenho acima em uma malha quadriculada, desenhe o percurso do besouro e escreva o tipo de figura correspondente. Triângulo isósceles e obtusângulo.

situação-problema. Verifique a autonomia dos alunos e, ao perceber dificuldades, proponha a realização coletiva. Se possível, traga embalagens (ou vasilhas) de dois tamanhos: 500 mL e 1 500 mL. Permita que os alunos verifiquem a resposta usando as embalagens e água.

Atividade 8

Acompanhe a resolução desta atividade.

40% de x = 480

$0{,}4x = 480 \Rightarrow 0{,}1x = 120 \Rightarrow x = 1\,200$

O total de alunos é 1 200.

Manhã: 35% de 1 200 = 420

100% − (40% + 35%) = 25%

Noite: 25% de 1 200 = 300

12. $6\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5 \Rightarrow 3x + 2x = 30 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6\right)$

11 **Desafio.** Copie no caderno e complete logicamente estas sentenças.

Nenhum triângulo é quadrilátero.

Algum polígono é triângulo.

Portanto, ▇. Algum polígono não é quadrilátero.

12 **Uma equação egípcia.** Nesta figura, podemos observar uma equação escrita por um matemático egípcio 30 séculos antes de Cristo, na época dos faraós.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Os hieróglifos indicam (aproximadamente) este problema:

"Qual é o número cuja metade
mais a terça parte é igual a 5?"

Escreva a equação no caderno e resolva-a.

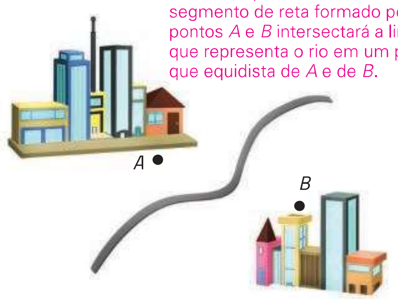
13 **(Saeb)** Paulo é dono de uma fábrica de móveis. Para calcular o preço V de venda de cada móvel que fabrica, ele usa a seguinte fórmula: $V = 1{,}5C + 10$, sendo C o preço de custo desse móvel. Considere que o preço de custo de um móvel que Paulo fabrica é R$ 100,00. Então, ele vende esse móvel por:

a) R$ 110,00.
X c) R$ 160,00.
b) R$ 150,00.
d) R$ 210,00.

($V = 1{,}5 \times 100 + 10 = 160$)

14 Entre as cidades representadas pelos pontos A e B neste mapa passa um rio. O projeto de construção de uma estrada que liga essas cidades mostra que a ponte sobre o rio terá a mesma medida de distância das 2 cidades.

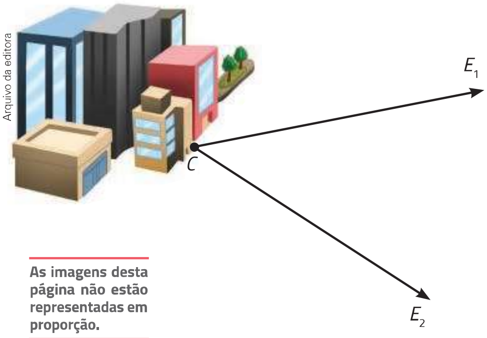
Mediatriz, pois a mediatriz do segmento de reta formado pelos pontos A e B intersectará a linha que representa o rio em um ponto que equidista de A e de B.



Estúdio LAB307/Arquivo da editora

Os engenheiros que trabalharão nesse projeto dispõem desse mapa da região. Para determinar o local onde a ponte será construída, qual conceito de lugar geométrico eles podem usar? Justifique sua resposta.

15 O início de 2 estradas retilíneas E_1 e E_2 é um ponto C de uma cidade. Manuel pretende construir uma loja de produtos da região a uma mesma medida de distância das 2 estradas e a uma medida de distância x do início delas.

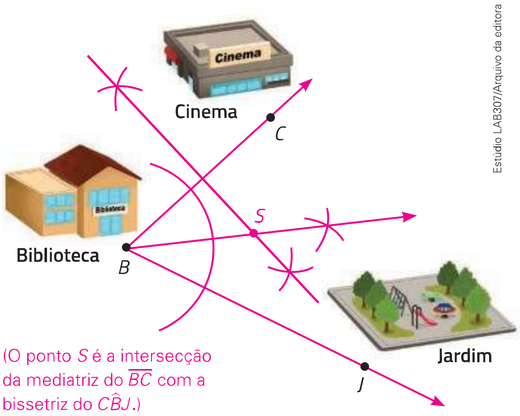


Estúdio LAB307/Arquivo da editora

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Considere as estradas E_1 e E_2 como os lados de um ângulo com vértice no ponto C. Para estabelecer a localização da loja de Manuel nesta figura, quais conceitos de lugar geométrico ele pode utilizar?

16 Reproduza no caderno a figura dada e considere que os pontos C, B e J representam, respectivamente, o cinema, a biblioteca e um jardim de uma cidade.



Estúdio LAB307/Arquivo da editora

(O ponto S é a intersecção da mediatriz do $\overline{BC}$ com a bissetriz do $C\hat{B}J$.)

Na figura que você desenhou, trace as semirretas $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BJ}$ para representar as ruas que partem da biblioteca e passam pelo cinema e pelo jardim, respectivamente.

Depois, localize o ponto S, que representa o supermercado a ser construído, sabendo que ele estará à mesma medida de distância dos pontos que representam a biblioteca e o cinema e também à mesma medida de distância das retas que representam as ruas citadas.

15. Circunferência com centro em C e raio de medida de comprimento x, para determinar os pontos que distam x do ponto C, e bissetriz do ângulo $E_1\hat{C}E_2$ para determinar os pontos equidistantes das estradas. A intersecção da circunferência e da bissetriz é o local onde deve ser construída a loja.

Revisando seus conhecimentos

Atividade 11

Esta atividade apresenta um desafio de lógica matemática. Outras questões similares podem ser trabalhadas propondo-se, por exemplo, que em duplas os alunos elaborem desafios semelhantes para os colegas resolverem. O trabalho com questões lógicas pode permear diversas aulas e assuntos.

Testes oficiais

Principais habilidades da BNCC

EF08MA07 EF08MA08

Atividade 2

Veja a resolução desta atividade.

CDs de Melissa: x

CDs de Adriano: y

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \\ y + 2x = 100 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 3y \\ y + 2x = 100 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y - 4x = 0 \\ y + 2x = 100 \ (\cdot 2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y - 4x = 0 \\ 2y + 4x = 200 \end{cases}$$

Somando as 2 equações, temos:

$3y - 4x + 2y + 4x = 0 + 200 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5y = 200 \Rightarrow y = 40$

Substituindo y na primeira equação, temos:

$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{40}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{3} = 10 \Rightarrow x = 30$

Portanto, Melissa tem 30 CDs e Adriano tem 40 CDs.

Atividade 3

Veja a resolução desta atividade.

Meninos: x

Meninas: y

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ 2x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x - y = -14 \\ 2x + y = 16 \end{cases}$$

Adicionando as duas equações, temos:

$-x - y + 2x + y = -14 +$
$+ 16 \Rightarrow x = 2$

Substituindo x na primeira equação, temos:

$x + y = 14 \Rightarrow y = 14 - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 12$

Alternativa **e**.

Atividades 4 a 7

Nestas atividades, é importante acompanhar a organização do sistema por parte dos alunos. Em provas oficiais com questões de múltipla escolha, é possível utilizar a estratégia de tentativa e erro, vista no início do capítulo. Essa possibilidade permite que os alunos encontrem a resposta mais facilmente. Acreditamos que ela possa ser trabalhada nestas atividades e, inclusive, para ampliar e potencializar a proposta, siga os seguintes passos:

- determine por meio de tentativa e erro a solução, se possível;
- determine o sistema de equações;
- verifique a solução encontrada com o método algébrico de sua preferência.

Especificamente na atividade 4, os alunos devem ser orientados a interpretar o preço de cada tipo de peça de roupa como uma incógnita diferente.

Na atividade 5, deve-se ter atenção com a segunda equação; considerando x a quantidade de quadrados e y a quantidade de triângulos, a equação $x + y = 13$ é imediata, e a que pode trazer dificuldades é a equação $4x + 3y = 48$, pois lida com a quantidade de palitos utilizados em cada composição geométrica.

Consideramos a montagem do sistema da atividade 7 um pouco mais complexa por não ser imediata, pois é necessário simplificar a segunda equação. Se denominarmos M a mesada de Marta e J a mesada de João, o sistema será:

$$\begin{cases} M + J = 200 \\ M - 70 = J - 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M + J = 200 \\ M - J = 30 \end{cases}$$

Testes oficiais

Não escreva no livro!

1 **(Saeb)** João e Pedro foram a um restaurante almoçar e a soma da conta deles foi de R$ 28,00. A conta de Pedro foi o triplo do valor de seu companheiro. O sistema de equações do 1º grau que melhor traduz o problema é:

a) $\begin{cases} x + y = 28 \\ x - y = 7 \end{cases}$

X c) $\begin{cases} x + y = 28 \\ x = 3y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 3y = 28 \\ x = y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 28 \\ x = y + 3 \end{cases}$

2 **(Saresp)** Leia com atenção.

Quantos CDs tem Melissa? E Adriano? 30 CDs; 40 CDs.

3 **(Obmep)** Um grupo de 14 amigos comprou 8 *pizzas*. Eles comeram todas as *pizzas*, sem sobrar nada. Se cada menino comeu uma *pizza* inteira e cada menina comeu meia *pizza*, quantas meninas havia no grupo?

a) 4

b) 6

c) 8

d) 10

X e) 12

4 **(Saresp)** Na promoção de uma loja, uma calça e uma camiseta custam juntas R$ 55,00. Comprei 3 calças e 2 camisetas e paguei o total de R$ 140,00. O preço de cada calça e de cada camisa, respectivamente, é:

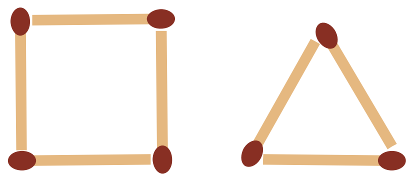
a) R$ 35,00 e R$ 20,00.

b) R$ 20,00 e R$ 35,00.

c) R$ 25,00 e R$ 30,00.

X d) R$ 30,00 e R$ 25,00.

5 **(Saresp)** Com 48 palitos de mesmo tamanho eu montei 13 figuras: alguns triângulos e alguns quadrados. Quantos quadrados eu montei? 9 quadrados.



Banco de imagens/Arquivo da editora

6 **(Saresp)** Pelo regulamento de um torneio de basquete, cada equipe ganha 2 pontos por jogo que vencer e 1 ponto por jogo que perder. Nesse torneio, uma equipe disputou 9 partidas e acumulou 15 pontos ganhos. É correto afirmar que essa equipe venceu:

a) 3 partidas e perdeu 6.

b) 4 partidas e perdeu 5.

c) 5 partidas e perdeu 4.

X d) 6 partidas e perdeu 3.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

7 **(Saresp)** A soma das mesadas de Marta e João é R$ 200,00. No mês passado, Marta gastou R$ 70,00 e João gastou R$ 40,00 e, ao final do mês, estavam com as mesmas quantias.

A mesada de Marta é:

X a) R$ 115,00.

b) R$ 120,00.

c) R$ 135,00.

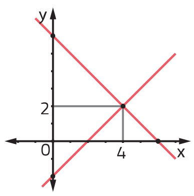
d) R$ 152,00.

8 **(Saeb)** Um sistema de equações do 1º grau foi dado por:

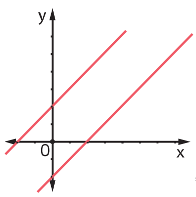
$$\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = \quad x - 2 \end{cases}$$

Qual é o gráfico que representa o sistema?

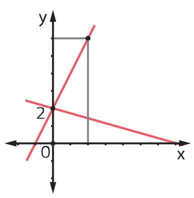
X a)



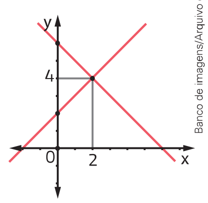
c)



b)



d)



Banco de imagens/Arquivo da editora

VERIFIQUE O QUE ESTUDOU

1. b) 9 (7 − 2x (−1) = 7 + 2 = 9)
c) $x = 5$ ($3x + 1 = 14 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$)
d) $x = 4$ ($x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$)

1 Calcule mentalmente e registre no caderno a resposta de cada item.

a) O valor de $3x + 5$, para $x = \frac{1}{3}$. 6 (1 + 5 = 6)

b) O valor de $x - 2y$, para $x = 7$ e $y = -1$.

c) O valor de x para que $3x - 1$ seja igual a 14.

d) O valor de x para o qual $x - y = 3$ e $y = 1$.

e) O valor de x e o valor de y para os quais $x + y = 10$ e $x - y = 4$. $x = 7$ e $y = 3$ (7 + 3 = 10; 7 − 3 = 4)

f) O valor de $x + y$, quando se tem $y = 2x$ e $x - y = -4$. 12 ($x = 4$; $y = 8$; $x + y = 4 + 8 = 12$)

2 Determine no caderno o valor de x para que a expressão $\frac{3x - 5}{2} - \frac{7x - 8}{3}$ tenha valor numérico igual a 6. $x = -7$

3 Entre os pares ordenados $(0, -1)$, $(3, 4)$, $(2, 2)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, quais são soluções da equação $3x - 2y = 1$? $(3, 4)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

4 Entre os pares ordenados $(0, -7)$, $(3, 2)$, $(2, -1)$ e $(5, -3)$, qual é solução do sistema de equações $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$? $(2, -1)$

5 Copie no caderno e complete: O par ordenado (■, ■) é solução do sistema de equações $\begin{cases} x + y = ■ \\ x - y = ■ \end{cases}$.
Exemplo de resposta: 3; 1; 4; 2.

6 A soma das medidas de área de 2 regiões retangulares **A** e **B** é igual a 80 cm². A medida de comprimento da base da região **A** é igual à terça parte da medida de comprimento da base da região **B** e a medida de comprimento da altura de ambas é igual a 4 cm. Determine no caderno as medidas de perímetro das regiões retangulares **A** e **B**. 18 cm e 38 cm;

7 Juntos, Felipe e Elisa têm R$ 3 240,00. Felipe tem R$ 220,00 a mais do que Elisa. Qual é a quantia que cada um tem? Felipe R$ 1 730,00; Elisa R$ 1 510,00.

Não escreva no livro!

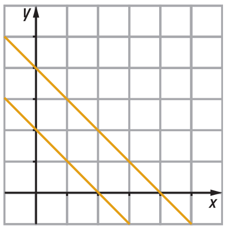
8 Responda no caderno.

a) Considere uma equação do 1º grau com 2 incógnitas. O que podemos dizer sobre a posição das soluções dessa equação, representadas em um plano cartesiano? Pertencem a uma mesma reta.

b) Considere um sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas, que é possível e determinado. O que podemos dizer sobre a posição da solução desse sistema de equações, representada em um plano cartesiano? É a intersecção das retas que contém as soluções de cada equação do sistema.

9 **Avaliação de resultados.** Ao resolver um sistema de equações proposto pelo professor, Alex usou um processo algébrico e chegou à solução $(3, 1)$.

Mauro usou o processo geométrico e construiu este gráfico. Converse com os colegas e respondam: Há a possibilidade de os 2 terem acertado? Justifiquem.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Não, pois se Alex acertou, então as retas teriam que se intersectar em (3, 1) e se Mauro acertou, então o sistema de equação não teria um par ordenado como solução.

10 Resolva no caderno cada sistema de 2 equações do 1º grau com 2 incógnitas, da maneira que preferir, e classifique-o quanto ao número de soluções. Use pelo menos 1 vez o método algébrico e 1 vez o método gráfico. Resolução pessoal.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$ $(2, -1)$; possível e determinado.

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -2x - 3y = 1 \end{cases}$ Impossível.

c) $\begin{cases} x - y = 0{,}5 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ $(0; 0{,}5)$; possível e determinado.

d) $\begin{cases} x - 3y = 0{,}7 \\ -x + 3y = 0{,}7 \end{cases}$ Possível e indeterminado.

Atenção

Retome os assuntos que você estudou neste capítulo. Verifique em quais teve dificuldade e converse com o professor, buscando maneiras de reforçar seu aprendizado.

Autoavaliação

Algumas atitudes e reflexões são fundamentais para melhorar o aprendizado e a convivência na escola. Reflita sobre elas. Respostas pessoais.

- Participei das aulas com atenção, acompanhando as explicações e realizando as atividades?
- Tive atitudes solidárias com o professor e com os colegas?
- Empenhei-me em consolidar meu conhecimento, resolvendo as atividades propostas?
- Ampliei meus conhecimentos do uso da Álgebra para resolver situações-problema?

Verifique o que estudou

Principais habilidades da BNCC

EF08MA07 EF08MA08

Atividades 2 a 4

A atividade 3 deve ser realizada por tentativas, pois não há uma segunda equação que permita determinar a resposta para x e y. Para ampliar o conhecimento peça aos alunos que representem graficamente os quatro pares ordenados e a reta da equação dada.

A atividade 4 pode ser ou não resolvida por tentativa e erro. Peça aos alunos que comparem com a atividade 3 e indiquem o motivo de essa atividade poder ser resolvida por outro método além de tentativa e erro. Espera-se que eles entendam que ter uma segunda equação permite que o método da substituição ou da adição seja empregado para determinação do par ordenado.

Atividade 6

Observe a resolução desta atividade.

Medida de comprimento da base da região retangular **A**: x

Medida de comprimento da base da região retangular **B**: y

$$\begin{cases} 4x + 4y = 80 \cdot \frac{1}{4} \\ x = \frac{y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ y = 3x \end{cases}$$

Substituindo $y = 3x$ na primeira equação, temos:
$x + y = 20 \Rightarrow x + 3x = 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$

Substituindo x na segunda equação, temos:
$y = 3x \Rightarrow y = 3 \cdot 5 \Rightarrow y = 15$

Medida de perímetro da região retangular **A**:
$2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 10 + 8 = 18$ cm

Medida de perímetro da região retangular **B**:
$2 \cdot 15 + 2 \cdot 4 = 30 + 8 = 38$ cm

Portanto, as medidas de perímetro das regiões retangulares **A** e **B** são, respectivamente, 18 cm e 38 cm.

Atividade 7

Confira a resolução desta atividade.
Quantia de Felipe: x
Quantia de Elisa: y

$$\begin{cases} x + y = 3240 \\ x = 220 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 324 \\ x - y = 220 \end{cases}$$

Somando as 2 equações, temos:
$x + y + x - y = 3240 + 220 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 3460 \Rightarrow x = 1730$

Substituindo x na segunda equação, temos:
$x - y = 220 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 1730 - 220 \Rightarrow y = 1510$

Logo, Felipe tem R$ 1 730,00 e Elisa tem R$ 1 510,00.

Autoavaliação

As questões de autoavaliação apresentadas propiciam aos alunos refletir sobre os estudos, as atitudes e as aprendizagens. Dê um tempo para que cada aluno reflita individualmente sobre elas e registre as respostas no caderno. Em seguida, àqueles que desejarem, permita que compartilhem as respostas com os colegas.

Ao longo do ano, é importante a retomada dos registros de autoavaliação feitos no fim de cada capítulo, para que eles possam perceber e mensurar o quanto aprenderam e melhoraram em diversos aspectos.

Em relação às perguntas propostas nesta página, converse com a turma sobre a importância da participação ativa em todas as aulas e atividades realizadas na escola. Enfatize também a importância dos conteúdos de Álgebra para a representação e a resolução de situações-problema do cotidiano.

Abertura

Principal habilidade da BNCC

EF08MA19

A imagem da abertura pode levar os alunos a perceber algumas aplicações dos conteúdos que serão estudados. O trabalho de um pedreiro, de um pintor ou de um azulejista, por exemplo, envolve 2 grandezas que serão estudadas neste capítulo: a área e o volume.

Quando pensamos na determinação da quantidade de tinta a ser utilizada na pintura de uma casa, estamos estimando a medida de área a ser coberta, multiplicando essa medida pelo número de demãos e convertendo esse valor em galões ou latas de tinta.

Mas há outros exemplos que podem ser explorados, como as gôndolas utilizadas em alguns mercados, que têm a finalidade de separar determinada medida de área do piso do mercado para cada seção de produtos. Outro exemplo é o transporte rodoviário: o frete de uma mercadoria é calculado de acordo com a medida do volume dela (em m³) e não com a massa.

A construção civil e o ramo imobiliário também são exemplos que podem ser explorados para essa conversa. No cálculo de metragem de um terreno, por exemplo, as irregularidades são consideradas, pois há terrenos que não são perfeitamente retangulares e esse cálculo se torna muito importante, impactando a venda, a construção e a cobrança de impostos.

CAPÍTULO

6 Área e volume

Wandson Rocha/Arquivo da editora

Para saber de quantas peças de azulejo o pedreiro vai precisar para revestir toda a parede, ele fará cálculos envolvendo a medida de área da parede e a medida de área de cada peça.

Ilustrações: Wandson Rocha/Arquivo da editora

Para saber de quanta tinta a pintora vai precisar para pintar a outra parede, ela fará cálculos envolvendo a medida de área da parede e também a medida de volume de tinta e a medida de capacidade da lata de tinta que vai usar.

Cálculos como esses serão estudados ao longo deste capítulo, com diferentes aplicações.

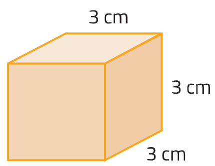
Não escreva no livro!

Converse com os colegas sobre estas questões e registrem as respostas no caderno.

1 Explique com suas palavras: O que é **grandeza**? Quais grandezas você já estudou? Resposta esperada: Grandeza é algo que pode ser medido; comprimento, perímetro, área, volume, capacidade, velocidade, massa, tempo, temperatura e população são exemplos de grandeza.

2 As unidades de medida metro (m), metro quadrado (m^2) e metro cúbico (m^3) servem para medir quais tipos de grandeza? Comprimento e perímetro, área e volume, respectivamente.

3 Considere este cubo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual é a medida de perímetro de uma das faces desse cubo? 12 cm ($4 \times 3 = 12$)

b) E qual é a medida de área de uma das faces dele? 9 cm^2 ($3 \times 3 = 9$)

c) Qual é a medida de volume do cubo? 27 cm^3 ($3 \times 3 \times 3 = 27$)

4 Quais cálculos o pedreiro deve fazer para saber de quantas peças de azulejo vai precisar? Calcular a medida de área da parede e a medida de área de cada peça, usando a mesma unidade de medida. Depois, dividir a primeira medida pela segunda.

Abertura

Comente com os alunos que é possível saber o rendimento aproximado da tinta lendo as informações contidas na lata.

Nas questões propostas, as intervenções podem ser feitas de maneira oral sem a necessidade de sistematização em lousa. Retome a conversa anterior e questione os alunos sobre as grandezas que já foram discutidas e quais são mais utilizadas por eles no dia a dia. Explique também que há uma grandeza que observamos e controlamos a todo momento, e neste caso é a grandeza tempo.

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Principais habilidades da BNCC

EF08MA04 EF08MA12
EF08MA08 EF08MA19

Retome com os alunos o cálculo aproximado de medida de área por meio de malhas quadriculadas. Se possível, crie algumas situações nas quais os alunos sejam incentivados a estimar e conferir estimativas, por exemplo, realizar um cálculo aproximado da medida de área da sala, que pode ser conferida posteriormente com o auxílio de uma fita métrica. Nesse momento, não é necessário que os alunos façam decomposições complexas, apenas que retomem a ideia de medida de área.

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

É muito importante sabermos calcular a medida de área de uma superfície, pois muitas situações do dia a dia exigem esse tipo de cálculo. Por exemplo, o orçamento de alguns serviços, como a pintura de uma casa ou a colocação de pisos nos cômodos, é feito considerando o cálculo de medida de área.

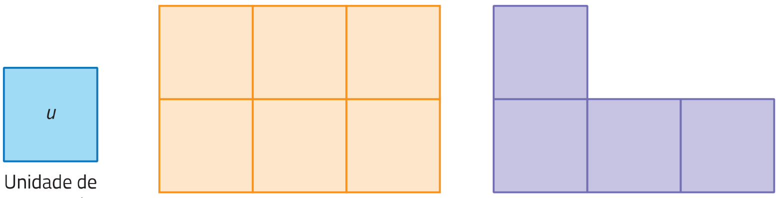
Como esse cálculo é feito?

Para medir uma região do plano ocupada por uma figura *F* qualquer, comparamos *F* com uma unidade de medida de área, previamente fixada.

O resultado dessa comparação – a medida de área de *F* – indicará quantas vezes a unidade de medida de área escolhida cabe em *F*.

Por exemplo, fixada a unidade de medida de área **u**, a medida de área da região plana *F* abaixo é de 6 unidades de medida de área, ou 6 u. E a medida de área da região plana *G* abaixo é de 4 u.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

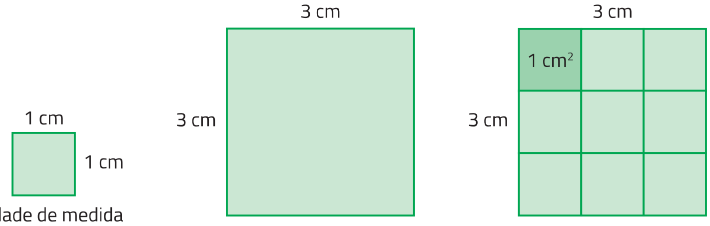


Unidade de medida de área. Região *F*. Região *G*.

Área de uma região quadrada

Uma unidade de medida de área bastante usada e que você já estudou é o centímetro quadrado (cm²). Fixada essa unidade de medida de área, acompanhe como calcular a medida de área desta região quadrada *Q*.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



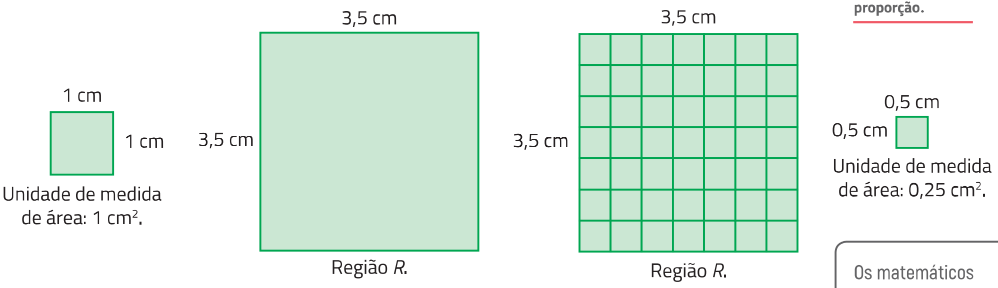
Unidade de medida de área: 1 cm². Região *Q*. Região *Q*.

É possível decompor a região quadrada *Q* em 9 regiões quadradas, justapostas, iguais à unidade de medida de área fixada. Assim, a região quadrada *Q* fica formada por 9 unidades de medida de área. Portanto, a medida de área dela é de 9 cm². Observe que $3^2 = 9$.

Logo, temos:

$$\text{Medida de área da região } Q\text{: } (3 \text{ cm})^2 = 9 \text{ cm}^2$$

Agora, acompanhe como calcular a medida de área desta região quadrada *R*, novamente fixando o centímetro quadrado (cm^2) como unidade de medida de área.



As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Não é possível decompor a região *R* em um número exato de regiões quadradas de medida de área de 1 cm^2.

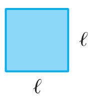
Mas é possível decompor a região quadrada *R* em 49 regiões quadradas justapostas ($7 \cdot 7 = 49$), cada uma com medida de área de 0,25 cm^2. Assim, a medida de área da região quadrada *R* é de 12,25 cm^2 ($49 \cdot 0{,}25 = 12{,}25$).

Observe que $(3{,}5)^2 = 3{,}5 \cdot 3{,}5 = 12{,}25$.

Portanto, podemos escrever:

Medida de área da região quadrada *R*: $(3{,}5 \text{ cm})^2 = 12{,}25 \text{ cm}^2$

Em dois exemplos vimos que, dada a medida de comprimento ℓ do lado da região quadrada, a medida de área dessa região quadrada é:



Banco de imagens/Arquivo da editora

$A = \ell \cdot \ell$ ou $A = \ell^2$
(unidades de medida de área)

Se a medida de comprimento ℓ é dada em mm, cm ou m, então a medida de área *A* será dada em mm^2, cm^2 ou m^2, respectivamente.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Não escreva no livro!

Atividades

1 Determine no caderno a medida de área de uma região quadrada sabendo que a medida de comprimento do lado é de:

a) 17 cm; 289 cm^2 ($A = 17^2 = 289$)

b) 8,5 cm. 72,25 cm^2 ($A = (8{,}5)^2 = 72{,}25$)

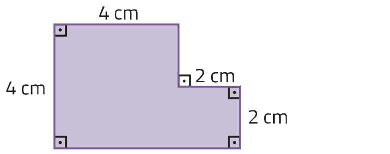
2 Calcule no caderno a medida de comprimento do lado de uma região quadrada cuja medida de área é de:

a) 169 m^2; 13 m ($169 = \ell^2 \Rightarrow \ell = 13$)

b) 1,44 km^2. 1,2 km ($1{,}44 = \ell^2 \Rightarrow \ell = 1{,}2$)

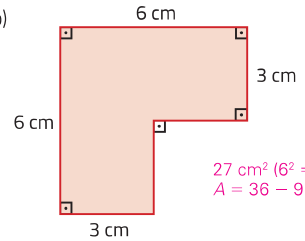
3 Determine no caderno a medida de área de cada figura. Exemplos de resolução:

a)



20 cm^2 ($4 \times 4 = 16$; $2 \times 2 = 4$; $A = 16 + 4 = 20$)

b)



27 cm^2 ($6^2 = 36$; $3^2 = 9$; $A = 36 - 9 = 27$)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4 Uma folha de papel quadrada tem lados com medida de comprimento de 13,5 cm. Qual é a medida de área dessa folha? 182,25 cm^2 ($A = (13{,}5)^2 = 182{,}25$)

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Chame a atenção dos alunos para o fato de que, se a medida de comprimento do lado é dada em cm, m, mm ou km, a medida de área será dada em cm^2, m^2, mm^2 ou km^2, respectivamente. É importante que eles percebam que a unidade de medida de área depende da unidade de medida de comprimento utilizada.

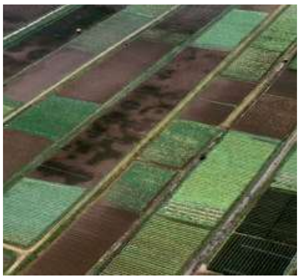
Se achar conveniente, retome com os alunos o cálculo da medida de área de um quadrado a partir de uma figura sem medir o comprimento dos lados da figura. Peça a eles que desenhem um quadrado em uma malha quadriculada e relembre que eles podem indicar a medida da área estabelecendo o quadradinho da malha como a unidade de medida de área.

Atividades 1 a 4

Nas atividades desta página, acreditamos que o olhar deve estar voltado, justamente, para as unidades de medida utilizadas. Não é incomum que os alunos realizem os cálculos de maneira correta, mas ignorem as unidades de medida que foram utilizadas, indicando como resultado o número correto com a unidade de medida incorreta.

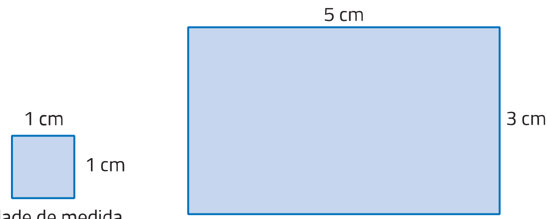
Área de uma região retangular qualquer

Delfim Martins/Pulsar Imagens



Vista aérea de plantações.

Acompanhe como determinar a medida de área desta região retangular *S*, tendo fixado 1 cm^2 como unidade de medida de área.



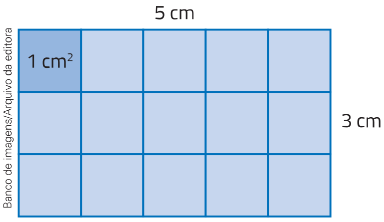
Unidade de medida de área: 1 cm^2.

Região *S*.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Da mesma maneira como fizemos com as regiões quadradas *R* e *Q*, podemos decompor a região retangular *S* em 15 regiões quadradas justapostas, iguais à unidade de medida de área.

Banco de imagens/Arquivo da editora



Região *S*.

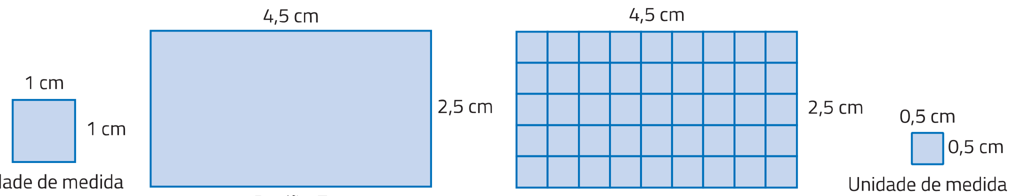
Assim, essa região retangular fica formada por 15 unidades de medida de área e, portanto, a medida de área dela é de 15 cm^2. Observe que $15 = 3 \cdot 5$.

Logo:

Medida de área da região retangular *S*: $3\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$

Vamos agora calcular a medida de área desta região retangular *T*, também tendo 1 cm^2 como unidade de medida de área.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Unidade de medida de área: 1 cm^2.

Região *T*.

Região *T*.

Unidade de medida de área: 0,25 cm^2.

Não é possível decompor a região retangular *T* em um número exato de regiões quadradas de medida de área de 1 cm^2. Mas é possível decompor em 45 regiões quadradas justapostas, cada uma com medida de área de 0,25 cm^2. Assim, a medida de área da região retangular *T* é de 11,25 cm^2.

Observe que $2{,}5 \cdot 4{,}5 = 11{,}25$.

Assim, podemos escrever:

Medida de área da região retangular *T*: $2{,}5\text{ cm} \cdot 4{,}5\text{ cm} = 11{,}25\text{ cm}^2$

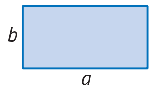
1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Proponha uma conversa com os alunos sobre a aplicação do que foi estudado até o momento sobre área. Esse assunto pode ser explorado por meio de uma pesquisa sobre a seguinte pergunta: "Quais produtos são vendidos por m²?". Espera-se que os alunos tragam vários exemplos extraídos das pesquisas como: pisos, carpetes e tecidos.

Sequência didática

Para mais informações, veja a **sequência didática 2** do 3º bimestre.

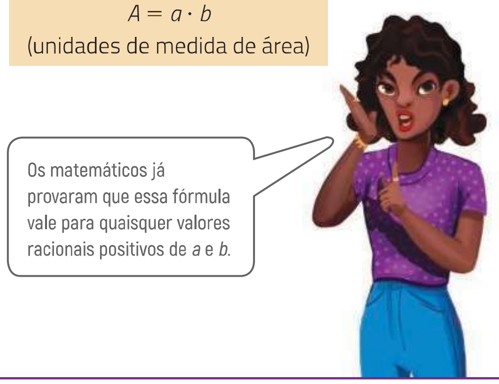
Vimos dois exemplos em que a medida de área da região retangular é dada pelo produto da medida de comprimento da base pela medida de comprimento da altura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$A = a \cdot b$
(unidades de medida de área)

As imagens desta página não estão representadas em proporção.



Thiago Neumann/Arquivo da editora

Sim, pois o quadrado também é um retângulo, com base e altura de mesmas medidas de comprimento (a e a). Assim, $A = a \times a = a^2$.

Bate-papo

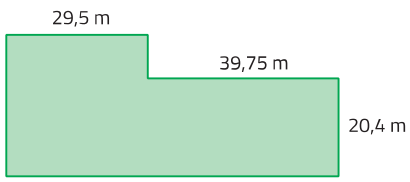
Podemos usar a fórmula da medida de área de uma região retangular para calcular a medida de área de uma região quadrada? Justifique.

Não escreva no livro!

Atividades

8. 1 350 cm² ($A = 2 \times 30 \times 10 + 2 \times 10 \times 15 + 30 \times 15 = 600 + 300 + 450 = 1350$)

5 **Arredondamentos, cálculo mental e resultados aproximados.** Observe a região plana formada por uma região quadrada e uma região retangular.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de área dessa região plana está mais próxima de 1 500 m², 1 600 m² ou 1 700 m²?

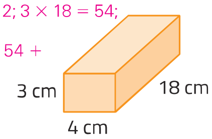
1 700 m² ($A = 30 \times 30 + 40 \times 20 = 900 + 800 = 1\,700$)

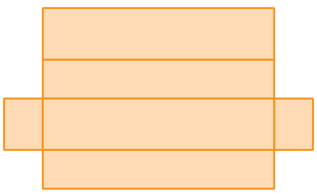
6 Nair vai colocar carpete no consultório em que trabalha, cujas dimensões medem 4,5 m por 3,5 m. O preço do metro quadrado do carpete é R$ 54,00. Quanto Nair vai gastar na compra do carpete?

R$ 850,50 ($A = 4{,}5 \times 3{,}5 = 15{,}75$; $15{,}75 \times 54{,}00 = 850{,}50$)

7 Uma caixa de creme dental com a forma de um bloco retangular tem as seguintes medidas de dimensões: 3 cm, 4 cm e 18 cm. Determine no caderno a medida de área da caixa planificada.

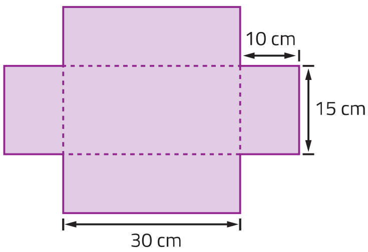
276 cm² ($3 \times 4 = 12$; $3 \times 18 = 54$; $4 \times 18 = 72$; $A = 2 \times 12 + 2 \times 54 + 2 \times 72 = 276$)





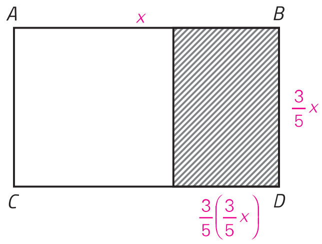
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

8 Para construir uma caixa com a forma de um bloco retangular sem tampa, Júlia recortou uma região poligonal de papelão, como esta figura, dobrou e colou com fita-crepe. Quantos centímetros quadrados de papelão ela usou?



Banco de imagens/Arquivo da editora

9 **Desafio.** **(Fuvest-SP)** O retângulo *ABCD* representa um terreno retangular cuja largura é $\frac{3}{5}$ do comprimento. A parte hachurada representa um jardim retangular cuja largura também é $\frac{3}{5}$ do comprimento.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Qual a razão entre a área do jardim e a área total do terreno?

a) 30%
X b) 36%
c) 40%
d) 45%
e) 50%

9. $\left(\frac{3}{5} = 0{,}6\right.$; medida de área do terreno: $0{,}6x^2$; medida de área do jardim: $0{,}6x \times (0{,}6 \times 0{,}6x) = 0{,}216x^2$; $\left.\frac{0{,}216x^2}{0{,}6x^2} = 0{,}36 = 36\%.\right)$

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Alerte os alunos sobre o fato de podermos considerar como base qualquer um dos 4 lados da região retangular. Para cada uma dessas bases, temos uma altura correspondente.

A fórmula da medida de área de uma região quadrada é válida para qualquer valor real positivo, mas neste momento os alunos trabalharão apenas com os racionais positivos.

Atividade 5

Nesta atividade, o cálculo deve ser feito de maneira aproximada. Retome com os alunos que esse tipo de operação é muito comum, por exemplo, na prática da pintura residencial.

Atividade 7

Esta atividade pode ser explorada também de maneira lúdica, por meio do manuseio de caixas de creme dental. Para essa exploração, os alunos podem ser convidados a trabalhar em dupla. Peça com antecedência aos alunos que levem para a sala de aula uma caixa de creme dental. Eles podem desmontar as caixas e medi-las para calcular aproximadamente a medida de área da caixa planificada.

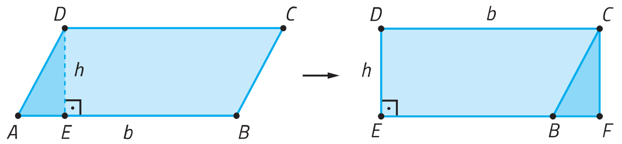
Atividade 9

Verifique se os alunos apresentam dificuldades ao lidar com o termo "razão", dentro de uma atividade que envolve área. Uma sugestão é que esse desafio seja discutido de maneira coletiva, antes da proposta de resolução, identificando-se a pergunta, os dados que o exercício traz e o modelo geométrico. Essa antecipação da conversa sobre o problema visa dar condições para que os alunos o resolvam, permitindo também que eles aprendam a utilizar esse modelo de análise do problema em novos desafios.

Área de uma região limitada por um paralelogramo

Vamos calcular a medida de área da região plana limitada pelo paralelogramo *ABCD*, tomando como base $\overline{AB}$, de medida de comprimento *b*, e a altura $\overline{DE}$ (perpendicular à base $\overline{AB}$), de medida de comprimento *h*.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Thiago Neumann/Arquivo da editora

A medida de área da região *ABCD* é igual à medida de área da região retangular *EFCD*, obtida quando removemos a região triangular *DAE* para a posição *CBF*, pois não alteramos nem a medida de comprimento da base nem a medida de comprimento da altura.

Os triângulos *DAE* e *CBF* são congruentes.

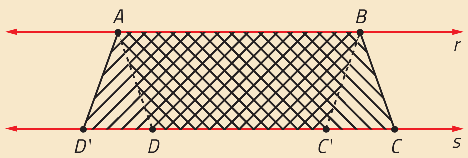
Logo, a medida de área da região *ABCD* é calculada por:

$$A = b \cdot h$$
(unidades de medida de área)

Ou seja, a medida de área da região limitada por um paralelogramo é igual ao produto da medida de comprimento de uma das bases pela medida de comprimento da altura correspondente a essa base.

Você sabia?

Se tivermos 2 retas paralelas *r* e *s* e tomarmos um segmento de reta $\overline{AB}$ sobre *r*, então todas as regiões limitadas por paralelogramos *ABCD*, com *C* e *D* sobre a reta *s*, terão a mesma medida de área.
Esse fato pode ser observado em uma figura como esta.



A região *ABCD* tem a mesma medida de área que a região *ABC'D'*.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro!

Atividades

10 A medida de área de uma região limitada por um paralelogramo é de 58,80 m². Considerando que uma das bases tem medida de comprimento de 10,50 m, qual é a medida de comprimento da altura correspondente a essa base? 5,60 m ($58{,}80 = 10{,}50x \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 5{,}60$)

11 Qual das figuras determina a região plana com maior medida de área: um quadrado com lados de medida de comprimento de 5,5 cm, um retângulo com lados de medida de comprimento de 6 cm e de 5 cm ou um paralelogramo com base de medida de comprimento de 7,4 cm e altura correspondente de medida de comprimento de 4 cm?

12 Em uma folha de papel, trace 2 retas paralelas *r* e *s*. Marque 2 pontos *A* e *B* sobre *r*. Em seguida, localize 2 pontos *C* e *D* sobre *s*, de modo que *ABCD* seja um paralelogramo. Constate que a medida de área da região plana determinada será a mesma, quaisquer que sejam as posições de *C* e *D*, conforme explicado no *Você sabia?*. Resposta pessoal.

11. O quadrado. ($A_q = 5{,}5 \times 5{,}5 = 30{,}25$; $A_r = 6 \times 5 = 30$; $A_p = 7{,}4 \times 4 = 29{,}6$; $29{,}6\ cm^2 < 30\ cm^2 < 30{,}25\ cm^2$)

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Após a leitura da teoria, se possível, promova a exploração da medida de área de um paralelogramo de maneira lúdica a partir de uma atividade de recorte e colagem, de acordo com os passos indicados abaixo. Os alunos podem usar folhas coloridas ou páginas de revistas para o recorte de uma região limitada por um paralelogramo e uma folha sulfite para a colagem.

1. Peça aos alunos que, a partir de técnicas de desenho geométrico, construam uma região plana limitada por um paralelogramo que tenha o ângulo agudo de medida de abertura de 45°; se achar necessário, retome a construção da bissetriz do ângulo de medida de abertura de 90° e o transporte de ângulo. As medidas do comprimento da base e da altura podem ter quaisquer valores.

2. Peça aos alunos que desenhem, dentro da região plana, o segmento de reta que representa a altura desta figura; em seguida, recortem a região plana limitada pelo paralelogramo dividindo-a na linha que traçaram para representar a altura.

3. Peça que remontem a região plana limitada pelo paralelogramo como uma região plana retangular e colem essa figura em uma nova folha.

Os alunos devem perceber que não há diferença entre a medida de área da região plana limitada pelo paralelogramo e a da região plana retangular.

Atividade 12

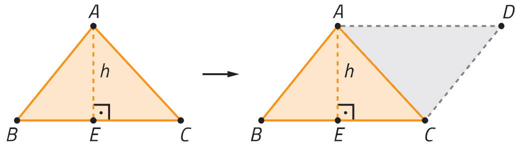
O fato de as regiões terem a mesma medida de área é explicado pelo fato de terem a mesma base (segmento de reta $\overline{AB}$) e altura fixa (segmento de reta perpendicular entre as retas *r* e *s*).

É importante fazer com que os alunos percebam que não há diferença na maneira de calcular a medida de área de uma região quadrada ou retangular; na prática, estamos falando do mesmo tipo de quadrilátero. É possível retomar que o quadrado é um caso particular do retângulo em que as 4 medidas de comprimento dos lados são iguais. Se achar conveniente, utilize a clássica frase que afirma: “nem todo retângulo é um quadrado, mas todo quadrado é um retângulo”.

Área de uma região triangular

Thiago Neumann/ Arquivo da editora

Dada a região triangular *ABC*, cuja medida de área queremos determinar, traçamos retas paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, determinando o ponto *D* e a região limitada pelo paralelogramo *ABCD*.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Consideremos a altura $\overline{AE}$ de medida de comprimento *h* desse paralelogramo.

Já sabemos que, se o lado $\overline{BC}$ tem medida de comprimento *b*, então a medida de área da região limitada pelo paralelogramo é *bh*.

Mas as regiões triangulares *ABC* e *ADC* são congruentes (pelo caso ALA de congruência de triângulos: eles têm 1 lado comum e os 2 ângulos adjacentes a ele respectivamente congruentes).

Logo, essas regiões triangulares têm medidas de área iguais.

Assim, temos:

$$\text{Medida de área da região } ABCD = 2 \cdot \text{medida de área da região triangular } ABC$$

Ou:

$$bh = 2 \cdot \text{medida de área da região triangular } ABC$$

Portanto, podemos indicar a medida de área da região triangular *ABC* por:

$$A = \frac{bh}{2} \text{ ou } A = \frac{1}{2}bh$$
(unidades de medida de área)

Thiago Neumann/Arquivo da editora

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

É de grande importância que os alunos realizem explorações envolvendo a decomposição de regiões poligonais; sugerimos que, assim como no livro, a medida da área de uma região triangular seja determinada pela decomposição de uma região limitada por um quadrilátero qualquer pela diagonal dele. Inclusive, essa exploração pode ser feita com regiões limitadas por retângulos, paralelogramos, trapézios ou losangos.

Diversificar essa exploração poderá favorecer compreensões e fazê-los perceber que não estamos tratando de um caso particular.

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Atividades 13 e 14

No item **a** da atividade 13, retome com os alunos o que é a altura de um triângulo fazendo-os perceber que não é sempre um segmento interno ao triângulo, principalmente, quando o triângulo é classificado como obtusângulo.

Nos itens **c** e **d** da atividade 13 exploramos a decomposição de figuras. Peça aos alunos que desenhem as figuras em separado antes de efetuar os cálculos. A resposta final será dada pela soma das medidas das áreas das figuras.

É interessante que no trabalho com a atividade 14 o modelo matemático seja construído ou que os alunos desenhem a região triangular.

Atividade 15

Veja a resolução desta atividade.

$$\begin{cases} x + \ \ y = 13 \\ 5x - 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 13 - y \\ 5x - 2y = 30 \end{cases}$$

Substituindo x na segunda equação, temos:

$5x - 2y = 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5(13 - y) - 2y = 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow 65 - 5y - 2y = 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow -7y = 30 - 65 \Rightarrow$
$\Rightarrow -7y = -35 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 5$

Substituindo y na primeira equação, temos:

$x = 13 - y \Rightarrow x = 13 - 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 8$

Calculando a medida da área da região triangular:

$$\frac{8 \cdot 5}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

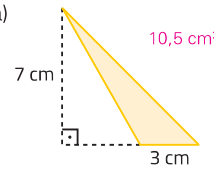
A medida da área da região triangular é 20 cm².

Não escreva no livro!

Atividades

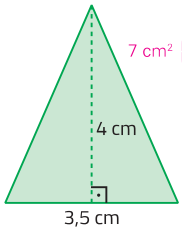
13 Determine no caderno a medida de área de cada região plana.

a)



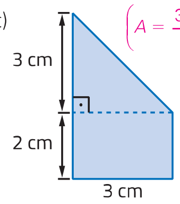
10,5 cm² $\left(A = \frac{3 \times 7}{2} = 10{,}5\right)$

b)



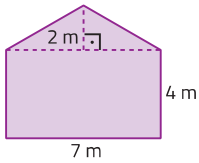
7 cm² $\left(A = \frac{3{,}5 \times 4}{2} = 7\right)$

c)



10,5 cm² $\left(A = \frac{3 \times 3}{2} + 3 \times 2 = 4{,}5 + 6 = 10{,}5\right)$

d)



35 m² $\left(A = \frac{7 \times 2}{2} + 7 \times 4 = 7 + 28 = 35\right)$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

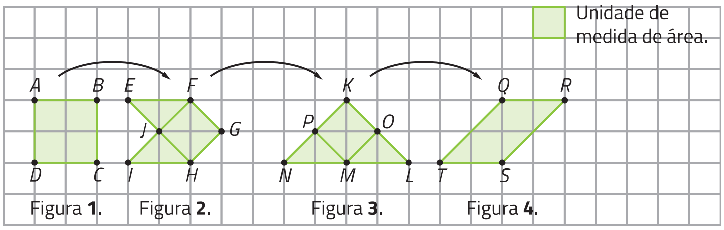
As imagens desta página não estão representadas em proporção.

14 Qual é a medida de comprimento da altura de uma região triangular cuja base tem medida de comprimento de 8 cm e cuja medida de área é de 14 cm²? 3,5 cm $\left(\frac{8x}{2} = 14 \Rightarrow x = 3{,}5\right)$

15 As medidas de comprimento, em centímetros, da base e da altura de uma região triangular formam respectivamente o par ordenado (x, y), solução do sistema $\begin{cases} x + \ \ y = 13 \\ 5x - 2y = 30 \end{cases}$.

Determine no caderno a medida de área dessa região triangular. 20 cm²

16 Examine cada figura dada.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Passamos da figura **1** para a **2**, da **2** para a **3** e da **3** para a **4**.

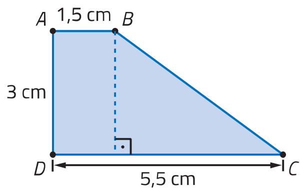
a) As medidas de área dessas 4 figuras são iguais? Justifique sua resposta. Sim; basta contar quantas unidades de medida de área cada figura tem (são 4).

b) Agora, copie esta afirmação no caderno e substitua os ▮ pelas palavras corretas.

Duas figuras de formas ▮ podem ter medidas de área ▮. Diferentes; iguais.

c) Finalmente, em papel quadriculado, construa uma região triangular e uma região retangular com medidas de área iguais. Recorte-as e cole-as no caderno.

17 Determine no caderno a medida de área desta região plana *ABCD*. 10,5 cm² $\left(A = 1{,}5 \times 3 + \frac{4 \times 3}{2} = 4{,}5 + 6 = 10{,}5\right)$



Banco de imagens/Arquivo da editora

16. c) Exemplo de resposta: Desenhar uma região triangular com base de medida de comprimento de 4 cm e altura de medida de comprimento de 3 cm $\left(A_t = \frac{4 \times 3}{2} = 6\right)$ e uma região retangular de dimensões de medida 3 cm e 2 cm ($A_r = 3 \times 2 = 6$).

LEITURA

Heron de Alexandria e o cálculo da medida de área de regiões triangulares

O matemático e inventor grego Heron de Alexandria (c. 10-c. 70) teve importante papel no desenvolvimento de vários conceitos matemáticos.

No principal trabalho dele sobre Geometria, denominado *Métrica*, ele apresentou diferentes maneiras de determinar: a medida de área de regiões triangulares; a medida de área de regiões limitadas por quadriláteros, por polígonos regulares de 3 a 12 lados e por elipses; a medida de área do círculo; e a medida de volume de cilindros, de cones e de esferas.

Nesse trabalho, ele demonstra uma fórmula que permite calcular a medida de área de uma região triangular sendo conhecidas as medidas de comprimento a, b e c dos 3 lados. Ela é chamada de **fórmula de Heron** e pode ser escrita da seguinte maneira:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ com } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Fonte de consulta: REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFPI. Disponível em: <http://repositorio.ufpi.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/729/Disserta%c3%a7%c3%a3o_Uchoa_18_11_2016.pdf?sequence=1>. Acesso em: 30 set. 2018.

A medida de perímetro do triângulo é dada por $a + b + c$. Como p representa metade dessa medida e 'semi' pode dar a ideia de metade, temos que p é o semiperímetro do triângulo.

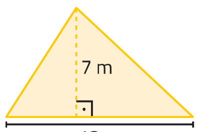
Bate-papo

p é chamado de semiperímetro do triângulo. Por que você acha que ele recebe esse nome?

Ao resolver um problema, podemos escolher a fórmula que usaremos dependendo dos dados do problema.

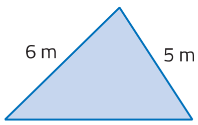
Veja estes exemplos.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



$$A = \frac{12 \cdot 7}{2} = 42$$

$$A = 42 \text{ m}^2$$



$$p = \frac{6+7+5}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$A = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4} = \sqrt{216} \simeq 14{,}7 \text{ (com uma calculadora)}$$

$$A \simeq 14{,}7 \text{ m}^2$$

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Para calcular o valor de uma raiz quadrada não exata, podemos usar uma calculadora e obter uma **aproximação racional**, como no exemplo a seguir.

Teclamos 2 1 6 √ = e o visor mostrará 14,6969384567.

Então, a aproximação com 1 casa decimal é $\sqrt{216} \simeq 14{,}7$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro!

Questões

1 Você acha que é útil ter a possibilidade de calcular a medida de área de uma região triangular usando diferentes fórmulas? Justifique sua resposta. MP

2 Calcule no caderno a medida de área deste terreno triangular, que contém um ângulo interno reto e lados de medida de comprimento de 6 m, 8 m e 10 m. Utilize a fórmula estudada neste capítulo e, em seguida, a fórmula de Heron. 24 m²

Paulo Manzi/Arquivo da editora

3 Calcule no caderno a medida de área de cada região triangular descrita, usando a fórmula que julgar mais conveniente.

a) Região triangular com lados de medida de comprimento de 10 cm, 26 cm e 24 cm. 120 cm²

b) Região triangular com um lado de medida de comprimento de 12,4 cm e altura correspondente de medida de comprimento 5 cm. 31 cm²

4 Calcule no caderno, pelas 2 fórmulas dadas, a medida de área de uma região triangular cujo contorno é um triangulo retângulo de lados de medida de comprimento de 5 cm, 12 cm e 13 cm. 30 cm²

Questões 2 e 3

A fórmula de Heron não precisa ser utilizada na questão 2, já que o triângulo é retângulo e tem a altura facilmente identificada. Logo, utilize essa questão para verificação, ainda que informal, da fórmula de Heron. Veja a resolução.

$$A = \frac{6 \times 8}{2} = 24;$$

$$p = \frac{6+8+10}{2} = 12$$

$$A = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}$$

$$= \sqrt{12 \times 6 \times 4 \times 2} = \sqrt{576} = 24$$

$$A = 24 \text{ m}^2$$

No item **a** da questão 3, a região plana triangular indicada não é limitada por um triângulo retângulo e não temos a indicação da medida de comprimento da altura, logo, a fórmula de Heron facilita o cálculo da medida dessa área.

Explore a fórmula de Heron também em situações reais; por exemplo, desenhe com giz no chão do pátio uma região plana limitada por um triângulo obtusângulo e pergunte aos alunos: "Qual é a maneira mais simples de determinar a medida da área dessa região plana triangular?".

Os alunos devem perceber que determinar a medida de comprimento da altura de uma região plana limitada por um triângulo obtusângulo não é tão simples quanto determinar a medida de comprimento dos lados da região triangular; por isso, em situações como esta, o uso da fórmula de Heron é mais adequado.

Veja a resolução dos itens da questão 3.

a) $p = \dfrac{10+26+24}{2} = 30$

$$A = \sqrt{30 \times 6 \times 4 \times 6} =$$

$$= \sqrt{14\,400} = 120$$

$$A = 120 \text{ cm}^2$$

b) $A = \dfrac{12{,}4 \times 5}{2} = 31$

$$A = 31 \text{ cm}^2$$

Questão 4

Veja a resolução desta questão.

$$A = \frac{5 \times 12}{2} = 30;$$

$$p = \frac{5+12+13}{2} = 15$$

$$A = \sqrt{15 \times 10 \times 3 \times 2} =$$

$$= \sqrt{900} = 30$$

$$A = 30 \text{ cm}^2$$

Leitura

Principal habilidade da BNCC

EF08MA19

Sugerimos como leitura complementar a demonstração da fórmula de Heron para o cálculo da medida de área de regiões triangulares, que pode ser encontrada na referência: DALCIN, Mário. A demonstração feita por Heron. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo, n. 36, 1998. p.3-5. Disponível em: <www.rpm.org.br/cdrpm/36/1.htm>. Acesso em: 19 out. 2018.

Questão 1

Esperamos que os alunos respondam que sim, pois dessa maneira podemos escolher a fórmula de acordo com os dados fornecidos pelo problema: as medidas de comprimento de um lado (base) e da altura correspondente ou as medidas de comprimento dos 3 lados. Além disso, se tivermos a informação de todas as medidas de comprimento, podemos também usar uma das fórmulas para o cálculo da medida de área e, a outra, para a conferência do resultado.

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Na determinação da fórmula da área da região limitada pelo trapézio ressalte que, ao traçarmos uma diagonal, obtemos 2 regiões triangulares de bases com medidas de comprimento diferentes e com a mesma medida de comprimento da altura. Sendo uma base com medida de comprimento maior e outra com medida de comprimento menor, faça-os perceber que pela decomposição da região limitada pelo trapézio em 2 regiões triangulares, obtemos a fórmula da área.

Atividades 19 a 21

Na atividade 19, os alunos deverão usar a fórmula da medida de área da região limitada pelo trapézio para descobrir a medida de comprimento da altura.

A atividade 20 apresenta uma figura dividida em 3 partes, o que permite várias decomposições. Há diversas maneiras de resolver essa atividade, por isso sugerimos que convide os alunos a compartilhar o método de resolução com os colegas. A ideia é que cada aluno compartilhe a decomposição da figura e quais fórmulas foram utilizadas no cálculo da medida da área.

Veja a resolução da atividade 20.

- Primeiro caminho:

  Medida de área da região limitada pelo trapézio: $B = 6$; $b = 1{,}5$; $h = 3$.

  $$A = \frac{(6 + 1{,}5) \cdot 3}{2} = $$

  $$= \frac{7{,}5 \cdot 3}{2} \Rightarrow A = 11{,}25\ \text{cm}^2$$

  Medida de área da região triangular: $B = 2{,}5$; $h = 3$.

  $$A = \frac{2{,}5 \cdot 3}{2} \Rightarrow A = 3{,}75\ \text{cm}^2$$

  Medida de área da região limitada pelo paralelogramo:

  $b = 1$; $h = 3$.

  $A = 1 \times 3 \Rightarrow A = 3\ \text{cm}^2$

  Medida de área da figura: $11{,}25\ \text{cm}^2 + 3{,}75\ \text{cm}^2 + 3\ \text{cm}^2 = 18\ \text{cm}^2$

- Segundo caminho:

  $$A = \frac{(7 + 5) \cdot 3}{2} = $$

  $$= \frac{12 \cdot 3}{2} \Rightarrow A = 18\ \text{cm}^2$$

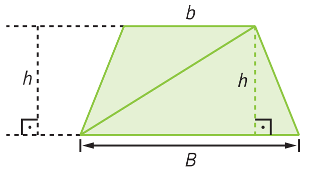
A atividade 21 envolve 2 conceitos: o perímetro de um polígono e a área limitada pelo trapézio. Verifique se os alunos percebem essas informações no enunciado e as usam para determinar a medida de comprimento da altura e dos lados não paralelos da região limitada pelo trapézio.

19. 3,1 m $\left(\frac{(4 + 3{,}2)h}{2} = 11{,}16 \Rightarrow 7{,}2h = 22{,}32 \Rightarrow h = \frac{22{,}32}{7{,}2} = 3{,}1\right)$

Área de uma região limitada por um trapézio

Podemos decompor uma figura plana em regiões cujas medidas de área já sabemos calcular. Assim, a medida de área da figura plana será a soma das medidas de área das regiões em que a figura foi decomposta.

Por exemplo, vamos decompor a região limitada por um trapézio traçando uma das diagonais. Assim, obtemos a região limitada por um trapézio dividida em 2 regiões triangulares: uma região triangular de base de medida de comprimento B e altura de medida de comprimento h e outra região triangular de base de medida de comprimento b e altura de medida de comprimento h.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Você já estudou como calcular a medida de área de uma região triangular. Portanto, a medida área da região trapezoidal é dada por:

$$A = \frac{Bh}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{Bh + bh}{2} = \frac{(B + b)h}{2}$$

Ou seja:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

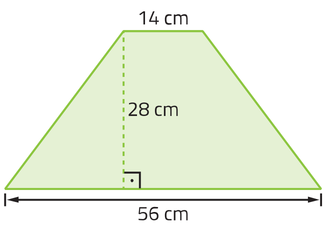
(unidades de medida de área)

18. 980 cm² $\left(A = \frac{(56 + 14)28}{2} = \frac{70 \times 28}{2} = 980\right)$

Não escreva no livro!

Atividades

18 Determine no caderno a medida de área desta região limitada por este trapézio.

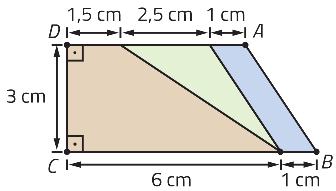


Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

19 Uma placa de propaganda tem a forma de um trapézio e medida de área de 11,16 m². As bases têm medidas de comprimento de 4 m e 3,20 m. Qual é a medida de comprimento da altura dessa placa?

20 No caderno, determine a medida de área desta figura de 2 maneiras diferentes. 18 cm²



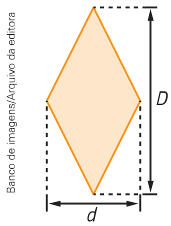
Banco de imagens/Arquivo da editora

21 Em um trapézio isósceles, a soma das medidas de comprimento das bases é de 14 m, a medida da área da região limitada por ele é de 28 m² e a medida do perímetro dela é de 24 cm. Determine no caderno as medidas de comprimento da altura e dos lados não paralelos dessa região.

21. Medida de comprimento da altura: 4 m; medidas de comprimento dos lados não paralelos: 5 m.
$\left(28 = \frac{14h}{2} \Rightarrow 14h = 56 \Rightarrow h = 4;\ 24 - 14 = 10 \text{ e } 10 \div 2 = 5.\right)$

Área de uma região limitada por um losango

Observe esta região limitada por um losango, cujas diagonais têm medidas de comprimento D e d.



Banco de imagens/Arquivo da editora

$$A = d \cdot \frac{D}{2} \text{ ou } A = \frac{Dd}{2}$$
(unidades de medida de área)

Dizemos que a medida de área da região determinada por um losango é igual à metade do produto das medidas de comprimento das diagonais (maior e menor).


Thiago Neumann/Arquivo da editora

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

Use o método de decompor uma figura plana em regiões cujas medidas de área você sabe calcular para mostrar, no caderno, que a medida de área dessa região limitada por um losango é dada por $A = \frac{Dd}{2}$. MP

Você sabia?

De acordo com uma pesquisa publicada na revista americana *Science*, em 2002, um dos desenhos mais antigos feitos pelo ser humano foi um losango.

A pesquisa relata que arqueólogos encontraram, em uma caverna sul-africana, o exemplar mais antigo de imagem – abstrata ou figurativa – feita pelo *Homo sapiens*, com 77 mil anos. Os objetos similares mais antigos tinham 35 mil anos.

Para o pesquisador Christopher Henshilwood, os rabiscos em uma rocha, formando losangos, são propositais. "A superfície gravada foi preparada com uma raspagem", disse. O achado indica, para ele, que os habitantes da caverna já tinham linguagem oral desenvolvida.

Fonte de consulta: FOLHA DE S.PAULO. *Ciência*. Disponível em: <www1.folha.uol.com.br/folha/ciencia/ult306u5749.shtml>. Acesso em: 27 jul. 2018.

Reprodução/Science Magazine


Exemplar mais antigo já descoberto de imagem feita pelo *Homo sapiens*.

22. 12,5 cm² $\left(A = \frac{10 \times 2{,}5}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5\right)$

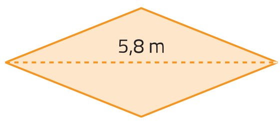
Atividades

Não escreva no livro!

22 Determine no caderno a medida de área de uma região plana limitada por um losango com diagonais de medida de comprimento de 10 cm e 2,5 cm.

23 Uma região plana **A** limitada por um losango tem diagonais com medidas de comprimento de 4 cm e 5 cm. Dobrando as medidas de comprimento das 2 diagonais, obtemos uma nova região plana **B**, também limitada por um losango. A medida de área da região plana **B** equivale a quantas vezes a medida de área da região plana **A**?

24 Sabendo que a medida de área de uma região limitada por um losango é de 6,67 m² e a medida de comprimento da diagonal maior é de 5,8 m, qual é a medida de comprimento da diagonal menor?



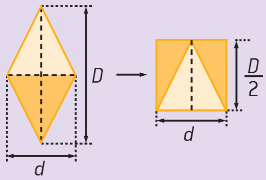
Banco de imagens/Arquivo da editora

23. 4 vezes. $\left(\frac{4 \times 5}{2} = 10;\ \frac{8 \times 10}{2} = 40;\ 40 \div 10 = 4\right)$

24. 2,3 m $\left(6{,}67 = \frac{5{,}8d}{2} \Rightarrow 5{,}8d = 13{,}34 \Rightarrow d = 2{,}3\right)$

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Para mostrar aos alunos o desenvolvimento da fórmula para calcular a medida da área da região plana limitada pelo losango, desenhe-o inscrito em um retângulo. A partir da decomposição dessa figura em triângulos retângulos, mostre a eles o motivo de multiplicar as diagonais e depois dividir o resultado por 2.

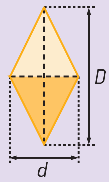


Banco de imagens/Arquivo da editora

Se preferir, trabalhe essa atividade com colagem, solicitando aos alunos que recortem uma região plana limitada por um losango, dividam-na em regiões limitadas por triângulos retângulos e colem formando uma região plana retangular.

Explorar e descobrir

Podemos decompor a região limitada pelo losango em 2 regiões triangulares de base de medida de comprimento d e altura de medida de comprimento $\frac{D}{2}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de área de cada região triangular é $A_t = \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} = \frac{dD}{4}$ e a medida de área da região limitada pelo losango é $A_\ell = \frac{dD}{4} + \frac{dD}{4} = \frac{dD}{2}$.

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

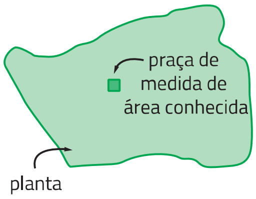
Peça aos alunos que leiam as informações apresentadas nesta página. Informe-os que este método depende de muitas condições: balança de precisão, papel uniforme, etc. Por isso, ele só é confiável com o uso de equipamentos adequados.

Cálculo aproximado de medidas de áreas

Acompanhe um exemplo que utiliza um método bastante original, extraído de uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Para calcular a medida de área de uma cidade, um engenheiro copiou a planta da cidade em uma folha de papel de boa qualidade, recortou-a e pesou-a em uma balança de precisão, obtendo a medida de massa de 40 g.

Em seguida, ele recortou, do mesmo desenho, uma praça cujas dimensões reais têm medidas de 100 m × 100 m, pesou o recorte na mesma balança e obteve a medida de massa de 0,08 g.



Podemos calcular a medida de área da cidade, nessa situação, utilizando uma regra de três simples, com grandezas diretamente proporcionais.

Grandezas diretamente proporcionais

Área	Massa
100×100	0,08
x	40

Tabela elaborada para fins didáticos.

$$x = \frac{400\,000}{0{,}08} = 5\,000\,000$$

Bate-papo

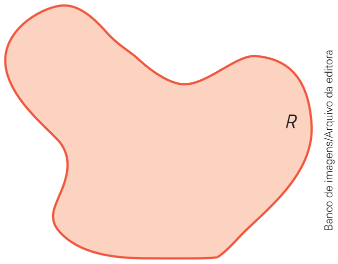
Você tem mais alguma ideia de procedimento? Relate para a turma.

Resposta pessoal.

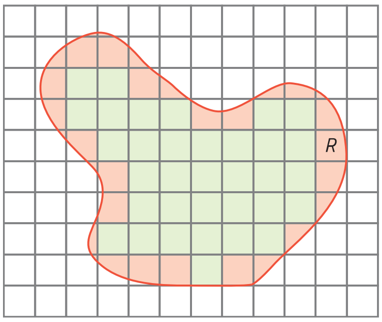
Portanto, podemos dizer que a medida de área da cidade, em metros quadrados, é de aproximadamente 5 000 000 m² ou 5 km².

Veja agora outro exemplo, com uma nova sugestão de procedimento.

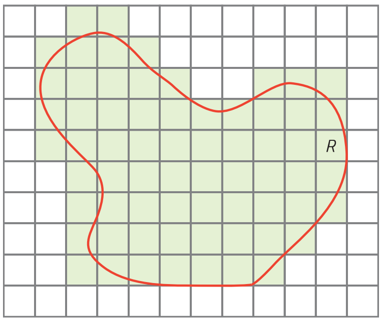
Vamos calcular a medida de área desta região *R*.



- Primeiro decalcamos essa região em uma malha quadriculada e contamos o maior número possível de regiões quadradas inteiras que cabem no interior dela.
Cabem 34 regiões quadradas inteiras no interior da região R. Então, dizemos que a **medida de área por falta** da região R é de 34 $\square$.



- Em seguida, contamos o menor número possível de regiões quadradas inteiras que cobrem totalmente a região R. São 67 regiões quadradas inteiras que cobrem a região R.
Então, dizemos que a **medida de área por excesso** da região R é de 67 $\square$.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- Como descobrir qual é a medida aproximada da área de R? Essa medida é maior do que 34 $\square$ e menor do que 67 $\square$.
Uma razoável aproximação para essa medida é dada pela **média aritmética** dos dois valores encontrados:

$$A \simeq \frac{34\,\square + 67\,\square}{2} = 50{,}5\,\square$$

Como a medida de área de cada $\square$ malha quadriculada é de $(0{,}5\text{ cm})^2 = 0{,}25\text{ cm}^2$, temos que a medida aproximada da área da região R é:

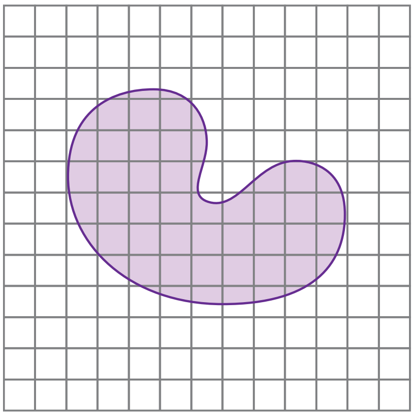
$$A \simeq 50{,}5 \cdot 0{,}25\text{ cm}^2 \simeq 12{,}63\text{ cm}^2$$

Não escreva no livro!

Atividade

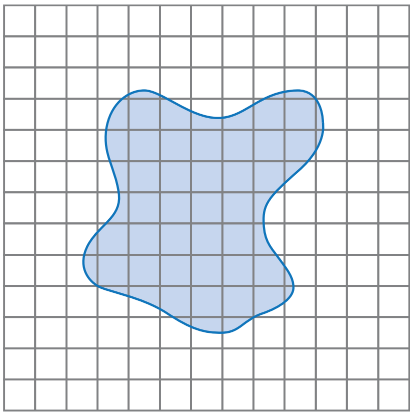
25 Calcule no caderno a medida aproximada da área de cada região plana, em centímetros quadrados.

a)



Aproximadamente 10,38 cm².

b)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Aproximadamente 10,63 cm².

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Atividade 25

Esta atividade reforça os conceitos explorados anteriormente utilizando malha quadriculada para aproximação da medida de área. Note que a malha quadriculada, na verdade, é uma decomposição em regiões poligonais. Veja a resolução.

a) 26 ■ por falta e 57 ■ por excesso.

$$\frac{26\,■ + 57\,■}{2} = 41{,}5■$$

$$A \simeq 41{,}5 \times 0{,}25\text{ cm}^2 \simeq 10{,}38\text{ cm}^2$$

b) 26 ■ por falta e 59 ■ por excesso.

$$\frac{26\,■ + 59\,■}{2} = 42{,}5■$$

$$A \simeq 42{,}5 \times 0{,}25\text{ cm}^2 \simeq 10{,}63\text{ cm}^2$$

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Enfatize para os alunos que as medidas de área 0,9; 0,6 e 0,2 indicadas na figura são **aproximações**.

Explore a determinação do número π, por meio de medidas realizadas pelos alunos.

Peça a eles que desenhem uma circunferência com qualquer medida de comprimento de raio e, em seguida, solicite que meçam o comprimento do diâmetro e o comprimento dessa circunferência com o auxílio de um barbante. Depois, solicite que dividam, com o auxílio de uma calculadora, a medida do comprimento da circunferência pela medida do comprimento do diâmetro da circunferência, anotando pelo menos 4 casas decimais.

Compare os valores obtidos; espera-se que os alunos cheguem a uma aproximação bem razoável do π. Se possível, solicite a eles que pesquisem a história e as aplicações do π.

A aproximação da medida da área do círculo foi um problema matemático discutido por séculos e é relatada na página por meio da atividade relacionada à área do círculo. A grande questão é como garantir que uma aproximação esteja boa o suficiente para, por exemplo, medir a área de um terreno e cobrar impostos sobre ele.

O desenvolvimento do cálculo da medida da área de um círculo é diretamente ligado à descoberta do significado do número π e da compreensão do número irracional; veja que a medida da área da circunferência só é exata quando utilizamos o número π sem aproximações.

Sequência didática

Para mais informações, veja a **sequência didática 3** do 3º bimestre.

Área de um círculo

Os organizadores de um *show* de *rock* fizeram uma estimativa de que cabem 6 300 pessoas em uma praça retangular de dimensões de medida de comprimento de 30 m por 42 m, considerando 5 pessoas por metro quadrado.

Mauro Souza/Arquivo da editora

Bate-papo

Converse com os colegas, façam os cálculos no caderno e confirmem quantas pessoas cabem nessa praça.

$A = 30 \times 42 = 1\,260$ e $1\,260 \times 5 = 6300$.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Mauro Souza/Arquivo da editora

Imagine agora que o *show* de *rock* fosse acontecer em outra praça, com a forma circular de raio de medida de comprimento de 20 metros. Como os organizadores fariam para saber quantas pessoas cabem nessa praça?

Haveria, nesse caso, a necessidade do cálculo da medida de área de um círculo.

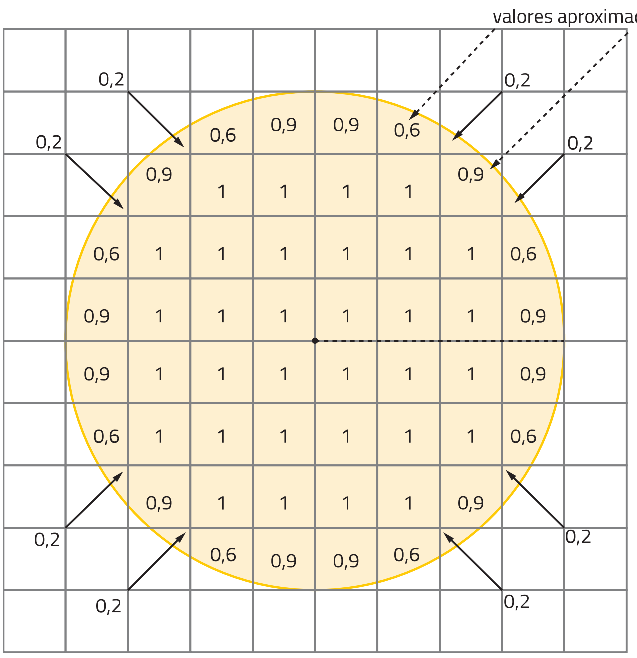
Vamos ver 2 situações que sugerem o cálculo da medida de área de um círculo, a partir da medida de comprimento do raio, e permitem que se obtenha um valor bastante aproximado da medida de área.

- Imagine o raio do círculo abaixo com medida de comprimento de 4 cm.

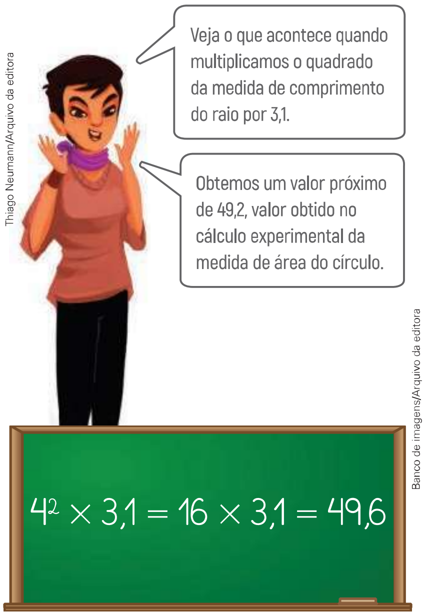
  Calculamos a medida aproximada da área do círculo somando as medidas de área de todas as partes.

  $$A = 32 \cdot 1 + 12 \cdot 0{,}9 + 8 \cdot 0{,}6 + 8 \cdot 0{,}2 = 32 + 10{,}8 + 4{,}8 + 1{,}6 = 49{,}2$$

  Logo, $A \simeq 49{,}2\ \text{cm}^2$.



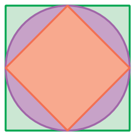
Banco de imagens/Arquivo da editora



Thiago Neumann/Arquivo da editora

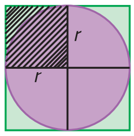
Banco de imagens/Arquivo da editora

- Considere uma região quadrada verde, um círculo lilás e uma região quadrada rosa sobrepostas, como mostra a figura ao lado.



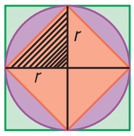
  a) Podemos ver, no diagrama, que a medida de área do círculo é:
  - menor do que a medida de área da região quadrada verde;
  - maior do que a medida de área da região quadrada laranja.

  b) A parte hachurada da região quadrada verde é uma região quadrada cujo lado corresponde ao raio do círculo.



  A medida de área da região hachurada é dada por $r \cdot r = r^2$.
  Assim, a medida de área da região quadrada verde é $4 \cdot r^2$ ou $4r^2$.

  c) Agora, observe o diagrama com a região quadrada laranja inscrita no círculo.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

  A medida de área da região hachurada é dada por $\dfrac{r \times r}{2} = \dfrac{r^2}{2}$.

  A medida de área da região quadrada laranja é dada por $4 \cdot \dfrac{r^2}{2} = 2r^2$.

Analisando as afirmações dos itens **a**, **b** e **c**, podemos concluir que a medida de área do círculo é maior do que $2r^2$ e menor do que $4r^2$.

Como a média de 4 e 2 é igual a 3 $\left(\dfrac{4+2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3\right)$, temos que a medida de área do círculo está próxima de $3r^2$.

Esse número próximo de 3, que é multiplicado por r^2, é o número irracional conhecido como **pi** (π = 3,141592...), ou seja, a medida de área de um círculo, com raio de medida de comprimento r, é dada por:

$$A = \pi r^2$$
(unidades de medida de área)

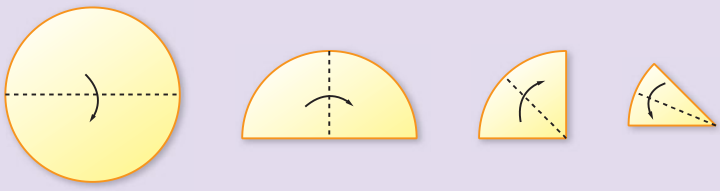
Observação: Podemos usar diferentes aproximações racionais para o π, como 3 ou 3,1 ou 3,14.

> Você já conhece alguns números irracionais, como as dízimas não periódicas e as raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos. Esses números serão estudados no livro do 9º ano.

Explorar e descobrir

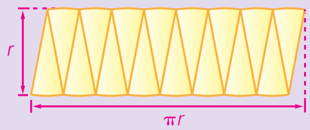
Não escreva no livro!

1 Trace uma circunferência em uma folha de papel sulfite colorida e recorte o círculo delimitado por ela. Em seguida, dobre o círculo em 16 setores iguais e, depois, desdobre-o. Veja como fazer as dobras.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Recorte todos os setores circulares obtidos e cole-os no caderno de modo a obter uma região plana como a representada aqui.



1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Explorar e descobrir

Esta seção trabalha com a aproximação da medida da área do círculo a partir do recorte de setores circulares organizados de maneira a se aproximarem de uma região limitada por um paralelogramo.

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Aproveite a atividade 2 para desenvolver a ideia intuitiva de limite: explique aos alunos que a montagem envolve a quantidade n de setores e se aproxima da medida da área de uma região limitada por um paralelogramo conforme aumentamos n.

2› Agora, responda no caderno considerando a região plana que você obteve.

a) Essa região se parece com qual região plana? Região limitada por um paralelogramo.

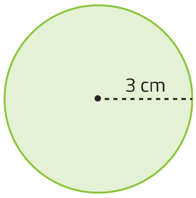
b) Sendo r a medida de comprimento do raio do círculo, qual expressão representa a medida de comprimento da altura dessa região? Indique-a na figura que você colou no caderno. r

c) Qual expressão representa a medida de comprimento da base? Explique sua resposta e indique a expressão também na figura. $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$, que corresponde à metade da medida de comprimento da circunferência.

d) Observe que a medida de área dessa região também é a medida de área do círculo. A partir das expressões obtidas, qual é a fórmula da medida de área do círculo? $A = (\pi r) \times r = \pi r^2$

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Considere um círculo cujo raio tem medida de comprimento de 3 cm.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida **exata** da área desse círculo pode ser indicada assim:

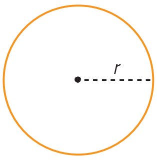
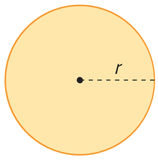
$$A = \pi \cdot (3\text{ cm})^2 = 9\pi \text{ cm}^2$$

Usando um valor aproximado para π, por exemplo 3,14, podemos indicar a medida **aproximada** da área do círculo por:

$$A \simeq 9 \cdot 3{,}14 \text{ cm}^2 = 28{,}26 \text{ cm}^2$$

Observação: Devemos estar sempre atentos para não confundir a medida de comprimento da circunferência (ou medida de perímetro da circunferência) com a medida de área do círculo. Perímetro e área são grandezas diferentes. Veja:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Medida de comprimento da circunferência	Medida de área do círculo
	
$C = 2\pi r$ (unidades de medida de comprimento)	$C = \pi r^2$ (unidades de medida de área)
C: produto do dobro da medida de comprimento do raio por π, na unidade **u** de medida de comprimento.	A: produto do quadrado da medida de comprimento do raio por π, na unidade **u²** de área.

Por exemplo, considere uma circunferência e um círculo, ambos com raio de medida de comprimento de 6 cm.

- Medida de comprimento da circunferência: $C = \underbrace{12}_{\text{dobro de 6}} \pi \text{ cm}$
- Medida de área do círculo: $A = \underbrace{36}_{\text{quadrado de 6}} \pi \text{ cm}^2$

Atividades

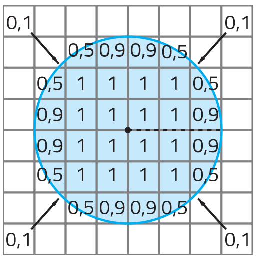
Não escreva no livro!

31. $A = \frac{\pi d^2}{4}$ $\left(A = \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \times \frac{d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{4}\right)$

26. Sim, pois $A = 16 \times 1 + 8 \times 0{,}9 + 8 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}1 = 16 + 7{,}2 + 4 + 0{,}4 = 27{,}6$; $3^2 \times 3{,}1 = 9 \times 3{,}1 = 27{,}9$; e 27,6 está próximo de 27,9.

26 Usando o círculo e as medidas de área dadas, verifique no caderno se, para um círculo de raio de medida de comprimento 3 u, a medida aproximada da área do círculo fica próxima de $3^2 \cdot 3{,}1$ u².

As imagens desta página não estão representadas em proporção.



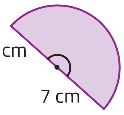
Banco de imagens/Arquivo da editora

27 Voltemos à questão do *show* de *rock* na praça circular. Agora, diante do que foi estudado, calcule no caderno quantas pessoas cabem, aproximadamente, em uma praça circular de raio de medida de comprimento de 20 metros, considerando 5 pessoas por metro quadrado. Use $\pi = 3{,}14$.

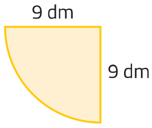
6280 pessoas. ($A = 20^2 \times 3{,}14 = 1\,256$; $1\,256 \times 5 = 6280$)

28 Calcule no caderno a medida aproximada da área de cada figura, usando $\pi = 3{,}14$.

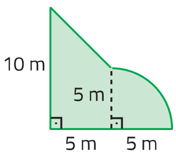
a) Semicírculo com 7 cm de medida de comprimento do raio. 76,93 cm²



b) Quarto de círculo com 9 dm de medida de comprimento do raio. 63,585 dm²

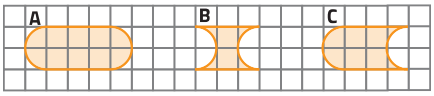


c) Figura formada por um quarto de círculo e uma região plana limitada por um trapézio. 57,125 m²



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

29 Examine as figuras **A**, **B** e **C** e faça os registros no caderno.



Banco de imagens/Arquivo da editora

As partes curvas são semicircunferências.

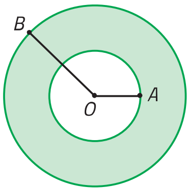
a) Compare as medidas de perímetro dessas figuras. As medidas de perímetro são todas iguais.

b) Indique as medidas de área dessas figuras em ordem crescente. medida de área de **B** < medida de área de **C** < medida de área de **A**

30 A parte pintada de verde nesta figura é conhecida por **coroa circular**. A medida de área dela pode ser calculada subtraindo a medida de área do círculo interno da medida de área do círculo externo.

Sabendo disso, calcule no caderno a medida de área dessa coroa circular, que tem o raio do círculo maior com medida de comprimento de 6 cm e o raio do círculo menor, de 3 cm. Use $\pi = 3{,}14$.

30. 84,78 cm² (Círculo maior: $A = 6^2 \times \pi = 36\pi$; círculo menor: $A = 3^2 \times \pi = 9\pi$; coroa circular: $A = 36\pi - 9\pi = 27\pi \simeq 27 \times 3{,}14 = 84{,}78$.)

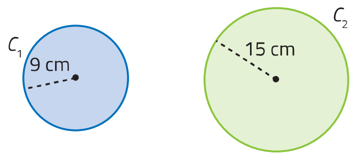


Banco de imagens/Arquivo da editora

OA = 3 cm e OB = 6 cm.

31 Uma circunferência tem diâmetro de medida de comprimento d. Como podemos escrever a fórmula da medida de área dessa circunferência?

32 Considerando os círculos C_1 e C_2 dados, calcule o que se pede e escreva no caderno na forma de fração irredutível.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) A razão entre as medidas de comprimento dos raios de C_1 e C_2.

b) A razão entre as medidas de perímetro de C_1 e C_2.

c) A razão entre as medidas de área de C_1 e C_2.

33 Conversem sobre estas questões e registrem as respostas no caderno.

a) Se k é a razão entre as medidas de 2 grandezas lineares correspondentes em 2 regiões planas semelhantes, então qual é a razão entre as medidas de perímetro dessas regiões? k

> **Lembre-se: Figuras semelhantes** têm a mesma forma, têm as mesmas medidas de abertura dos ângulos correspondentes e têm os lados correspondentes com medidas de comprimento proporcionais.

b) E entre as medidas de área? k^2

c) Essas conclusões a que vocês chegaram se confirmam com as razões calculadas para os círculos da atividade anterior?

32. a) $\frac{3}{5}$ $\left(\frac{9}{15} = \frac{3}{5}\right)$ b) $\frac{3}{5}$ $\left(\frac{18\cancel{\pi}}{30\cancel{\pi}} = \frac{3}{5}\right)$ c) $\frac{9}{25}$ $\left(\frac{81\cancel{\pi}}{225\cancel{\pi}} = \frac{9}{25}\right)$ 33. c) Sim. $\left(\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \text{ e } \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2\right)$

b) $A \simeq \frac{9^2 \times 3{,}14}{4} = \frac{81 \times 3{,}14}{4} = 63{,}585$

$A \simeq 63{,}585$ dm²

c) $A \simeq \frac{(5 + 10) \times 5}{2} + \frac{5^2 \times 3{,}14}{4} = 37{,}5 + 19{,}625 = 57{,}125$

$A \simeq 57{,}125$ m²

Atividade 30

Nesta atividade, leve os alunos a perceber que, para determinar a medida da área de uma coroa circular, utilizamos a subtração entre a medida da área maior e a medida da área menor. Um exemplo de coroa circular pode ser encontrado em uma moeda de 1 real, por exemplo, e sua área pode ser calculada de maneira simples com o auxílio de uma régua graduada.

Observe em qual momento os alunos substituem o valor aproximado de π nos cálculos: ao calcular a medida de área de cada círculo ou apenas no final, na medida de área da coroa circular.

Atividade 33

Os alunos viram o que são figuras semelhantes no livro do 6º ano desta coleção. Retome esse conceito com eles e, antes de propor esta atividade, peça que façam o que foi pedido na atividade anterior com as medidas de comprimento de raio, de perímetro e de área de diferentes regiões poligonais semelhantes. Por exemplo, eles podem calcular as razões entre as medidas de comprimento, de perímetro e de área de 2 regiões quadradas com lados de medida de comprimento de 4 cm e 6 cm.

Ao final da atividade, comente com os alunos que 2 circunferências ou 2 círculos são sempre semelhantes.

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Atividades 27 e 28

Na atividade 27, retome a situação da página 172 e verifique com os alunos se compreendem o processo de resolução. É possível questionar também: "Qual área seria melhor ocupada em um *show*: uma área circular ou retangular? Por quê?".

É interessante trabalhar o item **c** da atividade 28 por meio da decomposição: a quarta parte de um círculo, um quadrilátero e um triângulo. Outras atividades como essa podem ser elaboradas pelos alunos. Proponha a eles que recortem pedaços de figuras como círculos, quadrados e retângulos para montar novas figuras como a da atividade. Em seguida, eles podem trocar as montagens com os colegas para que cada um calcule a medida da área da figura criada pelo colega.

Veja a resolução da atividade 28.

a) $A \simeq \frac{7^2 \times 3{,}14}{2} = \frac{49 \times 3{,}14}{2} = 76{,}93$

$A \simeq 76{,}93$ cm²

Área lateral e área total da superfície de sólidos geométricos

Podemos aplicar as noções e as fórmulas da área de figuras planas para calcular a medida de área da superfície de sólidos geométricos (cilindros e prismas). Para isso, resolva no caderno as atividades a seguir, conversando e trocando ideias com os colegas sempre que possível.

Não escreva no livro!

Atividades

Use $\pi = 3{,}14$ nas atividades, quando necessário.

34 **Área lateral da superfície de um cilindro.** Considere esta lata de ervilha, com a forma de um cilindro.

34. c) Aproximadamente 235,5 cm². ($A = 10 \times 23{,}55 = 235{,}5$)
d) Aproximadamente 206 cm².
($C = 2 \times 3{,}14 \times 4{,}1 = 25{,}75$; $A = 8 \times 25{,}75 = 206$)

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Paulo Manzi/Arquivo da editora

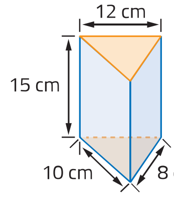
a) Se tirarmos o rótulo dessa lata cilíndrica e o esticarmos sobre um plano, então obteremos a forma de qual região plana? Uma região retangular.

b) Quais são as medidas das dimensões desse rótulo? 10 cm por aproximadamente 23,55 cm. ($C = 3{,}14 \times 7{,}5 = 23{,}55$)

c) A área do rótulo corresponde à **área lateral** do cilindro. Qual é a medida de área desse rótulo?

d) E qual é a medida da área lateral de um cilindro cuja altura tem medida de comprimento de 8 cm e cuja base é um círculo com raio de medida de comprimento de 4,1 cm?

35 **Área lateral de um prisma.** Observe este prisma de base triangular.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Quantas faces laterais esse prisma tem? 3 faces laterais.

b) Cada face lateral tem a forma de qual região plana? Região retangular.

c) Calcule a medida de área de cada face lateral. 150 cm²; 180 cm² e 120 cm². ($10 \times 15 = 150$; $12 \times 15 = 180$; $8 \times 15 = 120$)

d) Adicione as 3 medidas obtidas no item **c** para obter a medida da área lateral desse prisma. 450 cm² ($150 + 180 + 120 = 450$)

e) Qual é a medida de perímetro de cada uma das bases desse prisma? 30 cm ($10 + 12 + 8 = 30$)

f) Agora, use o resultado encontrado no item **e** para determinar a medida da área lateral do prisma. 450 cm² ($30 \times 15 = 450$)

36 **Área total da superfície de um cilindro.** Considere um cilindro de medida de comprimento da altura de 8 cm e medida de comprimento do raio de 3 cm.

a) Qual é a medida da área lateral desse cilindro? Aproximadamente 150,72 cm². ($A = 2 \times 3{,}14 \times 3 \times 8 = 150{,}72$)

b) Qual é a medida de área de cada base? Aproximadamente 28,26 cm². ($A = 3{,}14 \times 3^2 = 28{,}26$)

c) Qual é a medida da área total da superfície do cilindro? Explique aos colegas como você determinou essa medida.

37 **Área total da superfície de um prisma.** Considere um prisma de base quadrada de medida de comprimento da altura de 7 cm e medida de comprimento dos lados da base de 2 cm.

a) Qual é a medida de área lateral desse prisma? 56 cm² ($A = 4 \times (2 \times 7) = 56$)

b) Qual é a medida de área de cada base? 4 cm² ($A = 2 \times 2 = 4$)

c) Qual é a medida da área total da superfície desse prisma? Explique aos colegas como você determinou essa medida. 64 cm²; a medida da área total da superfície de um prisma é dada pela soma das medidas da área lateral e das áreas das 2 bases. ($56 + 2 \times 4 = 64$)

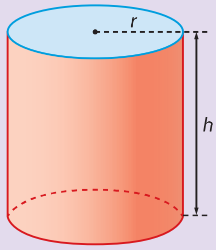
36. c) Aproximadamente 207,24 cm²; a medida da área total da superfície de um cilindro é dada pela soma das medidas da área lateral e das áreas das 2 bases. ($150{,}72 + 2 \times 28{,}26 = 207{,}24$)

1 Retomando e aprofundando o cálculo de medida de área

Antes de iniciar as atividades desta página, relembre com os alunos as planificações dos sólidos geométricos explorados.

Não é necessário exigir deles o uso das fórmulas para o cálculo da medida da área lateral e da medida da área total das superfícies dos sólidos geométricos. Porém, se julgar oportuno, ao final das atividades, faça a sistematização das fórmulas das medidas da área lateral.

- Um cilindro de altura de medida de comprimento h, cuja base é um círculo de raio de medida de comprimento r, tem medida da área lateral dada por $2\pi rh$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- A medida da área lateral de um prisma é dada pelo produto da medida do perímetro de uma das bases pela medida de comprimento da altura do prisma.

A medida da área total é dada somando a medida da área lateral e as medidas da área das bases.

Atividade 34

Comente com os alunos que, como usamos a aproximação $\pi = 3{,}14$ em todos os cálculos que utilizam esse valor, obtemos medidas **aproximadas** da área.

Proponha a eles que representem concretamente o rótulo de uma lata de ervilha com uma folha de papel e façam as medições necessárias.

É possível utilizar a planificação do cilindro para exemplificar a área lateral. Seria relevante apresentar a largura da região retangular como o comprimento da circunferência que forma a base do cilindro, assim os alunos notarão que é mais simples efetuar o cálculo se dependermos apenas do raio.

Atividade 35

Espera-se que os alunos descubram que é necessário multiplicar a medida de perímetro da base (30 cm) pela medida de comprimento da altura (15 cm) do prisma, ou seja, 30 cm × 15 cm = 450 cm².

Peça a eles que comparem a medida obtida com a resposta dada ao item **d**.

Atividade 36

Veja a resolução desta atividade.

$A_L = 2\pi rh = 2 \times 3{,}14 \times 3 \times 8 \Rightarrow A_L = 150{,}72\ \text{cm}^2$

$A_C = \pi r^2 = 3{,}14 \times 9 \Rightarrow A_C = 28{,}26\ \text{cm}^2$

$A_T = A_L + A_C = 150{,}72 + 28{,}26 + 28{,}26 = 207{,}24$

JOGOS

Não escreva no livro!

Qual é a medida de área?

Com este jogo você vai aplicar o que estudou sobre medidas de área de regiões planas. Preste atenção nas orientações e bom jogo!

Orientações

Número de participantes: 2 jogadores.
Material necessário: 1 dado.

Preparação

Antes de começar a partida, os jogadores devem elaborar uma tabela com os nomes deles para marcar os pontos obtidos em cada rodada.

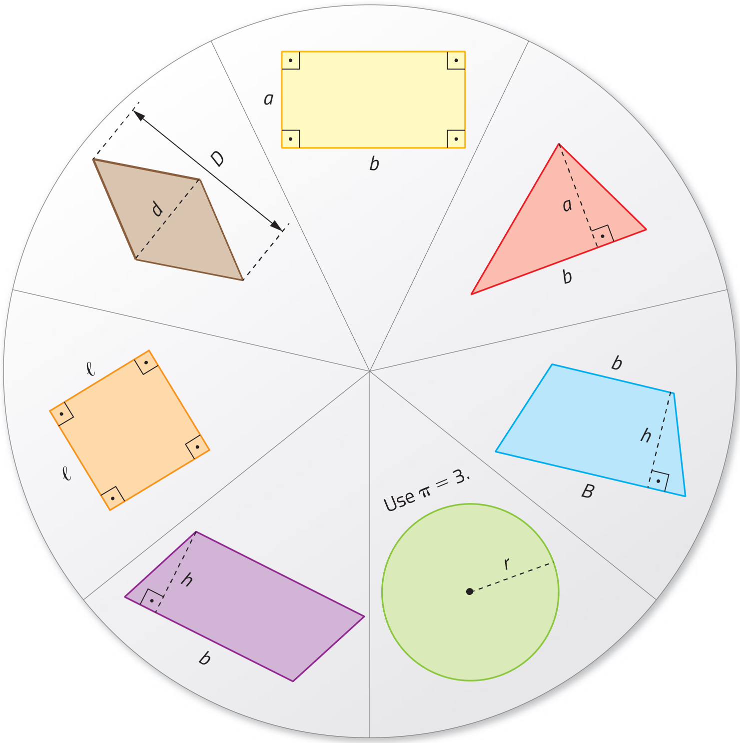
Como jogar

Na sua vez, cada jogador deve girar um clipe na roleta, com auxílio de um lápis, para determinar a região plana cuja medida de área será calculada.

Em seguida, o jogador deve identificar a fórmula para o cálculo da medida de área da região plana sorteada, em centímetros quadrados, e as medidas de comprimento, em centímetros, que serão usadas no cálculo devem ser obtidas lançando o dado tantas vezes quantas forem necessárias.

Por exemplo, se a região plana sorteada na roleta for uma região triangular, então o jogador deve lançar o dado 2 vezes para obter a medida de comprimento da altura e a medida de comprimento da base, ambas em centímetros, da região triangular.

A medida de área que será calculada corresponderá aos pontos obtidos pelo jogador na rodada. E o vencedor da partida será quem fizer mais pontos após 4 rodadas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Jogos

Principal habilidade da BNCC
EF08MA19

Por meio desse jogo, espera-se que os alunos retomem de maneira lúdica os cálculos das medidas de área de regiões planas. Neste momento, eles devem aplicar as fórmulas para o cálculo das medidas de área das principais regiões planas estudadas e identificar as medidas de comprimento envolvidas em cada fórmula.

Eles também terão a oportunidade de desenvolver habilidades de cálculo mental, operando com números naturais. A ideia é promover a memorização das fórmulas e a compreensão do uso de cada uma delas.

Você também pode propor a criação de um dado com valores decimais para desafiar os alunos a fazer novos cálculos. Se possível, desafie-os a fazer alterações no jogo, criando novas regras e novas problematizações. Essa criação demandará dos alunos uma revisão de todos os conceitos estudados até então, e como motivação é mais efetivo no processo de aprendizagem do que uma proposta formal de revisão.

2 Retomando e aprofundando o cálculo de medidas de volume e medidas de capacidade

Principais habilidades da BNCC

EF08MA19 EF08MA21 EF08MA20

Explorar e descobrir

A fórmula da medida de volume de um cubo é válida para qualquer valor real positivo a. Neste momento, os alunos trabalharão apenas com os números racionais.

Chame a atenção dos alunos para o fato de que, se a medida de comprimento da aresta é dada em cm, m ou mm, então a medida de volume é dada em cm^3, m^3 ou mm^3, respectivamente.

2 Retomando e aprofundando o cálculo de medidas de volume e medidas de capacidade

Você já estudou, nos anos anteriores, a ideia intuitiva de medida de volume de um sólido geométrico. Trata-se da quantidade de espaço que esse sólido geométrico ocupa.

Também já estudou a ideia intuitiva de medida de capacidade de um recipiente (objeto com espaço interno disponível). A medida de capacidade corresponde à medida de volume da parte interna do recipiente.

Assim, volume e capacidade são as mesmas grandezas em situações diferentes.

Agora, vamos retomar essas ideias e aprofundá-las nas atividades a seguir.

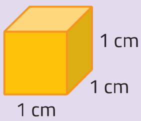
Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

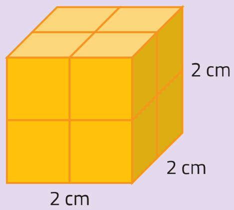
1 **Volume de um cubo.** Um cubo com arestas de medida de comprimento de 1 cm tem medida de volume de 1 cm^3 (figura 1). Considerando esse cubo como unidade de medida de volume, observe as demais figuras.

1. a) 8 cubinhos; 8 cm^3.
b) 27 cubinhos; 27 cm^3.
c) Sim, efetuando as multiplicações $2 \times 2 \times 2 = 8$ (ou $2^3 = 8$) e $3 \times 3 \times 3 = 27$ (ou $3^3 = 27$).
d) 125 cm^3 ($5^3 = 125$ ou $5 \times 5 \times 5 = 125$)

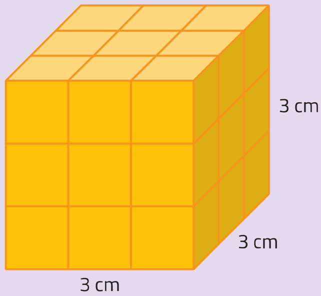
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



Unidade de medida de volume: 1 cm^3.
Figura **1**.



Medida de volume: ?
Figura **2**.



Medida de volume: ?
Figura **3**.

a) Há quantos cubinhos de 1 cm^3 no cubo da figura **2**? Qual é a medida de volume do cubo da figura **2**?

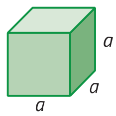
b) Há quantos cubinhos de 1 cm^3 no cubo da figura **3**? Qual é a medida de volume do cubo da figura **3**?

c) Há outra maneira de calcular a medida de volume desses cubos sem contar os cubinhos que os formam? Explique.

d) Qual é a medida de volume de um cubo com arestas de medida de comprimento de 5 cm?

O que você constatou nas conclusões dos itens desta atividade, os matemáticos já provaram que vale para qualquer número racional positivo na medida de comprimento das arestas do cubo.
E você já deve conhecer esta fórmula: a medida de volume de um cubo cuja aresta tem medida de comprimento a é dada por:

$V = a^3$
(unidades de medida de volume)



Banco de imagens/Arquivo da editora

2 **Volume e capacidade.** Para realizar esta atividade, providenciem fita adesiva, régua, tesoura com pontas arredondadas e algumas embalagens com a forma de paralelepípedo, como caixas de leite ou de suco, limpas, secas e desmontadas.

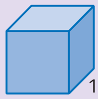
a) Com esse material, construam uma caixa cúbica com arestas de medida de comprimento de 1 dm (lembrem-se: 1 dm = 10 cm). Utilizem a fita adesiva para vedar as arestas e deixem uma das faces com apenas uma aresta fixada, como se fosse uma tampa.
Qual é medida de volume dessa caixa? 1 dm^3

b) Encham um vasilhame com 1 litro de água e despejem na caixa que vocês construíram. O que vocês podem concluir dessa experiência? Resposta esperada: Dentro de uma caixa cúbica com arestas de medida de comprimento de 1 dm cabe 1 litro de água.

c) Copie e complete no caderno.

Uma caixa cúbica cuja aresta tem medida de comprimento de 1 dm tem medida de volume de ▒ e medida de capacidade de ▒. 1 dm³; 1 L.

d) Considerando essas relações, copie a tabela no caderno e complete as correspondências.



Medida de volume: 1 dm³.
Medida de capacidade: 1 L.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Correspondência entre as medidas

Medida de volume	Medida de capacidade
1 dm³	1 L
1 000 cm³	1 L
1 cm³	0,001 L ou 1 mL
1 m³	1 000 L

Tabela elaborada para fins didáticos.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

3› **Volume de um paralelepípedo.** Considere agora o paralelepípedo com dimensões de medidas de comprimento de 6 cm, 2 cm e 3 cm (figura **2**) e a unidade de medida de volume de 1 cm³ (figura **1**).

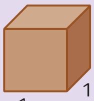


Figura **1**.

Unidade de medida de volume: 1 cm³.

Figura **2**.

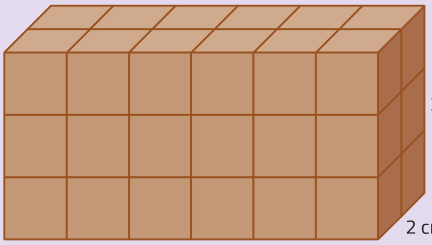


Figura **3**.

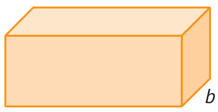
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Há quantos cubinhos de 1 cm³ no paralelepípedo da figura **3**? Qual é a medida de volume do paralelepípedo da figura **3**? 36 cubinhos; 36 cm³.

b) Há outra maneira de calcular a medida de volume desse paralelepípedo sem contar os cubinhos que o formam? Explique. Sim; efetuando a multiplicação $6 \times 2 \times 3 = 36$.

O que você constatou nas conclusões dos itens desta atividade, os matemáticos já provaram que vale para qualquer número racional positivo das medidas de comprimento das arestas do paralelepípedo.
E você já deve conhecer esta fórmula: a medida de volume de um paralelepípedo é igual ao produto da medida de área da base ($A_b = a \cdot b$) pela medida de comprimento da altura (c).

$V = A_b \cdot c$ ou $V = abc$
(unidades de medida de volume)



Banco de imagens/Arquivo da editora

2 Retomando e aprofundando o cálculo de medidas de volume e medidas de capacidade

Explorar e descobrir

Para realizar a atividade 3 proponha aos alunos que utilizem cubinhos do material dourado para montar o sólido geométrico apresentado no livro. Depois, peça a eles que calculem a medida do volume do sólido e confiram o resultado com os colegas.

Se julgar conveniente, desenhe na lousa ou mostre outros sólidos geométricos feitos com cubinhos do material dourado e peça aos alunos que calculem também a medida de volume deles depois de montá-los com o material manipulável.

Por fim, peça aos alunos que comparem esse método com o cálculo da medida de volume usando as medidas de comprimento das arestas dos sólidos geométricos.

2 Retomando e aprofundando o cálculo de medidas de volume e medidas de capacidade

Atividade 38

Na atividade 38, o foco é o uso das unidades de medida, portanto, é importante solicitar respostas completas, ou seja, apresentando a unidade de medida adequada. Se houver possibilidade, amplie esta exploração solicitando aos alunos que a medida do volume seja transformada em litros para, justamente, retomar conversão de medidas.

Atividade 41

Nesta atividade, um procedimento que pode ser notado é a conversão das unidades de medida de comprimento antes do cálculo. Ao converter as unidades de cm para dm, teremos o resultado em dm^3, que tem conversão direta para litros, pois $1\ dm^3 = 1\ L$.

Você sabia?

Aproveite o texto dessa seção para conversar com os alunos sobre o consumo de água no local em que residem. Pergunte a eles: "Vocês acham que o consumo no local em que moram é consciente?", "Quantos minutos cada pessoa demora no banho?", "Ao lavar a louça ou escovar os dentes, vocês costumam fechar a torneira?".

Se achar interessante, peça uma pesquisa sobre o uso da água nos dias de hoje. Os alunos podem coletar informações em reportagens e documentários que tratam da possível falta de água que viveremos nos próximos anos, principalmente nas grandes cidades.

38. b) $4{,}05\ dm^3$ $\left(V = \dfrac{1{,}5 \times 4{,}5 \times 1{,}2}{2} = \dfrac{8{,}1}{2} = 4{,}05\right)$

39. $432\,000\ cm^3$ ou $432\ dm^3$; 432 litros ($V = 80 \times 90 \times 60 = 432\,000$)

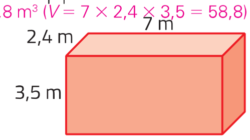
Não escreva no livro!

Atividades

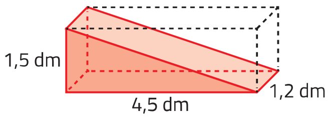
38 Calcule no caderno a medida de volume de cada sólido geométrico.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

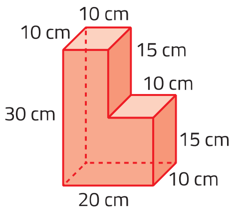
a) Paralelepípedo. $58{,}8\ m^3$ ($V = 7 \times 2{,}4 \times 3{,}5 = 58{,}8$)



b) Metade de um paralelepípedo.



c) Sólido geométrico formado por 2 paralelepípedos. $4500\ cm^3$ ($V = 30 \times 10 \times 10 + 15 \times 10 \times 10 = 3000 + 1500 = 4500$)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

39 Uma caixa-d'água tem a forma de um paralelepípedo de dimensões de medida de comprimento de 80 cm, 90 cm e 60 cm. Qual é a medida de volume dessa caixa-d'água? E a medida de capacidade?

Paulo Manzi/Arquivo da editora

40 **Arredondamentos, cálculo mental e resultado aproximado.** Uma caixa-d'água, com a forma de paralelepípedo, tem dimensões de medidas de comprimento de 0,95 m, 1,95 m e 0,95 m.

Faça arredondamentos, calcule mentalmente e registre no caderno o valor mais próximo da medida de capacidade dessa caixa-d'água.

a) 20 000 L X b) 2 000 L c) 5 000 L

($V = 1 \times 2 \times 1 = 2$; $2\ m^3 \rightarrow 2000\ L$)

41 O nível de água neste aquário corresponde a $\frac{2}{3}$ da medida de altura dele. Sabendo que a forma deste aquário é de um paralelepípedo, calcule no caderno quantos litros há nele.

Paulo Manzi/Arquivo da editora

42 Uma torneira despeja 20 litros de água por minuto. Quanto tempo ela gasta para encher uma caixa-d'água como esta, com a forma de bloco retangular?

25 min ($V = 1 \times 1 \times 0{,}5 = 0{,}5$; $0{,}5\ m^3 \rightarrow 500\ L$; $500 \div 20 = 25$)

Paulo Manzi/Arquivo da editora

Você sabia?

De acordo com as Nações Unidas, o consumo mensal de $6\ m^3$ de água por habitante é um valor bastante razoável para áreas urbanas.

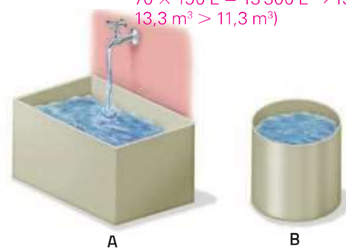
O desperdício de água é um problema tão grave quanto os de poluição, de aquecimento global e de crescimento populacional descontrolado.

Por exemplo, o gasto de uma torneira vazando é muito grande. Veja os números: quando as gotas caem lentamente, são desperdiçados 400 litros de água por mês; se as gotas caem rapidamente, 1 000 litros por mês são jogados fora; se há um gotejamento contínuo de água, o desperdício sobe para 6 500 litros por mês (o que equivale ao consumo mensal de cerca de 1 pessoa!).

Fonte de consulta: GAZETA DA CIDADE. *Planeta atitude*. Disponível em: <www.gazetadacidade.com/planetaatitude/atencao-com-o-gotejamento-de-torneiras/>. Acesso em: 30 set. 2018.

43 Para encher este tanque **A**, uma torneira que despeja 190 L de água por minuto ficou aberta durante 1 h 10 min. O tanque **B** tem medida de volume de $11{,}3\ m^3$.

a) No tanque **A**. (1 h 10 min = 70 min; $70 \times 190\ L = 13\,300\ L \rightarrow 13{,}3\ m^3$; $13{,}3\ m^3 > 11{,}3\ m^3$)



Ilustrações: Paulo Manzi/Arquivo da editora

a) Em qual desses tanques cabe mais água?

b) Quantos litros a mais?

2 000 L a mais. ($11{,}3\ m^3 \rightarrow 11\,300\ L$; $13\,300 - 11\,300 = 2\,000$)

41. 8,64 L ($\frac{2}{3}$ de 24 = 16; $V = 30 \times 18 \times 16 = 8640$; $8640\ cm^3 = 8{,}64\ dm^3 \rightarrow 8{,}64\ L$)

Volume de um cilindro

Observe estas latas cilíndricas **A** e **B** e as medidas de comprimento indicadas.

Lata **A**. Lata **B**.

Vamos inicialmente obter, em centímetros cúbicos, as medidas de volume correspondentes às medidas de capacidade, dadas em mililitros (mL), que indicam o conteúdo das latas.

Como 1 litro corresponde a 1 dm^3 e 1 dm^3 = 1 000 cm^3, temos que 1 L = 1 000 mL. Então:

$$502{,}9 \text{ mL} = 0{,}5029 \text{ L} \quad \text{e} \quad 0{,}5029 \text{ dm}^3 = 502{,}9 \text{ cm}^3$$

Logo, na lata **A** e na lata **B**, temos:

$$V = 502{,}9 \text{ cm}^3$$

Agora vamos calcular a medida aproximada da área da base dessas latas, em centímetros quadrados, usando $\pi = 3{,}1$.

Lata **A**:

$$A_b = \pi r^2 = 3{,}1 \cdot (4{,}12 \text{ cm})^2 \simeq 52{,}6 \text{ cm}^2$$

Lata **B**:

$$A_b = \pi r^2 = 3{,}1 \cdot (4{,}5 \text{ cm})^2 \simeq 62{,}8 \text{ cm}^2$$

> Se o diâmetro da lata **A** tem medida de comprimento de 8,24 cm, então o raio tem medida de comprimento de 4,12 cm, pois 8,24 ÷ 2 = 4,12.
> Analogamente, o raio da lata **B** tem medida de comprimento de 4,5 cm, pois 9 ÷ 2 = 4,5.

Em seguida, vamos dividir a medida de volume de cada lata pela medida de área da base.

Lata **A**:

$$V \div A_b = 502{,}9 \text{ cm}^3 \div 52{,}7 \text{ cm}^2 = 9{,}5 \text{ cm}$$

Lata **B**:

$$V \div A_b = 502{,}9 \text{ cm}^3 \div 62{,}8 \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}$$

Observe que essas medidas obtidas são exatamente as medidas de comprimento das alturas (h) de cada lata, ou seja:

$$V \div A_b = h$$

ou

$$V = A_b \times h$$

É possível provar que o que ocorreu com essas latas cilíndricas ocorre sempre. Por isso, podemos escrever que a medida de volume de um cilindro é igual ao produto da medida de área da base (A_b) pela medida de comprimento da altura (h).

$$V = A_b \cdot h$$
(unidades de medida de volume)

Resposta esperada: Em ambas as fórmulas, calculamos a medida de área da base e a multiplicamos pela medida de comprimento da altura do sólido geométrico.

Bate-papo

Observe a fórmula da medida de volume de um cilindro e retome a fórmula da medida de volume de um paralelepípedo. Em que elas se relacionam?

2 Retomando e aprofundando o cálculo de medidas de volume e medidas de capacidade

Peça previamente aos alunos que levem latas cilíndricas vazias e limpas para a sala de aula, que serão usadas para calcular, na prática, a medida do volume de cada lata e comparar com a medida indicada no rótulo. Se não houver essa possibilidade, peça a eles que construam um cilindro com cartolina ou papel-cartão.

Oriente os alunos a seguir os mesmos passos do livro, adaptando os cálculos de acordo com a embalagem que tiverem e, assim, determinar a medida do volume da lata. Em seguida, eles devem converter a medida do volume obtida para litros ou mililitros.

A próxima etapa pode ser realizada com um béquer graduado ou copo medidor: proponha aos alunos que meçam a quantidade de água que deveria caber na lata, e se a embalagem possibilitar, eles podem enchê-la com a água medida, conferindo de maneira lúdica os cálculos.

É esperado que haja uma diferença entre o cálculo e a medida. Explique aos alunos que isso se deve principalmente à imprecisão dos instrumentos utilizados e ao erro humano ao medir.

2 Retomando e aprofundando o cálculo de medidas de volume e medidas de capacidade

Para ampliar as explorações propostas nesta página, questione os alunos: "Qual embalagem é mais econômica?".

Permita a eles que troquem informações e pesquisem as aplicações da Geometria na natureza e na indústria, por exemplo, o favo das abelhas – cujo formato lembra um prisma de base hexagonal – ou mesmo a teia de aranha. Explore também com os alunos as diversas formas das embalagens e questione o motivo de a maioria delas ser um prisma de base retangular.

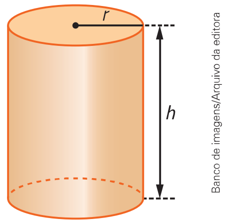
Acompanhe alguns exemplos de aplicação da fórmula da medida de volume de um cilindro.

- Vamos calcular a medida de capacidade de uma lata de molho de tomate, que tem forma cilíndrica com diâmetro de medida de comprimento de 8 cm e altura de medida de comprimento de 11 cm.

Realidade

Lata.

Modelo matemático



Cilindro.

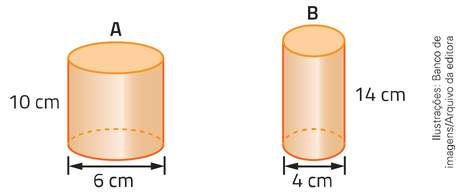
Vamos usar $\pi = 3$.

Dados: $r = 8$ cm $\div 2 = 4$ cm e $h = 11$ cm.
Então:

$$V = A_b \cdot h = \pi r^2 \cdot h = 3 \cdot (4 \text{ cm})^2 \cdot 11 \text{ cm} = 528 \text{ cm}^3$$

Sabendo que 1 dm³ ↔ 1 L e 1 cm³ ↔ 1 mL, concluímos que a medida de capacidade dessa lata é de aproximadamente 528 mL.

- Usando $\pi = 3{,}1$, vamos verificar qual destes 2 vasilhames cilíndricos tem maior medida de capacidade.



Vasilhame **A**:

$$V = 3{,}1 \cdot (3 \text{ cm})^2 \cdot 10 \text{ cm} = 279 \text{ cm}^3$$

Então, a medida aproximada da capacidade é de 279 mL.
Vasilhame **B**:

$$V = 3{,}1 \cdot (2 \text{ cm})^2 \cdot 14 \text{ cm} = 173{,}6 \text{ cm}^3$$

Então, a medida aproximada da capacidade é de 172,6 mL.
Logo, o vasilhame **A** tem maior medida de capacidade.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Você sabia?

Modelagem matemática: qual embalagem é mais econômica?

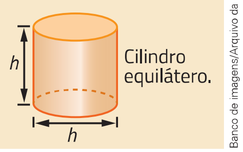
Vamos supor que uma indústria deseja comercializar um produto em embalagens cilíndricas, como as de ervilha, por exemplo. A meta da indústria é fazer, com o menor custo de fabricação, uma embalagem que comporte a mesma medida de volume.

A Matemática pode ser muito útil nessa situação, pois, quando pensamos no menor custo de fabricação, estamos falando de usar o mínimo de material possível, ou seja, de descobrir o cilindro que tem a menor medida da área total, entre os que têm a mesma medida de volume.

Os matemáticos provaram que, de todos os cilindros de mesma medida de volume, o **cilindro equilátero** é o que tem a menor medida da área total. Nesse cilindro, a medida de comprimento da altura é igual à medida de comprimento do diâmetro da base.

Assim, se a indústria deseja comercializar um produto em embalagens cilíndricas que gastem o mínimo de material na fabricação, ela deve optar pelo cilindro equilátero. É o caso, por exemplo, de algumas latas de leite condensado, que lembram cilindros equiláteros.

Latas cilíndricas.

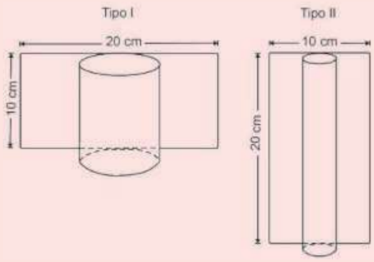


Cilindro equilátero.

Não escreva no livro!

Atividade resolvida passo a passo

(Enem) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm × 10 cm (conforme ilustram as figuras ao lado). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.



Ilustrações: Reprodução/ENEM, 2006

Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo **I**, em relação ao custo da vela do tipo **II**, será:

a) o triplo. b) o dobro. c) igual. d) a metade. e) a terça parte.

Lendo e compreendendo

O problema fornece as medidas de comprimento das dimensões de 2 moldes usados por uma artesã na confecção de velas e explica como esses moldes são feitos usando papel-cartão. É pedida a relação entre o custo dos 2 tipos de vela fabricados pela artesã.

Planejando a solução

De acordo com as instruções de montagem dos 2 tipos de molde, vamos obter as medidas de comprimento das dimensões que são necessárias para o cálculo da medida de volume e, como o custo das velas é proporcional à medida de volume, poderemos determinar a relação pedida entre os custos.

Executando o que foi planejado

Vamos determinar as medidas de comprimento da altura (h) e do raio (r) para cada um dos moldes.

No tipo **I**, a altura tem medida de comprimento $h = 10$ cm e a medida de comprimento da circunferência da base é de 20 cm. Como a medida de comprimento de uma circunferência é dada por $2\pi r$, obtemos:

$$2\pi r = 20 \Rightarrow r = \frac{10}{\pi}$$

No tipo **II**, a altura tem medida de comprimento $h = 20$ cm e a medida de comprimento da circunferência da base é de 10 cm. Então, obtemos:

$$2\pi r = 10 \Rightarrow r = \frac{5}{\pi}$$

Vamos calcular a medida de volume de parafina usada em cada molde. Para isso, devemos lembrar que a medida de volume de um cilindro é dada por $V = \pi r^2 h$.

No tipo **I**, obtemos:

$$V_I = \pi \cdot \left(\frac{10}{\pi}\right)^2 \cdot 10 = \pi \cdot \frac{100}{\pi^2} \cdot 10 = \frac{1\,000}{\pi}$$

No tipo **II**, obtemos:

$$V_{II} = \pi\left(\frac{5}{\pi}\right)^2 \cdot 20 = \pi \cdot \frac{25}{\pi^2} \cdot 20 = \frac{500}{\pi}$$

A relação entre as medidas de volume é a relação entre os custos. Assim:

$$\frac{V_I}{V_{II}} = \frac{\frac{1\,000}{\pi}}{\frac{500}{\pi}} = \frac{1\,000}{\pi} \cdot \frac{\pi}{500} = 2$$

Ou seja, a medida de volume de parafina usada no molde do tipo **I** é o dobro da usada no molde do tipo **II**. Portanto, o custo da vela do tipo **I** é o dobro do custo da vela do tipo **II**.

Emitindo a resposta

A resposta é a alternativa **b**.

Ampliando a atividade

Converse com os colegas sobre o texto a seguir. Vocês acham que o artesanato reflete a história de um povo? Ou é apenas um passatempo? Resposta pessoal.

Os primeiros artesãos surgiram no período neolítico (6 000 a.C.) quando o homem aprendeu a polir a pedra, a fabricar a cerâmica e a tecer fibras animais e vegetais. [...]

O artesão é aquele que, através da sua criatividade e habilidade, produz peças de barro, palha, tecido, couro, madeira, papel ou fibras naturais, matérias brutas ou recicladas, visando produzir peças utilitárias ou artísticas, com ou sem uma finalidade comercial.

UOL EDUCAÇÃO. *Pesquisa escolar*. Disponível em: <https://educacao.uol.com.br/disciplinas/cultura-brasileira/artesanato-ceramicas-rendas-e-outros-tipos-de-artesanato-brasileiro.htm>. Acesso em: 28 jul. 2018.

2 Retomando e aprofundando o cálculo de medidas de volume e medidas de capacidade

Uma sugestão para o desenvolvimento da atividade resolvida passo a passo é permitir que os alunos resolvam o problema da maneira que julgarem mais conveniente antes da leitura da resolução proposta na página.

A intenção é a comparação de soluções e a organização de maneira mais eficiente das resoluções, para que sejam, ao mesmo tempo, compreendidas:

- pelo professor;
- pelo próprio aluno, no momento de retomada;
- por um colega.

Em cada etapa, peça aos alunos que comparem sua resolução com a proposta no livro, escrevendo, em um canto separado da folha, se fizeram todas as passagens ou se alguma delas foi ignorada, se houve a inclusão de uma etapa e, em seguida, justifiquem os porquês das ações realizadas. Reforce com os alunos a importância da organização na resolução matemática.

Por fim, faça a leitura do texto de ampliação promovendo reflexões sobre o artesanato típico da cidade ou da região em que residem.

O objetivo é levar os alunos a perceber que essa arte sempre traz em sua composição elementos culturais, seja do presente, seja do passado. Esta atividade poderá permitir a exploração de diferentes temas contemporâneos, como *diversidade cultural*.

2 Retomando e aprofundando o cálculo de medidas de volume e medidas de capacidade

Atividades 44 a 46

Na atividade 44, sugira aos alunos que efetuem os cálculos utilizando o número π com sua simbologia formal até a última passagem e, somente aí, substituam a constante por 3,1. Esse tipo de estratégia pode diminuir erros de aproximação, que podem ocorrer em operações sucessivas.

Veja a resolução da atividade 44.

b) $V = 3{,}1 \times 0{,}1^2 \times 12 =$
$= 0{,}372$; $0{,}372\ cm^3 =$
$= 0{,}372$ mL

Aproximadamente 0,372 mL.

c) $V = 3{,}1 \times 10^2 \times 70 -$
$- 3{,}1 \times 6^2 \times 70 =$
$= 21\,700 - 7\,812 =$
$= 13\,888$

Aproximadamente 13 888 cm^3.

d) $V = 3{,}1 \times 4^2 \times 8 = 396{,}8$

Aproximadamente 396,8 cm^3.

No item **b** da atividade 45, reforce que a medida do volume solicitada será calculada por meio de uma subtração: tirando da medida do volume total do bloco a medida do volume que seria ocupado por um cilindro.

Veja a resolução da atividade 45.

a) Cilindro: $V = 3{,}14 \times 2{,}5^2 \times$
$\times\ 6 = 117{,}75$

Paralelepípedo: $V = 7 \times$
$\times\ 6{,}5 \times 0{,}8 = 36{,}4$

Objeto: $V = 117{,}75 + 36{,}4 =$
$= 154{,}15$

Aproximadamente 154,15 cm^3.

b) Paralelepípedo: $V = 6 \times$
$\times\ 4 \times 1{,}5 = 36$

Cilindro: $V = 3{,}14 \times 1^2 \times$
$\times\ 1{,}5 = 4{,}71$

Objeto: $V = 36 - 4{,}71 =$
$= 31{,}29$

Aproximadamente 31,29 cm^3.

A atividade 46 também será resolvida usando uma aproximação, mas agora a aproximação a ser utilizada é de 3,14. Explique ainda que essa aproximação é utilizada de maneira arbitrária. Nesse caso, é esperado que se use 3,14, pois é a aproximação pedida no enunciado. Em outros casos, é possível usar outras aproximações, como $\pi = 3$.

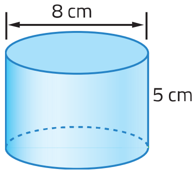
Veja a resolução da atividade 46.

Atividades

Não escreva no livro!

44 No caderno, calcule o que se pede usando sempre a aproximação $\pi = 3{,}1$.

a) Calcule a medida de volume do cilindro com diâmetro de base de medida de comprimento de 8 cm e altura de medida de comprimento de 5 cm.



As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Aproximadamente 248 cm^3. ($V = 3{,}1 \times 4^2 \times 5 = 248$)

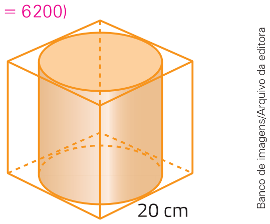
b) O reservatório de tinta de uma caneta esferográfica tem forma cilíndrica. O diâmetro dele tem medida de comprimento de 2 mm e tem 12 cm de medida de comprimento. Quantos mililitros de tinta podem ser acondicionados nesse reservatório? Aproximadamente 0,372 mL.

c) Um cano cilíndrico de plástico, como o desta imagem, tem 70 cm de medida de comprimento. O raio externo tem medida de comprimento de 10 cm, e o raio interno, de 6 cm. Qual é a medida de volume de plástico usado para fazer esse cano? Aproximadamente 13 888 cm^3.

d) Um cilindro reto tem raio de medida de comprimento de 4 cm e a altura tem o dobro dessa medida. Determine a medida de volume dele. Aproximadamente 396,8 cm^3.

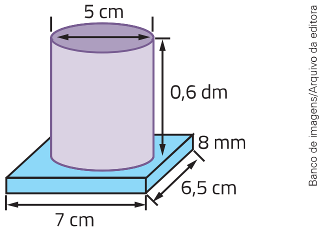
e) Determine a medida de volume de um cilindro inscrito em um cubo de arestas de medida de comprimento de 20 cm.

Aproximadamente 6200 cm^3.
($V = 3{,}1 \times 10^2 \times 20 = 6200$)

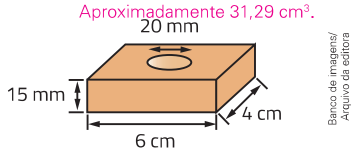


45 Use $\pi = 3{,}14$ e determine no caderno o volume de cada objeto.

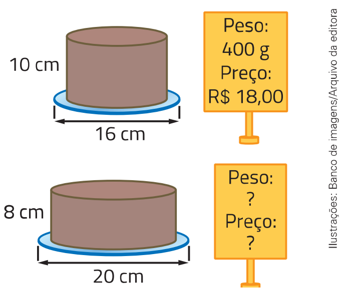
a) Objeto formado por um cilindro e um paralelepípedo. Aproximadamente 154,15 cm^3.



b) Objeto com a forma de um paralelepípedo com um buraco com a forma de um cilindro.
Aproximadamente 31,29 cm^3.

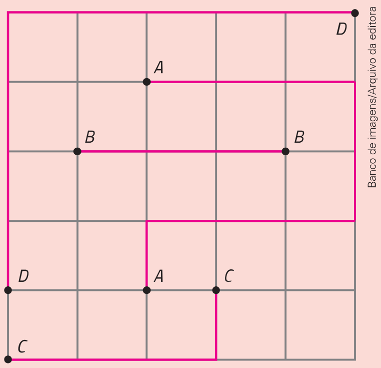


46 Observe estas figuras, de 2 bolos cilíndricos. Calcule quanto pesa e quanto custa o bolo da direita, usando $\pi = 3{,}14$. 500 g e R$ 22,50.



Raciocínio lógico

Copie esta figura em papel quadriculado. Ligue *A* com *A*, *B* com *B*, *C* com *C* e *D* com *D* seguindo as linhas do quadriculado. Mas atenção: um traçado não pode cruzar ou tocar os outros traçados. Exemplo de resposta:



$V = 3{,}14 \times 8^2 \times 10 = 2\,009{,}6$

$V = 3{,}14 \times 10^2 \times 8 = 2\,512$

$2\,512 \div 2\,009{,}6 = 1{,}25$; $1{,}25 \times 400 = 500$

$1{,}25 \times 18 = 22{,}5$

Resposta: 500 g e R$ 22,50.

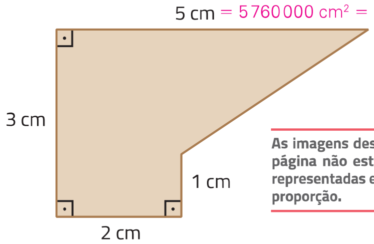
Raciocínio lógico

A atividade de raciocínio lógico é uma oportunidade para os alunos escreverem na linguagem usual as estratégias de resolução que seguiram. Questione-os: “Qual foi a primeira letra que você ligou? Por quê?”.

Revisando seus conhecimentos

Não escreva no livro!

1. Esta figura representa um terreno cujas medidas das dimensões estão na escala 1 : 800. Calcule no caderno a medida de área desse terreno, em metros quadrados. 576 m² ($A = 2 \times 3 + (3 \times 2) \div 2 = 6 + 3 = 9$; 9 cm²; 9 × 800 cm × 800 cm = 5 760 000 cm² = 576 m²)

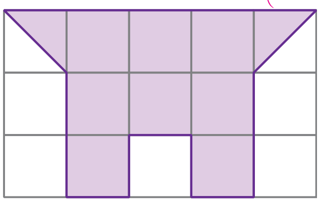


As imagens desta página não estão representadas em proporção.

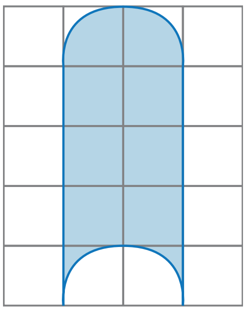
Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Use papel quadriculado em centímetros quadrados para desenhar as figuras dadas. Depois, calcule a medida de área de cada uma. 9 cm² $\left(A = 8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 9\right)$

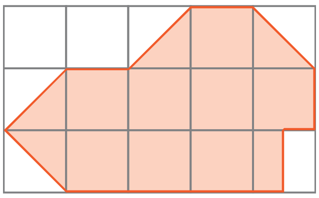
a)



b) 8 cm² ($4 \times 2 = 8$)



c)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

3. Analise cada sequência com atenção, pense na lei de formação dela e, depois, registre no caderno qual é o 169º termo. MP

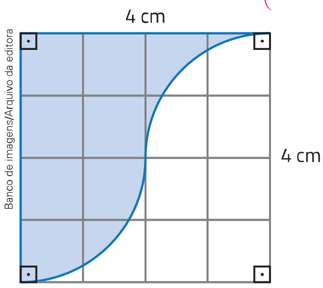
a) (*A*, *B*, *C*, *D*, *A*, *B*, *C*, *D*, *A*, *B*, *C*, *D*, ...)

b) (2, 4, 6, 8, 10, 12, ...)

c) **Desafio.** $\left(1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{5}, \ldots\right)$

2. c) 10,5 cm² $\left(A = 8 + 5 \times \frac{1}{2} = \frac{21}{2} = 10{,}5\right)$

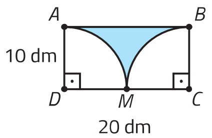
4. Observe a parte pintada de azul desta figura. Qual é a medida de área dessa parte? 8 cm² $\left(A = \frac{4 \times 4}{2} = 8\right)$



Banco de imagens/Arquivo da editora

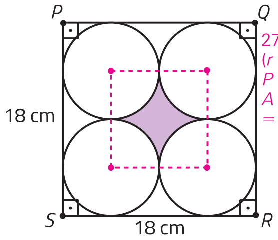
5. Calcule no caderno a medida de perímetro e a medida de área da parte pintada de cada figura, usando $\pi = 3$.

a) 50 dm e 50 dm². ($P = 20 + (2 \times 3 \times 10) \div 2 = 20 + 30 = 50$; $A = 20 \times 10 - (3 \times 10^2) \div 2 = 200 - 150 = 50$)



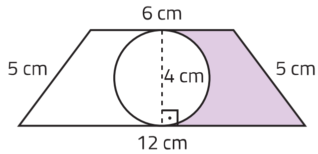
ABCD é um retângulo e *M* é o ponto médio do $\overline{CD}$.

b) 27 cm e 20,25 cm² ($r = 18 \div 4 = 4{,}5$; $P = 2 \times 3 \times 4{,}5 = 27$; $A = 9 \times 9 - 3 \times (4{,}5)^2 = 81 - 60{,}75 = 20{,}25$)



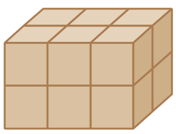
PQRS é um quadrado e as circunferências têm raio de mesma medida de comprimento.

c)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

6. Com cubinhos que têm arestas de medida de comprimento de 2 cm foi formado este bloco retangular. Qual é a medida de volume dele? 96 cm³ ($V = 6 \times 4 \times 4 = 96$ ou $12 \times 2^3 = 12 \times 8 = 96$)



Banco de imagens/Arquivo da editora

5. c) 20 cm e 12 cm² ($P = 6 + 5 + 3 + (2 \times 3 \times 2) \div 2 = 14 + 6 = 20$; $A = ((6 + 3) \times 4) \div 2 - (3 \times 2^2) \div 2 = 18 - 6 = 12$)

Revisando seus conhecimentos

Principais habilidades da BNCC

EF08MA04 EF08MA20 EF08MA19 EF08MA21

Atividade 2

No item **b** desta atividade, ressalte que a parte superior e a inferior da figura não são semicírculos.

Atividade 3

Solicite aos alunos que descrevam qual é a lei de formação de cada sequência. Eles podem descrever na linguagem usual como obter o próximo termo de cada sequência. Essa atividade também pode ser expandida para que os alunos elaborem novas sequências e troquem com os colegas.

Veja um exemplo de resposta para esta atividade.

a) Lei de formação: repetição do padrão *A*, *B*, *C*, *D*.
$169 \div 4 = 42$ e resto 1; então $a_{169} = A$.

b) Fórmula do termo geral:
$a_n = 2n$.
$a_{169} = 2 \times 169 = 338$

c) Fórmulas do termo geral:
$a_n = \frac{n+1}{2}$, se *n* é ímpar,
e $a_n = \frac{2}{n}$, se *n* é par.
$a_{169} = \frac{169 + 1}{2} = 85$

Revisando seus conhecimentos

Atividade 10

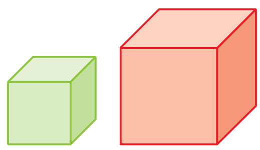
Esta atividade relaciona a fórmula do cálculo da medida de volume do cilindro com uma situação-problema que solicita a medida de volume de várias unidades do objeto. Verifique se os alunos estão realizando os passos da resolução da equação de maneira correta e, se necessário, reproduza-a na lousa para que possam, juntos, resolvê-la.

Atividade 14

Nesta atividade, faça o desenho do cilindro na lousa acompanhado da planificação da superfície dele, de modo a auxiliar a interpretação do problema.

9. Na peça **A**. (Peça **A**: $A = (3,5 + 1,5 + 3,5 + 1,5) \times 5 = 50$; peça **B**: $(3,5 + 5 + 3,5 + 5) \times 1,5 + 3,5 \times 5 = 25,5 + 17,5 = 43$; $50 > 43$.)

7 › Considere 2 cubos cujas arestas têm medidas de comprimento de 4 cm e 6 cm, nessa ordem.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

7. a) $\frac{2}{3}$ $\left(\frac{4}{6} = \frac{2}{3}\right)$ **b)** $\frac{2}{3}$ $\left(\frac{\cancel{4} \times 4}{\cancel{4} \times 6} = \frac{2}{3}\right)$ **c)** $\frac{4}{9}$ $\left(\frac{4^2}{6^2} = \frac{16}{64} = \frac{4}{9}\right)$

Calcule e indique no caderno, com frações irredutíveis, a razão entre:

a) as medidas de comprimento das arestas;

b) as medidas de perímetro de cada face;

c) as medidas de área de cada face;

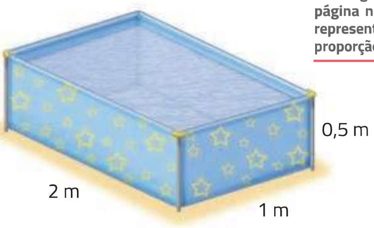
d) as medidas da área total; $\frac{4}{9}$ $\left(\frac{\cancel{6} \times 4^2}{\cancel{6} \times 6^2} = \frac{4}{9}\right)$

e) as medidas de volume. $\frac{8}{27}$ $\left(\frac{4^3}{6^3} = \frac{64}{216} = \frac{8}{27}\right)$

8 › Faça uma estimativa e depois responda: Quantos litros de água são necessários para encher esta piscina de plástico, que tem a forma de paralelepípedo?

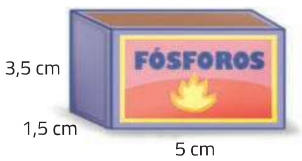
1 000 L ($V = 1 \times 2 \times 0,5 = 1$; 1 m³ → 1 000 L)

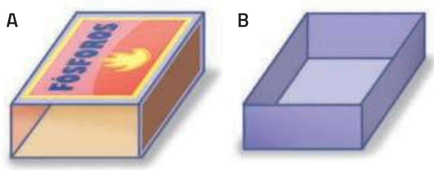
As imagens desta página não estão representadas em proporção.



Paulo Manzi/Arquivo da editora

9 › Uma caixa de fósforos é composta de 2 peças com a forma de paralelepípedos. Observe as medidas das dimensões e responda: Em qual das peças, **A** ou **B**, se usa mais material na confecção?





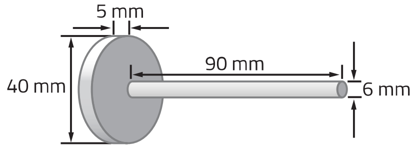
Ilustrações: Paulo Manzi/Arquivo da editora

10 › Um cilindro tem medida de volume de 225π cm³ e o diâmetro da base tem medida de comprimento de 10 cm. Qual é a medida de comprimento da altura desse cilindro?

9 cm ($225\pi = \pi \times 5^2 \times h \Rightarrow 225 = 25h \Rightarrow h = 9$)

11. 22 058,5 cm³ ($V = 3,14 \times 20^2 \times 5 + 3,14 \times 3^2 \times 90 = 6280 + 2543,4 = 8823,4$; $2500 \times 8823,4$ mm³ $= 22058500$ mm³ $= 22058,5$ cm³)

11 › Uma indústria recebeu um pedido para fabricar 2 500 peças de ferro maciço, com a forma de cilindros com as dimensões de medidas de comprimento indicadas nesta figura.



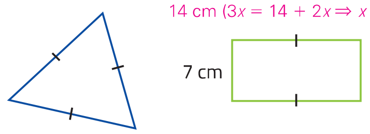
Banco de imagens/Arquivo da editora

Quantos centímetros cúbicos de ferro serão usados na fabricação dessas peças? Use uma calculadora e considere $\pi = 3,14$.

Lembre-se: 1 cm³ = 1 000 mm³.

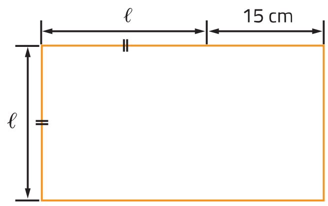
12 › Este triângulo equilátero e este retângulo têm a mesma medida de perímetro. Calcule no caderno a medida de comprimento do lado do triângulo.

14 cm ($3x = 14 + 2x \Rightarrow x = 14$)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

13 › A medida de perímetro de um retângulo é de 124 cm e a medida de comprimento da base é 15 cm maior de que a medida de comprimento da altura. Determine no caderno as medidas de comprimento das dimensões do retângulo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

14 › Em um cilindro, que tem o diâmetro da base de medida de comprimento de 8 cm e a altura de medida de comprimento de 6 cm, a medida da área total e a medida de volume são, respectivamente:

X a) 80π cm² e 96π cm³.

b) 80π cm² e 84π cm³.

c) 60π cm² e 96π cm³.

d) 60π cm² e 84π cm³.

($A = \pi \times 4^2 + \pi \times 4^2 + 2\pi \times 4 \times 6 = 16\pi + 16\pi + 48\pi = 80\pi$; $V = \pi \times 4^2 \times 6 = 96\pi$)

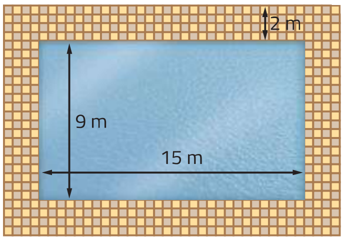
15 › A medida de perímetro de um triangulo isósceles é de 35 cm. A base tem medida de comprimento de 5 cm a mais do que a medida de comprimento de cada um dos lados iguais. Determine as medidas das dimensões desse triangulo.

10 cm, 10 cm e 15 cm. ($\ell + \ell + (\ell + 5) = 35 \Rightarrow 3\ell + 5 = 35 \Rightarrow 3\ell = 30 \Rightarrow \ell = 10$; $10 + 5 = 15$)

13. 23,5 cm e 38,5 cm. ($\ell + (\ell + 15) + \ell + (\ell + 15) = 124 \Rightarrow 4\ell + 30 = 124 \Rightarrow \ell = 23,5$; $23,5 + 15 = 38,5$)

16. a) 112 m² ($2 + 15 + 2 = 19$ e $2 + 9 + 2 = 13$; $A = 19 \times 13 - 15 \times 9 = 247 - 135 = 112$; ou $A = 4 \times 2^2 + 2 \times 2 \times 9 + 2 \times 15 \times 2 = 16 + 36 + 60 = 112$)

16 Ao redor de uma piscina, foi construído um piso com pedras pretas e amarelas, com 2 m de medida de largura em todo o contorno da piscina.



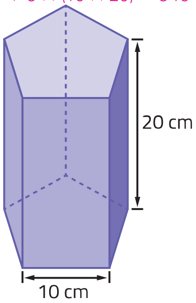
Paulo Manzi/Arquivo da editora

a) Qual é a medida de área ocupada por esse piso?

b) Supondo que o metro quadrado dessas pedras custou R$ 80,00, qual foi o custo desse piso?
R$ 8 960,00 ($112 \times 80 = 8960$)

17 Determine no caderno a medida aproximada da área total da superfície deste prisma, formado por 2 regiões pentagonais regulares (cada uma com medida de área de aproximadamente 172,5 cm²) e 5 regiões retangulares. Aproximadamente 1 345 cm². ($A = 2 \times 172{,}5 + 5 \times (10 \times 20) = 345 + 1000 = 1345$)

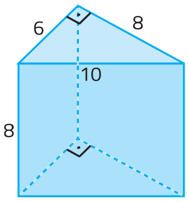
As imagens desta página não estão representadas em proporção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

18 Um prisma de base triangular tem as seguintes características:

- cada base é uma região triangular, com um ângulo reto e com lados de medida de comprimento de 6 cm, 8 cm e 10 cm;
- a altura do prisma tem medida de comprimento de 8 cm.



Banco de imagens/Arquivo da editora

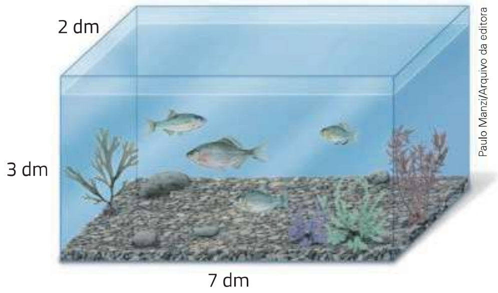
Calcule no caderno.

a) A medida de área da base. 24 cm² $\left(A = \dfrac{6 \times 8}{2} = 24\right)$

b) A medida de área da maior face lateral.
80 cm² ($A = 10 \times 8 = 80$)

c) A medida da área total desse prisma.
240 cm² ($A = 2 \times 24 + 8 \times 6 + 8 \times 8 + 8 \times 10 = 48 + 48 + 64 + 80 = 240$)

19 Observe as medidas de comprimento das dimensões deste aquário e responda no caderno.



Paulo Manzi/Arquivo da editora

a) Qual é a medida de capacidade desse aquário, em litros? 42 L ($V = 7 \times 3 \times 2 = 42$; 42 dm³ → 42 L)

b) Se esse aquário estiver cheio com $\frac{4}{5}$ da medida de capacidade, então quantos litros de água haverá nele? 33,6 L ($42 \div 5 = 8{,}4$ e $4 \times 8{,}4 = 33{,}6$)

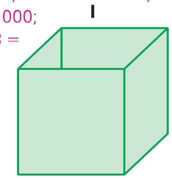
20 Calcule no caderno a medida da área total da superfície de uma caixa cúbica com arestas de medida de comprimento de 5 cm. 150 cm² (Cada face: $A = 5^2 = 25$; toda a superfície: $A = 6 \times 25 = 150$.)

Raciocínio lógico

Qual é a interpretação que você deve dar à expressão "um terço e meio de cem" para que a resposta à pergunta "Quanto é um terço e meio de cem?" seja 50?

21 A vasilha **I** é cúbica com arestas de medida de comprimento de 10 cm. A vasilha **II** tem a forma de um bloco retangular com dimensões de medida de comprimento de 10 cm, 20 cm e 40 cm.
12,5% ($V_I \to 10^3 = 1000$; 1000 cm³ → 1 L; $V_{II} = 10 \times 20 \times 40 = 8000$; 8000 cm³ → 8 L; $1 \div 8 = 0{,}125 = 12{,}5\%$)

I



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

II

Enchendo a vasilha **I** de água e despejando na vasilha **II**, que está inicialmente vazia, esta terá quanto por cento da medida de capacidade ocupada?

Raciocínio lógico. Um terço mais a metade de um terço, que é um sexto: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$; metade de 100 é 50.

Revisando seus conhecimentos

Atividade 16

O item **b** desta atividade trabalha com o valor do metro quadrado do piso; é possível explorar esta atividade de maneira lúdica, questionando os alunos sobre os gastos de uma possível reforma da escola. Para isso, eles precisarão cotar o custo do piso, da pintura, entre outros.

Os alunos podem, inclusive, desenhar a planta baixa da escola. Além das explorações matemáticas, a intenção é conscientizá-los sobre a dificuldade de realizar a manutenção de um prédio escolar e a importância de zelar por essa construção.

Atividade 17

Nesta atividade, a medida da área da região limitada pelo pentágono está dada, mas nada impede que os alunos sejam questionados sobre maneiras de calcular essa área a partir da decomposição da forma. Pergunte aos alunos: "Será que é possível determinar a medida de área de uma região limitada por um pentágono regular conhecendo a medida de comprimento do lado do pentágono?".

Atividades 19 e 21

A atividade 19 retoma conceitos de capacidade, volume e fração. Explore o problema com outras partes e, se achar conveniente, mostre que a noção de capacidade é muito utilizada no cotidiano, em compras, culinária, entre outros. Se possível, proponha um tema geral, por exemplo, culinária, e estimule os alunos a listar possíveis aplicações.

Na atividade 21, retome o uso da porcentagem (sem depender da regra de 3), utilizando a noção de fração (parte de um todo).

Testes oficiais

Principais habilidades da BNCC

EF08MA04 EF08MA20
EF08MA19 EF08MA21

Atividade 6

A medida de volume de um paralelepípedo é calculada a partir da multiplicação da medida de área da base pela medida de comprimento da altura, ou seja, é o produto das medidas das 3 dimensões: comprimento, largura e altura.

Como a questão especifica que o sólido é maciço, devemos atentar que não existe a interpretação de "capacidade" no lugar de "volume".

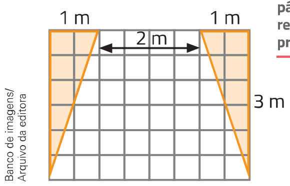
1. $\left(A = \frac{(4+2) \times 3}{2} = \frac{6 \times 3}{2} = 9\right)$

Testes oficiais

Não escreva no livro!

1 **(Saeb)** O piso de entrada de um prédio está sendo reformado. Serão feitas duas jardineiras nas laterais, conforme indicado na figura, e o piso restante será revestido em cerâmica.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Qual é a área do piso que será revestido com cerâmica?

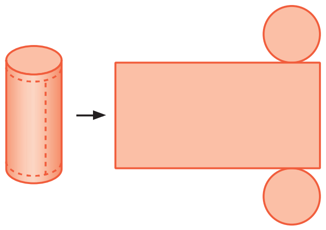
a) 3 m²
b) 6 m²
X c) 9 m²
d) 12 m²

2 **(Saeb)** Um copo cilíndrico, com 4 cm de raio e 12 cm de altura, está com água até a altura de 8 cm. Foram então colocadas em seu interior *n* bolas de gude, e o nível da água atingiu a boca do corpo, sem derramamento.

Qual é o volume, em cm³, de todas as *n* bolas de gude juntas? $(V = \pi \times 4^2 \times 12 - \pi \times 4^2 \times 8 = 192\pi - 128\pi = 64\pi)$

a) 32π
b) 48π
X c) 64π
d) 96π

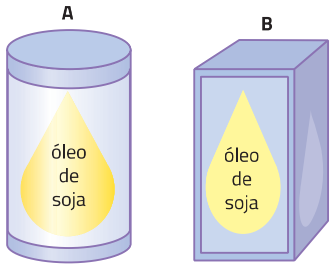
3 **(Saresp)** Cortando-se um cilindro na linha pontilhada da figura, obtém-se sua planificação. Veja:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Se o raio de cada base mede 5 cm e o cilindro tem 10 cm de altura, qual é a área total de sua superfície? (Use $\pi = 3{,}1$.) 465 cm² $(A = 2 \times 3{,}1 \times 5^2 + 2 \times 3{,}1 \times 5 \times 10 = 155 + 310 = 465)$

4 **(Saresp)** Observe as figuras abaixo, em que **A** é um cilindro e **B**, um prisma de base quadrada.

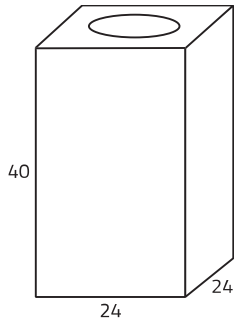


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo-se que as duas embalagens têm a mesma altura e que o diâmetro da embalagem **A** e o lado da embalagem **B** são congruentes, podemos afirmar que o volume de **A** é: $(V_A = \pi \times r^2 \times h;\ V_B = 2r \times 2r \times h = 4 \times r^2 \times h;\ \pi \times r^2 \times h < 4 \times r^2 \times h)$

X a) menor que o volume de **B**.
b) maior que o volume de **B**.
c) igual ao volume de **B**.
d) metade do volume de **B**.

5 **(Enem)** Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

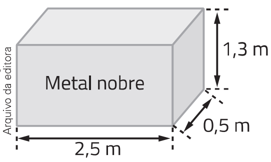
Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em:

a) 14,4%.
b) 20,0%.
c) 32,0%.
X d) 36,0%.
e) 34,0%.

$(1{,}25 \times 24 = 30;\ 24 \times 24 \times 40 = 30 \times 30 \times h \Rightarrow \Rightarrow 23\,040 = 900h \Rightarrow h = 25{,}6;\ 25{,}6 \div 40 = 0{,}64 = 64\%;\ 100\% - 64\% = 36\%)$

6 **(Enem)** A siderúrgica "Metal Nobre" produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza:

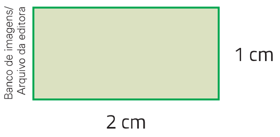
a) massa.
X b) volume.
c) superfície.
d) capacidade.
e) comprimento.

VERIFIQUE O QUE ESTUDOU

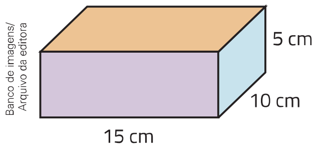
Não escreva no livro!

1 Desenhe no caderno uma região plana cuja medida de área seja de 5 unidades, considerando o cm^2 como unidade de medida de área.

2 Qual é a medida de área da figura que você desenhou, na atividade anterior, considerando esta figura como unidade de medida de área? 2,5 unidades.



3 Para cobrir toda a superfície desta caixa, quantos metros quadrados de papel serão necessários? $0{,}055\ m^2$



4 Copie e complete a frase no caderno.

A medida de área de um losango, com diagonais de medida de comprimento de 12 cm e 8 cm, é igual à medida de área de um trapézio, com bases de medida de comprimento de 9 cm e 7 cm e altura de medida de comprimento de ▒. 6 cm

5 Uma moeda de 25 centavos tem diâmetro de medida de comprimento de 25 mm e altura de medida de comprimento de 2 mm.

No caderno, calcule o que se pede, usando uma calculadora e considerando $\pi = 3{,}1$.

a) A medida de perímetro de cada face da moeda.

b) A medida de área de cada face da moeda.

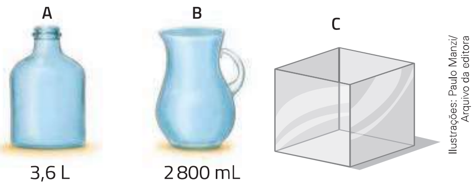
c) A medida de volume da moeda.

6 Agora, calcule e responda: Para fabricar um milhão de moedas de 25 centavos serão necessários mais ou menos do que 1 m^3 de material? Menos do que 1 m^3.
$(1\,000\,000 \times 968{,}75\ mm^3 = 968\,750\,000\ mm^3 = 0{,}96875\ m^3)$

7 Façam as medições necessárias e calculem a medida de área que está gravada em um CD (*compact disc*) ou em um DVD (*digital versatile disc*). Troque ideias com o colega. Resposta pessoal.

8 Quantos metros cúbicos de areia um caminhão pode carregar, com uma carroceria com a forma de paralelepípedo e dimensões de medida de comprimento de 12 m, 3 m e 1,5 m? $54\ m^3$ ($V = 12 \times 3 \times 1{,}5 = 54$)

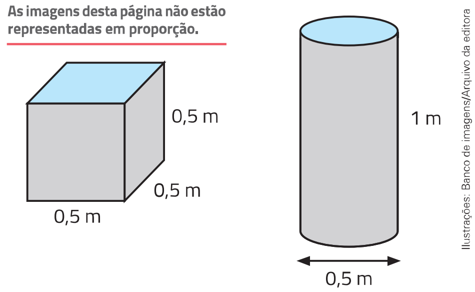
9 Os vasilhames **A** e **B** a seguir estão cheios de água, e o vasilhame **C**, de forma cúbica, está vazio. Despejando a água de **A** e **B** em **C**, este fica com $\frac{4}{5}$ da medida de capacidade ocupada. Qual é a medida de comprimento de cada aresta do vasilhame **C**?



9. 20 cm $\left(3{,}6 + 2{,}8 = 6{,}4;\ 6{,}4\ L = 6400\ cm^3;\ 6400\ cm^3 = \frac{4}{5}V_C \Rightarrow V_C = 8000\ cm^3;\ \sqrt[3]{8000} = 20\right)$

10 Em qual destes recipientes cabe mais água: no cúbico ou no cilíndrico? Quantos litros a mais do que no outro? (Use $\pi = 3$.) No cilíndrico; 62,5 litros a mais.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.



Atenção

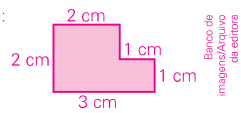
Retome os assuntos que você estudou neste capítulo. Verifique em quais teve dificuldade e converse com o professor, buscando maneiras de reforçar seu aprendizado.

Autoavaliação

Algumas atitudes e reflexões são fundamentais para melhorar o aprendizado e a convivência na escola. Reflita sobre elas. Respostas pessoais.

- Você tem cuidado bem de seu material de Matemática (livro e caderno)?
- Você tem feito as anotações necessárias para consultar posteriormente?
- Você procura fazer, periodicamente, uma revisão dos assuntos que estudou?
- Você procura conversar com os colegas sobre suas dúvidas e sobre as dúvidas deles?

1. Exemplo de resposta:



5. a) 77,5 mm ($P = 2 \times 3{,}1 \times 12{,}5 = 77{,}5$) **b)** $484{,}375\ mm^2$ ($A = 3{,}1 \times (12{,}5)^2 = 484{,}375$) **c)** $968{,}75\ mm^3$ ($V = 484{,}375 \times 2 = 968{,}75$)

Atividade 7

Nesta atividade, outras formas circulares podem ser trabalhadas. Faça alguns questionamentos, como: "Qual seria a medida de diâmetro ideal de um copo para que a maior quantidade de copos possa ser colocada no armário?". Outros exemplos podem ser criados a partir de experiências dos alunos. Peça previamente a eles que levem CDs ou DVDs para a sala de aula.

Atividade 9

Esta atividade retoma o cálculo e a comparação da medida de capacidade de diferentes recipientes. Convide os alunos a compartilhar as formas de cálculo para o volume e relembre-os da diferença entre capacidade e volume.

Atividade 10

Veja a resolução desta atividade.

$V_I = 0{,}5^3 = 0{,}125$

$0{,}125\ m^3 = 125\ L$

$V_{II} = 3 \times 0{,}25 \times 1 = 0{,}1875$

$0{,}1875\ m^3 = 187{,}5\ L$

$125 < 187{,}5$

$187{,}5 - 125 = 62{,}5$

Cabe mais água no recipiente cilíndrico; 62,5 litros a mais.

Autoavaliação

As questões de autoavaliação apresentadas propiciam aos alunos refletir sobre os estudos, as atitudes e as aprendizagens. Dê um tempo para que cada aluno reflita individualmente sobre elas e registre as respostas no caderno. Em seguida, àqueles que desejarem, permita que compartilhem as respostas com os colegas.

Ao longo do ano, é importante a retomada dos registros de autoavaliação feitos no fim de cada capítulo, para que os alunos possam perceber e mensurar o quanto aprenderam e melhoraram em diversos aspectos.

Em relação às perguntas propostas nesta página, converse com a turma sobre a importância de retomar os estudos em outros momentos, fora da sala de aula, verificando e garantindo a aprendizagem. Enfatize a necessidade de respeitar os colegas e os professores em todos os momentos, assim como respeitar os demais funcionários da escola.

Verifique o que estudou

Principais habilidades da BNCC

EF08MA19 EF08MA20 EF08MA21

Atividade 1

Nesta atividade, permita que os alunos escolham a região plana; inclusive, pode-se desafiá-los a desenhar triângulos e losangos com essa medida de área. Caso julgue pertinente, retome a importância da precisão no desenho e o cuidado com as medidas.

Atividade 3

Nesta atividade, se possível, trabalhe a planificação da caixa para que os alunos possam perceber qual é a medida de área a ser calculada.

Atividade 5

Esta atividade pode ser reproduzida com uma moeda de 1 real, ampliando a proposta para o cálculo da medida da área da coroa circular. Neste caso, os alunos podem medir a moeda, se possível, utilizando um instrumento de medida de precisão, como um paquímetro.

Avaliação

Para mais informações, veja a **avaliação** do 3º bimestre.

Abertura

Principais habilidades da BNCC

EF08MA22 EF08MA24 EF08MA23

Este capítulo retoma e aprofunda alguns assuntos vistos no 7º ano, além de explorar alguns assuntos novos relacionados à Unidade temática *Probabilidade e estatística*. Serão estudados: conceitos de Estatística e a importância dela na Matemática e no cotidiano, medidas de tendência central, medidas de dispersão, o uso de planilhas do LibreOffice e conceitos de combinatória e probabilidade.

Nesta página, apresente o gráfico e peça aos alunos que compartilhem as informações que conseguiram interpretar a partir dele. Se necessário, complemente ou corrija a fala deles.

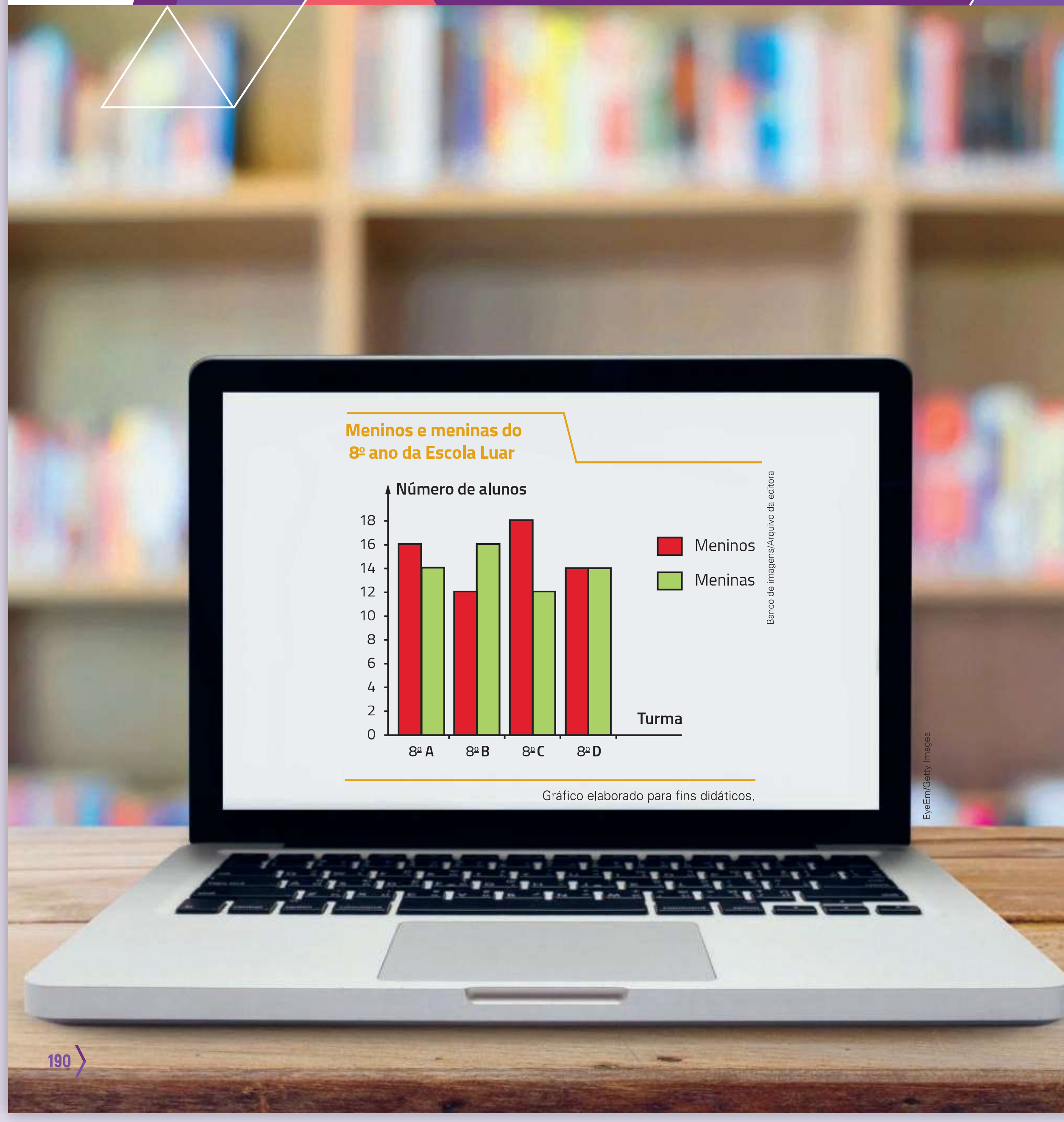
Se achar conveniente, sugira aos alunos que pesquisem a quantidade de meninos e de meninas nas turmas do 8º ano ou em todas as turmas da escola para fazer um gráfico semelhante ao apresentado nesta página. Solicite também que analisem os dados após a construção do gráfico.

Plano de desenvolvimento

Para mais informações, veja o **plano de desenvolvimento** do 4º bimestre.

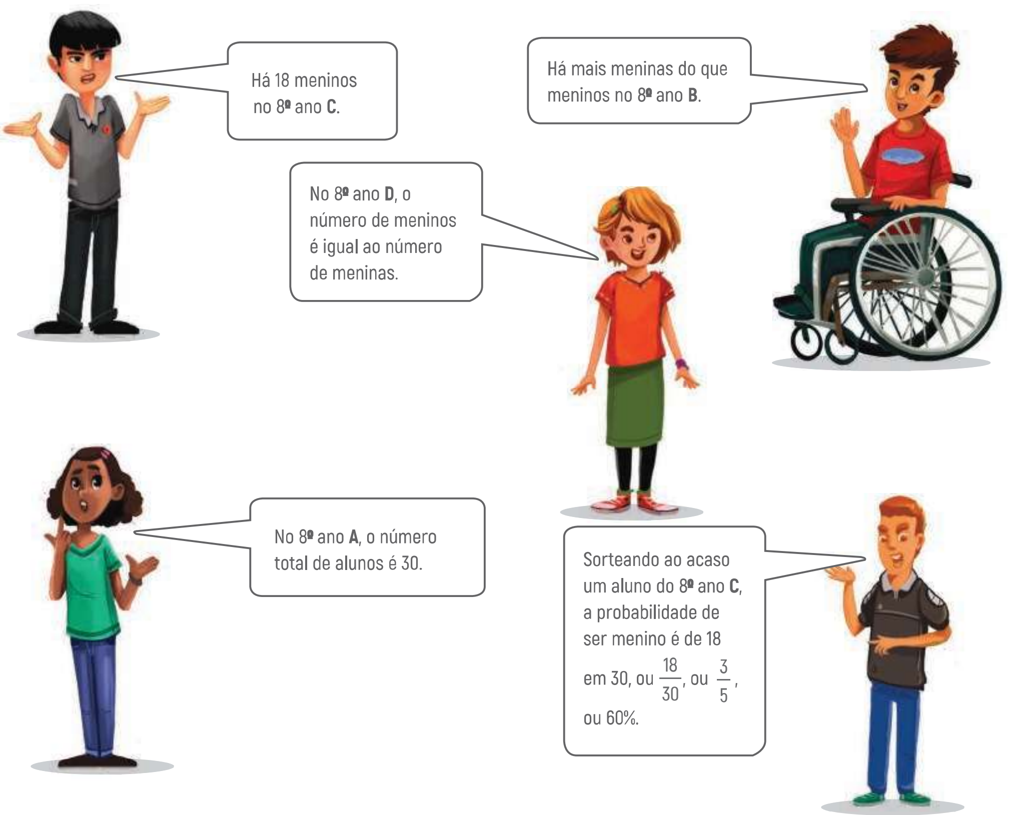
CAPÍTULO

7 Estatística e probabilidade



EyeEm/Getty Images

O gráfico da página anterior mostra o resultado de uma pesquisa feita na Escola Luar. Veja as afirmações feitas pelas crianças.



Ilustrações: Thiago Neumann/Arquivo da editora

O gráfico e a leitura e interpretação dos dados representados nele estão relacionados à parte da Matemática conhecida por Estatística, que será um dos assuntos deste capítulo. Vamos também retomar e ampliar o estudo da Probabilidade.

Não escreva no livro!

Converse com os colegas sobre as seguintes questões.

1. Qual nome se dá a esse tipo de gráfico? Gráfico de colunas ou de barras verticais.
2. Quais outros tipos de gráfico você conhece que são usados em Estatística? Exemplos de resposta: gráfico de setores e gráfico de segmentos.
3. Qual é o número total de alunos no 8º ano **B**? 28 alunos. (12 + 16 = 28)
4. Em qual das turmas o número de meninas corresponde a $\frac{7}{8}$ do número de meninos? **4.** No 8º ano **A**. $\left(\frac{14}{16} = \frac{7}{8} \text{ ou } \frac{7}{8} \text{ de } 16 = 14\right)$
5. Sorteando ao acaso um aluno do 8º ano **D**, qual é a probabilidade, em porcentagem, de ser uma menina? 50% $\left(14 \text{ em } 28 = \frac{14}{28} = \frac{1}{2} = 50\%\right)$

Abertura

Peça aos alunos que leiam as afirmações das crianças representadas e as comparem com as interpretações da sala, feitas na página anterior.

Explique que o gráfico da página anterior foi construído com os dados obtidos em uma pesquisa feita em uma escola. Então, converse com eles sobre a importância das pesquisas e questione-os se já participaram de algum tipo de pesquisa.

Após as respostas, alerte-os de que, mesmo inconscientemente, participam de pesquisas na internet, pois tudo que fazemos nela fica registrado para que sirva de parâmetro para as próximas vezes que a utilizarmos, tornando a navegação mais interessante para o usuário. Por isso, ao acessarmos um tópico de interesse, propagandas sobre o tema começarão a aparecer nas próximas páginas que entrarmos.

Então, peça a eles que, em grupo, respondam às questões, acompanhando-os na tarefa e fazendo intervenções quando necessário.

1 Termos de uma pesquisa estatística

Principais habilidades da BNCC

EF08MA24 EF08MA27 EF08MA26

Solicite aos alunos que diferenciem pesquisas censitárias de pesquisas amostrais, a partir do que estudaram no 7º ano. Aproveite para complementar ou corrigir as informações apresentadas pela turma, relembrando os termos "população estatística", "universo estatístico" e "amostra". Então, peça que exemplifiquem cada tipo de pesquisa usando situações reais.

Depois, explique os tipos de amostra apresentados no livro, fornecendo exemplos. Se houver oportunidade, sugira aos alunos que pesquisem outros tipos de amostra para compartilharem com os colegas.

Em seguida, retome o que é uma variável de uma pesquisa, classificando-a como qualitativa ou quantitativa (discreta ou contínua) e exemplificando essas classificações. Lembre-os também de que as possíveis respostas a uma variável são chamadas de valores da variável.

1 Termos de uma pesquisa estatística

Vamos recordar alguns termos que você já estudou e estudar novos termos que aparecem em uma pesquisa estatística.

Pesquisa censitária ou pesquisa por população e pesquisa amostral

Se quisermos saber, por exemplo, qual é a disciplina favorita dos alunos de uma turma, podemos consultar **todos** os alunos da turma. Nesse caso, todos os alunos constituem a **população estatística** ou o **universo estatístico**. Esse tipo de pesquisa que envolve **todos** os participantes é chamada **pesquisa censitária**.

No entanto, isso não é possível quando queremos pesquisar, por exemplo, sobre a intenção de voto dos eleitores do estado de Minas Gerais, pois consultar todos os eleitores seria muito trabalhoso, caro e tomaria muito tempo. Recorremos, então, ao que é chamado de **amostra**, ou seja, um grupo de eleitores (uma parte da população estatística) que, ao serem consultados, permitem que cheguemos ao resultado mais próximo possível da realidade. Neste caso, temos uma **pesquisa amostral**.

Em casos como esse, é comum aparecer na divulgação das pesquisas quantos eleitores foram consultados, pois a escolha da amostra (quantos e quais eleitores) é fundamental para o resultado.

Veja quais são os principais tipos de amostra.

- **Amostra aleatória simples:** quando os elementos da amostra (os **indivíduos** da pesquisa) são escolhidos aleatoriamente, ou seja, ao acaso.
- **Amostra sistemática:** quando os elementos da população estão ordenados, o primeiro é escolhido aleatoriamente e os demais são retirados periodicamente. Por exemplo, em uma escola todos os alunos são organizados por idade. O primeiro aluno é escolhido aleatoriamente e, a cada 10 alunos, o décimo é escolhido.
- **Amostra estratificada:** quando a população é dividida em grupos razoavelmente homogêneos e, dentro de cada grupo, os indivíduos são escolhidos aleatoriamente. Essa amostra é utilizada quando queremos comparar grupos; por exemplo, quando queremos analisar a renda de homens e de mulheres de uma população.

Variável e tipos de variável

Uma indústria automobilística pretende lançar um novo modelo de carro. Para isso, faz uma pesquisa para sondar a preferência dos consumidores sobre: tipo de combustível, potência do motor, preço, cor, tamanho do porta-malas, etc. Cada uma dessas características é uma **variável** da pesquisa.

Na variável "tipo de combustível", a escolha pode ser, por exemplo, etanol e gasolina. Dizemos que esses são **valores da variável** "tipo de combustível".

KELENY/Shutterstock

Carros em uma concessionária.

As variáveis podem ser classificadas em **qualitativas** ou **quantitativas**.

Em uma pesquisa que envolve pessoas, por exemplo, as variáveis consideradas podem ser sexo, cor de cabelo, esporte favorito e grau de instrução. Nesses casos, as variáveis são **qualitativas**, pois apresentam como possíveis valores das variáveis uma qualidade ou um atributo dos indivíduos pesquisados.

Quando as variáveis de uma pesquisa são, por exemplo, preço, medida de altura, idade (em anos) e número de irmãos, elas são **quantitativas**, pois os possíveis valores das variáveis são números.

As variáveis quantitativas podem ser **discretas**, quando se trata de contagem, ou **contínuas**. Por exemplo:

- "número de irmãos" é uma variável quantitativa discreta, pois podemos contar 0, 1, 2, ...;
- "medida de altura" é uma variável quantitativa contínua, pois pode assumir infinitos valores, como 1,55 m; 1,80 m; 1,73; ...

Frequência absoluta e frequência relativa

Suponha que entre um grupo de turistas, participantes de uma excursão, tenha sido feita uma pesquisa sobre a nacionalidade de cada um e que o resultado tenha sido o seguinte: Pedro – brasileiro; Ana – brasileira; Ramón – espanhol; Laura – espanhola; Cláudia – brasileira; Sérgio – brasileiro; Fernando – argentino; Nélson – brasileiro; Silvia – brasileira; Pablo – espanhol.

O número de vezes que um valor da variável é citado representa a **frequência absoluta** desse valor.

Nesse exemplo, a variável é "nacionalidade" e a frequência absoluta de cada um dos valores é: brasileira, 6; espanhola, 3; e argentina, 1.

Existe também a **frequência relativa**, que representa a frequência absoluta em relação ao total de citações. Nesse exemplo, temos:

- a frequência relativa da nacionalidade brasileira é de 6 em 10, ou $\frac{6}{10}$, ou $\frac{3}{5}$, ou 0,6, ou 60%;
- a frequência relativa da nacionalidade espanhola é de 3 em 10, ou $\frac{3}{10}$, ou 0,3, ou 30%;
- a frequência relativa da nacionalidade argentina é de 1 em 10, ou $\frac{1}{10}$, ou 0,1, ou 10%.

Observação: A frequência relativa pode ser expressa na forma de razão, de fração, decimal ou de porcentagem.

Tabela de frequências

A tabela que mostra a variável, os valores dela e as respectivas frequências absoluta (FA) e relativa (FR) dos valores é chamada **tabela de frequências**.

Assim, usando o mesmo exemplo, temos esta tabela de frequências.

Nacionalidade em um grupo de turistas

Nacionalidade	FA	FR (em %)
Brasileira	6	60%
Espanhola	3	30%
Argentina	1	10%
Total	**10**	**100%**

Tabela elaborada para fins didáticos.

Observação: A soma de todas as frequências relativas de uma amostra totaliza 100%, se dadas em porcentagem, ou 1, se dadas na forma de fração ou decimal.

Atividades

Não escreva no livro!

1 Uma concessionária de automóveis tem cadastrados 3 500 clientes e fez uma pesquisa sobre a preferência de compra em relação a "cor" (branco, vermelho ou azul), ao "preço", ao "número de portas" (2 ou 4) e ao "estado de conservação" (novo ou usado). Foram consultados 210 clientes. Diante dessas informações, responda no caderno. MP

a) Qual é o universo estatístico e qual é a amostra dessa pesquisa?

b) Quais são as variáveis e qual é a classificação de cada uma delas.

c) Quais os possíveis valores da variável "cor" ?

2 Um grupo de alunos foi consultado sobre o time pernambucano da preferência deles. Veja como os votos foram registrados.

- Central: 
- Náutico: 
- Santa Cruz: 
- Sport: 

Construa no caderno a tabela de frequências dessa pesquisa. MP

1 Termos de uma pesquisa estatística

Para verificar se os alunos se lembram do assunto desta página, pergunte: "O que é frequência absoluta?"; "E frequência relativa?". Se necessário, relembre que a frequência absoluta é o número de vezes que um valor aparece na pesquisa e a frequência relativa é o quanto a frequência absoluta desse valor representa em relação ao total de indivíduos da pesquisa, podendo ser expressa na forma de razão, fração, decimal ou porcentagem. Destaque que a soma de todas as frequências relativas deve ser igual a 100% ou 1.

Na lousa, forneça a pesquisa sobre nacionalidade dada no livro e peça aos alunos que calculem as frequências absolutas e relativas de cada valor. Organize os dados em uma tabela de frequências e chame a atenção deles para os elementos que a compõem.

Atividade 1

Esta atividade desenvolve os assuntos universo estatístico, amostra, variáveis, tipos de variáveis e valores de variáveis.

Veja as respostas dos itens desta atividade.

a) O universo estatístico são os 3 500 clientes cadastrados e a amostra são os 210 clientes consultados.

b) Cor (qualitativa), preço (quantitativa contínua), número de portas (quantitativa discreta) e estado de conservação (qualitativa).

c) Branca, vermelha e azul.

Atividade 2

Esta atividade trabalha a identificação das frequências absolutas a partir da contagem apresentada, o cálculo das frequências relativas e a construção da tabela de frequências.

Veja a tabela de frequências da pesquisa desta atividade.

Frequências da preferência por times pernambucanos

Time	FA	FR
Central	2	10%
Náutico	4	20%
Santa Cruz	8	40%
Sport	6	30%
Total	**20**	**100%**

Tabela elaborada para fins didáticos.

Sequência didática

Para mais informações, veja a **sequência didática 1** do 4º bimestre.

1 Termos de uma pesquisa estatística

Explique que veremos 2 situações para a elaboração de tabelas de frequências para variáveis quantitativas.

Então, apresente os dados fornecidos no livro referentes a uma pesquisa com um grupo de alunos e, na lousa, construa uma tabela de frequências para a variável “idade” com os alunos.

Peça à turma que conte quantas vezes cada valor dessa variável aparece na tabela inicial para indicar a frequência absoluta e calcular a frequência relativa. Aproveite para destacar que a tabela de frequências deve ter apenas 5 linhas: 1 para os títulos, 3 para os valores dessa variável (14, 15 e 16 anos) e 1 para o total.

Em seguida, sugira que construam uma tabela de frequências para a variável “medida de altura” e pergunte: “Quantos são os valores dessa variável?”; “Quantas linhas terá a tabela de frequências referente a ela?”; “Quantas linhas tem a tabela original?”; “Será que faz sentido construir a tabela de frequências, como temos feito, para essa variável?”. Espera-se que os alunos percebam que essa tabela de frequências da variável “medida de altura” terá uma linha para cada valor, o que a torna inútil, pois já temos a tabela original com um valor disposto por linha.

Tabela de frequências de variáveis quantitativas

Já sabemos que as variáveis quantitativas têm os possíveis valores indicados por números. Na elaboração das tabelas de frequências de variáveis quantitativas, podemos nos deparar com 2 situações.

Acompanhe o exemplo de uma pesquisa sobre a idade (em anos), o “peso” (em quilogramas) e a medida de altura (em metros) de um grupo de alunos.

Resultado da pesquisa

Aluno	Idade	“Peso”	Medida de altura
Alberto	14 anos	49 kg	1,73 m
Alexandra	14 anos	46,5 kg	1,66 m
Carlos	16 anos	53 kg	1,78 m
Cláudia	15 anos	50 kg	1,75 m
Eduarda	14 anos	51 kg	1,68 m
Flávia	15 anos	49 kg	1,70 m
Geraldo	14 anos	44 kg	1,62 m
Gilberto	15 anos	51 kg	1,76 m
Hélia	14 anos	48,3 kg	1,68 m
José	16 anos	52 kg	1,79 m
Lúcia	14 anos	49 kg	1,74 m
Luís	14 anos	46,5 kg	1,65 m
Marcos	15 anos	48 kg	1,63 m
Mário	14 anos	48,5 kg	1,69 m
Mauricio	16 anos	50 kg	1,70 m
Milton	14 anos	52 kg	1,75 m
Renata	14 anos	46 kg	1,72 m
Roberta	15 anos	47 kg	1,69 m
Saulo	14 anos	51 kg	1,73 m
Sérgio	14 anos	49 kg	1,66 m

Tabela elaborada para fins didáticos.

- **Primeira situação**

  Ao elaborar a tabela de frequências da variável “idade”, notamos que aparecem como possíveis valores 14 anos, 15 anos e 16 anos.

Idade de um grupo de alunos

Idade (anos)	Contagem	FA	FR (na forma de fração)	FR (em %)
14		12	$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$	60%
15		5	$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$	25%
16		3	$\frac{3}{20}$	15%
Total		**20**	**1**	**100%**

Tabela elaborada para fins didáticos.

- **Segunda situação**

Para a variável "medida de altura" aparecem muitos valores diferentes, o que torna inviável colocar na tabela de frequências 1 linha para cada valor. Em casos como esse, agrupamos os valores em **intervalos** (ou **classes**), como veremos a seguir.

1º) Calculamos a diferença entre o maior e o menor valor da variável, obtendo a **amplitude total**: 1,79 m − 1,62 m = 0,17 m.

2º) Escolhemos o número de intervalos (geralmente superior a 4). Nesse caso, escolhemos 6 intervalos.

3º) Considerando um número conveniente que seja maior do que a amplitude total e seja divisível pelo número de intervalos, determinamos a **amplitude relativa** de cada intervalo (classe).
No exemplo, para 6 intervalos e escolhendo o número 0,18 (0,18 > 0,17), obtemos: 0,18 m ÷ 6 = 0,03 m.
Com esses dados, elaboramos a tabela de frequências.

Medida de altura de um grupo de alunos

Medida de altura (em classes)	Contagem	FA	FR (na forma decimal)	FR (em %)
1,62 ⊢ 1,65 m		2	0,10	10%
1,65 ⊢ 1,68 m		3	0,15	15%
1,68 ⊢ 1,71 m		6	0,30	30%
1,71 ⊢ 1,74 m		3	0,15	15%
1,74 ⊢ 1,77 m		4	0,20	20%
1,77 ⊢ 1,80 m		2	0,10	10%
Total		**20**	**1,00**	**100%**

Tabela elaborada para fins didáticos.

Observações

1ª) As classes (intervalos) foram obtidas a partir do menor valor da variável (1,62 m) e fazendo a adição da amplitude relativa (0,03 m) a cada intervalo (1,62 + 0,03 = 1,65; 1,65 + 0,03 = 1,68; e assim por diante).

2ª) O símbolo ⊢ indica intervalo fechado à esquerda e aberto à direita. Assim, a medida de altura 1,68 m não foi registrada em 1,65 ⊢ 1,68 m; ela foi registrada no intervalo 1,68 ⊢ 1,71 m. Isso é feito dessa maneira para que um mesmo valor não seja incluído em 2 classes diferentes.

Não escreva no livro!

Atividade

3 › Usando os dados da mesma pesquisa, elabore no caderno a tabela de frequências da variável "peso" com os valores agrupados em 5 classes. MP

1 Termos de uma pesquisa estatística

Pergunte aos alunos: "Como podemos organizar os dados de forma que facilitem a interpretação?". Leve-os a perceber que devemos agrupar os valores em intervalos.

Em seguida, explique que, se escolhemos intervalos com pequena amplitude, continuamos com muitas linhas na tabela, ou seja, praticamente na mesma situação, e, se escolhemos intervalos com grande amplitude, temos muitos valores em cada intervalo, o que impossibilita que a comparação retrate corretamente os dados apresentados inicialmente.

Então, apresente o método fornecido pelo livro para determinar uma quantidade de intervalos com uma amplitude que permita uma análise mais fácil dos dados sem grande perda de informações.

Depois, solicite que façam a tabela de frequências da variável "medida de altura" com os valores em intervalos, mostrando-lhes como podem representar os intervalos.

Antes da resolução da atividade, sugira aos alunos que anotem, no painel de descobertas, o que consideram necessário sobre tipos de pesquisa, população e amostra, tipos de amostra, variável, valor da variável, tipos de variáveis, frequência absoluta, frequência relativa e tabela de frequências, principalmente com os valores da variável dispostos em intervalos.

Atividade 3

Esta atividade aborda a organização de uma tabela de frequências com os valores dispostos em intervalos.

Debata com a turma se agrupar os valores em 5 classes é uma boa opção para os dados fornecidos e permita que os alunos escolham outra quantidade de intervalos para que comparem as informações obtidas a partir das diferentes tabelas de frequências construídas.

Veja a resposta desta atividade abaixo.

"Peso" de um grupo de alunos

"Peso" (em classes)	Contagem	FA	FR (na forma decimal)	FR (em %)
44 ⊢ 46 kg		1	0,05	5
46 ⊢ 48 kg		4	0,20	20
48 ⊢ 50 kg		7	0,35	35
50 ⊢ 52 kg		5	0,25	25
52 ⊢ 54 kg		3	0,15	15
Total		**20**	**1,00**	**100**

Tabela elaborada para fins didáticos.

1 Termos de uma pesquisa estatística

Explorar e descobrir

Leia com os alunos as informações que retomam alguns termos vistos nas páginas anteriores a partir de um exemplo de pesquisa e questione: "Qual foi o tipo de pesquisa apresentada no texto?"; "Por que foi feita uma pesquisa amostral?"; "Quais foram as variáveis estudadas?"; "Qual é a classificação de cada variável?".

Após as respostas, destaque que a variável "peso" é escrita entre aspas, pois, embora costumemos usar essa palavra no cotidiano, o correto seria usar o termo **massa**.

Verifique se os alunos conhecem todas as palavras fornecidas na tabela, pois pode ser necessário explicar o significado de algumas, como "*hobby*", "manequim" e "aeromodelismo".

Se achar conveniente, solicite que façam uma pesquisa semelhante. Para isso, converse com a turma para definir o tipo de pesquisa e a população, que pode ser formada pelos colegas da escola, familiares, amigos, etc. Peça aos alunos que criem um modelo de questionário, entrevistem os indivíduos da pesquisa e organizem, em uma tabela, os dados coletados.

Em seguida, sugira que, em cartazes, façam uma tabela de frequências para cada variável, agrupando os valores em intervalos quando necessário. Esses cartazes podem ficar expostos na sala e, a partir deles, poderemos construir gráficos nas próximas aulas.

Planejamento e execução de uma pesquisa amostral

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

Vamos agora retomar os termos vistos até aqui por meio de uma pesquisa. O objetivo da pesquisa é observar o perfil das turmas do 8º ano de uma escola que tem 5 turmas de 8º ano, cada uma com 45 alunos.

O grupo de professores do 8º ano dessa escola elencou as variáveis que seriam pesquisadas, a fim de definir o perfil dos alunos.

Na impossibilidade de entrevistar todos os alunos, foram selecionados 5 alunos de cada turma, realizando uma amostragem aleatória simples, e eles responderam a um questionário.

Depois de coletados, os dados foram organizados nesta tabela.

Resultado da pesquisa

Nome	Sexo	Idade (em anos (a) e meses (m))	Medida de altura (em cm)	"Peso" (em kg)	Número de irmãos	Cor do cabelo	*Hobby*	Número do sapato	Manequim
André	M	13 a e 4 m	154	50	3	loiro	música	35	38
Afonso	M	13 a e 7 m	160	48	0	castanho	esporte	37	38
Ana	F	13 a e 2 m	160	66	1	castanho	música	36	40
Beto	M	13 a e 8 m	165	63	0	castanho	*videogame*	40	42
Carla	F	14 a e 5 m	165	57	2	castanho	música	36	40
Cláudia	F	14 a e 3 m	164	50	2	loiro	dança	36	38
Daniel	M	14 a e 6 m	163	51	1	castanho	esporte	36	38
Elisa	F	14 a e 7 m	160	60	2	castanho	música	36	40
Flávia	F	12 a e 7 m	165	65	1	castanho	esporte	37	40
Fernando	M	13 a e 5 m	150	38	1	ruivo	esporte	34	36
Guto	M	13 a e 11 m	156	38	0	castanho	aeromodelismo	34	36
Joel	M	13 a e 10 m	157	52	1	castanho	dança	35	38
Larissa	F	14 a e 0 m	164	53	2	castanho	dança	36	38
Lídia	F	14 a e 8 m	157	55	2	castanho	música	37	42
Mário	M	14 a e 4 m	165	49	3	loiro	*videogame*	36	38
Mariano	M	14 a e 11 m	153	54	4	castanho	dança	38	36
Nádia	F	14 a e 2 m	154	63	1	loiro	esporte	38	40
Odair	F	13 a e 8 m	159	64	2	castanho	música	37	40
Patrícia	F	13 a e 1 m	158	43	1	loiro	dança	36	36
Paula	F	14 a e 11 m	156	53	1	castanho	dança	36	38
Renata	F	13 a e 3 m	162	52	1	castanho	dança	36	38
Roberto	M	13 a e 2 m	165	53	0	castanho	esporte	41	36
Sílvia	F	13 a e 10 m	162	58	1	loiro	dança	39	38
Teresa	F	13 a e 9 m	155	49	0	castanho	*videogame*	35	36
Vilma	F	14 a e 2 m	152	41	3	castanho	música	34	36

Tabela elaborada para fins didáticos.

1› Considerando os dados dessa pesquisa, responda aos itens no caderno.

a) Quantos alunos constituem o universo estatístico dessa pesquisa? 225 alunos. ($5 \times 45 = 225$)

b) Quantos alunos constituem a amostra dessa pesquisa? 25 alunos.

c) Você considera que a escolha da amostra de 5 alunos de cada turma é razoável para essa pesquisa? Resposta pessoal.

d) Como você imagina que seja um bom questionário para essa pesquisa? Converse com um colega e montem um modelo de questionário. Resposta pessoal.

e) Qual é a classificação da variável "número de irmãos"? Quantitativa discreta.

f) Qual é a classificação da variável "medida de altura"? Quantitativa contínua.

g) Nessa pesquisa, quais variáveis são qualitativas? Sexo, cor do cabelo e *hobby*.

2› Você já viu as 2 situações possíveis para a tabela de frequências de uma variável quantitativa. Veja mais alguns exemplos.

Número de irmãos de um grupo de alunos

Número de irmãos	Contagem	FA	FR (na forma de fração e decimal)	FR (em %)
0		5	$\frac{5}{25} = 0{,}2$	20%
1		10	$\frac{10}{25} = 0{,}4$	40%
2		6	$\frac{6}{25} = 0{,}24$	24%
3		3	$\frac{3}{25} = 0{,}12$	12%
4		1	$\frac{1}{25} = 0{,}04$	4%
Total		25	1	100%

Tabela elaborada para fins didáticos.

"Peso" de um grupo de alunos

"Peso" (em kg)	Contagem	FA	FR (em %)
38 ⊢ 44		4	16%
44 ⊢ 50		3	12%
50 ⊢ 56		9	36%
56 ⊢ 62		3	12%
62 ⊢ 68		6	24%
Total		25	100%

Tabela elaborada para fins didáticos.

Como a variável "número de irmãos" é quantitativa discreta, podemos organizar os valores dessa variável na tabela de frequências sem usar intervalos.

Para construir a tabela de frequências da variável "peso" (em quilogramas), podemos distribuir os valores em classes:

- Amplitude total: $66 - 38 = 28$
- Número de intervalos: 5
- Amplitude relativa: $30 \div 5 = 6$

a) Qual é a frequência absoluta do valor 2 da variável "número de irmãos"? E a frequência relativa, em porcentagem? 6; 24%.

b) Na variável "peso", qual classe tem frequência relativa 24%? 62 ⊢ 68

c) E qual classe tem frequência absoluta 3? 44 ⊢ 50 e 56 ⊢ 62.

3› Observe novamente o resultado dessa pesquisa, na página anterior, e faça os registros no caderno.

a) Elabore a tabela de frequências da variável "*hobby*". MP

b) Qual valor dessa variável tem frequência absoluta 7? Música.

c) Elabore a tabela de frequências da variável "medida de altura". MP

d) Qual é a frequência absoluta e qual é a frequência relativa do valor "dança"? Frequência absoluta: 8; frequência relativa: $\frac{8}{25}$, ou 0,32, ou 32%.

e) Qual é a frequência absoluta do valor 38 da variável "manequim"? E a frequência relativa (em fração, decimal e porcentagem)? 10; $\frac{10}{25}$; 0,48 e 48%.

f) Qual é o valor da variável "cor de cabelo" cuja frequência relativa é 72%? Castanho.

4› Elaborem uma pesquisa de opinião dentro da escola ou no bairro em que vocês moram. Para isso, elaborem um questionário e façam a coleta dos dados com uma amostra da população da escola ou do bairro. Registrem no caderno os dados coletados e, depois, façam a análise dos dados para cada variável da pesquisa; montem uma tabela de frequências para cada uma delas; anotem as conclusões no caderno e apresentem para os demais alunos da turma. Respostas pessoais.

1 Termos de uma pesquisa estatística

Explorar e descobrir

Na questão 1, os alunos devem analisar a pertinência da escolha da amostra e trabalhar o universo estatístico, a amostra e a classificação de variáveis.

No item **d**, dê um tempo para que os alunos conversem sobre o questionário. Pense na possibilidade de dar alternativas para os alunos selecionarem ou de deixar as perguntas "abertas" para que eles respondam. Veja um exemplo.

Sexo ☐ M ☐ F

Idade ___ anos e ___ meses
ou
Idade ________

Cor do cabelo ________
ou
Cor do cabelo ☐ loiro ☐ castanho ☐ ruivo

Banco de imagens/Arquivo da editora

Após a resolução desta questão, peça que compartilhem os questionários criados para que a sala escolha qual ficou melhor.

Na questão 2, analise com a turma se a quantidade de intervalos em que foram distribuídos os valores da variável "peso" facilita a interpretação dos dados sem perda de informações.

Então, solicite que relacionem os valores fornecidos com as respectivas frequências absolutas e relativas e vice-versa.

Para a questão 3, construa na lousa, com a turma, as tabelas de frequências das variáveis "*hobby*" e "medida de altura", identificando o valor referente à frequência absoluta dada.

Veja na página LXI deste Manual as respostas de alguns itens da questão 3.

Na questão 4, em grupos, os alunos devem realizar uma pesquisa de opinião. Peça a cada grupo que escolha um tema diferente. Se a pesquisa for realizada fora da escola, é importante que os locais pesquisados sejam relatados. Os dados coletados devem ser organizados em tabelas de frequências e as conclusões podem ser organizadas em cartazes e expostas em sala de aula.

2 Representação gráfica dos dados de uma pesquisa

Principais habilidades da BNCC

EF08MA24 EF08MA27 EF08MA26

Pergunte aos alunos: "O que é mais fácil interpretar: dados numéricos ou a representação gráfica deles?". Mostre o quadro que organiza a pesquisa de opinião sobre a fruta preferida dos alunos de uma turma e verifique com eles que não é necessário contar a quantidade de "X" para cada fruta, pois, apenas comparando as quantidades, conseguimos ordenar a preferência dessa turma.

Em seguida, na lousa, construa gráficos de barras (horizontais e verticais) a partir da tabela de frequências, dada como exemplo, com o desempenho em Matemática dos alunos do 8º ano.

Se possível, organize as últimas notas dos alunos de maneira semelhante em uma tabela de frequências e, com a turma, construa os gráficos de barras horizontais e verticais. Caso os professores permitam, apresente a frequência absoluta para cada valor da variável "desempenho" em cada disciplina e peça aos alunos que calculem as frequências relativas, façam uma tabela de frequências para cada disciplina e construam os respectivos gráficos de barras. Permita que façam apenas um gráfico para cada disciplina, escolhendo entre as barras verticais ou horizontais.

Além disso, destaque que o gráfico de barras verticais também pode ser chamado de gráfico de colunas.

Sequência didática

Para mais informações, veja a **sequência didática 2** do 4º bimestre.

2 Representação gráfica dos dados de uma pesquisa

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

A representação gráfica (o gráfico) nos dá uma visão de conjunto mais rápida do que a observação direta dos dados numéricos na tabela de frequências, por exemplo. Por isso, é comum a mídia apresentar as informações estatísticas em gráficos.

Considere uma pesquisa de opinião em que os alunos de uma turma precisam escolher a fruta preferida. O aluno que anotou o resultado da pesquisa, organizou os nomes das frutas e marcou um "X" para cada voto. Observe.

Não é preciso contar os votos para saber qual fruta foi a preferida; basta olhar os registros e perceber que a banana tem mais "X" marcados, ou seja, foi a fruta que recebeu mais votos. Essa é a característica fundamental dos gráficos estatísticos.

 Banana	X X X X X X X X X X
 Laranja	X X X X X X
 Abacaxi	X X X X X X X X
 Uva	X X X X
 Melancia	X X X X X

Ilustrações: Paulo Manzi/Arquivo da editora

Gráfico de barras

O professor de Matemática elaborou uma tabela de desempenho dos alunos do 8º ano. Observe.

Com os dados dessa tabela, podemos construir o gráfico de barras da variável "desempenho" indicando a frequência relativa dos valores dessa variável.

Desempenho em Matemática dos alunos do 8º ano

Desempenho	FA	FR (em%)
Insuficiente	6	15%
Regular	10	25%
Bom	14	35%
Ótimo	10	25%
Total	**40**	**100%**

Tabela elaborada para fins didáticos.

Desempenho em Matemática dos alunos do 8º ano

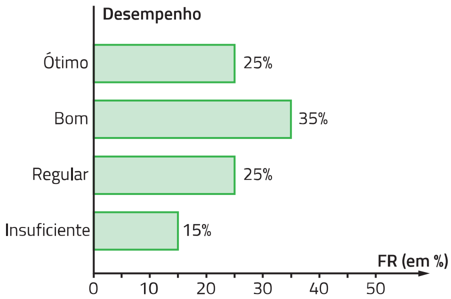


Gráfico elaborado para fins didáticos.

Desempenho em Matemática dos alunos do 8º ano

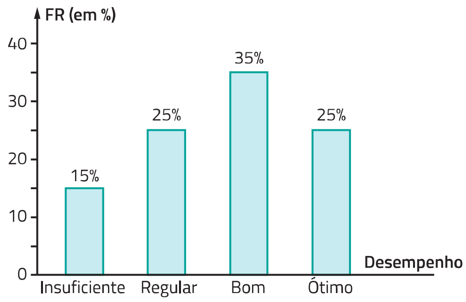


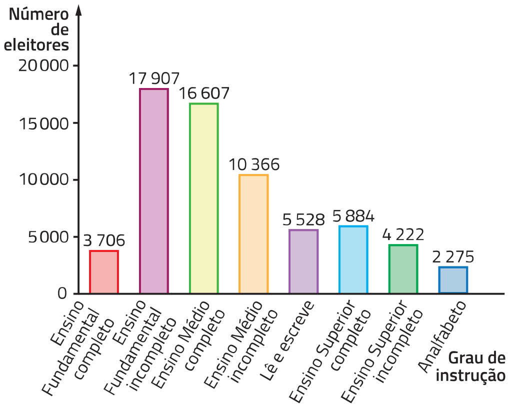
Gráfico elaborado para fins didáticos.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

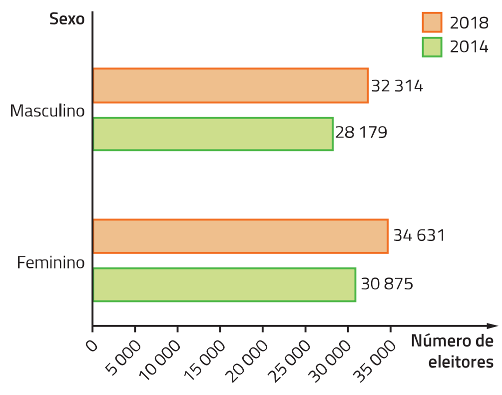
Observe que as barras podem ser desenhadas vertical ou horizontalmente. O gráfico de barras verticais também pode ser chamado de **gráfico de colunas**.

Veja outros exemplos de gráficos de barras com informações sobre o perfil do eleitorado da cidade de Ariquemes (RO), em 2018.

Grau de instrução do eleitorado de Ariquemes em 2018



Sexo do eleitorado de Ariquemes em 2014 e 2018



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte de consulta dos gráficos: G1-GLOBO. *Rondônia*. Disponível em: <https://g1.globo.com/ro/ariquemes-e-vale-do-jamari/eleicoes/2018/noticia/2018/09/30/eleitorado-aumenta-13-em-quatro-anos-e-mulheres-seguem-como-a-maioria-em-ariquemes-ro.ghtml>. Acesso em: 1º out. 2018.

Observando o gráfico da esquerda, fica claro ver que a maioria dos eleitores de Ariquemes, em 2018, tinha o Ensino Fundamental incompleto.

Observe que, no gráfico da direita, são dadas 2 informações para cada valor da variável "sexo": o número de eleitores em 2014 e o número de eleitores em 2018. Observe que poderíamos construir 2 gráficos, um com os dados referentes a 2014 e outro com os dados referentes a 2018. Contudo, dessa maneira fica mais fácil comparar e tirar conclusões sobre o assunto.

Não escreva no livro!

Atividades

4 Considerando o exemplo da página anterior, construa no caderno o gráfico de barras indicando a frequência absoluta da variável "desempenho". MP

5 Observe a tabela de frequências resultante de uma pesquisa sobre o número de irmãos dos alunos de uma turma.

Número de irmãos de um grupo de alunos

Número de irmãos	FA	FR (em%)
0	5	20%
1	10	40%
2	6	24%
3	3	12%
4	1	4%
Total	**25**	**100%**

Tabela elaborada para fins didáticos.

Construa no caderno um gráfico de barras indicando a frequência relativa, em porcentagem, da variável "número de irmãos". MP

6 Durante 1 hora foram anotados os tipos de veículo que passaram pela rua onde está situada uma escola. Foi usado o seguinte código:

- **M**: motocicleta;
- **C**: caminhão;
- **B**: bicicleta;
- **A**: ambulância;
- **T**: carro.

E foram obtidos os seguintes dados: T, T, T, M, A, T, T, M, T, B, B, T, T, A, T, T, C, T, M, T, T, T, C, B, T, T, T, T, T, A, T, T, T, M, C, T, T, T, T, B, T, T, M, B, A.

Construa no caderno um gráfico de barras sobre essa pesquisa. MP

2 Representação gráfica dos dados de uma pesquisa

Apresente os 2 gráficos de barras fornecidos como exemplo nesta página e questione o que podemos interpretar a partir deles. Espera-se que os alunos identifiquem que o grau de instrução que apresenta mais eleitores de Ariquemes é o Ensino Fundamental incompleto e que, ao compararmos com o número de votos em 2014, o número de votos desse candidato aumentou em 2018 para ambos os sexos, mas a maioria dos eleitores continua sendo do sexo feminino.

Destaque que o segundo gráfico apresenta 2 informações para cada valor da variável "sexo", explicando que poderíamos ter construído gráficos separados para fazermos as comparações. Pergunte: "Quais seriam os gráficos possíveis de construirmos com apenas uma informação para cada valor da variável 'sexo'?"; "Poderíamos construir gráficos considerando a variável 'ano'?"; "O que esses gráficos comparariam?". Na lousa, com os alunos, construa os gráficos possíveis e mostre que eles permitem as mesmas interpretações que tivemos inicialmente.

Atividades 4 a 6

Estas atividades desenvolvem a construção de gráficos de barras a partir de tabelas de frequências ou dos dados coletados relativos a frequências absolutas e relativas.

Na atividade 6, sugira aos alunos que organizem os dados em uma tabela, facilitando posteriormente a construção do gráfico que representa a situação.

Veja na página LXI deste Manual o gráfico destas atividades.

2 Representação gráfica dos dados de uma pesquisa

Na lousa, apresente a tabela dada e, com os alunos, coloque os dados fornecidos por ela em eixos cartesianos, tal que o eixo x represente os anos e o eixo y, o número de alunos. Assim, obteremos 6 pontos que devem ser ligados, formando um gráfico de segmentos.

Em seguida, explique a utilidade desse tipo de gráfico e o que é indicado pela posição e pela inclinação dos segmentos.

Então, com a turma, interprete o gráfico construído, questionando: "Qual foi o ano com maior número de alunos?"; "E com o menor número?"; "Entre quais anos ocorreu o maior crescimento do número de alunos?"; "O que mais podemos verificar nesse gráfico construído?". Leve os alunos a perceber que ocorreu uma diminuição do número de alunos de 2015 para 2016 e que a quantidade de alunos se manteve entre 2017 e 2018, mas que, nos outros anos, o número de alunos sempre cresceu.

Se possível, proponha aos alunos que realizem uma pesquisa para coletar informações sobre a aplicação de gráficos de segmentos na mídia em geral.

Gráfico de segmentos

Esta tabela mostra o número de alunos nos anos Finais do Ensino Fundamental em uma escola, nos anos de 2015 a 2020.

Evolução do número de alunos (2015 a 2020)

Ano	Número de alunos
2015	450
2016	400
2017	500
2018	500
2019	550
2020	600

Tabela elaborada para fins didáticos.

Considerando que os anos sejam representados pela variável x e o número de alunos pela variável y, fica estabelecida uma correspondência que pode ser expressa por pares ordenados $(2015, 450)$, $(2016, 400)$, etc. Usando eixos cartesianos, localizamos os 6 pares ordenados correspondentes aos dados da tabela e construímos um gráfico com os segmentos que ligam esses pontos.

Evolução do número de alunos nos Anos Finais do Ensino Fundamental (2015 a 2020)

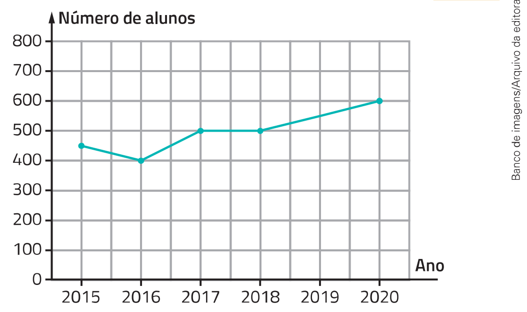


Gráfico elaborado para fins didáticos.

Os gráficos de segmentos são utilizados principalmente para mostrar a evolução das frequências dos valores de uma variável durante o período observado.

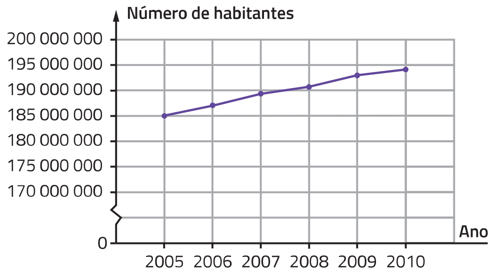
A posição de cada segmento indica crescimento, decrescimento ou estabilidade. A inclinação do segmento sinaliza a intensidade do crescimento ou do decrescimento.

Pelo gráfico acima, podemos obter as seguintes informações.

- De 2015 para 2016, o número de alunos em cada ano diminuiu.
- De 2017 para 2018, o número de alunos em cada ano permaneceu estável.
- O crescimento de 2016 para 2018 foi maior do que o de 2018 para 2019.
- O ano que teve maior número de alunos foi 2020.
- No ano de 2017 havia 500 alunos.

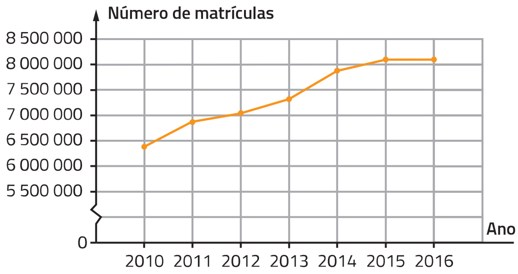
Veja outros exemplos de gráfico de segmentos.

Crescimento da população brasileira (2005-2010)



Fonte: IBGE. *Brasil*. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pesquisa/10086/76551?tipo=grafico>. Acesso em: 30 jul. 2018.

Número de alunos matriculados no Ensino Superior no Brasil (2010 a 2016)



Fonte de consulta: INEP. *Educação superior*. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_superior/censo_superior/documentos/2016/notas_sobre_o_censo_da_educacao_superior_2016.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2018.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Não escreva no livro!

Atividades

7 Utilize o gráfico de segmentos com o número de alunos matriculados no Ensino Superior no Brasil e responda aos itens no caderno.

a) Entre quais anos consecutivos o número de matrículas subiu? Em todos.

b) Em qual destes 2 anos o número de matrículas foi maior: 2010 ou 2012? 2012

c) Em qual ano do período de 2010 a 2016 o número de matrículas foi menor? 2010

d) Em qual ano o número de matrículas foi de aproximadamente 7 000 000 alunos? 2012

8 Uma locadora de filmes registrou o número de locações no 2º semestre de um ano. Os dados foram expressos em uma tabela e um gráfico de segmentos.

Número de filmes locados no 2º semestre

Mês	Número de filmes locados
Julho	300
Agosto	220
Setembro	100
Outubro	150
Novembro	250
Dezembro	110

Tabela elaborada para fins didáticos.

Número de filmes locados no 2º semestre

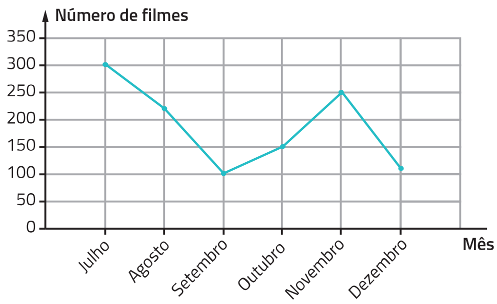


Gráfico elaborado para fins didáticos.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Em quais períodos houve decrescimento do número de locações? De julho a setembro e de novembro a dezembro.

b) Em qual período houve crescimento do número de locações? De setembro a novembro.

c) Em qual mês houve maior número de locações? Quantas locações foram? Julho; 300 locações.

d) É mais fácil consultar a tabela ou o gráfico de segmentos para responder às perguntas **a**, **b** e **c**? Resposta esperada: O gráfico de segmentos.

9 Um aluno do 8º ano apresentou, durante o ano letivo, o seguinte aproveitamento:

- primeiro bimestre: nota 7,0;
- segundo bimestre: nota 6,0;
- terceiro bimestre nota 8,0;
- quarto bimestre nota 8,0.

Construa, em uma malha quadriculada, um gráfico de segmentos correspondente a essa situação e, a partir dele, obtenha algumas conclusões. MP

2 Representação gráfica dos dados de uma pesquisa

Explique aos alunos que as escalas escolhidas para os eixos coordenados variam de acordo com a necessidade de representação.

Então, apresente os 2 gráficos de segmentos fornecidos nesta página e chame a atenção da turma para a marcação acima do zero no eixo y. Explique que a chamamos supressão do eixo e a usamos para representar apenas a região dos eixos coordenados em que estão localizados os pontos e os segmentos, evitando regiões que ficariam em branco.

Na lousa, mostre que, se não usássemos a supressão, o 1º gráfico ficaria enorme e, caso diminuíssemos a escala para diminuir o gráfico, ele se assemelharia a uma reta paralela ao eixo x, impossibilitando a visualização do crescimento apresentado.

Atividades 7 e 8

Estas atividades apresentam a interpretação das informações apresentadas nos gráficos de segmentos fornecidos.

Atividade 9

Esta atividade trabalha a construção de um gráfico de segmentos a partir dos valores dados.

Se necessário, sugira que apresentem os bimestres no eixo x e as notas no eixo y. Veja na página LXI deste Manual o gráfico desta atividade.

2 Representação gráfica dos dados de uma pesquisa

Verifique se os alunos lembram o que é um gráfico de setores e como podemos construir esse tipo de gráfico.

Em seguida, forneça a tabela de frequências dada e mostre as 2 maneiras de calcular a medida de abertura do ângulo central do círculo referente à sala **A**.

Então, peça que calculem as medidas de abertura dos ângulos dos setores das salas **B** e **C**. A partir das medidas calculadas pelos alunos, construa os 2 gráficos de setores apresentados no livro.

Bate-papo

Peça aos alunos que verifiquem se as medidas de abertura dos ângulos dos setores que calcularam estão corretas.

Atividade 10

Esta atividade aborda a interpretação das informações fornecidas em um gráfico de setores e a construção de um gráfico de colunas correspondente a ele.

Veja na página LXI deste Manual o gráfico do item **c** desta atividade.

Atividade 11

Esta atividade desenvolve a construção de uma tabela de frequências para os dados fornecidos e, a partir dela, a construção de um gráfico de barras com as frequências absolutas e um gráfico de setores com as frequências relativas na forma de porcentagem.

Veja nas páginas LXI e LXII deste Manual as respostas desta atividade.

Gráfico de setores

Você já estudou gráficos de setores no ano anterior. Vamos recordar analisando esta situação.

Em um *shopping center* há 3 salas de cinema e o número de espectadores em cada uma delas em determinado final de semana foi de 300 na sala **A**, 200 na sala **B** e 500 na **C**.

Veja esta situação representada em uma tabela de frequências e depois em gráficos de setores.

Número de espectadores nas salas de cinema

Sala	FA	FR (na forma de fração)	FR (em %)
A	300	$\frac{300}{1000} = \frac{3}{10}$	30%
B	200	$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	20%
C	500	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	50%

Tabela elaborada para fins didáticos.

Porcentagem de espectadores nas salas de cinema

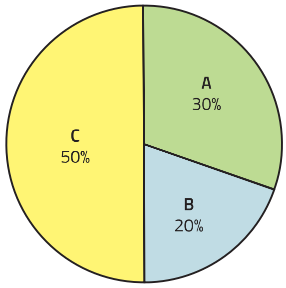


Gráfico elaborado para fins didáticos.

Número de espectadores nas salas de cinema

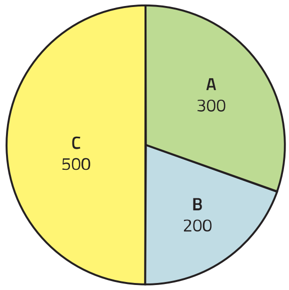


Gráfico elaborado para fins didáticos.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Em cada gráfico de setores, o círculo todo indica o total (1 000 espectadores ou 100%) e cada setor indica a ocupação de uma sala. Na construção do gráfico de setores, determinamos o ângulo correspondente a cada setor proporcionalmente à frequência do valor da variável. Veja como exemplo os dados da sala **A**.

Podemos comparar o número de espectadores em cada sala com a medida de abertura do ângulo central do círculo.

$$\frac{300}{1000} = \frac{x}{360°} \Rightarrow 1000x = 108000° \Rightarrow x = 108°$$

Usando a frequência relativa (em %), obtemos:

$$x = 30\% \text{ de } 360° = 0{,}30 \cdot 360° = 108°$$

Bate-papo

Converse com um colega e verifique quais são as medidas de abertura dos ângulos dos setores das salas **B** e **C**. Use um transferidor e constate na figura os ângulos de **A**, **B** e **C**.

Sala **A**: 108°; sala **B**: 72°; sala **C**: 180°.

Atividades

Não escreva no livro!

10 Para mostrar quanto tempo gasta com as atividades diárias, Luísa construiu um gráfico de setores.

Atividades diárias de Luísa

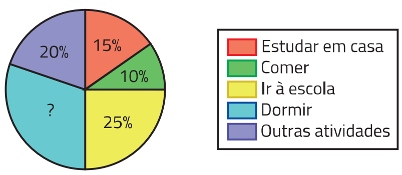


Gráfico elaborado para fins didáticos.

a) Quantas horas por dia Luísa estuda em casa?
3,6 h (15% de 24 h = 0,15 × 24 h = 3,6 h)

b) Qual porcentagem do dia ela usa para dormir?
30% (100 − 15 − 10 − 25 − 20 = 30)

c) Construa no caderno o gráfico de colunas correspondente aos dados. MP

11 Em uma eleição concorreram os candidatos **A**, **B** e **C** e, depois de apurada a primeira urna, os votos foram os seguintes:

- **A**: 50 votos;
- **B**: 80 votos;
- **C**: 60 votos;
- brancos e nulos (**BN**): 10 votos.

Usando esses dados, construa no caderno: MP

a) a tabela de frequências da variável "candidato";

b) o gráfico de barras, relacionando os valores dessa variável com as respectivas frequências absolutas;

c) o gráfico de setores, relacionando os valores dessa variável com as respectivas frequências relativas, em porcentagens.

Histograma

Quando uma variável tem os valores indicados por classes (intervalos), é comum o uso de um tipo de gráfico conhecido como **histograma**. Esse é um gráfico de colunas da distribuição de frequências de um conjunto de dados quantitativos contínuos.

Por exemplo, vamos retomar a pesquisa apresentada nas páginas 196 e 197 e considerar a variável "medida de altura" (em centímetros) do grupo de alunos do 8º ano, agrupada em classes (intervalos).

Veja a tabela de frequências dessa variável, escolhendo 5 classes.

Bate-papo

Para o item **c** da atividade 3 da página 197, você construiu a tabela de frequências para a variável "medida de altura" dessa pesquisa. Quantas classes você escolheu para essa variável? Compare sua tabela com a dada nesta página e identifique semelhanças e diferenças entre elas.

Respostas pessoais.

Medida de altura de um grupo de alunos

Medida de altura (em cm)	FA	FR (em %)
150 ⊢ 154	3	12%
154 ⊢ 158	8	32%
158 ⊢ 162	4	16%
162 ⊢ 166	9	36%
166 ⊢ 170	1	4%

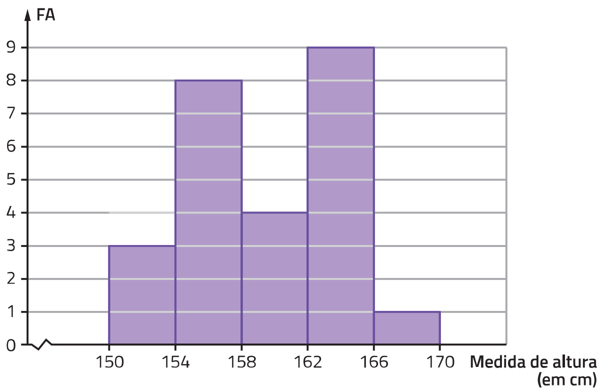
Tabela elaborada para fins didáticos.

A partir da tabela de frequências, podemos montar o gráfico de colunas de maneira semelhante a que fazemos com variáveis quantitativas discretas. Assim, obteremos o histograma.

O histograma pode ser construído a partir da frequência absoluta (FA) ou da frequência relativa (FR) da variável. Veja os 2 gráficos a seguir.

- Histograma com as classes (intervalos) relacionadas às frequências absolutas.

Medida de altura de um grupo de alunos



Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráfico elaborado para fins didáticos.

2 Representação gráfica dos dados de uma pesquisa

Pergunte aos alunos: "Vocês sabem o que é um histograma?". Após as respostas, explique que o histograma é um gráfico de colunas utilizado para representar variáveis quantitativas contínuas ou variáveis quantitativas discretas agrupadas em intervalos.

Bate-papo

Retome a pesquisa apresentada nas páginas 196 e 197 e peça aos alunos que comparem a tabela de frequências que criaram para a variável "medida de altura" com a fornecida nesta página. Caso a quantidade de classes seja diferente, pergunte qual tabela tem intervalos com amplitude que facilita a análise dos dados sem grande perda de informações.

Após o *Bate-papo*, mostre que podemos construir um histograma a partir de uma tabela de frequências da mesma forma que fazemos para um gráfico de colunas, mas sem espaço entre as colunas.

Então, na lousa, construa 2 histogramas: um que relaciona os intervalos com as frequências absolutas e o outro com as frequências relativas (porcentagens).

2 Representação gráfica dos dados de uma pesquisa

Se houver oportunidade, entregue folhas de papel milimetrado para que os alunos construam o histograma e o respectivo polígono de frequência.

Caso os alunos tenham feito a pesquisa e os cartazes com as tabelas de frequências propostos na página 196 deste Manual, solicite que construam, também nos cartazes, um gráfico para cada tabela, escolhendo o melhor tipo de gráfico para representar os dados de cada variável.

Antes de os alunos resolverem a atividade, sugira que registrem, no painel de descobertas, todas as informações que considerarem importantes sobre gráficos de barras (e de colunas), gráficos de segmentos, gráficos de setores, histogramas e polígonos de frequência.

Atividade 12

Esta atividade desenvolve a construção de uma tabela de frequências com os valores de uma variável quantitativa discreta dispostos em classes e do respectivo histograma que relaciona a variável com a frequência absoluta dela.

Veja na página LXII deste Manual a resolução desta atividade.

- Histograma com as classes relacionadas às frequências relativas (em porcentagem)

Medida de altura de um grupo de alunos

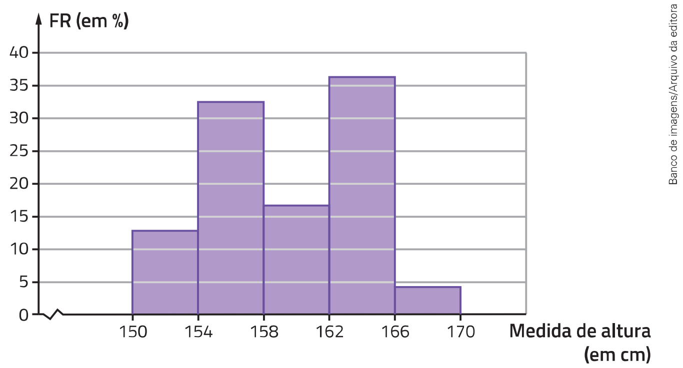


Gráfico elaborado para fins didáticos.

Às vezes, usamos como representante de cada classe da variável o valor médio correspondente. Nesse exemplo, 152 representa a classe 150 ⊢— 154.

Os segmentos de reta que ligam em sequência os pontos médios das bases superiores das barras formam um gráfico de segmentos conhecido como **polígono de frequência**, que você usará em assuntos posteriores.

Medida de altura de um grupo de alunos

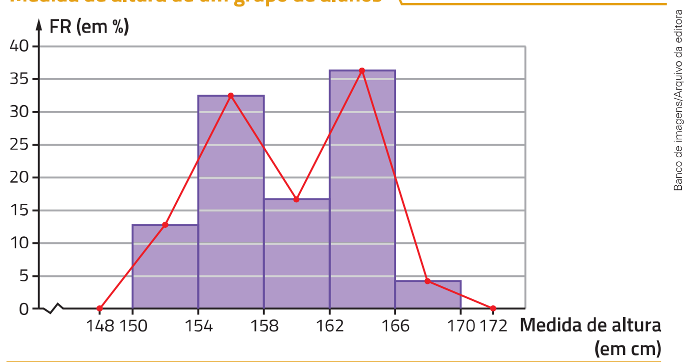


Gráfico elaborado para fins didáticos.

Observe que o polígono de frequência sempre inicia no ponto médio da classe anterior à primeira (nesse caso, o ponto médio de 146 ⊢— 150) e termina no ponto médio da classe posterior à última (nesse caso, o ponto médio de 170 ⊢— 174).

Atividade

Não escreva no livro!

12 Fazendo o levantamento de quantas pessoas assistiram a um filme no cinema em vários finais de semana, foram obtidos os seguintes resultados em número de pessoas: 350, 800, 720, 620, 700, 750, 780, 680, 720, 600, 846, 770, 630, 720, 680, 640, 710, 750, 680 e 690. Usando esses dados, construa no caderno: MP

a) a tabela de frequência da variável "número de pessoas", com 5 classes;

b) o histograma correspondente relacionando os valores dessa variável e a frequência absoluta deles.

Sugestão de atividade

Explique aos alunos que, na mídia, é comum a apresentação de gráficos para facilitar a divulgação de informações, mas que, às vezes, esses gráficos contêm erros, causando interpretações também incorretas.

Então, solicite que pesquisem gráficos com erros, geralmente de escala, e compartilhem com os colegas. Permita que apresentem também interpretações incorretas para gráficos corretos.

Se houver oportunidade, peça aos alunos que corrijam os erros nos gráficos ou nas interpretações.

3 Medidas de tendência central

Em todo conjunto de dados estatísticos (por exemplo, as idades dos alunos de uma turma ou o preço de determinado produto em vários estabelecimentos comerciais), é importante determinar um elemento que possa representá-lo. Em Estatística, a principal maneira de determinar esse elemento significa calcular uma **medida de tendência central** para o conjunto em questão.

As principais medidas de tendência central são a **média aritmética**, a **mediana** e a **moda**. Essas 3 podem ser usadas quando trabalhamos com variáveis quantitativas, mas apenas a última pode ser usada também quando trabalhamos com variáveis qualitativas.

Média aritmética

Vamos recordar com exemplos e exercícios o que você estudou nos anos anteriores sobre média aritmética. Você se lembra como calculá-la?

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

Em um time de futebol de salão, as medidas de comprimento das alturas, em centímetros, são 146, 158, 165, 150 e 155. Qual é a média dessas medidas?

154,8 cm $\left(MA = \frac{146 + 158 + 165 + 150 + 155}{5} = \frac{774}{5} = 154{,}8\right)$

Vejamos outro exemplo.

Oito alunos do 8º ano participaram de uma competição de dança na escola e, para cada um, foi atribuída uma nota. As notas atribuídas foram:

2,0 | 3,5 | 1,0 | 2,5 | 9,0 | 3,0 | 1,0 | 10,0

Como se pode ver, a maioria dos alunos não obteve notas muito boas. Vamos calcular a média aritmética (*MA*) das notas desse grupo de alunos.

Calculamos a média aritmética das notas.

$$MA = \frac{2 + 3{,}5 + 1 + 2{,}5 + 9 + 3 + 1 + 10}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

Logo, a média aritmética das notas dos 8 alunos na competição de dança foi 4,0.

13. 2 gols por partida. $\left(MA = \frac{2 + 2 + 1 + 1 + 4 + 2 + 2}{7} = \frac{14}{7} = 2\right)$

14. $MA = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$

Atividades

Não escreva no livro!

13 › Um time de futebol já disputou 7 partidas em um campeonato e marcou 2, 2, 1, 1, 4, 2 e 2 gols neles. Calcule no caderno a média do número de gols marcado por partida.

14 › Responda no caderno: Qual é a fórmula da média aritmética (*MA*) dos números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$?

15 › Veja os gastos de uma pessoa com alimentação, de segunda-feira a sábado, em determinada semana.

- Segunda-feira: R$ 12,00.
- Terça-feira: R$ 15,00.
- Quarta-feira: R$ 10,00.
- Quinta-feira: R$ 14,00.
- Sexta-feira: R$ 13,00.
- Sábado: R$ 14,00.

Calcule no caderno a média diária dos gastos.

15. R$ 13,00 $\left(MA = \frac{12 + 15 + 10 + 14 + 13 + 14 + 2}{6} = \frac{78}{6} = 13\right)$

3 Medidas de tendência central

Principal habilidade da BNCC

EF08MA25

Explique o que são medidas de tendência central e apresente as principais (média aritmética, mediana e moda), destacando que as 2 primeiras são usadas apenas para variáveis quantitativas, enquanto a última pode ser usada em variáveis quantitativas ou qualitativas. Se necessário, retome com os alunos os significados de variável quantitativa e variável qualitativa.

Explorar e descobrir

Pergunte aos alunos o que é média aritmética e como podemos calculá-la. Se necessário, leia com eles o balão que recorda o cálculo dessa medida de tendência central.

Após o *Explorar e descobrir*, na lousa, calcule a média aritmética do outro exemplo do livro, mostrando a notação usada (*MA*), e questione se o valor é representativo do conjunto de dados. Chame a atenção da turma para o fato de que, nesse caso, a média aritmética não descreve bem as características do conjunto de notas porque as notas 9,0 e 10,0 são muito maiores do que as demais. Nesse caso, seria necessário outra medida de tendência central: a mediana.

Atividades 13 a 15

Estas atividades retomam o cálculo de médias aritméticas em situações cotidianas e a generalização da fórmula.

Como ampliação da atividade 15, peça aos alunos que calculem o gasto médio dessa pessoa por mês e reflitam sobre o quanto esse valor pode impactar no orçamento dela, considerando um salário baixo ou salário alto.

Se considerar conveniente, questione: "Quanto vocês gastam com lanche, em média, por dia?"; "Quanto representa esse gasto por mês?". Esse tipo de exploração, que trabalha os temas contemporâneos *vida familiar e social* e *educação para o consumo*, pode levar o aluno a uma conscientização do papel dele no orçamento familiar, por exemplo.

3 Medidas de tendência central

Nesta página, retomaremos os estudos sobre a média aritmética ponderada vistos no 7º ano. Se necessário, relembre que, nesse tipo de média, consideramos pesos para os valores.

Então, apresente o exemplo do concurso de cães e, com os alunos, calcule a média ponderada de Manchado, definindo a notação usada (MP).

Se achar conveniente, peça que generalizem o cálculo da média aritmética ponderada, como feito para média aritmética simples na atividade 14 da página anterior. Nomeie os pesos dos valores de $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$.

Depois, peça que leiam as 2 situações que mostram que nem sempre a média representa bem os valores do conjunto, destacando que estudaremos mediana e moda nas próximas páginas.

Atividades 16 e 17

Estas atividades revisam o cálculo de médias aritméticas ponderadas.

Veja a resolução da atividade 16.

a) $\dfrac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + 1 \cdot 10}{2 + 3 + 1} = \dfrac{44}{6} = 7,\overline{3}$

b) $\dfrac{40 + 40 + 150}{2 + 1 + 3} = \dfrac{230}{6} = \dfrac{230}{6} = 38,\overline{3}$

Na atividade 17, se necessário, ajude os alunos a escrever as equações que representam as médias aritméticas ponderadas. Mas não interfira na resolução dessas equações, dando autonomia para eles.

Veja a resolução desta atividade.

a) $\dfrac{3(x - 1) + 2(x + 4)}{3 + 2} = 12 \Rightarrow 5x + 5 = 60 \Rightarrow x = 11$

b) $\dfrac{3x + 4x + x - 4}{3 + 2 + 1} = 16 \Rightarrow 8x - 4 = 96 \Rightarrow x = \dfrac{100}{8} = \dfrac{25}{2}$

Média aritmética ponderada

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Vamos relembrar o que você estudou sobre média aritmética ponderada.

Em certas situações, dependendo da importância atribuída aos dados, são associados a eles certos fatores de ponderação (pesos). Veja um exemplo.

Em um concurso para cães, os participantes foram julgados de acordo com determinados quesitos. Para cada quesito, foi atribuído um peso.

- Beleza: peso 1.
- Destreza: peso 2.
- Porte: peso 3.


Apple Tree House/Getty Images

Cão vencedor de um concurso.

Douglas levou o cachorro dele, Manchado, para o concurso e ele obteve as seguintes notas: 7,5 em beleza; 9,0 em destreza; e 7,0 em porte. Qual foi a média aritmética ponderada (MP) de Manchado no concurso?

$$MP = \frac{1 \cdot 7,5 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 7}{1 + 2 + 3} = \frac{46,5}{6} = 7,75$$

Portanto, a média aritmética ponderada de Manchado no concurso foi 7,75.

Observação

A média aritmética simples ou ponderada dá uma ideia das características de um grupo de números.

Porém, é importante destacar que, em algumas situações, a presença de um valor muito maior ou muito menor do que os demais faz com que a média aritmética não consiga traçar o perfil correto do grupo. É o caso do exemplo da página anterior. Veja mais 2 exemplos.

- Um grupo de 4 pessoas com idades de 5 anos, 4 anos, 5 anos e 70 anos tem como média das idades 21 anos $\left(\dfrac{5 + 4 + 5 + 70}{4} = 21\right)$. Essa média não dá ideia das características do grupo quanto às idades.
- Nesta situação envolvendo biscoitos, a média também não traduz a realidade.

Ilustrações: Thiago Neumann/ Arquivo da editora

Em casos como esses, devemos usar outras medidas de tendência central, como a **mediana** e a **moda**.

Atividades

Não escreva no livro!

16 Calcule no caderno a média aritmética ponderada de:

a) 5 (peso 2), 8 (peso 3) e 10 (peso 1); $7,\overline{3}$

b) 20 (peso 2), 40 (peso 1) e 50 (peso 3). $38,\overline{3}$

17 Calcule no caderno o valor de x nos seguintes casos:

a) a média aritmética ponderada de $x - 1$ com peso 3 e $x + 4$ com peso 2 é igual a 12; $x = 11$

b) a média aritmética ponderada de x (peso 3), $2x$ (peso 2) e $x - 4$ (peso 1) é igual a 16. $x = \dfrac{25}{2}$

Sugestão de leitura

O editor e a média

Em dezembro do ano passado, um amigo que é editor pediu-me que o ajudasse na solução de um problema. O custo de reimpressão de um livro depende de dois fatores: papel e gráfica. O gasto com papel representa 60% daquele custo e as despesas com gráfica os restantes 40%. Exemplificando: se, na ocasião, a reimpressão de um livro custasse R$ 10 000, então R$ 6 000 seriam devidos ao papel e R$ 4 000 à gráfica. Disse-me ele ainda que, no prazo de um ano, o preço do papel havia subido 25,9% e os custos com gráfica 32,5%. O seu problema era saber de quanto deveria subir o preço do livro.

Este é um exemplo prático, simples e interessante, de aplicação do conceito de média ponderada. Os pesos desta média são as porcentagens com que cada uma das duas componentes, papel e gráfica, pesam no custo de reimpressão do livro.

Portanto, o aumento do preço do livro deve ser calculado assim:

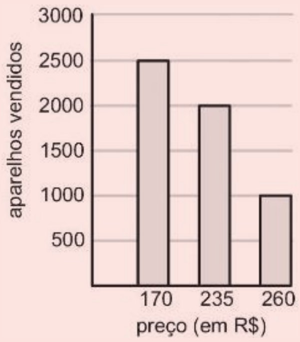
$$\frac{60 \times 25,9\% + 40 \times 32,5\%}{100} = 28,54\%$$

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Seleção e organização Ana Catarina P. Hellmeister et al.; organização geral Suely Druck. *Artigos*. v. 1. Brasília, 2004. p. 43. (Coleção Explorando o Ensino da Matemática).

Atividade resolvida passo a passo

Não escreva no livro!

(Obmep) O gráfico mostra o resultado da venda de celulares pela empresa BARATOCEL no ano de 2010.



Qual foi o preço médio, em reais, dos celulares vendidos nesse ano?

a) 180
b) 200
c) 205
d) 210
e) 220

Lendo e compreendendo

O problema pede o preço médio dos celulares vendidos em 2010. Para isso, nos fornece a quantidade de celulares vendidos com cada preço.

Planejando a solução

Nesse caso, o preço médio deve ser calculado usando a média aritmética ponderada, em que a quantidade de aparelhos vendidos será o "peso".

Executando o que foi planejado

$$MP = \frac{170 \cdot (2\,500) + 235 \cdot (2\,000) + 260 \cdot (1\,000)}{2\,500 + 2\,000 + 1\,000} = \frac{425\,000 + 470\,000 + 260\,000}{2\,500 + 2\,000 + 1\,000} = \frac{1\,155\,000}{5\,500} = 210$$

Verificando

Se estamos calculando o **preço**, então o preço **não** pode ser tomado como **peso**.

Peso é sempre a quantidade de vezes que determinado dado aparece. Nesse caso, o preço R$ 260,00 tem peso 1 000, porque esse preço aparece 1 000 vezes no gráfico. O que mostra que os cálculos foram feitos corretamente.

Emitindo a resposta

O preço médio é R$ 210,00. Alternativa **d**.

Ampliando a atividade

Se a quantidade de aparelhos vendidos for a mesma para cada um dos preços, qual seria, aproximadamente, o preço médio?

Solução

Basta calcularmos a média aritmética simples dos preços.

$$MA = \frac{170 + 235 + 260}{3} = \frac{665}{3} \simeq 221{,}67$$

Outra maneira de pensar seria admitir que todos os tipos de aparelho teriam o mesmo peso "x".

$$MP = \frac{170x + 235x + 260x}{x + x + x} = \frac{665x}{3x} \simeq 221{,}67$$

Logo, o preço médio seria de aproximadamente R$ 221,67.

3 Medidas de tendência central

Leia, com os alunos, a atividade desta página e verifique se eles identificam o que é fornecido e o que se pede no enunciado.

Então, peça que expliquem o que planejam fazer para resolver essa situação e questione: "Quais são os valores da variável?"; "Quais são os pesos desses valores?". Faça-os perceber que devem calcular a média ponderada dos preços dos celulares (valores da variável), considerando a quantidade de cada aparelho vendido (pesos dos valores).

Acompanhe-os durante a execução do que planejaram, interferindo apenas se necessário. Em seguida, apresente a verificação dada no livro e sugira que respondam à atividade.

Depois, forneça o enunciado da ampliação da atividade e solicite que a resolvam. Confira as resoluções dos alunos, peça que as compartilhem e, para finalizar, verifiquem as soluções dadas no material.

3 Medidas de tendência central

Retome o motivo que nos faz buscar medidas de tendência central diferentes da média: ela não representa as características de um conjunto quando há valores muito maiores ou muito menores do que os demais. Para resolver esse problema, estudaremos a mediana.

Apresente o exemplo da medida de altura das 5 meninas e explique que, para calcular a mediana, devemos colocar os dados em ordem crescente e determinar o valor que se encontra no meio do conjunto.

Então, mostre a continuação desse exemplo, quando mais uma menina se junta às outras, formando um grupo de 6 meninas. Peça aos alunos que calculem a mediana e confira se, após ordenar os valores, algum aluno consegue determiná-la. Nesse momento, explique que, para essa situação, temos que calcular a média aritmética entre os 2 valores centrais do conjunto, pois não temos apenas um valor central, como no caso anterior.

Mostre que usamos a notação *Me* para representar a mediana e destaque que, na segunda situação, calculamos a média aritmética entre os 2 valores centrais, e não para todos os valores. Se achar necessário, calcule a média aritmética do conjunto para que percebam que, nesse caso, $Me \neq MA$, e explique que algumas vezes esses valores podem ser iguais.

Em seguida, sugira aos alunos que, a partir dos exemplos, compartilhem as hipóteses que criaram e inventem uma regra para determinar a mediana.

Mediana

Anteriormente, estudamos algumas situações em que, em um conjunto de dados, a presença de valores muito maiores ou muito menores do que os demais influencia no valor da média aritmética, fazendo com que ela não represente a realidade desse conjunto.

Nesse tipo de situação, quanto maiores ou menores forem esses valores, mais a média aritmética deixa de dar ideia das características reais do conjunto de dados. Por isso, é conveniente utilizarmos outra medida de tendência central: a **mediana**.

Acompanhe o exemplo a seguir.

Vamos considerar as medidas de comprimento das alturas, em centímetro, de 5 meninas: Liz (165 cm), Cris (168 cm), Rô (171 cm), Ju (157 cm) e Má (152 cm).

Dispomos as 5 meninas em ordem crescente de medida de comprimento das alturas (poderia ser em ordem decrescente).

Ilustrações: Thiago Neumann/Arquivo da editora

Então, o conjunto de dados, ordenado, é: 152, 157, 165, 168, 171.

Observe que a adolescente do **meio** na ordenação é Liz. A medida de comprimento da altura dela, 165 cm, é chamada de **mediana** das 5 medidas. Escrevemos $Me = 165$ cm.

Suponha agora que uma sexta menina, Lu, cuja medida de comprimento da altura é de 167 cm, junte-se a elas. Organizamos novamente em ordem crescente.

Ilustrações: Thiago Neumann/Arquivo da editora

Agora, o conjunto de dados, ordenado, é: 152, 157, 165, 167, 168, 171.

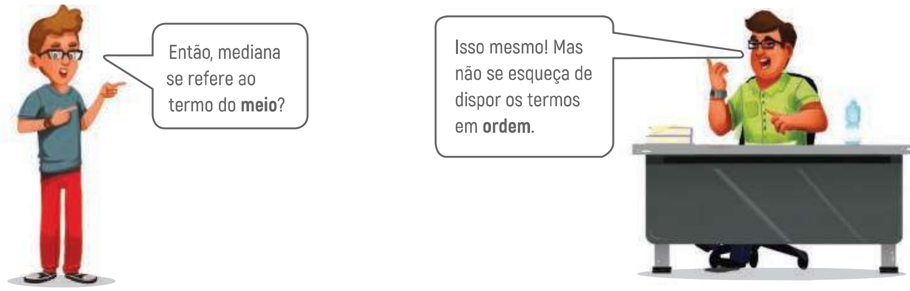
Observe que o número de adolescentes é par e, portanto, temos 2 meninas no **meio**. Vamos calcular a média aritmética entre as medidas de comprimento das alturas dessas 2 meninas: Liz (165 cm) e Lu (167 cm).

$$MA = \frac{165 + 167}{2} = 166$$

Assim, nesse caso, a **mediana** das 6 alturas é de 166 cm. Escrevemos $Me = 166$ cm.

Assim, podemos definir a mediana de um conjunto de valores.

Dado um conjunto de valores, é preciso organizá-los em ordem crescente ou decrescente. Se o número de termos for ímpar, então a mediana será o termo do meio. Se o número de termos for par, então a mediana será a média aritmética dos 2 termos centrais.



Ilustrações: Thiago Neumann/Arquivo da editora

Vejamos outro exemplo. Em uma competição de dança, um casal recebeu as seguintes notas na 1ª etapa.

2,0	3,5	1,0	2,5	9,0	3,0	1,0	10,0

A média aritmética obtida (4,0) não descrevia bem esse conjunto, pois a maioria das notas é bem menor do que a média. Isso ocorreu porque as notas 9,0 e 10,0 são muito maiores do que as demais.

Ao ordenarmos os valores, temos a seguinte sequência.

1,0	1,0	2,0	2,5	3,0	3,5	9,0	10,0

Essa sequência tem um número par de valores; portanto, para calcularmos a mediana desse conjunto, determinamos a média aritmética dos 2 termos centrais, ou seja, de 2,5 e 3,0.

$$Me = \frac{2{,}5 + 3{,}0}{2} = \frac{5{,}5}{2} = 2{,}75$$

Observe que a mediana 2,75 representa melhor o conjunto de notas do que a média aritmética 4,0. Perceba também que as notas altas 9,0 e 10,0 não afetaram o cálculo da mediana.

Assim, para saber qual medida de tendência central é mais adequada para representar um conjunto de dados de uma variável quantitativa, basta dispor os valores em ordem e observar se os valores dos extremos são muito menores ou muito maiores do que os demais. Caso sejam, a mediana é mais adequada para a representação dos dados do que a média aritmética.

Não escreva no livro!

Atividades

18 Jaqueline, cuja medida de comprimento da altura é de 169 cm, também se juntou ao grupo das meninas da página anterior. Qual é, agora, a mediana das medidas de comprimento das alturas? 167 cm (Lu ficará no meio.)

19 Estas são as medidas de comprimento das alturas, em centímetros, de um grupo de 10 crianças: 119, 120, 121, 121, 121, 123, 124, 124, 125, 128.

a) Qual é a média dessas medidas? 122,6 cm

b) Qual é a mediana? 122 cm

c) Qual dessas medidas de tendência central é mais apropriada para esse caso? É indiferente, pois ambas estão bem próximas uma da outra.

20 As pontuações de 0 a 100 obtidas por 21 alunos em um teste foram: 71, 40, 86, 55, 63, 70, 44, 90, 37, 68, 53, 55, 57, 60, 82, 91, 62, 72, 56, 42, 36. Determine no caderno a mediana desses valores. 60 (36, 37, 40, 42, 44, 53, 55, 55, 56, 57, $\boxed{60}$, 62, 63, 68, 70, 71, 72, 82, 86, 90, 91)

21 Em um grupo de pessoas, as idades são: 13, 20, 18, 14, 17, 16 e 19 anos.

a) Qual é a mediana dessas idades? 17 anos.

b) Se, a esse grupo, se juntarem 3 pessoas, com idades de 12, 15 e 22 anos, então a mediana aumentará ou diminuirá? Quantos anos? Diminuirá meio ano.

3 Medidas de tendência central

Peça aos alunos que comparem a regra que criaram com as informações apresentadas no boxe, fazendo alterações se necessário.

Depois, forneça o exemplo dado e solicite que calculem a média aritmética e a mediana, analisando qual dos valores caracteriza melhor os valores do conjunto. Esperamos que os alunos percebam que a mediana representa melhor os dados, pois existem 2 valores muito altos que afetam o resultado da média.

As atividades desenvolvem o cálculo da mediana.

Se necessário, relembre os alunos de ordenar os valores do conjunto antes de determinar a mediana.

Atividades 18 e 21

Apresentam a adição de valores ao conjunto após o cálculo da mediana para a comparação dessa medida antes e depois da alteração.

Veja a resolução da atividade de 21.

a) 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20

A mediana dessas idades é 17 anos.

b) 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22

$\frac{16 + 17}{2} = 16{,}5$

$17 - 16{,}5 = 0{,}5$

A mediana diminui em meio ano.

Atividade 19

Trabalha o cálculo da média e da mediana de um conjunto de valores, além de comparar esses valores.

Veja a resolução desta atividade abaixo.

19. a) $\frac{119 + 120 + 121 + 121 + 123 + 124 + 124 + 125 + 128}{10} =$

$= \frac{1\,226}{10} = 122{,}6$

A média de altura desse grupo é de 122,6 cm.

b) $\frac{121 + 123}{2} = 122$

A mediana é 122 cm.

3 Medidas de tendência central

Primeiro, pergunte aos alunos o que significa o termo **moda** e verifique as informações que possuem. Em seguida, apresente o exemplo dado no material, do esporte preferido entre os citados, e diga que a moda desse conjunto é basquete, questionando se conseguem definir o que é a moda em Estatística. Esperamos que percebam que é o valor que tem maior frequência absoluta.

Aproveite para mostrar que, nesse exemplo, não conseguimos calcular a média nem a mediana do conjunto de valores, pois a variável é qualitativa.

Então, explique que a moda também pode ser usada em variáveis quantitativas, embora, na maioria das vezes, ela não represente bem os valores.

Nesse momento, mostre o exemplo do livro e peça aos alunos que determinem a média, a mediana e a moda do conjunto.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Moda

Vimos que, para variáveis quantitativas, temos as medidas de tendência central média aritmética e mediana. Mas qual medida de tendência central utilizar, por exemplo, para esta pergunta: Qual seu esporte preferido entre basquete, natação ou ciclismo?


Jeff Kaufman/Taxi/Getty Images

Crianças jogando basquete.


Chad McDermott/Shutterstock

Pessoas praticando natação.


Warren Goldswain/Shutterstock

Casal andando de bicicleta.

Nesse caso, estamos trabalhando com **variáveis qualitativas**, em que a pergunta não é mais "Quanto vale?", e sim "Qual é a categoria preferida?".

Vamos supor, então, que, em uma turma de 20 alunos do 8º ano, foi feita a pergunta acima e foram obtidas as seguintes respostas: 12 alunos preferiram basquete, 5 alunos preferiram natação e 3 alunos preferiram ciclismo.

Nesse caso, não é conveniente perguntar qual a média desses resultados ou qual é a mediana, pois as possíveis respostas da pergunta não correspondem a valores numéricos. Por isso, vamos introduzir uma medida de tendência central conveniente para variáveis qualitativas, que é a **moda**.

No caso dessa pesquisa, basquete é o elemento de maior frequência absoluta no conjunto de respostas coletadas. Dizemos, então, que "basquete" é a moda desse conjunto.

Escrevemos Mo = basquete.

Em Estatística, dado um conjunto de dados (em geral, qualitativos), chamamos de **moda** o elemento desse conjunto que tem a **maior frequência absoluta**, ou seja, o elemento que "mais aparece" no conjunto.

Apesar de estarmos introduzindo a moda como uma medida de tendência central para variáveis qualitativas, ela pode também ser usada para variáveis quantitativas, mas, na maioria dos casos, não será conveniente.

Veja agora alguns exemplos.

- Dez garotos decidiram verificar o "peso" de cada um deles, e os resultados foram os seguintes:

65 kg	72 kg	56 kg	50 kg	42 kg	56 kg	60 kg	65 kg	56 kg	88 kg

Vamos determinar a média, a mediana e a moda desse conjunto.

A média aritmética é dada por:

$$MA = \frac{65 + 72 + 56 + 50 + 42 + 56 + 60 + 65 + 56 + 88}{10} = \frac{610}{10} = 61$$

Para determinar a mediana, inicialmente dispomos os dados em ordem (crescente ou decrescente). Vejamos como fica a sequência em ordem crescente: 42 kg, 50 kg, 56 kg, 56 kg, 56 kg, 60 kg, 65 kg, 65 kg, 72 kg, 88 kg.

Como o número de elementos é par (igual a 10), basta calcular a média aritmética dos 2 termos centrais.

$$Me = \frac{56 + 60}{2} = 58$$

A moda desse conjunto, por sua vez, é o termo que mais aparece: 56 kg.

Assim, $MA = 61$ kg, $Me = 58$ kg e $Mo = 56$ kg.

- Trinta funcionários de uma empresa recebem salários conforme indicado na tabela a seguir.

Salários dos funcionários de uma empresa

Salário	Número de funcionários
R$ 1 080,00	12
R$ 2 650,00	8
R$ 3 500,00	7
R$ 20 270,00	3

Tabela elaborada para fins didáticos.

Vamos calcular a média, a mediana e a moda dos salários desses funcionários. Em seguida, vamos decidir qual é a medida de tendência central que melhor representa a realidade salarial desse conjunto. Inicialmente vamos calcular a média salarial:

$$MA = \frac{12 \cdot 1080 + 8 \cdot 2650 + 7 \cdot 3500 + 3 \cdot 20270}{30} = \frac{12\,960 + 21\,200 + 24\,500 + 60\,810}{30} =$$

$$= \frac{119\,470}{30} = 3\,982{,}33$$

Para o cálculo do salário mediano, dispomos os salários em ordem (crescente ou decrescente). Observamos que a quantidade de salários é par (30 salários); portanto, calculamos a média dos 2 termos centrais. Em uma sequência de 30 valores, os 2 termos centrais são o 15º e o 16º, pois deixam 14 valores à esquerda e 14 valores à direita. Na sequência acima, o 15º e o 16º salários são iguais a R$ 2 650,00.

Assim, a mediana é dada por: $Me = \frac{2\,650 + 2\,650}{2} = 2\,650$

A moda dos salários dessa distribuição é o salário de maior frequência absoluta. O salário que mais aparece é R$ 1 080,00.

Dizemos, portanto, que a média dos salários é R$ 3 982,33, a mediana é R$ 2 650,00 e a moda é R$ 1 080,00.

Finalmente, devemos decidir qual das medidas de tendência central melhor representa a realidade salarial do conjunto. Percebemos que a média não é muito adequada, pois foi afetada pelo salário de R$ 20 270,00, que é bem maior do que os demais.

A mediana, por sua vez, não foi afetada por esse aspecto, adequando-se bem para representar o conjunto de dados desse exemplo.

A moda expressa o salário mais frequente, não sendo também muito adequada para representar a realidade do conjunto nesse exemplo, pois os 12 funcionários não representam a maioria do conjunto, que tem 30 funcionários.

Logo, podemos concluir que a mediana é a medida de tendência central que melhor representa a realidade salarial desse conjunto.

Bate-papo

Converse com um colega e, juntos, expliquem com as próprias palavras por que a média aritmética (ponderada ou não), a moda e a mediana são chamadas de medidas de tendência central.

Exemplo de resposta: Essas medidas centralizam em si um grupo de dados.

Não escreva no livro!

Atividades

22 Nas 10 primeiras partidas de um campeonato de futebol, o time Bons de Bola marcou 2, 1, 2, 3, 2, 0, 5, 2, 3 e 3 gols.

a) Qual é a média de gols do time por partida?

b) Qual é a moda de gols do time por partida? 2 gols por partida.

c) Qual é a mediana de gols do time por partida? 2 gols por partida. $\left(0, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5; \frac{2+2}{2} = 2\right)$

22. a) 2,3 gols por partida. $\left(\frac{2+1+2+3+2+0+5+2+3+3}{10} = \frac{23}{10} = 2{,}3\right)$

3 Medidas de tendência central

Nesta página, esperamos que as 3 medidas de tendência central apresentadas (média, mediana e moda) estejam claras, pois vamos calculá-las e compará-las para verificar qual representa melhor o conjunto dado.

É importante frisar para a turma que a adequação da medida de tendência central depende das características do conjunto, não sendo possível dizer que uma sempre representa melhor os dados do que a outra.

Nesse momento, apresente o exemplo fornecido no material e solicite que os alunos definam os valores das 3 medidas de tendência central estudadas. Então, peça a eles que conversem com os colegas para identificar qual delas define melhor o conjunto dos valores, justificando essa escolha.

Bate-papo

Peça aos alunos que expliquem, além do significado de medida de tendência central, as aplicações no cotidiano e possíveis usos para a vida de cada aluno. Essas respostas podem ser anotadas no painel de descobertas com informações importantes sobre média, mediana e moda.

Atividade 22

Esta atividade desenvolve a definição da média, da moda e da mediana de um conjunto de dados.

Peça aos alunos que comparem os valores, verificando que as 3 medidas de tendência central são aproximadamente iguais.

3 Medidas de tendência central

As atividades trabalham o conceito e a determinação da moda a partir de gráficos ou de conjuntos de valores.

Atividades 23, 24 e 28

Estas atividades abordam o cálculo de médias aritméticas e o fato de que não é possível calculá-las para variáveis qualitativas.

A atividade 23 se baseia na interpretação das informações apresentadas em um gráfico de setores.

A atividade 24 apresenta um artigo da Constituição Federal e trabalha a construção de um gráfico que represente a tabela preenchida. Aproveite esta atividade para verificar o conhecimento dos alunos sobre a Constituição: o significado desse documento, os motivos para a elaboração e as bases legais dele.

Se achar conveniente, solicite aos alunos que pesquisem sobre esses tópicos e apresentem para a turma. Essa exploração pode ser feita em conjunto com as aulas de História.

Veja o gráfico do item **c** da atividade 24 na página LXII deste Manual.

Atividade 25

Esta atividade desenvolve a construção de uma tabela de frequências absolutas para representar o conjunto de dados fornecidos.

Destaque que não é necessário calcular as frequências relativas, pois o enunciado deseja apenas as frequências absolutas.

Veja a tabela do item **a** desta atividade.

a)

Número de ervilhas por vagem

Número de ervilhas	2	3	4
Frequência absoluta	5	15	7

Tabela elaborada para fins didáticos.

Atividade 29

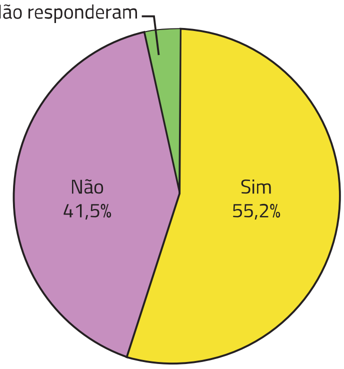
Esta atividade trabalha a descoberta do valor de uma incógnita usando os conceitos de média aritmética e de moda.

Se necessário, ajude os alunos a escrever as equações que resolvem esta atividade.

28. a) $3\left(\frac{2+6+2+5+1+3+2}{7} = \frac{21}{7} = 3\right)$

23 Perguntou-se a todos os alunos da escola onde Juvenal estuda se eles gostaram da reforma da cantina. Veja, no gráfico, o resultado da pesquisa.

Satisfação da reforma da cantina



Banco de imagens/Arquivo da editora

Gráfico elaborado para fins didáticos.

a) Qual porcentagem dos alunos não respondeu à pesquisa? 3,3% (100 − 55,2 − 41,5 = 3,3)

b) Se a escola tem 1 000 alunos, então quantos responderam que gostaram da reforma? 552 alunos. (0,552 × 1 000 = 552)

c) Quantos alunos não gostaram da reforma? 415 alunos (0,415 × 1 000 = 415)

d) Quantos não responderam? 33 alunos (0,033 × 1 000 = 33)

e) Qual é a moda dessa distribuição? A resposta "sim".

f) Por que não é possível calcular a média aritmética? Porque a variável é qualitativa e não quantitativa.

24 O artigo 3º da Constituição da República Federativa do Brasil diz: "Constituem objetivos fundamentais da República Federativa do Brasil:

I) construir uma sociedade livre, justa e solidária;

II) garantir o desenvolvimento nacional;

III) erradicar a pobreza e a marginalização e reduzir as desigualdades sociais e regionais;

IV) promover o bem de todos, sem preconceitos de origem, raça, sexo, cor, idade e quaisquer outras formas de discriminação".

O texto desse artigo da Constituição apresenta 4 itens (**I**, **II**, **III** e **IV**). O número de palavras em cada um deles é, respectivamente, 7, 4, 13 e 19.

a) Determine o número médio de palavras por item.

b) Copie esta tabela no caderno e complete-a escrevendo o número de letras por palavra e a frequência absoluta delas nos itens **I**, **II**, **III** e **IV** juntos.

Número de letras por palavra

Número de letras	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
FA	9	4	4	2	4	3	3	3	6	0	0	1	2	1	1

Tabela elaborada para fins didáticos.

c) Construa, em papel quadriculado, um gráfico com os dados dessa tabela. MP

d) Qual é a moda do número de letras por palavra? 1 (Com frequência 9.)

25 Ao contar o número de ervilhas em cada uma das 27 vagens, Dimas encontrou: 3, 3, 3, 2, 4, 3, 3, 4, 3, 2, 3, 3, 4, 4, 2, 3, 3, 3, 4, 2, 4, 2, 3, 3, 3, 4, 3 ervilhas.

Ervilhas em vagens.

V. S. Anandhakrishna/Shutterstock

a) Construa no caderno uma tabela de frequências absolutas desses números. MP

b) Determine a moda desses números. 3 ervilhas por vagem.

26 Qual é a moda de um grupo de pessoas com idades de 2, 3, 2, 1 e 50 anos? 2 anos.

27 João registrou, durante 10 dias, o intervalo de tempo gasto para ir de casa à escola: 15 min, 14 min, 18 min, 15 min, 14 min, 25 min, 16 min, 15 min, 15 min e 16 min. Qual foi a moda do intervalo de tempo gasto por dia? 15 min

28 Marisa lançou um dado 7 vezes e obteve as seguintes pontuações: 2, 6, 2, 5, 1, 3 e 2. Calcule no caderno:

a) a média aritmética dos pontos obtidos;

b) a moda dos pontos obtidos. 2

29 Calcule no caderno o valor de x:

a) para que a média aritmética de $x + 1$, $2x$ e $x - 4$ seja igual a 7;

b) para que a moda de $2x - 1$, 7 e 9 seja igual a 9. $x = 5$ $(2x - 1 = 9 \Rightarrow x = 5)$

24. a) 10,75 palavras. $\left(\frac{7+4+13+19}{4} = \frac{43}{4} = 10{,}75\right)$

29. a) $x = 6$ $\left(\frac{x+1+2x+x-4}{3} = 7 \Rightarrow 4x - 3 = 21 \Rightarrow x = 6\right)$

4 Medidas de dispersão

Já estudamos as medidas de tendência central mais usadas, como a média aritmética, a moda e a mediana. Elas têm como objetivo concentrar em um único número os diversos valores de uma variável quantitativa.

Agora, estudaremos situações em que as medidas de tendência central são insuficientes.

Veja alguns exemplos.

Diego Cervo/Shutterstock

Jovem fazendo prova.

- O critério de aprovação em um concurso estabelece que o candidato deve realizar 3 provas e obter, com as notas, média igual ou maior do que 6,0. Nesse caso, a informação de que o candidato obteve média 7,5 é suficiente para concluir que ele está aprovado.
- Uma pessoa é encarregada de organizar atividades de lazer para um grupo de 6 pessoas e recebe a informação de que a média das idades do grupo é 20 anos. Nesse caso, apenas a informação da média não é suficiente para planejar as atividades, pois podemos ter grupos com média das idades de 20 anos e características totalmente diferentes. As outras medidas de tendência central podem não ser suficientes também.

  Observe alguns grupos possíveis.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Grupo A: 20 anos, 20 anos, 20 anos, 20 anos, 20 anos, 20 anos.

$$MA = \frac{20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

$$Me = \frac{20 + 20}{2} = 20$$

$$Mo = 20$$

Grupo B: 22 anos, 23 anos, 18 anos, 19 anos, 20 anos, 18 anos.

$$MA = \frac{22 + 23 + 18 + 19 + 20 + 18}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

$$Me = \frac{19 + 20}{2} = 19{,}5$$

$$Mo = 18$$

Grupo C: 7 anos, 62 anos, 39 anos, 4 anos, 7 anos, 1 ano.

$$MA = \frac{7 + 62 + 39 + 4 + 7 + 1}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

$$Me = \frac{7 + 7}{2} = 7$$

$$Mo = 7$$

Observe que no grupo **A** não houve variação nas idades, no grupo **B** houve variação, mas as idades são todas próximas. Porém, no grupo **C**, além de haver variação, as idades são muito diferentes entre as pessoas do grupo e isso dificultaria na programação de uma atividade comum a todos!

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Como as medidas de tendência central não são suficientes para caracterizar o grupo **C**, é conveniente utilizar medidas que expressem o **grau de dispersão** de um conjunto de dados. As **medidas de dispersão** mais usadas são a **variância** e o **desvio-padrão**.

4 Medidas de dispersão

Principal habilidade da BNCC

EF08MA25

Explique que o objetivo das medidas de tendência central é determinar um valor que represente todos os valores de uma variável, mas que, às vezes, elas não são suficientes.

Então, apresente as 2 situações dadas nesta página e peça que analisem se apenas a média aritmética do conjunto de valores é suficiente para representá-lo. Após a análise dos alunos, mostre que, no primeiro caso, para obter média 7,5 o candidato pode ter notas 7,5; 7,5; 7,5 ou 2,5; 10; 10, por exemplo. Assim, a mediana e a moda para esses conjuntos seriam, respectivamente, 7,5 e 7,5; 10 e 10.

Para o segundo caso, mostre os possíveis grupos dados no material para obter média 20 e peça aos alunos que criem outros grupos que satisfaçam a situação.

Se achar conveniente, explore também o rali de regularidade, cujo vencedor é o participante que se mantém mais próximo da medida de velocidade média fornecida pela organização da competição. Convide os alunos a pesquisar as regras dessa modalidade de rali e, depois, peça que elaborem um problema abordando o tema com medidas de tendência central. Essa exploração pode ser feita em conjunto com as aulas de Educação Física.

Para finalizar, explique que veremos, na próxima página, 2 medidas que expressam a dispersão de um conjunto: variância e desvio-padrão.

4 Medidas de dispersão

Variância

Usando os grupos **A**, **B** e **C** da página anterior, peça aos alunos que verifiquem o quanto cada valor se afasta da média do conjunto, o que chamamos de **desvio**.

Assim, podem verificar que, no grupo **A**, todos os desvios são iguais a zero, já que todos os valores são iguais à média. Nos outros grupos, no entanto, os desvios são diferentes, havendo alguns positivos e outros negativos.

Como queremos um único valor para representar a dispersão do conjunto, peça que calculem a média dos desvios de cada grupo para verificarem se conseguem algum valor. Espera-se que os alunos percebam que essa operação sempre resultará em zero.

Então, sugira que elevem ao quadrado os desvios, para torná-los todos positivos, e calculem a média deles. Após efetuarem essas operações, defina que o valor que obtiveram para cada grupo é conhecido como **variância**, representado por V.

Desvio-padrão

Destaque que esse valor não está na mesma unidade dos valores, pois os desvios foram elevados ao quadrado. Logo, para obter uma medida na mesma unidade dos valores, calculamos a raiz quadrada da variância, que chamamos de **desvio-padrão**. Chame a atenção dos alunos para o fato de que essas 2 medidas sempre são positivas ou nulas.

Neste momento, explique que, quanto menores forem a variância e, consequentemente, o desvio-padrão em um conjunto de dados, mais regulares são os valores, ou seja, mais homogêneo é o conjunto.

Variância

Para definir a variância de um conjunto de dados, precisamos antes conhecer o valor do **desvio** de cada dado. O desvio é calculado pela diferença entre cada dado e a média do conjunto.

Por exemplo, em um grupo de 3 pessoas com 5 anos, 15 anos e 40 anos, temos a média de 20 anos. Então, o desvio do valor 5 anos é -15 ($5 - 20 = -15$), o desvio do valor 15 anos é -5 ($15 - 20 = -5$) e o desvio do valor 40 anos é 20 ($40 - 20 = 20$).

Assim, definimos a variância.

A **variância (*V*)** de um conjunto de dados é a média aritmética dos quadrados dos desvios.

Por exemplo, vamos calcular a variância nos grupos **A**, **B** e **C** citados na página anterior:

- Grupo **A**: 20, 20, 20, 20, 20, 20.
  $MA = 20$ Desvios: $20 - 20 = 0$; todos iguais a 0. $V = 0$
  Quando todos os valores são iguais, dizemos que não houve dispersão e, por isso, a variância é igual a 0.
- Grupo **B**: 22, 23, 18, 19, 20, 18.
  $MA = 20$
  Desvios: $22 - 20 = 2$; $23 - 20 = 3$; $18 - 20 = -2$; $19 - 20 = -1$; $20 - 20 = 0$; $18 - 20 = -2$
  Como a variância é a média aritmética dos quadrados dos desvios, temos:
  $$V = \frac{2^2 + 3^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-2)^2}{6} = \frac{4 + 9 + 4 + 1 + 0 + 4}{6} = \frac{22}{6} \simeq 3{,}6$$
- Grupo **C**: 6, 62, 39, 4, 8, 1.
  $MA = 20$
  Desvios: $6 - 20 = -14$; $62 - 20 = 42$; $39 - 20 = 19$; $4 - 20 = -16$; $8 - 20 = -12$; $1 - 20 = -19$.
  $$V = \frac{(-14)^2 + 42^2 + 19^2 + (-16)^2 + (-12)^2 + (-19)^2}{6} = \frac{3\,082}{6} \simeq 513{,}6$$

A variância é suficiente para diferenciar a dispersão dos grupos: o grupo **A** não tem dispersão ($V = 0$) e o grupo **C** tem uma dispersão maior do que a do grupo **B** ($513{,}6 > 3{,}6$).

Porém, não é possível expressar a variância na mesma unidade dos valores da variável, pois os desvios dos dados são elevados ao quadrado. Então, definiu-se outra medida de dispersão, chamada **desvio-padrão**.

Thiago Neumann/ Arquivo da editora

Desvio-padrão

O **desvio-padrão (*DP*)** é a raiz quadrada da variância.

O desvio-padrão facilita a interpretação dos dados, pois é expresso na mesma unidade dos valores observados (do conjunto de dados).

No exemplo que estamos analisando, vamos usar uma calculadora e a aproximação racional nas raízes quadradas.

- Grupo **A**: $DP = \sqrt{0} = 0$ (A dispersão é de 0 ano. Não há dispersão.)
- Grupo **B**: $DP = \sqrt{3{,}6} \simeq 1{,}9$ (A dispersão é de, aproximadamente, 1,9 ano. É uma pequena dispersão.)
- Grupo **C**: $DP = \sqrt{513{,}6} \simeq 22{,}6$ (A dispersão é de, aproximadamente, 22,6 anos. É uma dispersão grande.)

A variância e o desvio-padrão são sempre números positivos ou nulos.

Veja outros exemplos.

- Em um treinamento de salto em altura, cada atleta realizou 4 saltos. Veja as marcas obtidas por 3 atletas.
  Atleta **A**: 148 cm, 170 cm, 155 cm e 131 cm.
  Atleta **B**: 145 cm, 151 cm, 150 cm e 152 cm.
  Atleta **C**: 146 cm, 151 cm, 143 e 160 cm.

  a) Qual deles obteve maior média?

  Atleta **A**: $MA = \dfrac{148 + 170 + 155 + 131}{4} = \dfrac{604}{4} = 151$

  Atleta **B**: $MA = \dfrac{145 + 151 + 150 + 152}{4} = \dfrac{598}{4} = 149{,}5$

  Atleta **C**: $MA = \dfrac{146 + 151 + 143 + 160}{4} = \dfrac{600}{4} = 150$

  Logo, o atleta **A** obteve a maior média, de 151 cm.

  b) Qual deles foi o mais regular?

  A maior regularidade é verificada a partir do desvio-padrão.

  Atleta **A**: $V = \dfrac{(148 - 151)^2 + (170 - 151)^2 + (155 - 151)^2 + (131 - 151)^2}{4} = \dfrac{9 + 361 + 16 + 400}{4} =$

  $= \dfrac{786}{4} = 196{,}5$

  $DP = \sqrt{196{,}5} \simeq 14$

  Atleta **B**: $V = \dfrac{(-4{,}5)^2 + (1{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + (2{,}5)^2}{4} = \dfrac{20{,}25 + 2{,}25 + 0{,}25 + 6{,}25}{4} = \dfrac{29}{4} = 7{,}25$

  $DP = \sqrt{7{,}25} \simeq 2{,}7$

  Atleta **C**: $V = \dfrac{(-4)^2 + 1^2 + (-7)^2 + 10^2}{4} = \dfrac{16 + 1 + 49 + 100}{4} = \dfrac{166}{4} = 41{,}5$

  $DP = \sqrt{41{,}5} \simeq 6{,}4$

  Logo, o atleta **B** foi o mais regular, pois o desvio-padrão é o menor, de aproximadamente 2,7 cm.

- Este histograma mostra o resultado de uma pesquisa sobre a medida de comprimento da altura (em centímetros) dos alunos de uma turma. Qual é o desvio-padrão dessa variável?

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Medidas de comprimento da altura dos alunos de uma turma

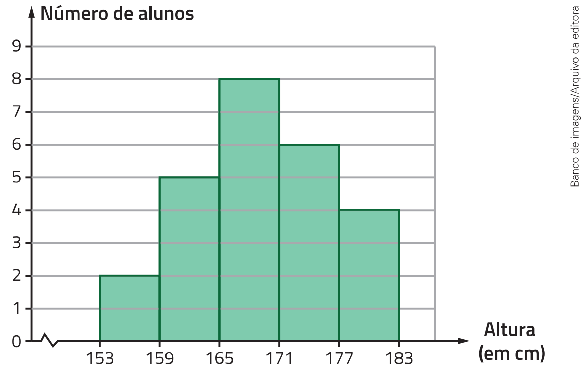


Gráfico elaborado para fins didáticos.

4 Medidas de dispersão

Apresente o exemplo do treinamento de salto em altura para que os alunos comparem a média e a regularidade dos atletas.

Se necessário, destaque que, para verificar qual dos atletas foi o mais regular, basta calcular a variância de cada um deles e compará-las, não sendo necessário o cálculo do desvio-padrão. No entanto, para que eles se acostumem com essa medida de dispersão, solicite que também o calculem.

Peça aos alunos que compartilhem as resoluções e as respostas obtidas com a turma, verificando se obtiveram as mesmas conclusões nessa situação.

Em seguida, mostre o histograma fornecido no livro para que os alunos calculem o desvio-padrão dos dados apresentados nesse gráfico.

4 Medidas de dispersão

Como os valores da variável são dados em intervalos no histograma, relembre os alunos de usarem os pontos médios das classes para os cálculos.

Se necessário, destaque que devemos considerar as frequências absolutas fornecidas no histograma como os pesos dos valores para calcular a média aritmética ponderada e a variância.

Então, peça aos alunos que registrem, no painel de descobertas, as principais informações sobre variância e desvio-padrão.

Atividades 30 e 31

Estas atividades desenvolvem o cálculo das medidas de tendência central e do desvio-padrão.

Veja a resolução da atividade 30 abaixo.

A atividade 31 trabalha também a construção de um histograma, a partir dos intervalos e frequências absolutas dados e do polígono de frequência correspondente a ele. Assim, os alunos devem usar o ponto médio de cada intervalo para calcular as medidas de tendência central e o desvio-padrão.

Veja na página LXII deste Manual a resolução da atividade 31.

Atividade 32

Aborda o cálculo da média e da mediana dos dados fornecidos em uma tabela de frequências absolutas e a comparação da variância antes e após a adição de alguns valores ao conjunto de dados.

Veja na página LXIII deste Manual a resolução desta atividade.

No histograma, os valores da variável são intervalos e, por isso, vamos usar os respectivos pontos médios.

153 ⊢ 159	159 ⊢ 165	165 ⊢ 171	171 ⊢ 177	177 ⊢ 183
156 (frequência 2)	162 (frequência 5)	168 (frequência 8)	174 (frequência 6)	180 (frequência 4)

$$MP = \frac{2 \cdot 156 + 5 \cdot 162 + 8 \cdot 168 + 6 \cdot 174 + 4 \cdot 180}{2 + 5 + 8 + 6 + 4} =$$

$$= \frac{312 + 810 + 1344 + 1044 + 720}{25} =$$

$$= \frac{4\,230}{25} = 169{,}2$$

Observe que no cálculo da variância foram usadas as frequências dos valores. Por isso, a necessidade do cálculo da média aritmética ponderada.

Desvios: $156 - 169{,}2 = -13{,}2$; $162 - 169{,}2 = -7{,}2$; $168 - 169{,}2 = -1{,}2$; $174 - 169{,}2 = 4{,}8$; $180 - 169{,}2 = 10{,}8$.

$$V = \frac{2 \cdot (-13{,}2)^2 + 5 \cdot (-7{,}2)^2 + 8 \cdot (-1{,}2)^2 + 6 \cdot (4{,}8)^2 + 6 \cdot (4{,}8)^2 + 4 \cdot (10{,}8)^2}{25} =$$

$$= \frac{348{,}48 + 259{,}2 + 11{,}52 + 138{,}24 + 466{,}56}{25} = \frac{1\,224}{25} = 48{,}96$$

$DP = \sqrt{48{,}96} \simeq 6{,}99$.

Assim, o desvio-padrão é de 6,99 cm.

Atividades

Não escreva no livro!

30 Um concurso utiliza como nota a média e o desvio-padrão das notas de 3 provas. Calcule no caderno a média e o desvio-padrão de um candidato que obteve nas provas 63 pontos, 56 pontos e 64 pontos. Média: 61; desvio-padrão: 3,56.

31 Em uma turma, as notas obtidas pelos alunos foram agrupadas da seguinte maneira:

- 0 ⊢ 2 (1 aluno);
- 2 ⊢ 4 (6 alunos);
- 4 ⊢ 6 (9 alunos);
- 6 ⊢ 8 (8 alunos);
- 8 ⊢ 10 (6 alunos).

Com esses dados, faça o que se pede no caderno.

a) Construa o histograma e marque o polígono de frequência. MP

b) Calcule a média, a moda, a mediana e o desvio-padrão dos dados. $MA = 5{,}8$; $Mo = 5{,}0$; $Me = 5{,}0$; $DP = 2{,}28$.

32 Observe esta tabela.

Salários dos funcionários de uma empresa

Salário (em R$)	Número de funcionários
1 000,00	10
1 500,00	5
2 000,00	1
2 500,00	10
5 500,00	4
11 000,00	1
Total	**31**

Tabela elaborada para fins didáticos.

a) Qual é a média e qual é a mediana dos salários dos funcionários dessa empresa? $MA =$ R$ 2 500,00 e $Me =$ R$ 2 000,00.

b) Suponha que sejam contratados 2 novos funcionários, com salários de R$ 2 500,00 cada um. A variância da nova distribuição de salários ficará menor, igual ou maior do que a anterior? Menor.

30. $MA = \frac{63 + 56 + 64}{3} = \frac{183}{3} = 61$

$$V = \frac{(63 - 61)^2 + (56 - 61)^2 + (64 - 61)^2}{3} = \frac{2^2 + 5^2 + 3^2}{3} = \frac{4 + 25 + 9}{3} = \frac{38}{3} = 12{,}\overline{6}$$

$DP = \sqrt{9{,}3} \simeq 3{,}56$

LEITURA

Estatística – uma presença constante em nossa vida

Atualmente, sabemos que a Estatística está presente nas mais diversas atividades humanas, que vão, por exemplo, do esporte à agricultura. O técnico de uma equipe de futebol, ao contratar um atleta, vai querer analisar o desempenho desse jogador, como o número de passes que ele acertou ou errou em média por partida, quantos cartões disciplinares (amarelo ou vermelho) recebeu ao longo da carreira, a média de gols que marcou por partida e o tempo que ficou lesionado. Isto é, todos os dados que possam interferir no desempenho do jogador.

Levantamentos de dados são necessários também na agricultura. Um agricultor que cultiva milho precisa saber a oscilação de preços no mercado, a média de precipitação pluviométrica (chuva) na região, o preço de insumos, o custo com empregados, etc. Como diz o ditado: "colocar tudo na ponta do lápis".

Quanto a esses procedimentos, do técnico de futebol ao do agricultor, podemos seguramente dizer que estão trabalhando com a Estatística. Mas sempre foi assim? A resposta é não. Essa prática começou na Antiguidade e não tinha a amplitude de aplicações que existem atualmente. A finalidade inicial dessa ciência era voltada basicamente aos interesses do Estado; ou seja, dos governos.

A palavra estatística vem do latim, *status* (estado), com o sentido de coleta de dados a serviço do Estado. Há indícios que em 3000 a.C. já se faziam censos na Babilônia. A palavra "censo" é derivada de *censere*, que no latim quer dizer 'taxar'. Podemos imaginar que os censos basicamente existiam para coletar dados de uma população e depois cobrar os impostos adequadamente.

No ano de 1085, na Inglaterra, Guilherme, o conquistador, solicitou um levantamento estatístico para apresentar dados e informações sobre terras, proprietários, uso de terra, empregados e animais. Os resultados desse censo foram publicados em 1086 no manual *Domesday Book*, que serviu de base para o cálculo de impostos.

Atualmente, sabemos que a prática de coletar dados de colheitas, população humana ou de animais, impostos, etc., era conhecida por hebreus, egípcios, caldeus e gregos. Mas somente no século XVII a Estatística passou a ser considerada uma ciência independente do objetivo primário de descrever os bens do Estado.

Private Collection/Bridgeman Images/Fotoarena/Coleção particular

Rei Guilherme I. 1829. William Pickering. Gravura, dimensões desconhecidas.

A evolução da Matemática e o advento dos computadores foram fundamentais para o desenvolvimento dessa ciência como a conhecemos.

É no Ensino Fundamental que costumamos ter nosso primeiro contato formal com a Estatística, mas não é exagero imaginarmos que essa ciência não nos abandonará mais. Empresas, governos, universidades, estabelecimentos comerciais, etc. não conseguem sobreviver sem a Estatística. Enfim, essa ciência está presente na vida de um agricultor que pretende ter lucro com uma roça de milho, na vida de um técnico de futebol que quer ver o time campeão em um campeonato e até na sua vida, quando quiser saber se a nota na última prova de Matemática está acima ou abaixo da média da turma.

Fonte de consulta: UFSCAR. *História da Estatística*. Disponível em: <www.ufscar.br/jcfogo/Estat_1/arquivos/Historia_da_Estatistica>. Acesso em: 31 jul. 2018.

Leitura

Primeiramente, peça aos alunos que citem situações cotidianas em que a Estatística está presente e que as procurem na internet ou em jornais, levando-as para a sala de aula na próxima aula.

Peça que compartilhem com os colegas e que verifiquem se ocorre mesmo o uso da Estatística nas situações apresentadas pela turma.

Em seguida, questione-os: "A importância dada à Estatística sempre foi tão grande como é hoje?"; "Antigamente, como ela era usada?"; "E qual era a finalidade da utilização dela?".

Se achar conveniente, peça aos alunos que pesquisem sobre a história da Estatística para responderem a essas perguntas e conversem sobre o assunto.

Só então solicite a leitura do texto desta página e sugira que compartilhem as informações novas proporcionadas por ele.

Matemática e tecnologia

Principais habilidades da BNCC

EF08MA26 EF08MA27

Primeiramente, questione os alunos sobre quais são os passos necessários para fazer uma pesquisa estatística. Ouça as informações apresentadas por eles, corrigindo ou complementando caso seja preciso.

Então, incentive-os a ler os principais tópicos de uma pesquisa apresentados no material e faça-os perceber a importância de cada etapa descrita.

Verifique se os alunos conseguem entender tudo que é apresentado no livro e, se necessário, retome explorações anteriores envolvendo identificação do objeto de pesquisa, definição do tipo de pesquisa, escolha do tipo de amostra (quando a pesquisa não é censitária), coleta de informações, organização e apresentação dos dados.

Nesta página, inicia-se a apresentação do LibreOffice com os 6 aplicativos que o compõem. Por isso, verifique se algum aluno conhece esse *software* ou programas semelhantes a ele.

MATEMÁTICA
E TECNOLOGIA

Planejamento e execução de uma pesquisa amostral

Toda pesquisa estatística deve começar pelo planejamento. Quando a pesquisa é bem planejada e executada de acordo com o planejado, ela deve apresentar resultados confiáveis. Mas como planejar uma pesquisa? Veja os principais tópicos.

- **Identificação dos objetos, da população e da modalidade da pesquisa (censitária ou por amostragem).**
  Primeiro é necessário decidir qual é o objeto (a variável) de pesquisa, ou seja, o que pretendemos pesquisar. A partir daí, podemos avaliar qual é a população foco da pesquisa e qual é o tipo de pesquisa mais condizente com o objeto em questão.
  Por exemplo, se o objeto da pesquisa for a idade média das pessoas que têm acesso à internet no Brasil, então a população escolhida é a população brasileira e o tipo de pesquisa pode ser censitário ou amostral. Lembrando que, nesse caso, é muito difícil fazer uma pesquisa censitária, já que a população é muito grande.
- **Escolha do tipo de amostra.**
  Caso a pesquisa não seja censitária, devemos escolher o tipo de amostragem mais conveniente. Nesse caso, podemos escolher a amostra sistemática e é interessante dividir a população em faixas etárias e escolher indivíduos aleatoriamente em cada faixa etária.
- **Coleta de informações.**
  Uma vez que todos os parâmetros foram escolhidos, é necessário criar um questionário adequado ao objeto, ao tipo da pesquisa e à amostra escolhida. É importante perguntar não apenas sobre o objeto em questão, mas também informações sobre a população pesquisada, como sexo, escolaridade, qualidade de vida, idade, entre outros.
- **Processamento e exibição dos dados.**
  Depois da coleta de dados, podemos organizá-los em tabelas e gráficos, de acordo com os objetivos da pesquisa. Nesse momento, também é importante escolher o melhor tipo de gráfico para cada conjunto de dados.
- **Análise dos resultados e disponibilidade de dados.**
  Depois da organização dos dados, temos condições de analisá-los e obter conclusões sobre eles. É importante que o trabalho fique disponível para pessoas e entidades interessadas no objeto da pesquisa. Além disso, toda a metodologia da pesquisa (escolha dos parâmetros) deve estar disponível no relatório final, assegurando assim a credibilidade das conclusões.

Agora que você já sabe como fazer uma pesquisa, vamos usar o Libreoffice para nos ajudar a planejar e realizar uma pesquisa amostral.

O LibreOffice

O LibreOffice (antigo BROffice) é um *software* livre formado por 6 aplicativos.

- Editor de texto (Write).
- Planilha eletrônica (Calc).
- Editor de apresentação (Impress).
- Editor de desenho (Draw).
- Editor de fórmulas (Math).
- Banco de dados (Base).

No endereço <www.libreoffice.org/>, você pode fazer o *download* do *software*. Durante a instalação, é necessário indicar o sistema operacional de seu computador (MS-Windows, MacOS ou Linux). Se precisar, peça para alguém mais experiente ajudá-lo com a instalação.

O aplicativo Calc é uma ferramenta que, entre outras vantagens, permite a construção de gráficos. Utilizaremos esse recurso tecnológico para auxiliar a representar e interpretar dados de uma pesquisa.

Depois de realizar o *download*, observe que esse aplicativo é uma planilha eletrônica. Ela é formada por linhas (1, 2, 3, 4, ...) e colunas (A, B, C, ...).

Realizando uma pesquisa amostral

Vamos realizar uma pesquisa amostral na escola. Para isso, siga o passo a passo.

1º passo: Defina o objeto da pesquisa, a população e o tipo da pesquisa. Para esse exemplo, o objeto da pesquisa será "número de pessoas que moram na mesma residência" e a população serão todos os alunos da escola.

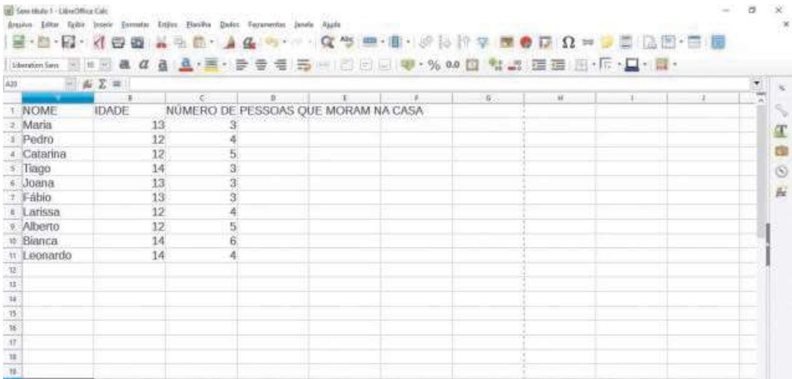
Apesar de ser possível coletar todos os dados dos alunos da escola, isso geraria uma quantidade muito grande de dados para serem analisados; por isso, faremos uma pesquisa amostral.

2º passo: Agora que definimos os parâmetros da pesquisa, defina como será feita a amostragem. Nesse caso, considerando a praticidade, é melhor usar uma amostra estratificada. Coletando aleatoriamente dados de indivíduos de cada ano da escola ou, ainda, de cada turma. Por exemplo, escolha aleatoriamente 5 alunos de cada turma e aplique o questionário apenas a esses alunos.

3º passo: Escreva um questionário com perguntas sobre o objeto de pesquisa. Por exemplo, "Qual é seu nome?"; "Qual é sua idade?"; "Quantas pessoas moram na sua casa, incluindo você?". Depois, aplique esse questionário para todos os indivíduos escolhidos de acordo com a amostra.

4º passo: Agora que já temos todos os dados, você pode organizá-los em tabelas construídas em uma planilha eletrônica. Coloque na planilha uma coluna para cada pergunta feita.

Digite na primeira linha as informações obtidas com as perguntas, por exemplo, "Nome"; "Idade"; "Número de pessoas que moram na casa". Depois, em cada coluna, coloque as informações obtidas por meio do questionário. Aqui, cada linha corresponde às respostas de uma pessoa diferente.



NOME	IDADE	NÚMERO DE PESSOAS QUE MORAM NA CASA
Maria	13	3
Pedro	12	4
Catarina	12	5
Tiago	14	3
Joana	13	3
Fábio	13	3
Larissa	12	4
Alberto	12	5
Bianca	14	6
Leonardo	14	4

Fotos: Reprodução/LibreOffice.org

Observações

- Você pode aumentar ou diminuir a largura das colunas clicando entre 2 letras e arrastando o fio para um dos lados.

- Você pode *desfazer* ou *refazer* uma ação clicando nos ícones localizados à esquerda na barra de ferramentas.

Matemática e tecnologia

Pergunte: "Vocês sabem o que é uma planilha eletrônica?"; "O que pode ser feito em planilhas eletrônicas?". Apresente o Calc aos alunos e, se possível, leve-os à sala de informática para que o explorem. Destaque a utilidade desse aplicativo do LibreOffice, explicando que ele é uma planilha eletrônica que possibilita, entre outras coisas, a construção de gráficos.

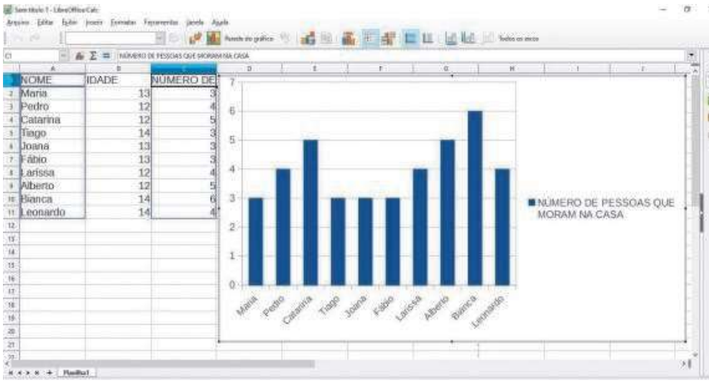
Em seguida, convide os alunos a realizar a pesquisa amostral para o objeto de pesquisa apresentado no livro, seguindo os passos apresentados no material.

Para esta atividade, o ideal é trabalhar coletivamente com todas as turmas. Outra opção é organizar o questionário, pedir a todos os alunos que o respondam e depois pedir a eles que pensem em uma técnica de amostragem para escolher quais dados eles vão usar.

Após a aplicação dos questionários, se possível, leve a turma à sala de informática para que os grupos organizem os dados no Calc ou em alguma planilha eletrônica equivalente.

5º passo: Selecione todas as células preenchidas nas colunas **A** e **C**. Para isso, clique com o botão esquerdo do *mouse* na primeira célula da coluna **A** e arraste para baixo até a última célula que tem informações sobre o número de moradores da residência.

6º passo: Clique na função "Inserir Gráfico" que se encontra na parte superior da tela. Será aberta uma nova janela; selecione a opção "Coluna". Clique em "Concluir" e será gerado um gráfico de colunas.



Fotos: Reprodução/LibreOffice.org

7º passo: Além de gráficos, você pode usar as medidas de tendência central e de dispersão para ajudar a obter conclusões de um conjunto de dados. Essas medidas também podem ser obtidas usando uma planilha eletrônica.

Para calcular essas medidas, é necessário saber o código que indica cada uma delas na planilha eletrônica. Para o cálculo da média aritmética, por exemplo, o código é **MÉDIA**.

Para realizar esse cálculo, é preciso identificar onde começa e onde termina o intervalo dos dados que você colocou na planilha. Por exemplo, para a variável "idade", o intervalo começa na célula **B1** e vai até a célula **B10**.

Dessa maneira, clique em uma célula vazia, na planilha e digite: **= MÉDIA (B1:B10)**, depois tecle *enter*. Na célula que estava vazia, aparecerá o valor correspondente à média do conjunto de valores selecionados; nesse caso, a média das idades da amostra da população.

8º passo: Faça o mesmo para calcular as outras medidas de tendência central e de dispersão das variáveis "idade" e "número de pessoas que moram na casa". Veja os códigos das outras medidas.

Moda: **MODA**	= MODA (B1:B10)
Mediana: **MED**	= MED (B1:B10)
Desvio-padrão: **DESVPAD**	= DESVPAD (B1:B10)
Variância: **VAR**	= VAR (B1:B10)

Lembre-se de substituir células correspondentes a cada variável e aos dados dos colegas.

Não escreva no livro!

Questões

1 Qual é a diferença entre o número máximo de residentes e o número mínimo de residentes (amplitude)? Resposta pessoal.

2 Qual é a média de moradores por residência? Resposta pessoal.

3 Faça um relatório explicando qual é a pesquisa e como você escolheu a amostra. Inclua também o questionário que você criou, a tabela com os dados coletados, o gráfico que você construiu e os valores das medidas de tendência central e de dispersão que você calculou. Por fim, escreva um parágrafo com suas conclusões sobre os dados obtidos na pesquisa. Resposta pessoal.

4 Realize outra pesquisa com os colegas de sala. Dessa vez, pense em um objeto de pesquisa diferente, por exemplo, quantas pessoas da escola em que vocês estudam reciclam o lixo em casa. Sigam o passo a passo e organizem um relatório com a conclusão de vocês. Resposta pessoal.

Matemática e tecnologia

Solicite aos alunos que analisem qual é o melhor tipo de gráfico para representar os dados. Então, auxilie-os na construção dos gráficos e mostre como podem calcular as medidas de tendência central e as medidas de dispersão.

Questões 1 a 3

Estas questões analisam a pesquisa feita pelos alunos a partir do tema proposto pelo livro, apresentando mais uma medida de dispersão (amplitude).

Peça aos alunos que compartilhem as hipóteses e conclusões sobre a pesquisa com a turma e, depois, escrevam as conclusões sobre os dados obtidos na pesquisa.

Questão 4

Solicite aos alunos que façam uma pesquisa como a anterior para outro tema.

Separe alguns temas com certa relevância social, mas permita que eles escolham o tema que consideram mais significativo. Comente que podem pensar em diferentes opções, como política, problemas ambientais, música preferida, sabonete que usa, etc.

5 Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem

Nos anos anteriores, você já usou esse princípio ou raciocínios similares para resolver alguns problemas, sem ainda conhecer o nome dele. Agora vamos explorar esse conhecimento.

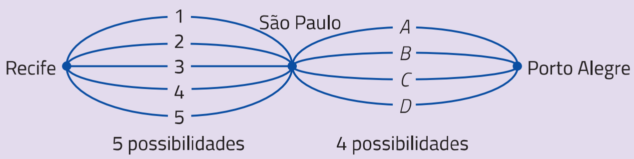
Explorar e descobrir | Não escreva no livro!

Uma pessoa quer viajar de Recife a Porto Alegre passando por São Paulo. Sabendo que há 5 roteiros diferentes para chegar a São Paulo partindo de Recife e 4 roteiros diferentes para chegar a Porto Alegre partindo de São Paulo, de quantas maneiras possíveis essa pessoa poderá viajar de Recife a Porto Alegre?

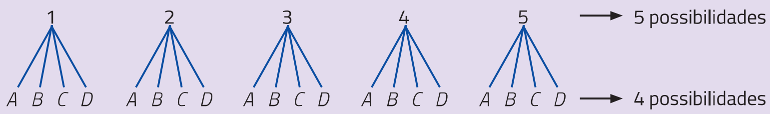
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Dizemos que a viagem de Recife a Porto Alegre é um evento composto de 2 etapas sucessivas e independentes. Quais são elas? A viagem de Recife a São Paulo e a viagem de São Paulo a Porto Alegre.

b) Para facilitar a compreensão do problema, vamos utilizar estes esquemas.



Ou



A esse 2º esquema damos o nome de **árvore de possibilidades** ou **diagrama de árvore**. Você já estudou esse conceito. O que ele significa? É um esquema usado para representar todas as possibilidades de determinado evento.

c) Copie e complete no caderno. Total de possibilidades: $5 \cdot$ ▇ $= 20$. 4

São elas: 1*A*, 1*B*, 1*C*, 1*D*, 2*A*, 2*B*, 2*C*, 2*D*, 3*A*, ▇. 3*B*, 3*C*, 3*D*, 4*A*, 4*B*, 4*C*, 4*D*, 5*A*, 5*B*, 5*C*, 5*D*.

Portanto, há ▇ maneiras possíveis de viajar de Recife a Porto Alegre, passando por São Paulo. 20

De modo geral, podemos dizer:

> Se um evento é composto de 2 etapas sucessivas e independentes de maneira que o número de possibilidades na 1ª etapa é m e, para cada possibilidade da 1ª etapa, o número de possibilidades na 2ª etapa é n, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$. Esse é o **princípio fundamental da contagem**.

Observação: O produto dos números de possibilidades vale para qualquer número de etapas independentes, ou seja, etapas que não têm a possibilidade de ocorrer vinculadas entre si.

5 Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem

Principal habilidade da BNCC

EF08MA22

É importante explicar que o conceito de princípio fundamental da contagem não é novo para os alunos, pois já o usaram inúmeras vezes nos anos anteriores, mas sem conhecê-lo por essa denominação.

Explorar e descobrir

Peça aos alunos que leiam as informações e imagens apresentadas neste boxe e, se possível, elabore com a turma outro exemplo utilizando dados que permitam a construção de esquemas como os apresentados no livro.

Após o *Explorar e descobrir*, sugira a eles que leiam a definição de princípio fundamental da contagem e verifique o que entenderam sobre o assunto.

Corrija ou complete as hipóteses da turma, fazendo-os compreender que a independência das etapas ocorre quando uma etapa não interfere no resultado da outra, como em lançamentos sucessivos de uma moeda.

Se considerar conveniente, peça aos alunos que analisem o lançamento de uma moeda por 4 vezes e verifique se conseguem obter a resposta 16 $(2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16)$ e como chegaram até ela: pela multiplicação, por árvore de possibilidades ou de alguma outra maneira.

5 Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem

Apresente o exemplo do lançamento de uma moeda e de um dado e solicite que verifiquem quantas são as possibilidades.

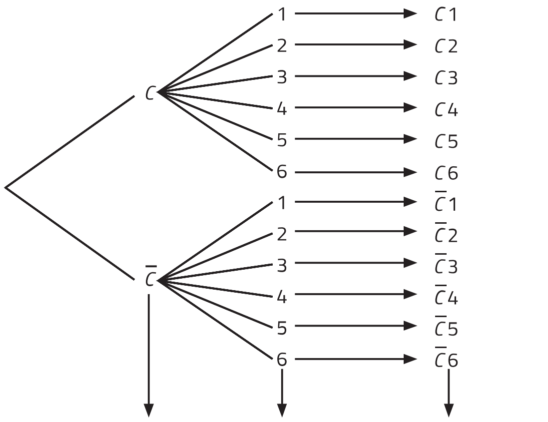
Trabalhe com os alunos a listagem das ocorrências usando a árvore de possibilidades e, em seguida, efetue a multiplicação das possibilidades de cada etapa do evento pelo princípio fundamental da contagem.

Então, apresente o exemplo do restaurante com alguns tipos de saladas, pratos quentes e sobremesas e peça que determinem a quantidade de possibilidades para uma refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa.

Na lousa, construa a árvore de possibilidades com a turma e, depois, sugira que confiram se a resposta seria a mesma se usássemos o princípio fundamental da contagem.

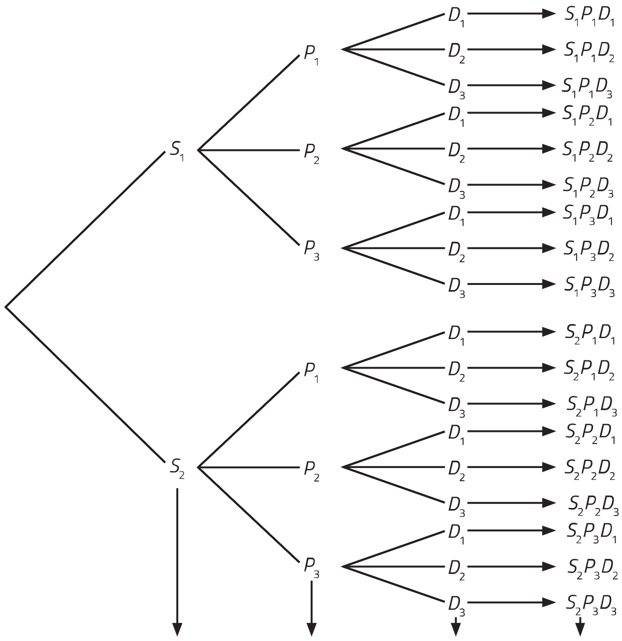
Veja outros exemplos.

- Ao lançar uma moeda e um dado, temos as seguintes possibilidades, para o resultado (sendo C: cara e $\overline{C}$: coroa).



Observe que o evento tem 2 etapas, com 2 possibilidades em uma e 6 possibilidades em outra, totalizando 12 possibilidades ($2 \cdot 6 = 12$).

- Em um restaurante há 2 tipos de salada, 3 tipos de pratos quentes e 3 tipos de sobremesa. Quais e quantas possibilidades temos para fazer um refeição com 1 salada, 1 prato quente e 1 sobremesa? Representando por S_1 e S_2 os 2 tipos de salada; por P_1, P_2 e P_3 os 3 tipos de pratos quentes; e por D_1, D_2 e D_3 os 3 tipos de sobremesa, podemos montar a árvore de possibilidades.

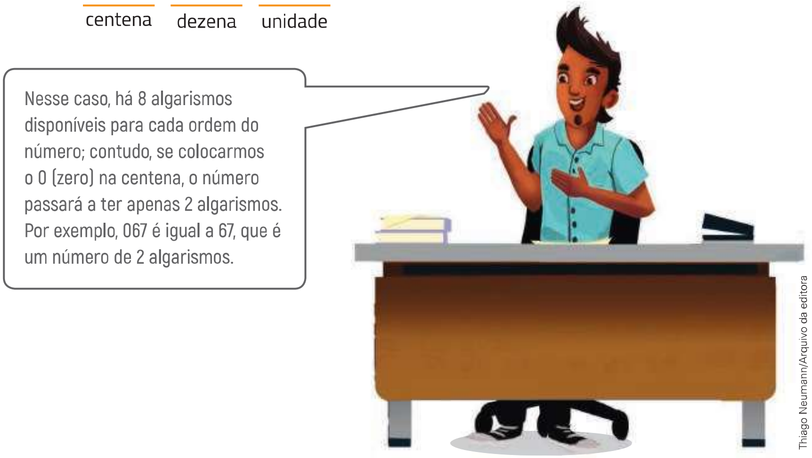


Portanto, o número total de possibilidades é $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

- Considere os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

a) Quantos números de 3 algarismos podemos formar?

___ centena ___ dezena ___ unidade



Thiago Neumann/Arquivo da editora

Assim, podemos concluir que há 7 possibilidades de algarismos para a centena, 8 para a dezena e 8 para a unidade. Portanto, podemos formar 448 números ($7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$).

b) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar?

___ centena ___ dezena ___ unidade

Quando os algarismos são distintos, significa que, se em uma ordem do número tivermos n opções de algarismos, então, na próxima ordem, teremos $n - 1$ opções de algarismos, e assim por diante.

Assim, com 3 algarismos distintos, há 7 possibilidades para a centena (8 possibilidades menos o zero), 7 para a dezena (6 possibilidades mais o zero) e 6 para a unidade. Portanto, podemos formar 294 números ($7 \cdot 7 \cdot 6 = 294$) de 3 algarismos distintos com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Atividades

Não escreva no livro!

33 De quantas maneiras diferentes uma pessoa que tem 5 camisas, 3 calças, 2 pares de meia e 2 pares de sapato pode se vestir? 60 maneiras diferentes. ($5 \times 3 \times 2 \times 2 = 60$)

34 Ao lançarmos sucessivamente 3 moedas diferentes, quantas e quais são as possibilidades de resultado? 8 possibilidades. (Em cada lançamento, podemos ter cara (*C*) ou coroa ($\overline{C}$): $2 \times 2 \times 2 = 8$.)

35 Quantos números de 2 algarismos podemos formar sabendo que o algarismo das dezenas corresponde a um múltiplo de 2 (diferente de zero) e o algarismo das unidades corresponde a um múltiplo de 3? 16 números. (Algarismos das dezenas: 2, 4, 6 ou 8; algarismos das unidades: 0, 3, 6 ou 9; $4 \times 4 = 16$.)

36 Use somente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e responda aos itens no caderno.

a) Quantos números de 2 algarismos podemos formar? 36 números. ($6 \times 6 = 36$)

b) Quantos números pares de 2 algarismos podemos formar? 18 números. (O algarismo das unidades pode ser 2, 4 ou 6; $6 \times 3 = 18$.)

c) Quantos números ímpares de 2 algarismos podemos formar? 18 números. (O algarismo das unidades pode ser 1, 3 ou 5; $6 \times 3 = 18$.)

d) Quantos números de 2 algarismos distintos podemos formar? 30 números. ($6 \times 5 = 30$)

e) Quantos números de 2 algarismos pares podemos formar? 9 números. (Só podem ser utilizados os algarismos 2, 4 e 6; $3 \times 3 = 9$.)

5 Princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem

Apresente os algarismos e peça que os alunos determinem a quantidade de números de 3 algarismos que podem formar a partir deles, destacando que, na casa da centena, não pode ser usado o algarismo 0, pois teríamos um número de 2 algarismos.

Em seguida, com a turma, verifique quantos números de 3 algarismos distintos é possível escrever usando os algarismos de 0 a 7.

Neste momento, sugira aos alunos que anotem, no painel de descobertas, as informações que considerarem importantes sobre o princípio fundamental da contagem, incluindo exemplos de situações em que é usado e a árvore de possibilidades.

As atividades desenvolvem a utilização da árvore de possibilidades e do princípio fundamental da contagem. Permita que os alunos usem a maneira que preferirem para a resolução das atividades, mas destaque que a árvore de possibilidades pode se tornar muito trabalhosa quando temos uma grande quantidade de possibilidades.

Atividade 34

Veja a resolução desta atividade na página LXIII deste Manual.

Atividades 35 e 36

Estas atividades apresentam condições para a ocorrência de algumas etapas, não sendo possível considerar a possibilidade de todos os algarismos em todas as casas do número.

6 Probabilidade

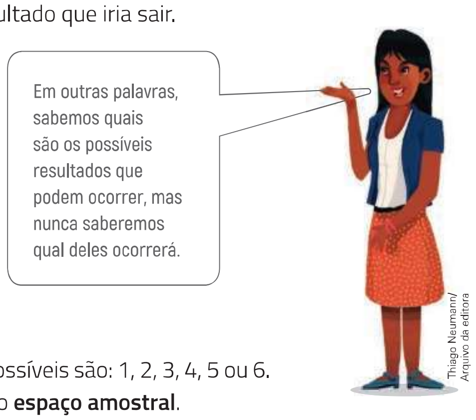
Nos anos anteriores você estudou que é possível medir a chance de um evento acontecer e que essa medida é chamada de **probabilidade**. Também estudou que a **teoria das probabilidades** é o ramo da Matemática que cria, elabora e pesquisa modelos que dão os resultados prováveis ou a probabilidade de determinado resultado ocorrer.

Agora, vamos ampliar esses assuntos, estudando novos conceitos e aplicando-os em diferentes tipos de problema. Acompanhe um exemplo.

Bruna e Lucas estavam lançando um dado de 6 faces durante um jogo de tabuleiro. Em 7 jogadas diferentes, Lucas obteve no dado 6, 3, 4, 1, 2, 5 e 5 pontos.

Em nenhuma das jogadas foi possível prever o resultado que iria sair.

Se, em condições idênticas, fizermos repetidos lançamentos de um dado, não podemos prever que face cairá voltada para cima, ou seja, os resultados são imprevisíveis. Por isso, dizemos que o lançamento de um dado é um **experimento aleatório**.



Thiago Neumann/ Arquivo da editora

Experimento aleatório é aquele que, se for repetido diversas vezes, sob condições idênticas, produz resultados imprevisíveis entre os resultados possíveis.

No lançamento do dado de 6 faces, os resultados possíveis são: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Dizemos, então, que esses resultados correspondem ao **espaço amostral**.

Chamamos de **espaço amostral** o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Representamos o espaço amostral pela letra Ω (lemos: ômega). Assim, no caso do dado que Bruna e Lucas estão lançando, o espaço amostral é representado por $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Bruna e Lucas continuaram a partida no jogo de dados. Em determinado momento, para ganhar, Bruna precisava tirar um número maior ou igual a 5 no lançamento do dado.

Em outras palavras, ela precisava tirar 5 ou 6 para ganhar. Observe que esse conjunto de resultados que dariam a vitória a ela é um subconjunto do espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Esse subconjunto é chamado de **evento**.

Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de **evento**.

Geralmente, um evento é representado por uma letra maiúscula do nosso alfabeto (A, B, C, ..., Z). Por exemplo, o evento A: sair um número maior ou igual a 5 pode ser representado por $A = \{5, 6\}$.

37. c) Ω = {(1, cara), (2, cara), (3, cara), (4, cara), (5, cara), (6, cara), (1, coroa), (2, coroa), (3, coroa), (4, coroa), (5, coroa), (6, coroa)}

Atividades

Não escreva no livro!

37 Determine no caderno o espaço amostral de cada experimento aleatório.

a) Lançamento de uma moeda. Ω = {cara, coroa}

b) Sorteio de um número par maior do que 0 e menor do que 10. Ω = {2, 4, 6, 8}

c) Lançamento de um dado e uma moeda.

38 Descreva os eventos no caderno considerando o lançamento de um dado de 6 faces.

a) A: obter um número par. $A = \{2, 4, 6\}$

b) B: obter um número ímpar. $B = \{1, 3, 5\}$

c) C: obter um número primo. $C = \{2, 3, 5\}$

d) D: obter um número maior do que 3. $D = \{4, 5, 6\}$

e) E: obter um número menor do que 7. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

6 Probabilidade

Principal habilidade da BNCC

EF08MA22

Destaque aos alunos que, nos anos anteriores, eles já estudaram probabilidade, mas que, agora, vamos ampliar esse assunto.

Forneça os resultados obtidos por Lucas após lançar um dado por 7 vezes e explique que esses resultados foram impossíveis de prever. Por isso, o chamamos de experimento aleatório, pois sabemos os resultados possíveis, mas não sabemos o resultado exato que obteremos. Incentive os alunos a pesquisar no dicionário o significado da palavra aleatório e leve-os a concluir que significa ser imprevisível.

Então, retome o assunto espaço amostral, ou seja, o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, destacando a simbologia que usamos para representá-lo. Revise também os subconjuntos do espaço amostral, chamados de eventos, e defina como os representamos.

Atividade 37

Esta atividade trabalha a determinação do espaço amostral referente a cada experimento aleatório descrito nos itens. É possível estender a atividade de forma que os alunos elaborem outros eventos e tentem definir seu espaço amostral.

É necessário cuidado com exageros, pois o espaço amostral do lançamento de 3 dados, por exemplo, tem 216 elementos.

Atividade 38

Esta atividade desenvolve a determinação dos eventos solicitados a partir de um experimento aleatório: lançamento de um dado de 6 faces.

Se necessário, sugira aos alunos que, inicialmente, determinem o espaço amostral desse experimento aleatório para facilitar a resolução desta atividade.

Cálculo de probabilidade

No lançamento de uma moeda honesta, que é um experimento aleatório, há 2 resultados possíveis para a face voltada para cima: cara e coroa. Assim, o espaço amostral desse experimento é $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$. Nesse lançamento, podemos dizer que a medida de chance de sortear qualquer uma das faces voltada para cima é a mesma, ou seja, existe 50% de chance de a moeda cair com a face coroa voltada para cima e 50% de chance de ela cair com a face cara voltada para cima.

Dizemos que um espaço amostral é **equiprovável** quando todos os resultados possíveis têm a **mesma chance** de acontecer.

Todos os espaços amostrais trabalhados neste capítulo são equiprováveis.

A **medida de chance** de ocorrer um evento é chamada, na Matemática, de **probabilidade**. Assim, a probabilidade de ocorrer um evento *A* pode ser indicada por $p(A)$ (lemos: p de *A*). Esse valor corresponde à razão entre o **número de resultados favoráveis** (ou seja, o número de elementos do evento, representado por $n(A)$, que lemos: n de *A*) e o **número de resultados possíveis** (ou seja, o número de elementos do espaço amostral, representado por $n(\Omega)$, que lemos: n de ômega).

Desse modo, podemos escrever:

$$p(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis ao evento } A}{\text{Número de resultados possíveis do experimento}} \text{ ou } p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Veja um exemplo do cálculo de probabilidade.

Lurdes lançou um dado de 6 faces.

a) Qual é a probabilidade de ela obter um número par?

O espaço amostral, isto é, o conjunto de resultados possíveis, é:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Então, o número de resultados possíveis é $n(\Omega) = 6$.

Chamando o evento *A*: obter um número par, ele é indicado por $A = \{2, 4, 6\}$.

Logo, o número de resultados favoráveis é $n(A) = 3$.

Portanto, a probabilidade de Lurdes obter um número par ao lançar o dado é:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Observação: Podemos chamar o evento *B*: obter um número ímpar; assim, $B = \{1, 3, 5\}$. E, também, $p(B) = \frac{1}{2}$.

Observe que, nesse caso, temos: $p(A) + p(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

6 Probabilidade

Inicie conversando sobre o lançamento de uma moeda honesta e a probabilidade de cair qualquer uma das faces voltada para cima a partir do espaço amostral desse evento aleatório. Destaque que tanto cara quanto coroa têm 50% de chance de caírem voltadas para cima e defina esse tipo de espaço amostral, em que todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer, como equiprovável.

Então, avise que todos os espaços amostrais deste capítulo são equiprováveis e relembre que essa medida da chance de um evento ocorrer recebe o nome de probabilidade.

Verifique se os alunos lembram que esse valor pode ser calculado pela razão entre o número de elementos do evento e o número de elementos do espaço amostral, sendo dado em forma de fração, decimal ou porcentagem.

Em seguida, apresente o exemplo do lançamento do dado de 6 faces e peça aos alunos que calculem a probabilidade de se obter um número par. Se necessário, na lousa, calcule essa probabilidade com a turma e mostre que a soma dela com a probabilidade de se obter um número ímpar é igual a 1.

6 Probabilidade

Forneça outro evento (obter um número maior do que 4) para o mesmo espaço amostral da página anterior (lançamento do dado de 6 faces) e peça aos alunos que calculem a probabilidade. Então, mostre que a soma dessa probabilidade com a probabilidade de se obter um número menor ou igual a 4 é igual a 1.

Neste momento, mostre que os eventos "obter um número par" e "obter um número ímpar" não têm elementos em comum. O mesmo vale para os eventos "obter um número maior do que 4" e "obter um número menor ou igual a 4". Defina que, quando isso ocorre, chamamos os eventos de mutuamente exclusivos.

Destaque que, como esses eventos são mutuamente exclusivos e não há resultados no espaço amostral que não pertençam a nenhum deles, a soma das probabilidades desses eventos é igual a 1, ou seja, esses eventos representam todas as possibilidades do espaço amostral.

Você sabia?

Se possível, solicite aos alunos que pesquisem informações acerca da previsão do tempo. A ideia é que coletem dados sobre a estratégia utilizada para identificar as mudanças de temperatura e prever o tempo nos próximos dias, por exemplo. Essa exploração pode ser ampliada nas aulas de Ciências.

Atividades 39, 41 a 43

Estas atividades desenvolvem o cálculo de probabilidade dos eventos descritos para diversos experimentos aleatórios.

Veja na página LXIII deste Manual a resolução da atividade 39.

Atividades 40 e 44

Estas atividades abordam a classificação de pares de eventos como mutuamente exclusivos ou não.

b) Qual é a probabilidade de obter um número maior do que 4?

O espaço amostral é o mesmo.

Vamos chamar o evento C: obter um número maior do que 4, representando-o por $C = \{5, 6\}$. Assim, o número de resultados favoráveis é $n(C) = 2$.

Desse modo, a probabilidade de Lurdes obter um número maior do que 4 no lançamento de um dado é:

$$p(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \simeq 33,3\%$$

Observação: Chamamos o evento D: obter um número menor ou igual a 4; assim, $D = \{1, 2, 3, 4\}$ e $p(D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Observe que $p(C) + p(D) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

Eventos mutuamente exclusivos

No exemplo anterior, vemos que os eventos A e B não têm elementos em comum. O mesmo ocorre com os eventos C e D. Quando isso ocorre, dizemos que os eventos são **mutuamente exclusivos** em cada caso.

Nesses casos, temos $p(A) + p(B) = 1$ e $p(C) + p(D) = 1$, já que, em ambos os casos, os eventos citados representam todos os valores do espaço amostral.

Você sabia?

A previsão do tempo é feita com base no cálculo de probabilidade.
Por exemplo, no dia 31/7/2018, o Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPTEC) previa, para o dia seguinte (1º/8/18), uma probabilidade de chuva em Manaus de 80%.

Atividades

Não escreva no livro!

39 Cinco bolas numeradas de 1 a 5 são colocadas em uma urna e 1 bola é sorteada. Determine no caderno a probabilidade de sortear uma bola com um número:

a) par; $\frac{2}{5}$ ou 40%.
b) ímpar; $\frac{3}{5}$ ou 60%.
c) primo; $\frac{3}{5}$ ou 60%.
d) menor do que 5; **d)** $\frac{4}{5}$ ou 80%.
e) maior do que 4. $\frac{1}{5}$ ou 20%.

40 Quais pares de eventos da atividade anterior são mutuamente exclusivos? Os pares de eventos dos itens **a** e **b** e os pares de eventos dos itens **d** e **e**.

41 Patrícia desafiou Rosângela a resolver uma questão de múltipla escolha com 5 alternativas, em que apenas 1 é correta. Porém, Rosângela não sabe a resposta e vai tentar adivinhar utilizando a sorte. Qual é a probabilidade de Rosângela acertar a questão? $\frac{1}{5}$ ou 20%.

42 Uma caixa contém 4 papéis amarelos, numerados de 1 a 4, e 6 papéis pretos, numerados de 5 a 10. Retirando ao acaso um dos papéis, determine no caderno a probabilidade:

a) de ser um papel amarelo; $\frac{2}{5}$ ou 40%.
b) de ser um papel com número par; $\frac{1}{2}$ ou 50%.
c) de ser um papel amarelo com número par. $\frac{1}{5}$ ou 20%.

43 Valéria e Alexandre inventaram uma brincadeira em que retirariam ao acaso uma ficha colorida de uma sacola e, de acordo com a cor da ficha, cada um receberia uma pontuação. Quem fizesse mais pontos ganharia um prêmio. Eles colocaram na sacola 4 fichas amarelas, 3 fichas brancas e 2 fichas pretas.


Paulo Manzi/Arquivo da editora

Retirando aleatoriamente uma ficha da sacola, qual é a probabilidade de ela ser:

a) amarela? $\frac{4}{9}$ ou aproximadamente 44,4%.
b) branca? $\frac{1}{3}$ ou aproximadamente 33,3%.
c) preta? $\frac{2}{9}$ ou aproximadamente 22,2%.

44 Considere o experimento aleatório da atividade anterior.

a) Quais pares de eventos citados nos itens são mutuamente exclusivos? Nenhum deles.
b) Cite no caderno 2 eventos desse experimento que são mutuamente exclusivos.
Exemplo de resposta: Retirar uma ficha amarela e retirar uma ficha que não seja amarela.

Evento impossível e evento certo

O professor Paulo vai sortear um livro de aventuras entre os 30 alunos do 8º ano **B**.

Mauro Souza/Arquivo da editora

Para isso, ele escreveu, em pedaços de papel, os números 1 a 30, que correspondem aos números dos alunos na lista de chamada. Qual é a probabilidade de o professor Paulo sortear um número maior do que 40?

O número de resultados possíveis é 30, isto é, $n(\Omega) = 30$. Como entre os números de 1 a 30 não há número maior do que 40, o número de resultados favoráveis é 0, ou seja, $n(A) = 0$. Assim, temos:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{0}{30} = 0$$

Portanto, a probabilidade de o professor Paulo sortear um número maior do que 40 é 0, ou seja, esse evento nunca ocorrerá.

Existem alguns eventos que nunca ocorrerão; eles são chamados de **eventos impossíveis**. A probabilidade de acontecer um evento impossível é sempre 0 (zero).

Agora, considerando ainda a situação do sorteio, qual é a probabilidade de o professor Paulo sortear um número menor ou igual a 30?

O espaço amostral é o mesmo. Entre os números de 1 a 30, há 30 números que são menores ou iguais a 30, então, o número de resultados favoráveis é 30, ou seja, $n(B) = 30$. Assim, a probabilidade de esse evento ocorrer é:

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{30}{30} = 1 = 100\%$$

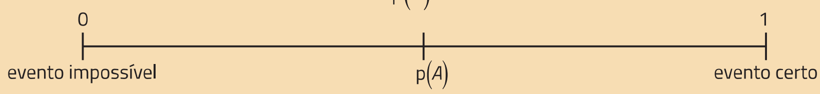
Portanto, a probabilidade de o professor Paulo sortear um número menor ou igual a 30 é 1 ou 100%, ou seja, podemos garantir com certeza que esse evento ocorrerá.

Todo evento que podemos garantir que ocorrerá é chamado de **evento certo**.
Para que isso ocorra, é necessário que o evento coincida com todos os resultados possíveis, ou seja, com o espaço amostral. Nesse caso, a probabilidade é sempre 1 ou 100%.

Assim, podemos concluir o seguinte:

Qualquer que seja o evento A, a probabilidade de ocorrer A é um número que varia de 0 até 1.

$$0 \leqslant p(A) \leqslant 1$$



Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividade

Não escreva no livro!

45 Classifique no caderno estes eventos como evento impossível ou evento certo.

a) Um número ímpar terminar em 6. Evento impossível.

b) O dia do mês (data de hoje) ser menor do que 40. Evento certo.

c) Um triângulo ter 4 lados. Evento impossível.

d) Um cubo ter 8 vértices. Evento certo.

e) No lançamento de um dado comum, de 6 faces, sortear um número menor do que 10. Evento certo.

f) Um número par entre 1 e 5 ser múltiplo de 3. Evento impossível.

6 Probabilidade

Antes de iniciar as explorações desta página, pergunte aos alunos se eles lembram o que é um evento certo e um evento impossível.

Após as respostas, peça aos alunos que calculem a probabilidade de sortearmos um número maior do que 40 entre os números de 1 a 30. Esperamos que os alunos percebam que essa probabilidade é igual a 0 e, então, explique que o evento “sortear um número maior do que 40” é impossível no espaço amostral dos números de 1 a 30.

Em seguida, questione-os sobre qual é a probabilidade de sortearmos um número menor ou igual a 30 nesse mesmo espaço amostral. Provavelmente os alunos conseguem definir que essa probabilidade é igual a 1 (100%). Aproveite para definir esse evento como certo, pois coincide com todos os resultados possíveis.

Para finalizar, explique que, a partir disso, podemos concluir que, em qualquer evento, a probabilidade de ocorrência varia entre 0 e 1. Sugira que anotem, no painel de descobertas, essa conclusão e tudo que considerarem importante sobre os assuntos experimento aleatório, espaço amostral, evento, cálculo de probabilidades, espaço amostral equiprovável, eventos mutuamente exclusivos, evento impossível e evento certo.

Atividade 45

Esta atividade trabalha a classificação de cada evento dado como impossível ou certo.

Leitura

Primeiro, peça aos alunos que leiam o texto sobre a história da teoria das probabilidades e que conversem sobre o que entenderam e o que sabem sobre os matemáticos citados.

Em seguida, se possível, peça aos alunos que pesquisem mais informações sobre cada um deles. Se julgar conveniente, peça que se reúnam em grupos, de modo que cada um deles fique responsável por um matemático. Ao final, convide-os a compartilhar as informações coletadas.

Questão 2

Caso seja necessário, solicite aos alunos que façam uma pesquisa para responderem a esta questão de forma mais completa.

LEITURA

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Um pouco da história da teoria das probabilidades

A Teoria das Probabilidades se iniciou com os estudos dos matemáticos italianos Cardano (1501-1576) e Galileu (1564-1642), que estão entre os primeiros a analisar matematicamente as chances de resultados em jogos de dados e em jogos de azar.

O matemático francês Blaise Pascal (1623-1662) chegou a trocar várias correspondências com seu amigo, também matemático e francês, Pierre de Fermat (1601-1665) sobre a probabilidade de obter sucesso em situações que envolviam jogos de dados. A discussão nessas cartas ajudou bastante no desenvolvimento da teoria das probabilidades. Foram eles os responsáveis por estabelecer as teorias relacionadas ao cálculo de probabilidades.

Entre outros matemáticos que se dedicaram, direta ou indiretamente, ao estudo das probabilidades, destacaram-se: o holandês Huygens (1629-1695), ao qual é atribuído o primeiro livro sobre probabilidades; os suíços Jacob Bernoulli (1654-1705), que aplicou as combinações, permutações e classificação binomial, e Leonhard Euler (1707-1783); e os franceses Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) e Pierre S. Laplace (1749-1827), que criou a regra de sucessão.

Mais recentemente, os nomes dos matemáticos franceses Henri Poincaré (1854-1912) e Emile Borel (1871-1956) e do matemático húngaro John von Neumann (1903-1957) aparecem relacionados ao estudo de probabilidades e da teoria dos jogos.

Atualmente, o uso da teoria das probabilidades é fundamental em quase todas as áreas do conhecimento, como na Engenharia, na Física e na Psicologia.

Fonte de consulta: MUNDO EDUCAÇÃO. *Estudo das probabilidades*. Disponível em: <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/estudo-das-probabilidades.htm>. Acesso em: 1º ago. 2018.


Bridgeman Images/Fotoarena/Coleção particular

Gerolamo Cardano. 1876. Ricardo Martí. Litografia, dimensões desconhecidas.


Reprodução/Museu Nacional do Palácio de Versalhes e Trianon, Versalhes, França

Blaise Pascal. c. 1691. François the Younger Quesnel. Óleo sobre tela, 70 cm × 56 cm.


Nanushevich/Shutterstock

Tabuleiro de gamão com as peças e 2 dados.

Questões

Não escreva no livro!

1 ▸ Explique a ideia principal do texto. Resposta pessoal.

2 ▸ Converse com os colegas sobre como é possível aplicar as noções de probabilidade na Medicina, na Economia e no trânsito. Resposta pessoal.

Outras atividades que envolvem probabilidade

A seguir, vamos aplicar o que estudamos sobre probabilidade em mais algumas atividades e situações-problema.

Atividades

Não escreva no livro!

46 Considerando um baralho tradicional de 52 cartas, qual é a probabilidade, na forma de fração, de sortear:

a) uma carta vermelha? $\frac{1}{2}$

b) uma carta de paus? $\frac{1}{4}$

c) um rei? $\frac{1}{13}$

d) a rainha de copas? $\frac{1}{52}$

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

47 A tabela relaciona todas as possibilidades de soma dos pontos ao lançar 2 dados de 6 faces, de cores diferentes.

Soma dos pontos

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tabela elaborada para fins didáticos.

a) Os 2 dados são lançados ao mesmo tempo. Calcule no caderno a probabilidade de obter soma igual a 5. $\frac{1}{9}$ ou aproximadamente 11,11%.

b) Os 2 dados são lançados um após o outro. Determine a probabilidade de a soma ser maior ou igual a 10. $\frac{1}{6}$ ou aproximadamente 16,6%.

c) Suponha que você vai ganhar um prêmio se acertar a soma dos pontos das faces voltadas para cima ao serem lançados os 2 dados. Qual palpite você daria para a soma? Por quê? Respostas pessoais.

48 **Amigo-secreto.** No fim do ano letivo, os alunos do 8º ano **A** resolveram fazer uma brincadeira conhecida como amigo-secreto, que é a troca aleatória de presentes entre os participantes. O sorteio é feito da seguinte maneira: escreve-se o nome de cada participante em um pequeno pedaço de papel, misturam-se todos os papéis e, então, cada aluno retira aleatoriamente um nome.

Considere que o 8º ano **A** tem 30 alunos, entre os quais 20 são meninas e 10 são meninos. Calcule a probabilidade de um aluno dessa turma tirar, no sorteio:

a) o nome de uma menina; $\frac{2}{3}$ ou aproximadamente 66,6%.

b) o nome de um menino; $\frac{1}{3}$ ou aproximadamente 33,3%.

c) o próprio nome. $\frac{1}{30}$ ou aproximadamente 3,3%.

Nonstock/Getty Images

Meninas realizando amigo-secreto.

49 O dado desta imagem tem a forma que dá a ideia de um icosaedro regular (poliedro de 20 faces). As faces dele estão numeradas de 1 a 20.

Andalucia Plus Image bank/Alamy/Other Images

Dado com forma que dá a ideia de icosaedro regular.

No lançamento desse objeto, qual é a probabilidade de:

a) sortear um número par? $\frac{1}{2}$ ou 50%.

b) sortear um número menor do que 16? $\frac{3}{4}$ ou 75%.

c) sortear um número primo? $\frac{2}{5}$ ou 40%.

d) sortear um número menor do que 30? 1 ou 100%. (evento certo)

e) sortear um número maior do que 25? 0 (evento impossível).

f) sortear um número de 10 a 15? $\frac{3}{10}$ ou 30%.

g) sortear um número entre 10 e 15? $\frac{1}{5}$ ou 20%.

6 Probabilidade

As atividades contextualizam o cálculo de probabilidades em atividades e situações-problema.

Atividade 46

Veja a resolução desta atividade.

a) $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$ ou 50%

A probabilidade de sair uma carta vermelha é $\frac{1}{2}$ ou 50%.

b) $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ ou 25%

A probabilidade de sair uma carta de paus é $\frac{1}{4}$ ou 25%.

c) $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ou 7,6%

A probabilidade de sair um rei é $\frac{1}{13}$ ou 7,6%.

d) $\frac{1}{52}$ ou 1,9%

A probabilidade de sair a rainha de copas é $\frac{1}{52}$ ou 1,9%.

Atividade 47

Chame a atenção dos alunos para o fato de que lançar os dois dados ao mesmo tempo ou um após o outro não interfere no cálculo da probabilidade.

Espera-se que, no item **c**, os alunos escolham a soma com maior probabilidade de ocorrência, garantindo a maior chance possível. Após as respostas, se necessário, mostre que a soma 7 apresenta mais ocorrências, ou seja, ela é mais provável.

Observe a resolução desta atividade.

a) Número de resultados possíveis: $6 \cdot 6 = 36$

Número de resultados favoráveis: 4 $(1 + 4;\ 2 + 3;\ 3 + 2;\ 4 + 1)$

$\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \simeq 16{,}6\%$

b) Número de resultados possíveis: $6 \cdot 6 = 36$

Número de resultados favoráveis: 6 $(4 + 6;\ 5 + 5;\ 5 + 6;\ 6 + 4;\ 6 + 5;\ 6 + 6)$

$\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \simeq 16{,}6\%$

c) Espera-se que o aluno seja capaz de perceber que o melhor palpite é 7, pois é a soma mais provável.

$1 + 6 = 7;\ 2 + 5 = 7;$

$3 + 4 = 7;\ 4 + 3 = 7;$

$5 + 2 = 7;\ 6 + 1 = 7.$

$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ou 16,6%

Atividade 49

Apresenta probabilidades 0 e 1 em alguns itens, ou seja, temos eventos impossíveis e certos, respectivamente.

Como ampliação desta atividade, explique que dados de 20 faces são explorados em alguns jogos de tabuleiro complexos e sugira uma pesquisa sobre os tipos de dados.

6 Probabilidade

As atividades continuam a exploração do cálculo de probabilidades em atividades e situações-problema.

Atividade 50

Aborda também o fato de as probabilidades apresentarem apenas valores entre 0 e 1 e eventos impossíveis.

Se necessário, destaque que a maior probabilidade possível é 100% ou 1, o que ocorre apenas para eventos certos.

Atividade 51

Se necessário, chame a atenção dos alunos para a mudança de espaço amostral após a primeira tentativa. Assim, para a segunda tentativa, temos apenas 4 chaves.

Atividade 52

Após a resolução desta atividade, comente com os alunos que a probabilidade de sair soma par é a mesma de sair soma ímpar ($\Omega = \{(P, P), (P, I), (I, P), (I, I)\}$).

Raciocínio lógico

Apresentamos uma sequência numérica.

Verifique se os alunos percebem que existem 2 valores possíveis (1 ou 63) para o lugar onde falta um número.

50 **Avaliação de resultados.** Um professor perguntou aos alunos da turma qual era a probabilidade de um evento acontecer. Veja as respostas de 6 alunos.

- Rui: 40%
- Pedro: $\frac{5}{7}$
- Carla: $\frac{2}{5}$
- Mário: $\frac{7}{5}$
- Rafael: 0
- Ana: 50%

50. b) Rui e Carla, pois 40% $= \frac{2}{5}$.

a) Dos 6 alunos, qual é o que podemos garantir que deu uma resposta incorreta? Justifique sua resposta. Mário, pois $\frac{7}{5} > 1$.

b) Após a correção, o professor afirmou que 2 dos 6 alunos acertaram. Quais são eles?

c) Se o evento citado fosse impossível, então qual dos 6 alunos teria acertado? Rafael.

51 O professor Roberto está tentando abrir a porta da nova sala de aula com um chaveiro de 5 chaves. Ele já errou na primeira tentativa. Qual é a probabilidade de ele acertar a chave que abrirá a porta na próxima tentativa? $\frac{1}{4}$ ou 25%.

52 **Par ou ímpar.** Reúna-se com um colega para realizar esta atividade, que envolve o conhecido jogo do par ou ímpar.

Lembremos que, no jogo de par ou ímpar, o resultado é par quando ambos os jogadores colocam números pares ou quando ambos os jogadores colocam números ímpares, e o resultado é ímpar quando um jogador colocar um número par e o outro colocar um número ímpar.

Seria possível concluir, então, que, na brincadeira do par ou ímpar, é mais fácil ganhar quem pediu par do que quem pediu ímpar?

Ninell/Shutterstock/Glow Images

Mãos representando uma jogada de par ou ímpar, de resultado 5.

a) Antes de responder a essa pergunta, realizem a atividade a seguir.

Inicialmente, decidam quem será o jogador que vai pedir sempre par e quem será o jogador que vai pedir sempre ímpar. Não é possível trocar a escolha no meio do jogo.

Copiem e completem esta tabela no caderno, colocando um **X** para cada vitória. Repitam o procedimento até completarem 10 rodadas.

Resposta pessoal.

Jogo do par ou ímpar

Rodada \ Resultado	Par	Ímpar
	Nome do jogador	Nome do jogador
1ª rodada		
2ª rodada		
3ª rodada		
4ª rodada		
5ª rodada		
6ª rodada		
7ª rodada		
8ª rodada		
9ª rodada		
10ª rodada		
Total		

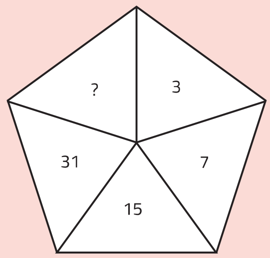
Tabela elaborada para fins didáticos.

b) E agora? Vocês consideram que é possível afirmar que é mais fácil ganhar quem pediu par do que quem pediu ímpar? Por quê? Observem a tabela e conversem sobre isso.

Resposta esperada: A probabilidade é a mesma.

Raciocínio lógico

Descubra uma regularidade nos números desta figura e responda: Qual é o número que falta?



Banco de imagens/Arquivo da editora

Raciocínio lógico

Exemplo de resposta: 1 ou 63. (Considerando que os números constituem uma sequência que pode ser formada dobrando o número anterior e somando 1; $2 \times 1 + 1 = 3$; $2 \times 3 + 1 = 7$; $2 \times 7 + 1 = 15$; $2 \times 15 + 1 = 31$; $2 \times 31 + 1 = 63$.)

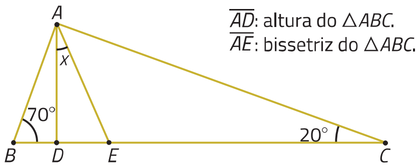
Revisando seus conhecimentos

Não escreva no livro!

1 A medida de perímetro de um retângulo é de 480 cm. A medida de comprimento da base desse retângulo é o triplo da medida de comprimento da altura. Determine no caderno as medidas de comprimento dos lados desse retângulo. 60 cm e 180 cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

2 Observe esta figura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O valor de x é:

a) 20°. X b) 25°. c) 30°. d) 15°.

3 Observe o "peso" médio das bolas em vários esportes:

I. Bola de futebol: 450 g.

II. Bola de vôlei: 270 g.

III. Bola de futsal: 440 g.

IV. Bola de basquete: 623 g.

a) Quais 2 bolas juntas ultrapassam 1 kg? **IV** e **I**; **IV** e **III**. (623 + 450 = 1 073; 623 + 440 = 1 063)

b) Qual bola pesa mais do que meio quilograma? A de basquete.

c) Quantos gramas a bola **IV** tem a mais do que a bola **I**? 173 g (623 − 450 = 173)

4 Um calendário de mesa é formado por 2 cubos como estes. Descubra uma maneira de numerar as faces dos 2 cubos para registrar todas as datas possíveis de 1 a 31. Um dos cubos: 0, 1, 2, 3, 4 e 5; no outro: 0, 1, 2, 6, 7 e 8; o 9 é obtido invertendo a posição do 6.

Paulo Manzi/Arquivo da editora

5 A medida de área de uma região triangular é de 60 cm². Sabendo que a medida de comprimento da base é de 8 cm, qual é a medida de comprimento da altura dessa região triangular? 15 cm

6 Classifique no caderno as variáveis em qualitativas, quantitativas discretas ou quantitativas contínuas.

a) Número de alunos da turma. Quantitativa discreta.

b) Medida de altura dos professores de uma escola. Quantitativa contínua.

c) Cor do cabelo de um grupo de pessoas. Qualitativa.

d) Número de defeitos observados em um equipamento eletrônico. Quantitativa discreta.

e) Tipo de defeitos observados em cada unidade de determinado produto. Qualitativa.

f) Turma em que os alunos estudam. Quantitativa discreta.

7 A ponte Rio-Niterói, no Rio de Janeiro, tem 13,26 km de medida de comprimento e 26,60 m de medida de largura. Quantas vezes a medida de comprimento dessa ponte é maior do que a medida de largura? Aproximadamente 500 vezes. (13 000 ÷ 26 = 500)

Ricardo Azoury/Pulsar Imagens

Vista da ponte Rio-Niterói, no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2016.

8 Observe este quadrado mágico.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

7	x	11
14	10	6
y	8	13

Banco de imagens/Arquivo da editora

Os números x e y são tais que:

a) $x - y = 4$.

X b) $x + y = 21$.

c) $x \cdot y = 72$.

d) $x : y = 2$.

9 A média entre um número racional e 10 é igual a 11,25. Qual é este número racional? 12,5 $\left(\frac{x + 10}{2} = 11{,}25 \Rightarrow x + 10 = 22{,}5 \Rightarrow x = 12{,}5\right)$

Atividade 2

Trabalha o cálculo da medida de abertura de um ângulo a partir dos conceitos de altura e bissetriz de um ângulo interno de um triângulo.

Veja a resolução desta atividade.

A abertura do ângulo $B\hat{A}C$ mede $180° - 70° - 20° = 90°$.

Como $\overline{AE}$ é bissetriz, a abertura do ângulo $B\hat{A}E$ mede 45°.

Como $\overline{AD}$ é altura, a abertura do ângulo $B\hat{A}D$ mede $180° - 70° - 90° = 20°$.

Logo, $x = 45° - 20° = 25°$.

Atividades 3 e 7

Retomam transformações de unidades de medida de massa e de comprimento.

Na atividade 7, se necessário, relembre os alunos de que a operação de divisão nos permite verificar quantas vezes uma medida de comprimento cabe em outra.

Atividade 4

Peça aos alunos que montem os 2 cubos e testem as respostas que considerarem corretas.

Se necessário, explique que o número 9 pode ser obtido invertendo-se a posição do 6.

Atividade 6

Esta atividade desenvolve a classificação das variáveis apresentadas em qualitativas ou quantitativas (discretas ou contínuas).

Atividades 8 e 9

Estas atividades abordam a escrita e a resolução de equações do 1º grau a partir da regra de um quadrado mágico e do conceito de média aritmética.

Veja a resolução da atividade 8.

A soma das linhas, colunas e diagonais desse quadrado é igual a 30.

$x + 10 + 8 = 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + 18 = 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 30 - 18 \Rightarrow x = 12$

$y + 13 + 8 = 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow y + 21 = 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 30 - 21 \Rightarrow y = 9$

$x + y = 12 + 9 = 21$

Revisando seus conhecimentos

Atividades 1 e 5

Estas atividades apresentam medidas de perímetro e de área para a escrita e resolução de equações para determinar, respectivamente, as medidas de comprimento dos lados de um retângulo e da altura de um triângulo.

Veja a resolução da atividade 1.

Se o comprimento da base do retângulo mede $3x$, o comprimento da altura mede x.

A medida de perímetro é dada por:

$3x + 3x + x + x = 480 \Rightarrow 8x = 480 \Rightarrow x = 60$

Medida de comprimento da base: 180 cm

Medida de comprimento da altura: 60 cm

Veja a resolução da atividade 5.

$$\frac{8 \cdot h}{2} = 60 \Rightarrow \frac{8h}{2} = \frac{120}{2} \Rightarrow 8h = 120 \Rightarrow h = 15$$

Testes oficiais

Principais habilidades da BNCC

EF08MA22 EF08MA25 EF08MA23

Atividades 1, 3, 4 e 5

Estas atividades desenvolvem a interpretação das informações apresentadas em tabelas e gráficos.

A atividade 4 trabalha também com os conceitos de moda e mediana. Veja a resolução desta atividade.

A moda é o valor que aparece com mais frequência: 2.

Como o número de equipes é ímpar, a mediana é o termo que se encontra no meio do conjunto de valores.

Assim, independentemente das pontuações das equipes **D** e **E**, a mediana será 2, pois as possibilidades são (_, 2, 2, 2, _), (2, 2, 2, _, _) ou (_, _, 2, 2, 2).

Atividades 2 e 5

Estas atividades abordam o cálculo de probabilidades.

Veja a resolução da atividade 5.

A probabilidade é encontrada a partir da razão entre o número de casos favoráveis e o total de casos. Como o dado é lançado 2 vezes e para cada lançamento temos 6 possibilidades, o total de possibilidades é de $6 \times 6 = 36$ possibilidades.

Os casos favoráveis variam de acordo com o palpite de cada um.

Como José acredita que a soma será 7, os casos favoráveis são (1, 6); (6, 1); (2, 5); (5, 2); (3, 4); (4, 3), totalizando 6.

Como Paulo acredita que a soma será 4, os casos favoráveis são (1, 3); (3, 1); (2, 2), totalizando 3.

Como Antônio acredita que a soma será 8, os casos favoráveis são (2, 6); (6, 2); (3, 5); (5, 3); (4, 4), totalizando 5.

Logo, a soma 7 é a que tem maior chance de ocorrer.

Testes oficiais

Não escreva no livro!

1 **(Saresp)** Foi feita uma pesquisa numa escola sobre a preferência dos alunos entre estudar pela manhã ou à tarde. A tabela mostra o resultado desta pesquisa de acordo com o sexo do entrevistado.

Horário de estudo	Manhã	Tarde
Homens	70	80
Mulheres	70	50

Baseado nessa pesquisa, podemos afirmar que:

a) a maioria prefere estudar à tarde.

b) o total de entrevistados é de 150 alunos.

c) as mulheres e os homens preferem estudar pela manhã.

X d) o total de mulheres entrevistadas é de 120.

(70 + 70 = 140; 80 + 50 = 130; 140 + 130 = 270; 70 + 50 = 120)

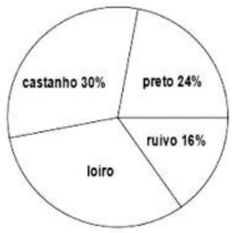
2 **(Saeb)** Em uma escola, há 400 estudantes do sexo masculino e 800 do sexo feminino.

Escolhendo-se ao acaso um estudante dessa escola, qual a probabilidade de ele ser do sexo feminino?

a) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ X e) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ $\left(400 + 800 = 1\,200;\ \frac{800}{1\,200} = \frac{2}{3}\right)$

3 **(Obmep)** Os resultados de uma pesquisa das cores de cabelo de 1 200 pessoas são mostrados no gráfico abaixo. 300 pessoas. $(100\% - 30\% - 24\% - 16\% = 30\%;$ $1\,200 \times 30\% = 1\,200 \times 0{,}3 = 360)$

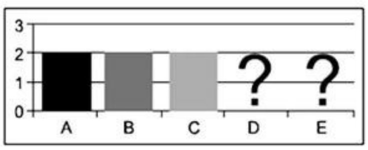


Reprodução/Obmep, 2004

Quantas dessas pessoas possuem o cabelo loiro?

4 **(Enem)** Cinco equipes **A**, **B**, **C**, **D** e **E** disputaram uma prova de gincana na qual as pontuações recebidas podiam ser 0, 1, 2 ou 3. A média das cinco equipes foi de 2 pontos.

As notas das equipes foram colocadas no gráfico a seguir, entretanto, esqueceram de representar as notas da equipe **D** e da equipe **E**.



Reprodução/ENEM, 2009

Mesmo sem aparecer as notas das equipes **D** e **E**, pode-se concluir que os valores da moda e da mediana são, respectivamente:

a) 1,5 e 2,0. d) 2,0 e 3,0.

b) 2,0 e 1,5. e) 3,0 e 2,0.

X c) 2,0 e 2,0.

5 **(Enem)** José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é:

a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

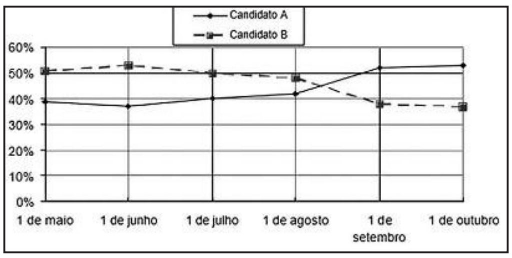
b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para formar a soma de Paulo.

X d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

6 **(Saeb)** O gráfico abaixo mostra a evolução da preferência dos eleitores pelos candidatos **A** e **B**.



Reprodução/Saeb, 2012

Em que mês o candidato **A** alcançou, na preferência dos eleitores, o candidato **B**?

a) Julho. c) Setembro.

X b) Agosto. d) Outubro.

VERIFIQUE O QUE ESTUDOU

1. d) 51% $\left(102 \text{ em } 200 = \frac{102}{200} = \frac{51}{100} = 51\%\right)$

1. O gerente de uma loja consultou 200 clientes sobre a qualidade do atendimento, entre ruim, regular, bom ou ótimo. Desse total, 102 avalizaram como bom.

a) Qual é a variável dessa pesquisa? De que tipo ela é? Qualidade do atendimento; variável qualitativa.

b) Quais são os possíveis valores da variável? Ruim, regular, bom e ótimo.

c) O que indicam os números 200 e 102 citados?

d) Qual é a frequência relativa do valor bom?

e) Quantas pessoas avaliaram o atendimento como regular, sabendo que esse valor teve frequência relativa de 20%? 40 pessoas. (20% de 200 = 40)

2. Na eleição para representante de turma do 8º ano **E**, os candidatos foram Ricardo, Felipe e Paula.

Observe o resultado da votação no gráfico de barras, em que estão especificados o número de votos das mulheres e o número de votos dos homens, e, em seguida, responda aos itens no caderno.

Eleição para representante da turma do 8º ano E

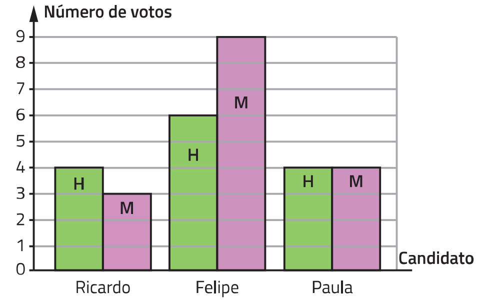


Gráfico elaborado para fins didáticos.

a) Quantos alunos votaram? 30 alunos.

b) Desses, quantas mulheres e quantos homens? 16 mulheres e 14 homens.

c) Quantos votos obteve a candidata Paula? 8 votos.

d) Quantas mulheres votaram em Ricardo? 3 mulheres.

e) Qual é a porcentagem de votos recebidos por Felipe?

50% $\left(6 + 9 = 15;\ \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%\right)$

Não escreva no livro!

3. Invente uma pesquisa cujo resultado pode ser registrado por este gráfico de setores. Depois, copie o gráfico no caderno, dê nome e complete-o. Resposta pessoal.

Gráfico de setores

1. c) 200 é o número de elementos da amostra e 102 é a frequência absoluta do valor "bom".

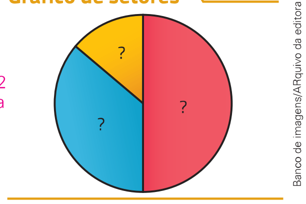


Gráfico elaborado para fins didáticos.

4. Registre o resultado da pesquisa da atividade anterior em um gráfico de barras no caderno. Resposta pessoal.

5. Em um jogo de tabuleiro, os participantes devem sortear bolinhas coloridas de uma urna e andar o número de casas correspondente. Veja as cores das bolinhas sorteadas por Juan em 10 jogadas consecutivas.

Rosa.	Branca.	Rosa.	Rosa.	Azul.
Branca.	Branca.	Rosa.	Verde.	Rosa.

As bolinhas rosa indicam andar 1 casa; as bolinhas verdes, andar 2 casas; a bolinha azul, andar 3 casas; e a bolinha branca, ficar onde está.

a) Qual é a média do número de casas que Juan andou por partida nessas 10 rodadas?

b) Qual é a moda? E a mediana?

c) Qual é a variância? E o desvio-padrão?

6. Suponha que será realizado um sorteio em sua turma. Calcule a probabilidade de: Respostas pessoais.

a) você ser sorteado;

b) um menino ser sorteado;

c) uma menina ser sorteada;

d) um aluno com 13 anos de idade ser sorteado.

Atenção

Retome os assuntos que você estudou neste capítulo. Verifique em quais teve dificuldade e converse com o professor, buscando maneiras de reforçar seu aprendizado.

5. a) 1 casa. $\left(\frac{1+0+1+1+3+2+0+1+3+1}{10} = \frac{10}{10} = 1\right)$

Autoavaliação

Algumas atitudes e reflexões são fundamentais para melhorar o aprendizado e a convivência na escola. Reflita sobre elas. Respostas pessoais.

5. b) 1 casa; 1 casa. $\left(\frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1\right)$

- Participei das aulas com atenção, acompanhando as explicações e realizando as atividades?
- Tive atitudes solidárias nas conversas com o professor e com os colegas e nas atividades coletivas?
- Empenhei-me em consolidar meu conhecimento, fazendo as pesquisas propostas no livro?
- Ampliei meus conhecimentos sobre gráficos estatísticos e sobre experimentos aleatórios?

5. c) 0,3 casa; aproximadamente 0,55 casa. $\left(\frac{0+(-1)+0+0+2+1+(-1)+0+2+0}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3\right)$

Verifique o que estudou

Principais habilidades da BNCC

EF08MA22 EF08MA24 EF08MA25

Atividade 1

Esta atividade aborda os assuntos variável de uma pesquisa, tipo de variável, valores de uma variável, amostra, frequência absoluta e frequência relativa.

Atividades 3 e 4

Estas atividades relacionam os dados de uma pesquisa com gráficos de setores e de barras.

Na atividade 3, verifique as pesquisas criadas pelos alunos e peça que compartilhem as produções, verificando se, de fato, o gráfico as representa.

Atividade 5

Esta atividade trabalha o cálculo de medidas de tendência central (média aritmética, mediana e moda) e de medidas de dispersão (variância e desvio-padrão).

Sugira aos alunos que façam a correspondência entre as cores e a quantidade de casas andadas. Se necessário, peça que representem o valor "voltar 1 casa" por −1.

Atividade 6

Esta atividade aborda o cálculo de probabilidades.

Incentive os alunos a determinar o espaço amostral e o evento para facilitar o cálculo da probabilidade de ocorrência do evento.

Autoavaliação

As questões de autoavaliação apresentadas propiciam aos alunos refletir sobre os estudos, as atitudes e as aprendizagens. Dê um tempo para que cada aluno reflita individualmente sobre elas e registre as respostas no caderno. Em seguida, àqueles que desejarem, permita que compartilhem as respostas com os colegas.

Ao longo do ano, é importante a retomada dos registros de autoavaliação feitos no fim de cada capítulo, para que eles possam perceber e mensurar o quanto aprenderam e melhoraram em diversos aspectos.

Em relação às perguntas propostas nesta página, converse com a turma sobre a importância de retomar os estudos em outros momentos, fora da sala de aula, verificando e garantindo a aprendizagem. Enfatize a necessidade de respeitar os colegas e os professores em todos os momentos, assim como respeitar os demais funcionários da escola.

Abertura

Principal habilidade da BNCC

EF08MA18

Inicie esta página perguntando aos alunos se já observaram esse tipo de mosaico com azulejos ou outro tipo de mosaico em algum lugar que foram ou em alguma viagem que fizeram.

Aproveite o mosaico de azulejos portugueses e solicite que os alunos pesquisem obras semelhantes. Existem diversos trabalhos belíssimos em Portugal, em cidades como Aveiro, por exemplo. Assim, ao realizar a pesquisa e analisar as fotos e cerâmicas, solicite aos alunos que procurem reconhecer padrões geométricos, eixos de simetria e transformações geométricas. Se possível, sugira que iniciem a pesquisa por este *site*: <www.centerofportugal.com/pt/rotas-de-ceramica> (acesso em: 22 out. 2018). Trata-se de um *site* institucional com fotos e descrições dos trabalhos e das cidades onde são tradicionais.

Se achar conveniente, sugira aos alunos que incluam na pesquisa os costumes locais, além das relações históricas desses mosaicos com os povos que habitam e habitaram tais regiões.

Com esta exploração, esperamos despertar o interesse dos alunos pelas simetrias de figuras planas e levá-los a observar os azulejos com outra perspectiva.

CAPÍTULO

8 Transformações geométricas

Lonely Planet Images/Getty Images

Em muitos lugares do mundo os azulejos são utilizados na arquitetura. Juntos, os azulejos em uma construção são parte de um padrão que é formado a partir da **reflexão**, da **translação** ou da **rotação** do padrão.

O padrão da construção da imagem da página anterior é este.

Fotos: Cesar Diniz/Pulsar Imagens

E o azulejo-padrão da imagem é este. 

As **transformações geométricas** serão o principal assunto deste capítulo. Você já viu esse assunto no ano anterior, agora vamos retomar e aprender sobre a composição de transformações geométricas.

Não escreva no livro!

Converse com os colegas sobre as seguintes questões e registre as respostas no caderno.

1 Pensando no azulejo-padrão, descreva os movimentos necessários para formar os seguintes padrões. Exemplos de respostas:

a) 

Reflexão do azulejo em relação à borda direita.

b) 

Reflexão do azulejo inicial em relação à borda direita e reflexão em relação à borda inferior.

c) 

Reflexão do padrão do item **a** em relação às bordas inferiores.

d) Translação do padrão do item **c** para baixo.

Fotos: Cesar Diniz/Pulsar Imagens

2 Em quais outros lugares você já viu o uso de padrões similares? Resposta pessoal.

Abertura

Antes de iniciar as explorações, retome com os alunos alguns conceitos de simetria vistos no 7º ano. Relembre que um modelo é simétrico se houver ao menos uma simetria (rotação, translação ou reflexão) que não muda o desenho ou a forma da figura inicial. Esses modelos de simetria podem ser visualizados (inclusive com movimento) neste *link*: <www4.pucsp.br/tecmem/Artista/simetria.htm> (acesso em: 22 out. 2018).

Após retomar os conceitos de simetria, solicite aos alunos que identifiquem as simetrias necessárias para compor o movimento (ou o desenho) em cada uma das figuras fornecidas no material.

Ao final, para completar a questão, solicite aos alunos que relacionem exemplos de locais ou de figuras onde já observaram padrões simétricos, como nas flores, nas estrelas-do-mar, nas construções, etc.

1 Transformações geométricas

Principal habilidade da BNCC

EF08MA18

A partir de agora, o livro retoma os principais conceitos de simetria, começando pela translação, que consiste em deslocar, ou transportar, uma figura no plano, obtendo-se uma figura congruente à original.

Pode-se iniciar a explicação mostrando aos alunos a translação de setas ou de figuras geométricas. Depois, solicite que, utilizando papel quadriculado, façam um desenho ou uma figura geométrica e reproduzam-na em um local diferente do papel, realizando uma translação.

Comente com os alunos sobre o movimento de translação da Terra, em que ela se desloca na sua órbita em torno do Sol.

Explique que a translação é representada por um segmento de reta orientado (ou vetor) e o que é um segmento de reta orientado. Então, chame a atenção dos alunos para o fato de que a notação utilizada para representar um segmento de reta orientado é a mesma utilizada para representar uma semirreta, mas os conceitos são diferentes.

Destaque que chamamos a figura transladada de imagem da figura original e que cada ponto da figura original está ligado ao ponto equivalente da imagem por meio de um segmento orientado.

Sequência didática

Para mais informações, veja a **sequência didática 3** do 4º bimestre.

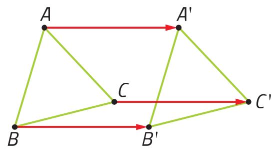
1 Transformações geométricas

Como você viu no ano anterior, é possível fazermos certos movimentos ou transformações com figuras do plano de modo que as formas, as medidas de comprimento dos lados e as medidas de abertura dos ângulos sejam conservadas. Vamos recordar?

Translação

Podemos deslocar (ou transladar ou transportar) uma figura no plano, em relação a um vetor, obtendo a figura simétrica e congruente à original. Esse movimento é chamado de **translação**.

Veja um exemplo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O $\triangle ABC$ do plano desta página foi transportado, por meio de uma translação, para uma posição ocupada pelo $\triangle A'B'C'$. O $\triangle A'B'C'$ é congruente ao $\triangle ABC$ inicial.

Veja a seguir como devemos proceder para fazer a translação de uma figura no plano.

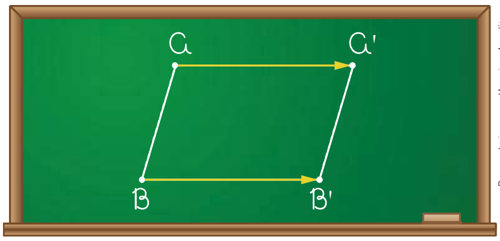
Representação de uma translação

A translação que leva o ponto A até o ponto A' é representada pelo **segmento de reta orientado** (ou **vetor**, do latim *vehere*, que significa "transportar") $\overrightarrow{AA'}$, com origem em A e término em A'.

Nesta figura, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, pois a medida de comprimento do segmento orientado $\overrightarrow{AA'}$ é igual à medida de comprimento do segmento orientado $\overrightarrow{BB'}$, e o sentido e a direção de A para A' são os mesmos que o sentido e a direção de B para B'.

Dados o segmento orientado $\overrightarrow{BB'}$ e um ponto A no plano, existe um único ponto A' nesse plano tal que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. A' é o quarto vértice do paralelogramo que tem $\overrightarrow{BB'}$ e $\overrightarrow{BA}$ como lados.

Thiago Neumann/Arquivo da editora

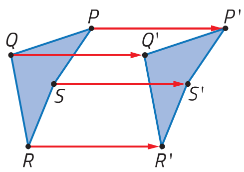


Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

A imagem da figura

A figura $PQRS$ foi transladada dando origem à figura $P'Q'R'S'$. A figura $P'Q'R'S'$ é chamada **imagem** da figura $PQRS$. Cada ponto de $PQRS$ está ligado a uma imagem por um segmento de reta orientado (vetor).



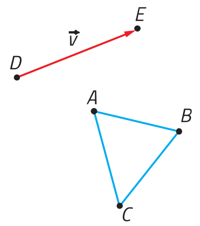
Banco de imagens/Arquivo da editora

Construção geométrica da translação

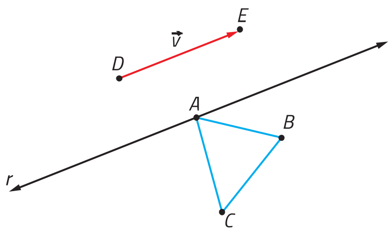
No livro do 7º ano você aprendeu a fazer a translação de uma figura plana usando uma malha quadriculada. Agora, vamos aprender como fazer essa construção usando instrumentos geométricos, como o compasso, a régua e o esquadro.

Considere o triângulo com vértices nos pontos *A*, *B* e *C* no plano desta página. Vamos fazer a translação dele a partir do segmento de reta orientado $\vec{v}$.

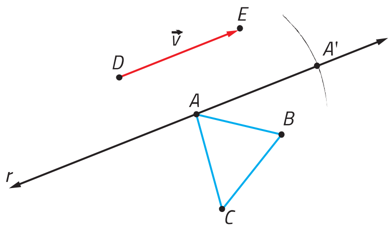
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



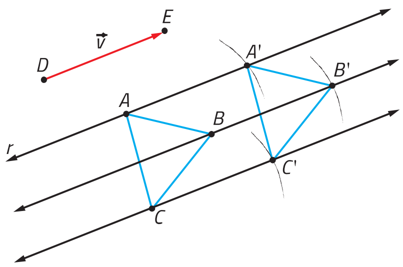
- **1º passo:** Com régua e esquadro, trace uma reta *r* paralela ao segmento orientado $\overrightarrow{DE}$ e que passe pelo ponto *A*.



- **2º passo:** Com a ponta-seca do compasso em *A*, transporte o segmento de reta orientado $\overrightarrow{DE}$ para a reta *r*, obtendo o ponto *A*', que é a imagem de *A*.



- **3º passo:** Repita os passos 1 e 2 para os pontos *B* e *C* e obtenha os pontos *B*' e *C*', imagens de *B* e *C*. Depois, trace os segmentos de reta entre os pontos *A*' e *B*', *B*' e *C*', *C*' e *A*' para obter o $\triangle A'B'C'$.



1 Transformações geométricas

Explique que vamos fazer uma translação usando régua e esquadro. Se necessário, retome o transporte de segmentos de reta usando régua e compasso.

Então, na lousa, use o esquadro para traçar retas paralelas a um segmento orientado, passando pelos vértices da imagem. Com régua e compasso, transporte o segmento orientado para cada uma das retas paralelas a ele e, por último, trace os segmentos de reta entre os vértices da imagem.

Faça cada passo da construção bem devagar para que os alunos possam reproduzir essa construção geométrica no caderno.

Os alunos aprenderam, no capítulo 2 deste livro, a traçar paralelas usando o compasso também. Ressalte que eles podem usar apenas régua e compasso para essa construção, se preferirem.

1 Transformações geométricas

Atividades 1 e 5

Estas atividades abordam a identificação de paralelogramos formados pelos lados da figura original e da imagem dela e 2 segmentos de reta orientados congruentes e paralelos.

Atividade 2

Esta atividade apresenta a identificação de segmentos de reta orientados congruentes.

Sugira aos alunos que verifiquem todos os lados do paralelogramo formado, não apenas os segmentos de reta orientados indicados na figura.

Atividade 3

Esta atividade desenvolve a percepção de qual segmento de reta orientado transporta a figura original para o lugar onde está a imagem dela.

Atividade 4

Esta atividade trabalha a relação entre os segmentos de reta orientados da figura original e da imagem dela.

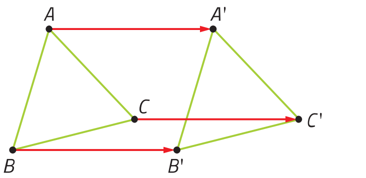
Atividade 6

Esta atividade desenvolve a construção em cada item da translação da figura original conforme o segmento de reta orientado fornecido.

Atividades

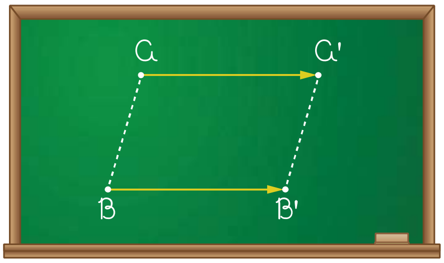
Não escreva no livro!

1 Observe este triângulo *ABC* e a imagem *A'B'C'* dele. Escreva no caderno o nome de 3 paralelogramos que podemos observar nessa transformação geométrica. *ABB'A'; ACC'A' e BCC'B'.*



Banco de imagens/Arquivo da editora

2 Examine estas translações e copie no caderno apenas as igualdades verdadeiras.



Banco de imagens/Arquivo da editora

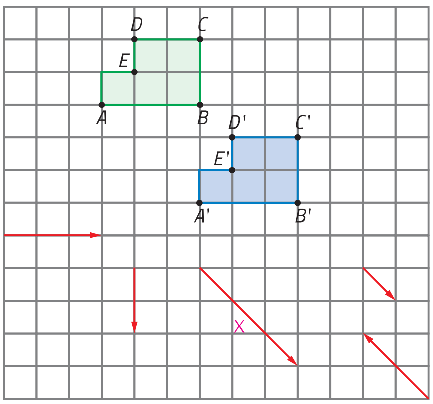
X a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

b) $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{B'B}$

X c) $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B}$

d) $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BA}$

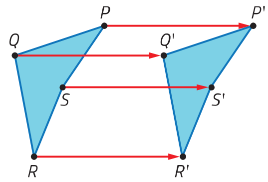
3 Observe a figura azul obtida da figura verde por uma translação.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Copie em papel quadriculado as 2 figuras e o segmento de reta orientado correspondente a essa translação. Depois, cole tudo no caderno.

4 Escreva no caderno 2 fatos a respeito dos segmentos de reta orientados que aparecem nesta translação. São paralelos e são congruentes.



Banco de imagens/Arquivo da editora

5 Considerando ainda a translação da atividade anterior, qual é o nome da figura geométrica:

a) *PQQ'P'*?

b) *PSS'P'*?

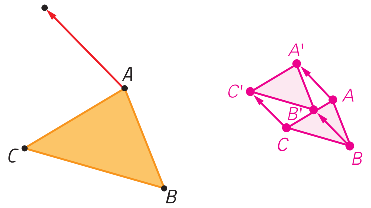
c) *QRR'Q'*?

d) *SRR'S'*?

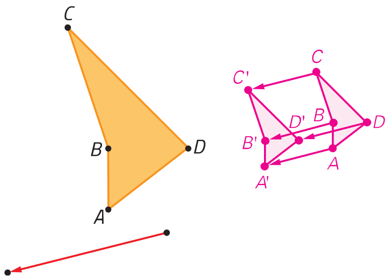
Todas as figuras são paralelogramos.

6 Copie cada figura no caderno e a translade de acordo com o segmento de reta orientado dado. Fique atento ao sentido e à medida de comprimento do segmento de reta orientado.

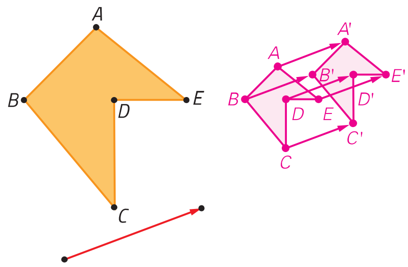
a)



b)



c)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Sim. (A reta *s* é perpendicular aos segmentos de reta orientados traçados e a medida de distância entre cada vértice da figura inicial e a reta é a mesma medida de distância entre a imagem do respectivo vértice e a reta.

Reflexão em relação a uma reta (eixo) ou simetria axial

Podemos refletir uma figura no plano, em relação a uma reta, obtendo a figura simétrica e congruente à original. Esse movimento é chamado de **reflexão**.

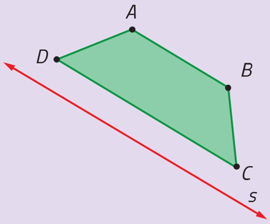
Explorar e descobrir

Não escreva no livro!

Vamos usar uma dobradura para entender melhor as propriedades da reflexão de uma figura plana em relação a uma reta.

1 Desenhe esta figura em uma folha de papel sulfite.

Dobre a folha de papel sulfite sobre a reta *s* da figura. Decalque os pontos *A*, *B*, *C* e *D* e nomeie-os como *A'*, *B'*, *C'* e *D'*, respectivamente. Desdobre a folha e trace em azul um segmento de reta entre o ponto *A* e a imagem *A'* desse ponto. Depois, faça o mesmo para os outros pontos e as respectivas imagens. Esses segmentos de reta são segmentos de reta orientados. Você obteve um quadrilátero *A'B'C'D'* simétrico ao quadrilátero *ABCD* em relação à reta *s*.



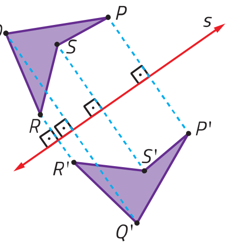
Banco de imagens/Arquivo da editora

2 Agora, responda no caderno: A reta *s* é a mediatriz de cada segmento de reta que você traçou? Explique.

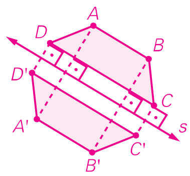
3 Escreva no caderno 2 fatos a respeito dos segmentos de reta orientados azuis e da reta *s*. São paralelos entre si e perpendiculares à reta *s*.

Observe um exemplo. A figura *PQRS* foi levada à figura *P'Q'R'S'* (imagem da figura original) por uma reflexão em relação à reta *s* (eixo de reflexão). Os vértices foram ligados às respectivas imagens por segmentos de reta orientados azuis. Observe que a reta *s* é a mediatriz de cada segmento de reta orientado $\overrightarrow{PP'}$, $\overrightarrow{SS'}$, $\overrightarrow{RR'}$ e $\overrightarrow{QQ'}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora



1.

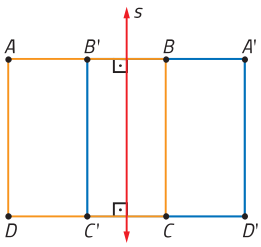


Um caso particular de reflexão

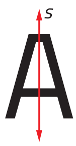
Quando refletimos uma figura plana em relação a uma reta, nem sempre temos a figura original em um lado da reta *s* e a imagem dela no outro lado, como nas figuras *PQRS* e *P'Q'R'S'* acima.

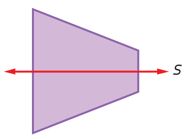
Por exemplo, este quadrado *ABCD* foi refletido em relação à reta *s* dando origem ao quadrado *A'B'C'D'*. Perceba que parte do quadrado *ABCD* está em um lado da reta e a outra parte está no outro lado.

Veja outro exemplo.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora





Ao refletir cada uma dessas figuras em relação ao eixo de reflexão *s*, a figura obtida corresponde à figura original. Quando isso ocorre, o **eixo de reflexão** é também chamado de **eixo de simetria** da figura e a figura é chamada de **figura simétrica**.

1 Transformações geométricas

Explorar e descobrir

Este boxe trabalha os conceitos iniciais da simetria de reflexão utilizando dobradura.

Solicite aos alunos que façam o desenho e sigam o passo a passo apresentado no livro. A partir desta exploração, espera-se que os alunos percebam que a reta *s* é mediatriz dos segmentos orientados com extremidades nos vértices da figura original e nos vértices correspondentes da figura simétrica. Além disso, devem verificar que esses segmentos orientados são paralelos entre si.

Após o *Explorar e descobrir*, na lousa, mostre exemplos de figuras que, ao refletirmos em relação ao eixo de reflexão, obtemos a imagem totalmente sobreposta à figura original, e explique que, quando isso ocorre, dizemos que o eixo é de simetria e que a figura é simétrica.

Se achar conveniente, peça aos alunos que criem figuras simétricas e troquem com um colega para que um confira a produção do outro.

1 Transformações geométricas

Esta página apresenta o passo a passo da construção geométrica da reflexão de uma figura geométrica utilizando esquadro, régua e compasso.

Na lousa, faça as construções para a reflexão da figura original seguindo os passos apresentados no livro. Apresente-as bem devagar para que os alunos possam entender o que está sendo feito e para que possam perguntar se surgirem dúvidas.

Em seguida, solicite aos alunos que reproduzam as construções no caderno. Acompanhe-os durante essa tarefa e, se necessário, repita os passos feitos na lousa quantas vezes for preciso.

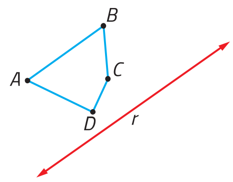
Os alunos aprenderam no capítulo 2 a traçar retas perpendiculares usando o compasso também. Ressalte que podem usar apenas régua e compasso para essa construção, se preferirem.

Construção geométrica da reflexão

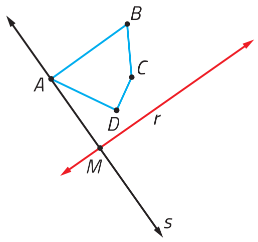
No livro do 7º ano, você aprendeu a fazer a reflexão de uma figura plana usando uma malha quadriculada. Agora, vamos aprender como fazer essa construção usando instrumentos geométricos, como o compasso, a régua e o esquadro.

Considere o quadrilátero com vértices nos pontos *A*, *B*, *C* e *D* no plano desta página. Vamos fazer a reflexão em relação à reta *r*.

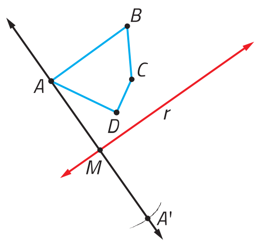
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



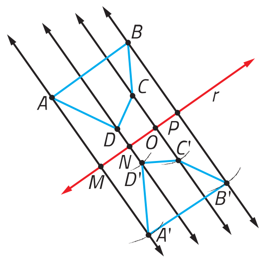
- **1º passo:** Com régua e esquadro, trace uma reta *s* perpendicular à reta *r* que passe pelo ponto *A*. Nomeie o ponto de intersecção das retas *r* e *s* como *M*.



- **2º passo:** Com a ponta seca do compasso em *M*, abra o compasso até o ponto *A* e trace o arco que intersecta outro ponto da reta *s*, que não seja *A*. Nomeie esse ponto como *A*', que é a imagem de *A*.



- **3º passo:** Repita os passos 1 e 2 para os pontos *B*, *C* e *D* e obtenha os pontos *B*', *C*' e *D*', imagens de *B*, *C* e *D*. Depois, trace os segmentos de reta entre os pontos *A*' e *B*', *B*' e *C*', *C*' e *D*', *D*' e *A*' para obter o quadrilátero *A*'*B*'*C*'*D*'.

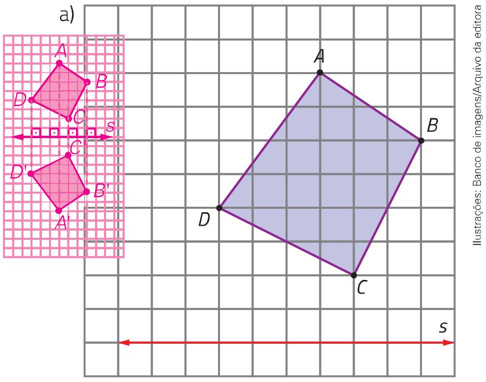


Atividades

Não escreva no livro!

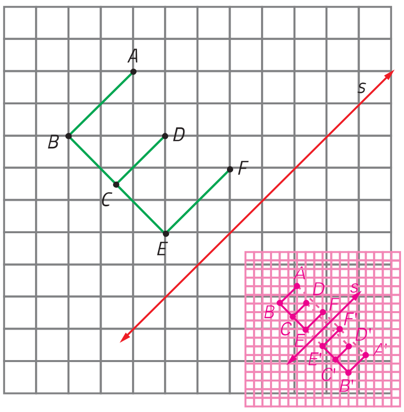
7 Em cada item, desenhe a figura e a reta em papel quadriculado e construa a imagem da figura refletida em relação à reta.

a)

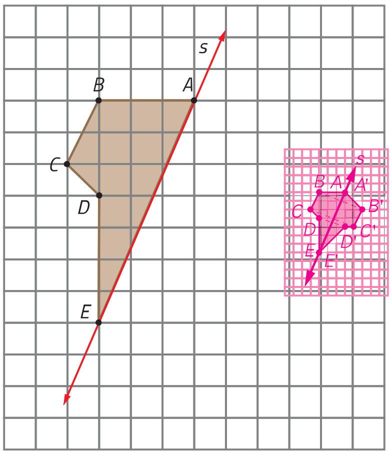


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

b)

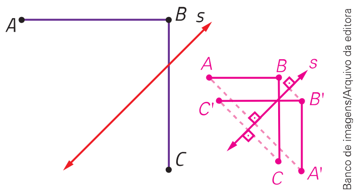


c)

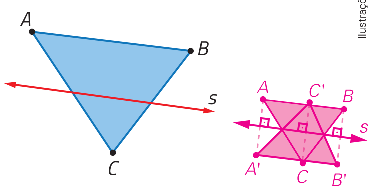


8 Desenhe no caderno estas figuras. Depois, faça a reflexão de cada uma delas em relação à reta.

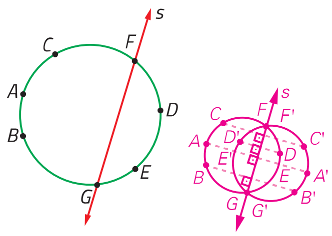
a)



b)



c)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

9 Construa no caderno o que é pedido em cada item. Depois, trace os eixos de simetria de cada figura.

a) Um retângulo com dimensões medindo 7 cm e 5 cm.

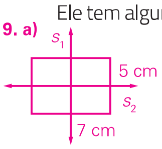
b) Um triângulo isósceles com lados de medida de comprimento de 5 cm, 5 cm e 4 cm.

c) Uma região quadrada cujos lados têm medida de comprimento de 6,5 cm.

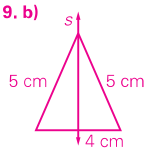
10. Não tem eixo de simetria.

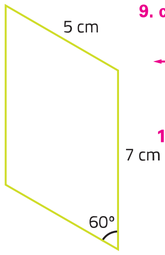
10 Construa um paralelogramo como este no caderno. Ele tem algum eixo de simetria? Se sim, desenhe-o.

9. a)

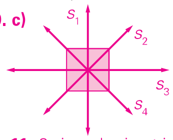


9. b)





9. c)



11. 6 eixos de simetria.

Banco de imagens/Arquivo da editora

11 Desenhe um hexágono regular no caderno. Quantos eixos de simetria ele tem?

1 Transformações geométricas

Atividades 7 e 8

Estas atividades desenvolvem a construção da reflexão da figura dada em cada item.

Na atividade 7, as figuras devem ser construídas em papel quadriculado.

A atividade 8 apresenta figuras originais que estão dos 2 lados do eixo de reflexão, ou seja, o mesmo deve ocorrer com as imagens delas.

Atividades 9, 10 e 11

Estas atividades trabalham a construção das figuras fornecidas e a identificação do eixo de simetria delas.

Se necessário, peça aos alunos que representem as figuras em papel vegetal e tentem dobrá-las de maneira que todas as partes de um lado do eixo sobreponham as partes do outro lado.

Caso os alunos não tenham anotado no painel de descobertas, retome as construções de retas paralelas e perpendiculares: de um triângulo, a partir das medidas de comprimento dos lados, de um ângulo com medida de abertura de 60° e de um hexágono regular usando régua e compasso.

1 Transformações geométricas

Retome o que é a rotação de uma figura, destacando que para realizá-la é necessário determinar um ponto (centro de rotação), a medida de abertura de um ângulo (ângulo da rotação) e um sentido.

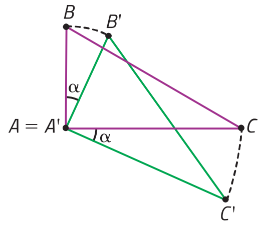
Chame a atenção dos alunos para a manutenção do mesmo sentido do deslocamento nos vértices da figura original e nos vértices correspondentes da imagem.

Neste momento, apresente a construção da rotação de uma figura utilizando régua, compasso e transferidor. Siga o passo a passo dado no livro para que os alunos possam entender a construção sem dificuldades.

Rotação

Podemos girar uma figura no plano (ou fazer uma rotação dela), em torno de um ponto, de acordo com a medida de abertura de um ângulo e com sentido determinado, obtendo figura simétrica e congruente à inicial. Esse movimento é chamado de **rotação**.

O $\triangle ABC$ sofreu uma rotação em torno do ponto A, com ângulo de medida de abertura α, no sentido horário (sentido dos ponteiros do relógio), e deu origem ao $\triangle A'B'C'$, que é a imagem do $\triangle ABC$.

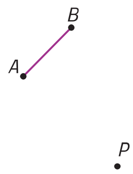


O ponto A é chamado de **centro da rotação** e o ângulo de medida de abertura α, de **ângulo da rotação**. Observe que o sentido do deslocamento $A \rightarrow B \rightarrow C$ é o mesmo do deslocamento $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$.

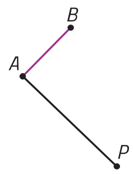
Construção geométrica de uma rotação

No livro do 7º ano, você aprendeu a fazer a rotação de uma figura plana usando uma malha quadriculada. Agora, vamos aprender como fazer essa construção usando instrumentos geométricos, como o compasso, a régua e o transferidor.

Considere o segmento de reta $\overline{AB}$ e o ponto P no plano desta página. Vamos fazer a rotação do segmento de reta $\overline{AB}$ em relação ao ponto P, com um ângulo de medida de abertura de 60° e no sentido horário.

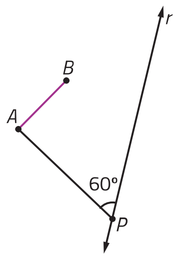


- **1º passo:** Com a régua, trace o segmento de reta entre os pontos A e P.



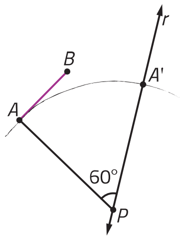
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- **2º passo:** Com o transferidor e a régua, trace uma reta r que forma um ângulo de medida de abertura de 60° com o segmento de reta $\overline{AP}$.



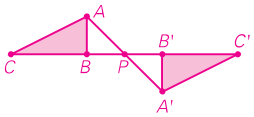
- **3º passo:** Com a ponta-seca do compasso em *P*, abra o compasso até o ponto *A* e trace o arco que intersecta a reta *r*, girando o compasso no sentido horário. Nomeie esse ponto como *A*', que é a imagem de *A*.

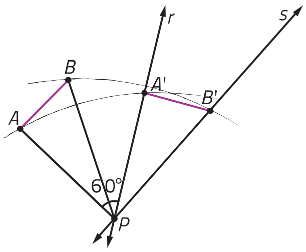
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora



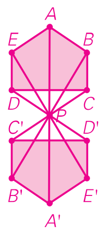
- **4º passo:** Repita os passos 1, 2 e 3 para o ponto *B* e obtenha o ponto *B*', imagem de *B*. Depois, trace o segmento de reta entre os pontos *A*' e *B*' para obter o segmento de reta $\overline{A'B'}$.

13. a)





13. b)

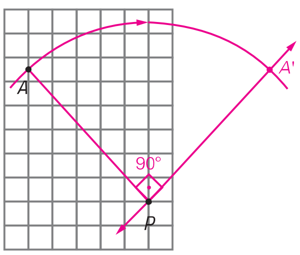


Atividades

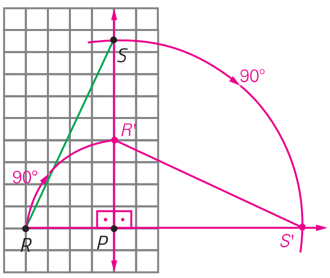
Não escreva no livro!

12 Copie as figuras em papel quadriculado. Depois, determine o ponto *A*' e o segmento de reta $\overline{R'S'}$ fazendo rotações de centro em *P* e ângulo com medida de abertura de 90°, no sentido horário.

a)



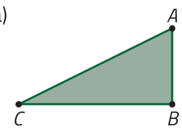
b)



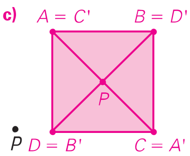
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

13 Adote o mesmo procedimento da atividade anterior, mas agora desenhando no caderno a imagem de cada figura após uma rotação, com ângulo de medida de abertura de 180° e no sentido horário, em torno do ponto *P*.

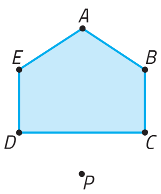
a)



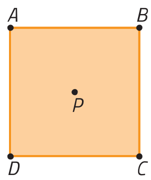
13. c)



b)



c)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Você já viu no 7º ano que as **rotações com ângulo de medida de abertura de 180°**, em torno de um ponto *O*, também são chamadas de **simetria central** de centro *O*.

1 Transformações geométricas

Peça aos alunos que realizem, no caderno, a mesma construção apresentada na lousa. Acompanhe-os durante a construção, repetindo os passos quantas vezes for necessário.

Se achar conveniente, solicite que os alunos desenhem uma figura original e a imagem dela, mas não deixem registros do centro de rotação nem do ângulo de rotação. Então, eles devem desafiar um colega a definir quais foram o centro e o ângulo de rotação utilizados.

Atividades 12 e 13

Estas atividades desenvolvem a construção da rotação de pontos, segmentos e figuras originais.

Na atividade 13, relembre que a rotação com ângulo de medida de abertura de 180° em torno de um ponto *O* também é conhecida como simetria (ou reflexão) central de centro *O*.

1 Transformações geométricas

Defina que translação, reflexão e rotação são conhecidas como transformações geométricas que mantêm a congruência das figuras, sendo chamadas também de **isometrias** ou movimentos rígidos.

Atividade 14

Esta atividade trabalha a identificação das transformações geométricas que ocorrem em relação às figuras dadas.

Se necessário, destaque que a figura original é a casinha da esquerda.

Atividades 15 e 16

Estas atividades desenvolvem a construção de figuras a partir de translação, reflexão ou rotação, inclusive simetria central.

Sugira aos alunos que retomem as construções apresentadas no livro para fazer essas transformações e ajude-os se for preciso.

Mais atividades sobre translação, reflexão e rotação

Agora que você já retomou essas simetrias e aprendeu a construir cada uma delas geometricamente, resolva mais algumas atividades.

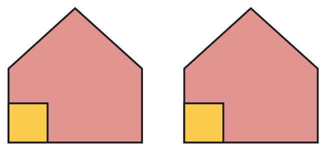
Observação: Dizemos que translação, reflexão e rotação são movimentos ou transformações geométricas que preservam a congruência. Nelas, a figura obtida é sempre congruente à figura original. Esses movimentos são fundamentais em Geometria. Por não deformar a figura original, esses 3 movimentos também são chamados de **movimentos rígidos** ou de **isometrias** (*iso* = mesma; *metria* = medida).

Atividades

Não escreva no livro!

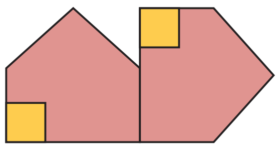
14 Em cada item, classifique no caderno a transformação da figura da casinha da direita em relação à da esquerda.

a)



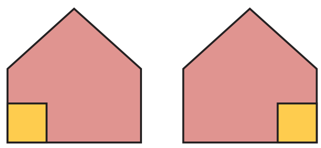
Translação.

b)



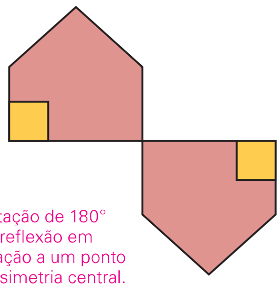
Rotação de 90° no sentido horário em relação ao vértice inferior à direita.

c)



Reflexão em relação a um eixo ou simetria axial.

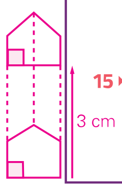
d)



Rotação de 180° ou reflexão em relação a um ponto ou simetria central.

Ilustrações: Luiz Rubio/Arquivo da editora

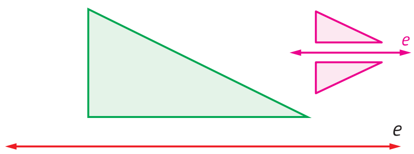
15.



15 Copie uma das casinhas da esquerda da atividade anterior e, no caderno, faça com ela uma translação de 3 cm, na vertical, para cima.

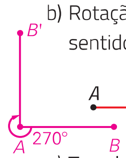
16 Copie as figuras no caderno e faça com cada uma delas a transformação indicada.

a) Reflexão da região triangular em relação ao eixo *e*.

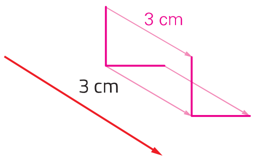


Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

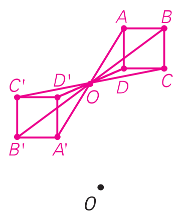
b) Rotação do segmento de reta $\overline{AB}$, em 270° no sentido horário, em torno de *A*.

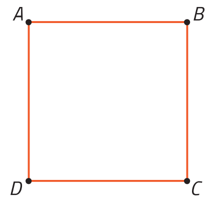


c) Translação da letra L com o segmento orientado indicado.



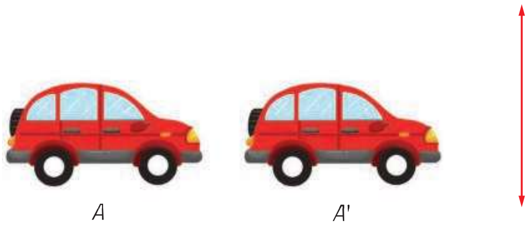
d) Simetria central do quadrado *ABCD*, com centro *O*.





2 Composição de transformações geométricas

Veja um exemplo de composição de transformações geométricas.



Estúdio Lab307/Arquivo da editora

Thiago Neumann/Arquivo da editora

Observe que o carrinho na posição *A* foi levado à posição *A*' por uma translação. Depois, o carrinho na posição *A*' foi para a posição *A*" por uma reflexão em relação ao eixo.

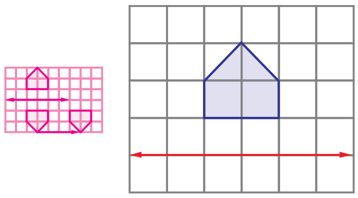
Ou seja, aqui houve a composição de uma translação com uma reflexão em relação a um eixo para que o carrinho fosse da posição *A* para a posição *A*".

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

Não escreva no livro!

Atividades

17 Copie esta figura em um papel quadriculado e faça a composição de transformações geométricas, na ordem descrita a seguir.

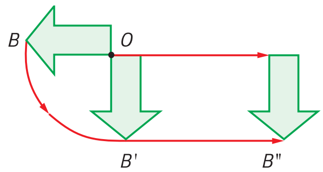


Banco de imagens/Arquivo da editora

I. Simetria em relação ao eixo dado.

II. Translação de 4 quadradinhos, na horizontal, da esquerda para a direita.

18 Veja agora estas figuras, copie-as no caderno e responda.



Banco de imagens/Arquivo da editora

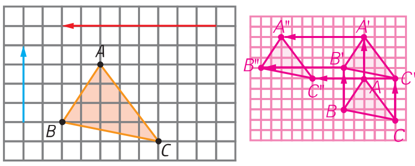
a) Qual transformação foi feita para passar da posição *B* para *B*'? Rotação de 90° no sentido anti-horário em torno de *O*.

b) Qual transformação foi feita para passar da posição *B*' para *B*"? Translação de 2 cm na horizontal, da esquerda para a direita.

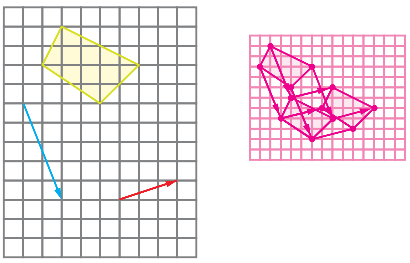
c) Como podemos descrever a passagem da posição *B* para *B*"? É uma composição de rotação com translação.

19 **Composição de translações**. Use papel quadriculado, copie cada figura e a translade de acordo com o segmento de reta orientado azul e, em seguida, faça a translação indicada pelo segmento de reta orientado vermelho.

a)



b)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2 Composição de transformações geométricas

Principal habilidade da BNCC

EF08MA18

Inicie perguntando aos alunos se sabem o que é uma composição de transformações geométricas. Após as respostas, explique que é a associação de mais do que uma transformação. Assim, a utilização de uma composição de transformações pode criar figuras que não podem ser obtidas a partir de uma única transformação.

Na lousa, apresente o exemplo de composição dado no livro usando a figura que você preferir, não precisa ser um carrinho.

Em seguida, sugira aos alunos que criem outras composições, de preferência, em papel quadriculado para facilitar a construção. Se achar conveniente, peça que troquem com um colega para que um adivinhe as transformações geométricas utilizadas pelo outro.

Antes da resolução das atividades, peça que, no painel de descobertas, anotem as construções necessárias para fazer translações, reflexões e rotações e expliquem com as próprias palavras o que são essas transformações geométricas e o que é uma composição dessas transformações.

Atividades 17 e 19

Estas atividades desenvolvem a construção das imagens da figura a partir da composição de reflexão com translação e composição de translações.

Atividade 18

Esta atividade aborda a identificação das transformações usadas na composição dada.

Comente que podemos considerar também a transformação de *B*' para *B*" como simetria axial.

2 Composição de transformações geométricas

Atividades 20 a 22

Estas atividades trabalham a identificação das transformações usadas nas composições fornecidas.

Na atividade 20, destaque que essa composição de reflexões, na verdade, fez a mesma transformação que poderia ser feita por uma translação.

Na atividade 22, se necessário, mostre aos alunos que poderíamos obter a figura A'' a partir da figura A usando apenas uma translação nos itens **I** e **II** e uma simetria central no item **III**.

No item **c** desta atividade, apresentamos a composição das figuras $A \longrightarrow A' \longrightarrow A''$ por 2 translações. Essa transformação geométrica também poderia ser feita diretamente $A \longrightarrow A''$ por uma única translação. Peça aos alunos que criem outras figuras e façam as 2 translações delas, verificando que a figura final também pode ser sempre obtida por uma única translação da figura inicial.

No item **d**, apresentamos a composição das figuras $A \longrightarrow A' \longrightarrow A''$ por 2 reflexões. Essa transformação geométrica também poderia ser feita diretamente $A \longrightarrow A''$ por uma única simetria central (rotação de 180° no sentido horário ou anti-horário). Peça aos alunos que criem outras figuras e façam as 2 reflexões delas usando pares de eixos paralelos e pares de eixos perpendiculares. No primeiro caso, dos eixos paralelos, eles devem verificar que a figura final também pode ser sempre obtida por uma única translação da figura inicial (como na atividade 19, na página anterior), e, no segundo caso, a figura final também pode ser sempre obtida por uma simetria central (como nesse item).

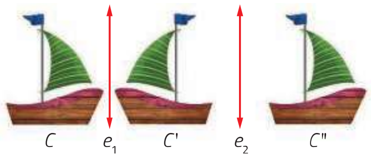
Esses são alguns dos casos particulares de composições de transformações geométricas.

Atividade 23

Esta atividade apresenta a identificação e construção da imagem da primeira transformação geométrica em uma composição de transformações.

22. b) I. simetria axial e rotação; **II.** translação e translação; **III.** simetria axial e simetria axial.

20 Descreva no caderno as transformações geométricas que podem ser observadas nestas figuras.



Estúdio Lab307/Arquivo da editora

a) De C para C'. Simetria em relação ao eixo e_1.

b) De C' para C''. Simetria em relação ao eixo e_2.

c) De C para C''. Translação.

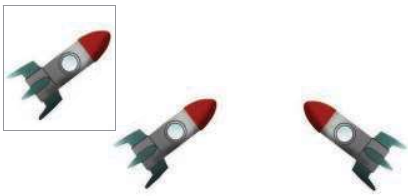
21 Identifiquem no caderno as transformações que foram feitas nestas composições, partindo sempre da figura mais acima e à esquerda.

As imagens desta página não estão representadas em proporção.

a)

Translação e rotação.

b)

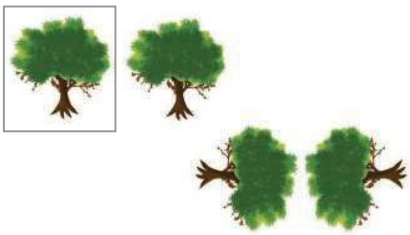


Translação e reflexão em relação a um eixo.

c)

Rotação e translação.

d)

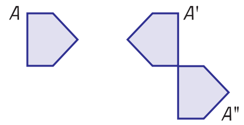


Translação, rotação e reflexão em relação a um eixo.

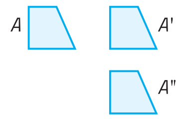
Ilustrações: Estúdio Lab307/Arquivo da editora

22 **Composições de transformações com figuras geométricas.** Observe as figuras e responda no caderno, considerando as composições feitas para levar a figura A até A''.

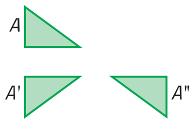
I. Região pentagonal.



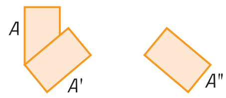
II. Trapézio.



III. Região triangular.



IV. Retângulo.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

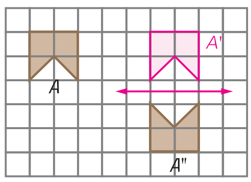
a) Em qual item foi feita a composição de uma rotação e uma simetria axial? No item **IV**.

b) Quais composições de transformações foram feitas nos demais itens?

c) No item **II**, com qual transformação geométrica única podemos obter a figura A'' a partir da figura A? Uma única translação.

d) No item **III**, com qual transformação geométrica única podemos obter a figura A'' a partir da figura A? Uma única simetria central (ou rotação de 180° no sentido horário ou anti-horário).

23 A figura A'' foi obtida de A, fazendo a composição de uma translação com uma reflexão axial, indo de A até A' e depois de A' até A''. Copie as figuras em uma malha quadriculada e desenhe a figura A' e o eixo de simetria usado na transformação.



Banco de imagens/Arquivo da editora

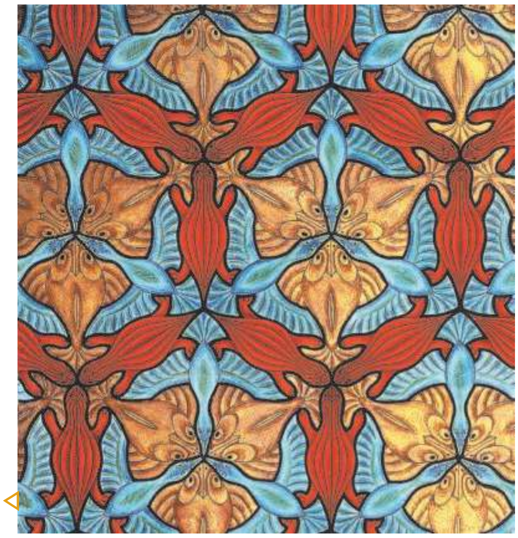
LEITURA

Composição de transformações geométricas na Arte

Maurits Cornelis Escher (1898-1972) foi um famoso artista gráfico holandês conhecido por obras que muitas vezes apresentavam composições de transformações geométricas.

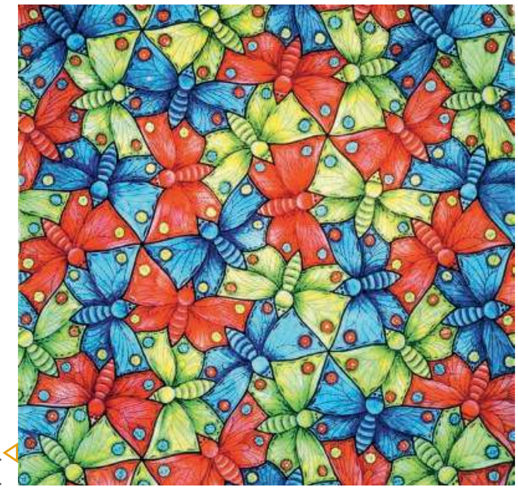
Observe a obra *Peixe/Pato/Lagarto*, de Escher, e escolha um dos grupos de 3 peixes que aparecem. Se for realizada uma rotação de 1 dos peixes, em relação ao ponto em que os 3 peixes se encontram, no sentido horário e com ângulo com medida de abertura de $120° \left(\frac{1}{3} \text{ da volta}\right)$, vamos obter outro dos peixes desse conjunto.

Agora, compare 2 conjuntos de lagartos. Podemos perceber que de um conjunto para o outro há uma translação.



Peixe/Pato/Lagarto (Fish/Duck/Lizard). 1948. M. C. Escher. Aquarela, 305 cm × 325 cm.

Podemos ver transformações similares em outras obras de Escher, como em *Borboleta*.



Borboleta (Butterfly). 1948. M. C. Escher. Aquarela, 305 cm × 229 cm.

Não escreva no livro!

Questão

Escolham uma figura e tentem criar uma composição de transformações geométricas seguindo a mesma ideia de Escher. Depois, organizem uma exposição com todos os alunos da turma. Resposta pessoal.

Leitura

Principal habilidade da BNCC

EF08MA18

Inicialmente, apresente a obra *Peixe/Pato/Lagarto*, de Escher, e identifique os 3 animais presentes nela. Então, peça aos alunos que determinem qual transformação ocorre em cada um deles para formar um grupo de 3 desses animais.

Após identificarem que ocorre uma rotação com ângulo de medida de abertura de 120° em 1 dos peixes, por exemplo, em relação ao ponto de intersecção dos 3 peixes, no sentido horário e no sentido anti-horário para formar os outros 2 peixes, sugira que identifiquem qual transformação ocorre para os patos e para os lagartos. Esperamos que percebam que é a mesma transformação.

Em seguida, solicite que identifiquem a transformação que ocorre entre 2 conjuntos com 3 animais em cada um. Os alunos devem perceber que ocorre uma translação para o conjunto de peixes, patos e lagartos.

Nesse momento, leia com a turma o texto fornecido no livro e, se achar conveniente, desafie os alunos a identificar as transformações presentes na obra *Borboleta*, que também é de Escher.

Questão

Em conjunto com o professor de Arte, peça aos alunos que criem composições de transformações geométricas a partir de uma figura, como feito por Escher, e organize uma exposição das produções pela escola.

Se necessário, os alunos podem obter mais informações sobre Escher e as obras dele no *link* <www.mcescher.com> (acesso em: 23 out. 2018).

Matemática e tecnologia

Principal habilidade da BNCC
EF08MA18

Esta página apresenta uma proposta de trabalho com composições de transformações geométricas no GeoGebra.

Como visto anteriormente, trata-se de um *software* de Geometria dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino. Com esse programa podemos trabalhar diversos tipos de construções e conceitos, inclusive os desenhos feitos na página anterior.

Antes de iniciar o trabalho com as transformações, faça com os alunos uma pequena introdução dos principais comandos que serão necessários para a realização das explorações com o GeoGebra.

Em seguida, oriente-os a seguir os passos dados no livro para criar um quadrilátero (ou qualquer figura da preferência deles) e fazer a translação da figura original.

Audiovisual

Para mais informações, veja o **audiovisual** *Transformações geométricas* do 4º bimestre.

MATEMÁTICA
E TECNOLOGIA

Composição de transformações geométricas no GeoGebra

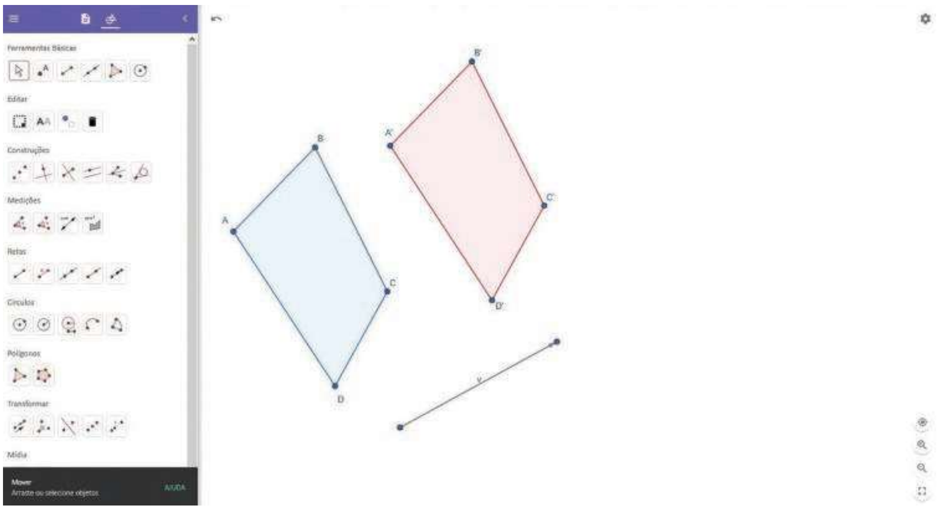
Atenção: O GeoGebra nomeia como polígono, mas a construção é de uma **região poligonal**.

Veja a seguir os passos que devem ser seguidos no GeoGebra para realizar uma composição das transformações geométricas que você aprendeu.

1º passo: Clique na opção "Polígono" no menu de ferramentas e desenhe um quadrilátero. Nomeie os vértices como *A*, *B*, *C* e *D*.

2º passo: Clique na opção "Vetor" e, depois, clique em 2 pontos fora do polígono para criar um vetor. Nomeie-o como $\vec{v}$.

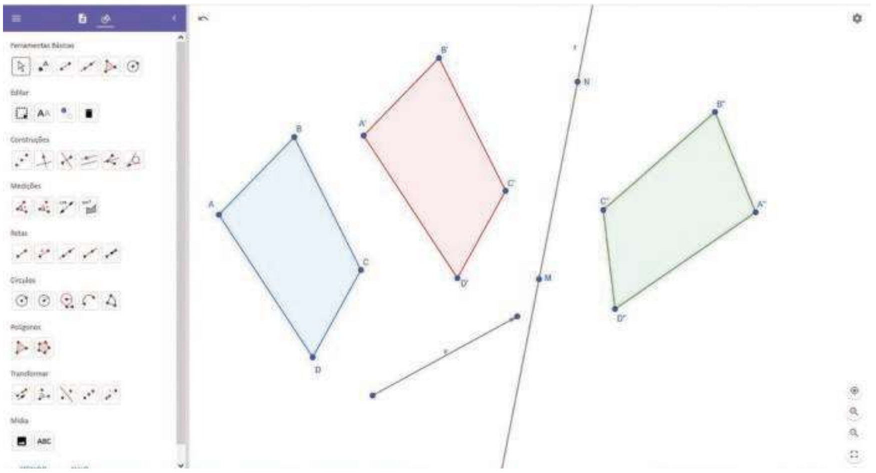
3º passo: Clique na opção "Translação por um vetor" e, depois, clique no quadrilátero *ABCD* e no vetor $\vec{v}$ que você criou. Aparecerá um quadrilátero simétrico ao original. Nomeie os vértices desse quadrilátero como *A'*, *B'*, *C'* e *D'*, respectivamente.



Fotos: Reprodução/www.geogebra.org

4º passo: Clique na opção "Reta" e, depois, clique em 2 pontos fora do vetor e dos quadriláteros que você construiu. Nomeie os pontos como *M* e *N* e a reta que aparecer como *r*. Essa reta será o eixo de reflexão.

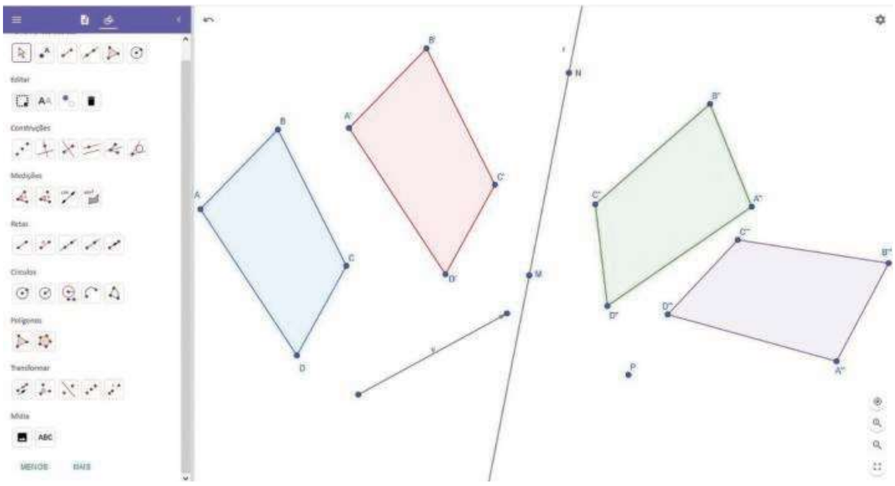
5º passo: Clique na opção "Reflexão em relação a uma reta" e, depois, clique no quadrilátero *A'B'C'D'* e na reta *r* que você construiu. Aparecerá um quadrilátero simétrico aos 2 quadriláteros que você construiu. Nomeie os vértices desse quadrilátero como *A"*, *B"*, *C"* e *D"*, respectivamente.



Fotos: Reprodução/www.geogebra.org

6º passo: Clique na opção "Ponto" e, depois, clique em 1 ponto na tela, fora do vetor, da reta e dos quadriláteros que você construiu. Nomeie-o como *P*. Esse ponto será o centro de rotação.

7º passo: Clique na opção "Rotação em torno de um ponto" e, depois, clique no quadrilátero *A*"*B*"*C*"*D*" e no ponto *P* que você construiu. Na janela que abrir, escolha a medida de abertura do ângulo e o sentido da rotação. Aparecerá um quadrilátero simétrico aos 3 quadriláteros que você construiu. Nomeie os vértices desse quadrilátero como *A*", *B*", *C*" e *D*", respectivamente.



Fotos: Reprodução/www.geogebra.org

Não escreva no livro!

Questão

No GeoGebra, construa outras figuras e tente fazer diferentes composições de transformações geométricas. Use a sua criatividade e veja como você pode transformar as figuras. Resposta pessoal.

Matemática e tecnologia

Solicite aos alunos que sigam os passos apresentados para fazer a reflexão da imagem em relação a uma reta e, depois, a rotação dessa outra imagem em relação a um ponto.

Ao final, sugira aos alunos que criem um pequeno roteiro ou tutorial contendo as aprendizagens desenvolvidas ao utilizar o GeoGebra e o compartilhem com outras turmas, incentivando os colegas a utilizar o programa.

Questão

Permita que façam diversas figuras e transformações geométricas. Aconselhe os alunos até mesmo a tentarem refazer, no GeoGebra, as criações baseadas nas obras de Escher que fizeram na página 247.

8. $60\ m^2$ $\left(\text{Base: } x\text{; altura: } y\text{; } \begin{cases} 2x + 2y = 32 \\ 2(x+3) + 2 \times 2y = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 16 \\ x + 2y = 22 \end{cases} \Rightarrow x = 10 \text{ e } y = 6\text{; medida de área: } 10 \times 6 = 60\right)$

Revisando seus conhecimentos

Não escreva no livro!

1 **(FCC-RJ)** A média aritmética de 11 números é 45.

Se o número 8 for retirado do conjunto, a média aritmética dos números restantes será: $(11 \times 45 = 495;\ 495 - 8 = 487;\ 487 \div 10 = 48{,}7)$

X a) 48,7.
b) 48.
c) 47,5.
d) 42.
e) 41,5.

2 Misturando 6 litros de água com 2 litros de suco, a porcentagem de água na mistura é de:

a) 60%.
X b) 75%.
c) 80%.
d) 65%.

$\left(6 + 2 = 8;\ \frac{6}{8} = 0{,}75 = 75\%\right)$

3 A medida de volume de um bloco retangular é de $10\ cm^3$. Dobrando a medida de comprimento de todas as arestas, a medida de volume do novo bloco será de:

X a) $80\ cm^3$.
b) $20\ cm^3$.
c) $40\ cm^3$.
d) $60\ cm^3$.

$(xyz = 10;\ 2x \times 2y \times 2z = 8 \times xyz = 8 \times 10 = 80)$

4 A medida de capacidade de um barril de petróleo é de, aproximadamente, 159 L.

Em fevereiro de 2018, o Brasil produziu 1 763 000 de barris por dia.

Fonte de consulta: G1. *Economia*. Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/noticia/producao-de-petroleo-do-brasil-cresce-01-em-fevereiro-e-pre-sal-bate-novo-recorde.ghtml>. Acesso em: 3 ago. 2018.

Quantos litros de petróleo o Brasil produziu por dia, aproximadamente, nesse mês? Aproximadamente 280 317 000 L por dia. $(1\,763\,000 \times 159 = 280\,317\,000)$

5 Sabendo que 1 hectare (ha) corresponde a $0{,}01\ km^2$, qual é a medida de área, em m^2, de um terreno de 2 ha? $20\,000\ m^2$

6 O valor numérico da expressão $-8x^2 - 6x + 11$, para $x = \frac{1}{2}$, é um número:

a) menor do que -3.
b) entre -3 e 4.
X c) entre 4 e 10.
d) maior do que 10.

7 Em qual item o resultado é maior?

a) $\frac{5}{6}$ de 30. (25)
b) $\frac{2}{7}$ de 280. (80)
X c) $\frac{3}{5}$ de 200. (120)
d) $\frac{1}{4}$ de 400. (100)

8 Um terreno retangular tem medida de perímetro de 32 m. Aumentando a medida de comprimento da base em 3 m e dobrando a medida de comprimento da altura, a medida de perímetro aumenta em 18 m. Descubra a medida de área do terreno inicial.

9 Verifique o item em que os números racionais estão em ordem crescente.

a) $\frac{7}{3}$; 1,45 e 12.
X b) 4^{-1}; $0{,}\overline{6}$ e $1\frac{1}{2}$.
c) 3^2; 2^3 e $1{,}\overline{4}$.
d) $-\frac{2}{7}$; 6^0 e 0,8.

6. $\left(-8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \times \frac{1}{2} + 11 = -8 \times \frac{1}{4} - 3 + 11 = -2 - 3 + 11 = 6;\ 4 < 6 < 10\right)$

10 Um time de basquete marcou 55 pontos. Ele fez somente cestas de 2 pontos e cestas de 1 ponto (lance livre). O número de cestas de 2 pontos foi o dobro do número de cestas de 1 ponto. Quantos lances livres esse time converteu? 11 lances livres.

Sergey Novikov/Shutterstock

Bola sendo arremessada na cesta de basquete.

11 Considere as hipóteses h_1 e h_2 e verifique no caderno se a conclusão *C* é verdadeira ou falsa.

h_1: Todos os quadriláteros são polígonos.

h_2: *P* não é um quadrilátero.

C: *P* não é um polígono

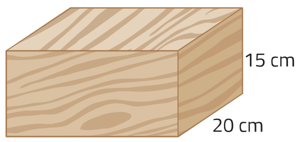
Falsa, pois, por exemplo, *P* pode ser um pentágono, que é polígono.

12 Quando nasceu, o elefante Billy pesava 113 kg. Após 3 dias o "peso" dele era de 117 kg. Após 6 dias do nascimento, o "peso" era de 121 kg.

Se esse padrão continuar, então qual será o "peso" de Billy 12 dias após o nascimento dele? 129 kg (113, 117, 121, 125, 129)

13. Moacir é marceneiro e quer construir uma caixa de madeira com a forma de paralelepípedo e as dimensões indicadas nesta imagem. De quantos centímetros quadrados de madeira Moacir vai precisar para construir essa caixa?

As imagens desta página não estão representadas em proporção.



Banco de imagens/Arquivo da editora

13. $2\,700\ cm^2$ $(A = (30 + 20 + 30 + 20) \times 15 + 2 \times 30 \times 20 = 100 \times 15 + 1\,200 = 2\,700)$

Revisando seus conhecimentos

Principais habilidades da BNCC

EF08MA04 EF08MA19 EF08MA05 EF08MA20 EF08MA06 EF08MA21 EF08MA09 EF08MA25

Atividade 1

Esta atividade trabalha conceitos de média aritmética.

Destaque que, com os números fornecidos, podemos calcular a soma dos valores iniciais. Assim, basta subtrairmos 8 e dividirmos pela quantidade de valores (10 após a retirada do valor 8).

Atividade 2

Esta atividade revisa o cálculo de porcentagens.

Se necessário, mostre que a mistura terá uma nova medida de capacidade: a soma das medidas de capacidade de água e de suco.

Atividades 3 e 8

Estas atividades desenvolvem o cálculo de medidas de volume de um bloco retangular e de área de um terreno retangular após alterações nas medidas de comprimento das arestas e dos lados deles, respectivamente.

A atividade 8 deve ser resolvida a partir de um sistema de equações.

Atividade 5

Esta atividade trabalha a conversão de unidades de medida de área.

Veja a resolução desta atividade.

$1\ km^2 = 1\,000\,000\ m^2 = 10^6\ m^2$

$1\ ha = 0{,}01\ km^2 = 10^{-2}\ km^2 = 10^{-2} \cdot 10^6\ m^2 = 10^4\ m^2$

$2\ ha = 2 \cdot 10^4\ m^2 = 20\,000\ m^2$

Atividade 6

Esta atividade aborda o cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica.

Veja a resolução desta atividade.

Substituindo $x = \frac{1}{2}$ em $-8x^2 - 6x + 11$, temos:

$-8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} + 11 = -8 \cdot \frac{1}{4} - \frac{6}{2} + 11 = -2 - 3 + 11 = -5 + 11 = 6$

a) $6 > -3$, logo esta alternativa é falsa.

b) $6 > -3$ e $6 > 4$, logo esta alternativa é falsa.

c) $6 > 4$ e $6 < 10 \Rightarrow 4 < 6 < 10$, logo esta alternativa é verdadeira.

d) $6 < 10$, logo esta alternativa é falsa.

Atividades 7 e 9

Estas atividades retomam a comparação entre números racionais.

Na atividade 7, os alunos devem calcular a fração de um número inteiro antes de comparar os valores obtidos.

Confira a resolução de cada item da atividade 9.

a) $\frac{7}{3} = 2{,}\overline{3}$ e $2{,}\overline{3} > 1{,}45 \rightarrow$ os números não estão em ordem crescente.

b) $4^{-1} = \frac{1}{4} = 0{,}25$, $1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$ e $0{,}25 < 0{,}\overline{6} < 1{,}5 \rightarrow$ os números estão em ordem crescente.

c) $2^3 = 8$ e $8 > 1{,}\overline{4} \rightarrow$ os números não estão em ordem crescente.

d) $6^0 = 1$ e $1 > 0{,}8 \rightarrow$ os números não estão em ordem crescente.

14. f) 84 cm² (Círculo maior: $A = 3 \times 8^2 = 192$; círculo menor: $A = 3 \times 6^2 = 108$; coroa circular: $A = 192 - 108 = 84$)

14 Aproximando π para 3, calcule no caderno o que se pede em cada item.

a) A medida de comprimento da circunferência cujo raio tem medida de comprimento de 7 cm. 42 cm ($C = 2 \times 3 \times 7 = 42$)

b) A medida de área do círculo cujo raio tem medida de comprimento de 7 cm. 147 cm² ($A = 3 \times 7^2 = 3 \times 49 = 147$)

c) A medida de área do círculo com 16 m de medida de comprimento do diâmetro. 192 cm² ($A = 3 \times 8^2 = 3 \times 64 = 192$)

d) A medida de comprimento do círculo com 18 mm de medida de comprimento do diâmetro. 54 mm ($C = 18 \times 3 = 54$)

e) A medida de área do semicírculo que tem raio de medida de comprimento de 6 m. 54 m² $\left(A = \frac{3 \times 6^2}{2} = \frac{3 \times 36}{2} = 54\right)$

f) A medida de área da coroa circular determinada por círculos com raios de medidas de comprimento de 8 cm e 6 cm.

g) A medida de comprimento do raio da circunferência que tem medida de comprimento de 75 dm. 12,5 dm ($2\pi r = 75 \Rightarrow 2 \times 3 \times r = 75 \Rightarrow r = 75 \div 6 = 12{,}5$)

h) A medida de comprimento do raio do círculo que tem medida de área de 75 m². 5 m ($\pi r^2 = 75 \Rightarrow 3 \times r^2 = 75 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = \sqrt{25} = 5$, pois r é uma medida de comprimento e só pode ser positiva.)

15 Copie a tabela no caderno e complete-a.

Medidas em um círculo

Medida de comprimento do raio	Medida exata do comprimento da circunferência	Medida aproximada do comprimento da circunferência, para $\pi = 3{,}1$	Medida exata da área	Medida aproximada da área, para $\pi = 3{,}1$
9 cm	18π cm	55,8 cm	81π cm²	251,1 cm²
0,7 m	$1{,}4\pi$ m	4,34 m	$0{,}49\pi$ m²	1,519 m²
8 cm	16π cm	49,6 cm	64π cm²	198,4 cm²
4 cm	8π cm	24,8 cm	16π cm²	49,6 cm²
2,1 dm	$4{,}2\pi$ dm	13,02 dm	$4{,}41\pi$ dm²	13 671 dm²

Tabela elaborada para fins didáticos.

16. Uma embalagem de leite em pó tem forma cilíndrica, como nesta imagem. O fundo da lata e a superfície arredondada são feitos de material metálico, e a tampa, que apresenta uma borda com altura de medida de comprimento de 0,5 cm, é de material plástico.

Tanto o fundo quanto a tampa têm raio de medida de comprimento de 5 cm.

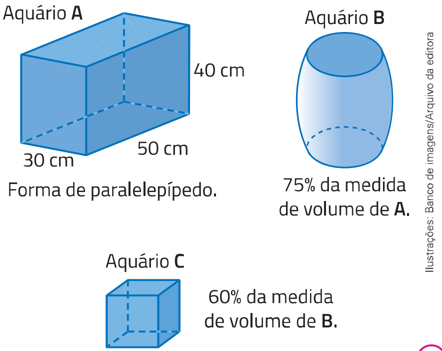
As imagens desta página não estão representadas em proporção.

a) Quantos centímetros quadrados de plástico serão usados para fabricar a tampa de cada lata como essa?

b) Quantos centímetros quadrados de material metálico serão usados em cada lata?

17 As medidas de comprimento, em metros, das dimensões de um reservatório em forma de bloco retangular são 3 números naturais consecutivos. Descubra essas medidas sabendo que cabem 120 000 litros de água nesse reservatório.

18 Sônia é decoradora e comprou alguns aquários de vidro para decorar a casa de 3 clientes. Observe as representações dos 3 modelos que ela comprou e as informações em cada um.



MP

Faça os cálculos e registre as respostas no caderno.

a) Calcule a medida de volume de cada aquário.

b) O aquário **C** tem a forma de um cubo. Determine a medida de comprimento de cada aresta dele.

c) A medida de volume do aquário **C** corresponde a quantos por cento da medida de volume do aquário **A**?

d) Determine quantos litros de água cabem em cada aquário.

16. a) Aproximadamente 94,2 cm². ($A = 3{,}14 \times 5^2 + (3{,}14 \times 10) \times 0{,}5 = 78{,}5 + 15{,}7 = 94{,}2$)

b) Aproximadamente 486,7 cm². ($A = 3{,}14 \times 5^2 + (3{,}14 \times 10) \times 13 = 78{,}5 + 408{,}2 = 486{,}7$)

17. 4 m, 5 m e 6 m (120 000 L = 120 m³; por tentativa: $1 \times 2 \times 3 = 6$; $2 \times 3 \times 4 = 24$; $3 \times 4 \times 5 = 60$; $4 \times 5 \times 6 = 120$.)

Revisando seus conhecimentos

Atividades 13 e 16

Estas atividades trabalham o cálculo das medidas de área das superfícies de um bloco retangular e de um cilindro.

Atividades 14 e 15

Estas atividades desenvolvem o cálculo das medidas de comprimento de circunferências e de área de círculos, semicírculos e coroas circulares a partir das medidas de comprimento dos raios e dos diâmetros. Além disso, calcula as medidas de comprimento dos raios a partir das medidas de comprimento de circunferências e de área de círculos.

Atividades 17 e 18

Estas atividades abordam a correspondência entre unidades de medida de volume e de capacidade e o cálculo das medidas de comprimento das arestas de um cubo e de um bloco retangular a partir das medidas de volume deles.

Veja a resolução da atividade 18.

a) $V_A = 30 \times 50 \times 40 = 60\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow V_A = 60\,000$ cm³

$V_B = 0{,}75 \times 60\,000 = 45\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow V_B = 45\,000$ cm³

$V_C = 0{,}60 \times 45\,000 = 27\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow V_C = 27\,000$ cm³

b) $\sqrt[3]{27000} = 30$

c) $\frac{27\,\cancel{000}}{60\,\cancel{000}} = \frac{9}{20}\,{}^{\times 5}_{\times 5} = \frac{45}{100} = 45\%$

Atividade 10

Nesta atividade, peça aos alunos que escrevam e resolvam uma equação a partir da relação entre o número de cestas de 2 pontos e o número de cestas de 1 ponto.

Ao final, verifique se os alunos pensaram em outra maneira de resolver esta situação e peça que compartilhem com os colegas.

Veja a resolução desta atividade.

Cestas de 1 ponto: x Cestas de 2 pontos: $2x$

$2 \cdot (2x) + x = 55 \Rightarrow 4x + x = 55 \Rightarrow 5x = 55 \Rightarrow x = 11$

Cestas de 1 ponto (lance livre): 11

Atividade 11

Esta atividade desenvolve a lógica matemática a partir das hipóteses dadas sobre polígonos e quadriláteros.

Se achar conveniente, sugira aos alunos que arrumem a hipótese 2 para obter uma conclusão verdadeira.

Atividade 12

Esta atividade revisa sequências numéricas.

Para facilitar a visualização da sequência, escreva os termos apresentados no enunciado da atividade como uma sequência.

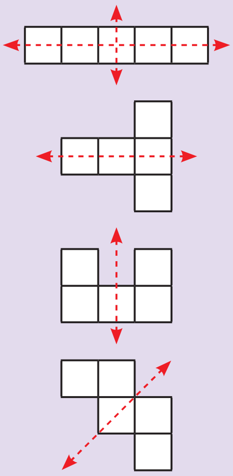
Testes oficiais

Principal habilidade da BNCC

EF08MA18

Atividade 1

Esta atividade aborda a identificação de eixos de simetria em pentaminós.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades 2 e 4

Estas atividades trabalham com rotações.

Na atividade 2, os alunos devem determinar qual rotação foi usada; já na atividade 4, devem descobrir a imagem da figura original após a rotação.

Após a resolução da atividade 4, peça que os alunos girem o livro para conferir a resposta.

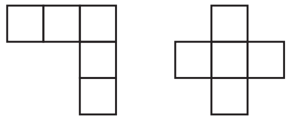
Atividade 3

Esta atividade desenvolve a identificação da reflexão que ocorre da cerâmica **I** para a cerâmica **II** e a descoberta da imagem da cerâmica **III** após fazer essa mesma transformação geométrica.

Testes oficiais

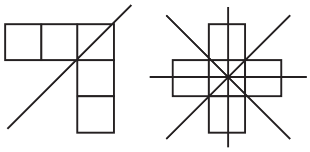
Não escreva no livro!

1 **(Obmep)** As duas figuras a seguir são formadas por cinco quadrados iguais.



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Observe que elas possuem eixos de simetria, conforme assinalado a seguir.

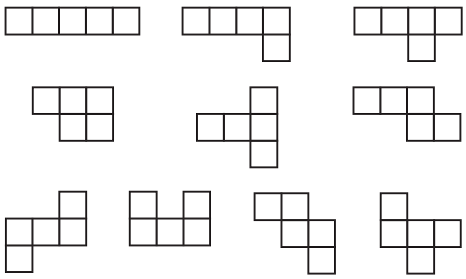


1 eixo de simetria

4 eixos de simetria

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

As figuras abaixo também são formadas por cinco quadrados iguais. Quantas delas possuem pelo menos um eixo de simetria?

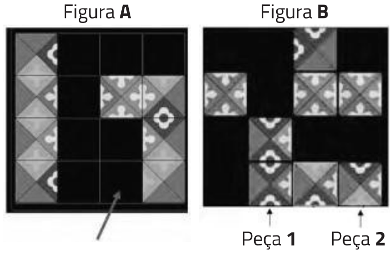


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) 3 X b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

2 **(Enem)** As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra-cabeças que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura **A** e 8 peças no tabuleiro da figura **B**. As peças são retiradas do tabuleiro da figura **B** e colocadas no tabuleiro da figura **A** na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos.

Figura **A** Figura **B**



Peça **1** Peça **2**

Reprodução/ENEM, 2009

Disponível em: http://pt.eternityii.com. Acesso em: 14 jul. 2009.

É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura **A** colocando a peça:

a) **1** após girá-la 90° no sentido horário.

b) **1** após girá-la 180° no sentido anti-horário.

X c) **2** após girá-la 90° no sentido anti-horário.

d) **2** após girá-la 180° no sentido horário.

d) **2** após girá-la 270° no sentido anti-horário.

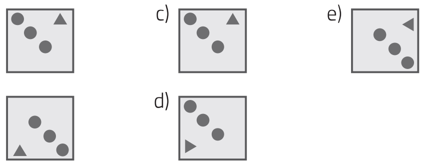
3 **(Enem)** Um decorador utilizou um único tipo de transformação geométrica para compor pares de cerâmicas em uma parede. Uma das composições está representada pelas cerâmicas indicadas por **I** e **II**.

I II III

Banco de imagens/Arquivo da editora

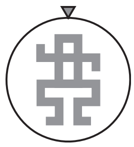
Utilizando a mesma transformação, qual é a figura que compõe par com a cerâmica indicada por **III**?

a) c) e) X b) d)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4 **(Fatec-SP)** Em um círculo recortado em papel cartão foi feito o desenho de um homem estilizado. Esse círculo foi utilizado para montar uma roleta, conforme a figura **1**, fixada em uma parede. Quando a roleta é acionada, o círculo gira livremente em torno do seu centro, e o triângulo indicador permanece fixo na parede.

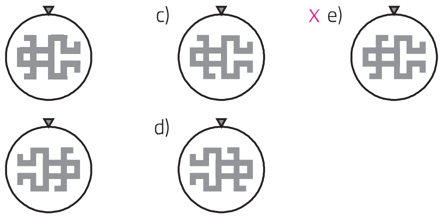


Banco de imagens/Arquivo da editora

Figura **1**.

Considerando, inicialmente, a imagem do homem na posição da figura 1, obtém-se, após a roleta realizar uma rotação de três quartos de volta, no sentido horário, a figura representada em:

a) c) X e) b) d)

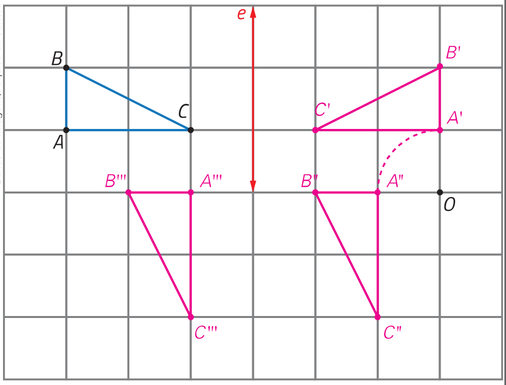


Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

VERIFIQUE O QUE ESTUDOU

Não escreva no livro!

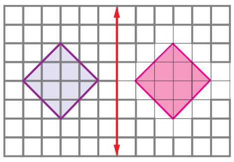
1 Copie o $\triangle ABC$ em papel quadriculado. Obtenha o $\triangle A'B'C'$ fazendo a reflexão do $\triangle ABC$ em relação ao eixo *e*.
Em seguida, obtenha o $\triangle A''B''C''$ fazendo a rotação do $\triangle A'B'C'$ com medida de abertura do ângulo igual a 90°, no sentido anti-horário.
Finalmente, obtenha o $\triangle A''B''C''$ fazendo uma translação do $\triangle A'''B'''C'''$ de 3 cm na horizontal para a esquerda.



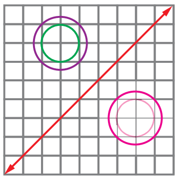
Banco de imagens/Arquivo da editora

2 Copie estas imagens em um papel quadriculado. Depois, faça a reflexão de cada uma delas em relação ao eixo indicado.

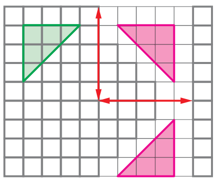
a)



c)



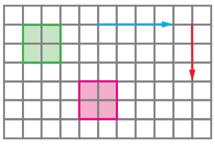
b)



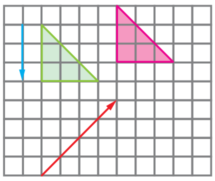
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

3 Copie cada figura em papel quadriculado e a translade de acordo com o segmento de reta orientado azul e, em seguida, faça uma translação de acordo com o segmento de reta orientado vermelho.

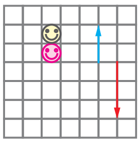
a)



b)



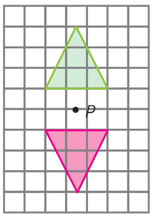
c)



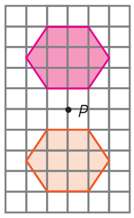
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4 Em papel quadriculado, desenhe a imagem de cada figura após realizar uma rotação com ângulo de medida de abertura de 180°, no sentido horário, em torno do ponto *P*.

a)



b)



Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atenção

Retome os assuntos que você estudou neste capítulo. Verifique em quais teve dificuldade e converse com o professor, buscando maneiras de reforçar seu aprendizado.

Autoavaliação

Algumas atitudes e reflexões são fundamentais para melhorar o aprendizado e a convivência na escola. Reflita sobre elas.
Respostas pessoais.

- Participei das aulas com atenção, realizando as construções propostas nas atividades?
- Se restaram dúvidas, planejei como solucioná-las?
- Adquiri mais segurança em meus estudos?
- Ampliei meus conhecimentos de Matemática?

Atividade 1

Esta atividade apresenta a composição das 3 transformações geométricas vistas: reflexão, rotação e translação.

Atividade 2

Esta atividade aborda a reflexão das figuras em relação aos eixos dados.

No item **b**, ocorre uma composição de reflexões. Se achar conveniente, peça aos alunos que verifiquem se apenas uma transformação pode realizar o mesmo que essa composição.

Atividade 3

Esta atividade trabalha a composição de translações.

Sugira aos alunos que confiram se a ordem de realização das translações afeta ou não a imagem obtida após as composições.

Atividade 4

Esta atividade desenvolve a simetria central.

Se necessário, solicite aos alunos que desenhem outras figuras a partir dessa transformação geométrica para verificar as relações entre a imagem e a figura original. As relações observadas podem ser registradas no painel de descobertas.

Autoavaliação

As questões de autoavaliação apresentadas propiciam aos alunos refletir sobre os estudos, as atitudes e as aprendizagens. Dê um tempo para que cada aluno reflita individualmente sobre elas e registre as respostas no caderno. Em seguida, àqueles que desejarem, permita que compartilhem as respostas com os colegas.

Ao longo do ano, é importante a retomada dos registros de autoavaliação feitos no fim de cada capítulo, para que eles possam perceber e mensurar quanto aprenderam e melhoraram em diversos aspectos.

Em relação às perguntas propostas nesta página, converse com a turma sobre a importância de sanar todas as dúvidas que surgirem no decorrer dos estudos, de modo a não prosseguir para outro capítulo ou conteúdo com dificuldades que prejudicarão as novas aprendizagens.

Verifique o que estudou

Principal habilidade da BNCC

EF08MA18

As atividades trabalham a construção de figuras, em malha quadriculada, a partir de transformações geométricas e de composições dessas transformações.

Avaliação

Para mais informações, veja a **avaliação** do 4º bimestre.