METODA ELEMENTELOR FINITE

Ca şi în cazul metodei diferenţelor finite şi în cazul metodei elementelor finite rezolvarea ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho_v(x,y)}{\varepsilon}$$

pe un domeniul având condiţii de frontieră specificate, este redusă la rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare ale cărui necunoscute sunt valorile potenţialului în puncte ale domeniului.

Pentru simplificarea expunerii se va prezenta modul de stabilire a sistemului echivalent de ecuaţii liniare în cazul rezolvării ecuaţiei diferenţiale:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

pe un domeniu bidimensional $\boldsymbol{S_\Gamma}$ pe a cărui frontieră sunt specificate **condiţii de frontieră de specia întâi**.

Obţinerea unui sistem de ecuaţii liniare presupune aproximarea funcţiei necunoscute (potenţialul), pe domeniul dat, printr-o relaţie de aproximare liniară de forma:

$$V = A + B \cdot x + C \cdot y$$

Deoarece relaţia

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

conţine derivate parţiale de ordinul doi, nu permite utilizarea unei relaţii de aproximare liniară pentru funcţia necunoscută.

Ca urmare, este necesară obţinerea unei formulări echivalente care să conţină numai derivate de ordinul întâi ceea ce va permite o aproximare a potenţialului printr-o relaţie de aproximare liniară.

Reformularea problemei se obţine pe baza teoremei lui Euler din calculul variaţional care spune că rezolvarea ecuaţiei:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$

pe domeniul $\boldsymbol{S}_\Gamma$ pe a cărui frontieră sunt specificate condiţii de frontieră de specia întâi, este echivalentă cu determinarea minimului integralei:

$$\boxed{J=\frac{1}{2}\cdot\int_{S_\Gamma}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right]\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y}$$

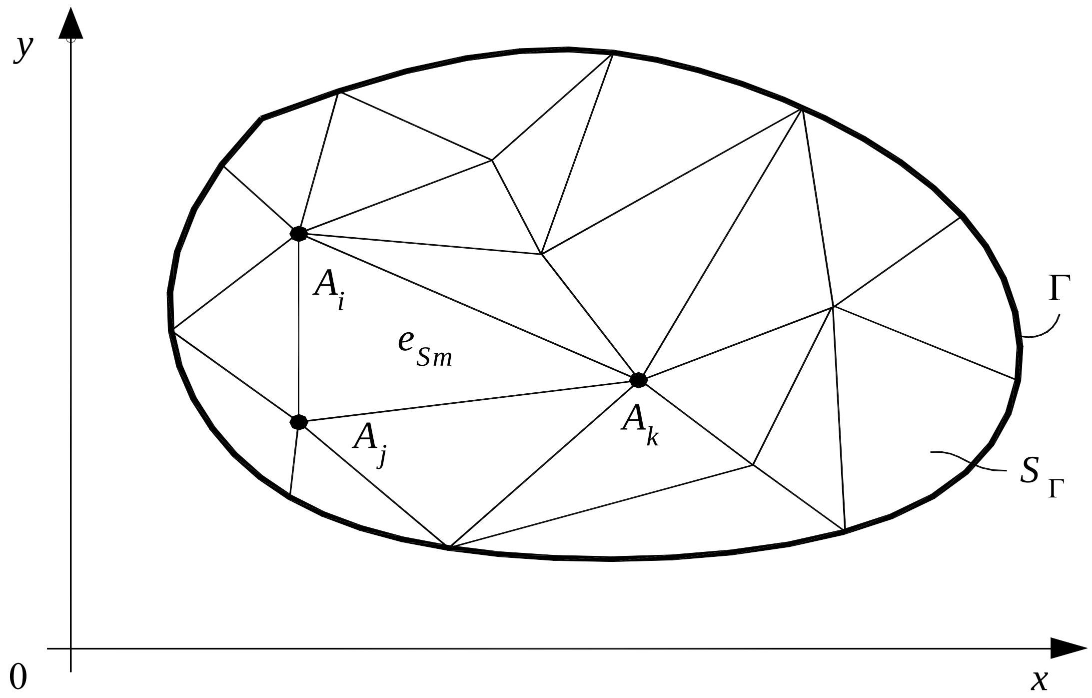
Integrala conţine numai derivate de ordinul 1. Ca urmare, este posibilă utilizarea unei relaţii de aproximare liniară de forma:

$$V=A+B\cdot x+C\cdot y$$

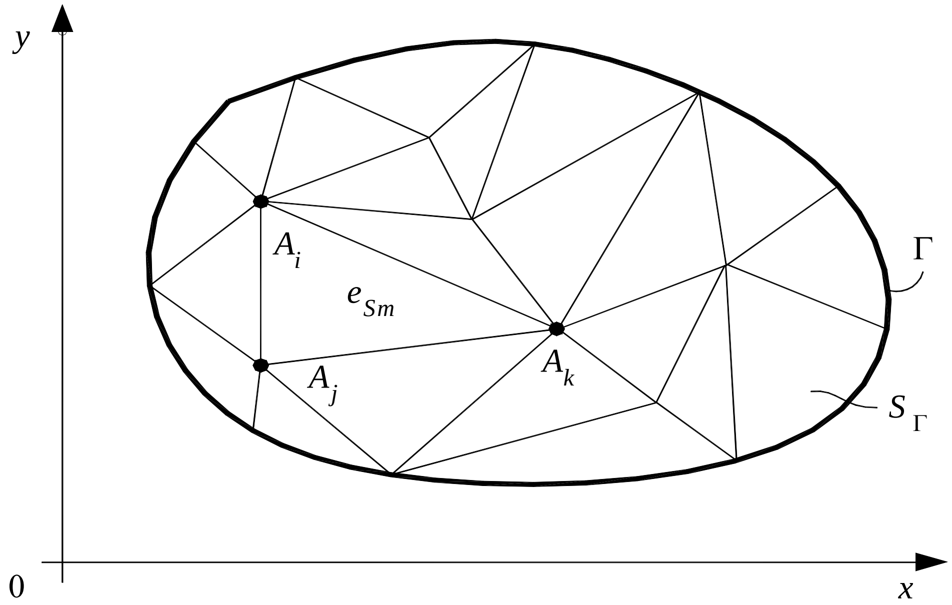
Ca urmare rezolvarea problemei iniţiale revine la determinarea valorilor potenţialului în puncte ale domeniului $\boldsymbol{S}_\Gamma$ care realizează minimul valorii integralei J.

$$J = \frac{1}{2} \cdot \int_{S_\Gamma} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$$

În acest scop se împarte domeniul dat printr-o reţea de ***elemente finite*** de formă triunghiulară, ca în figură:



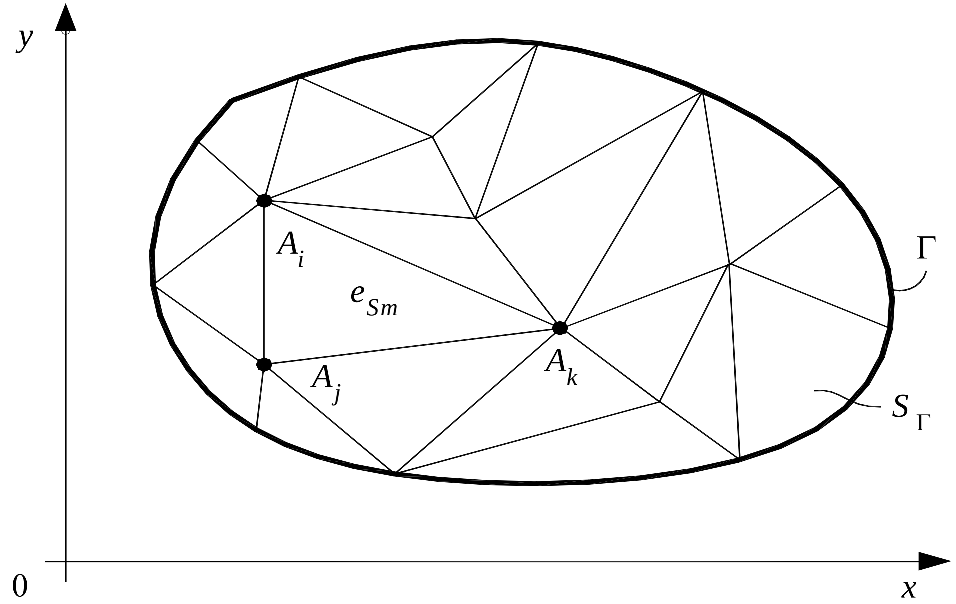
Prin împărţirea domeniului $\boldsymbol{S}_\Gamma$ utilizând reţeaua de elemente finite vor rezulta un număr total de elemente triunghiulare pe care îl vom nota cu $\boldsymbol{n_e}$ şi un număr total de noduri pe care îl vom nota cu $\boldsymbol{n}$. Nodurile reţelei se pot afla fie în interiorul domeniului fie pe frontiera acestuia. Pentru nodurile aflate pe frontieră se cunoaşte valoarea potenţialului fiind date condiţii de frontieră de specia întâi.



După împărţirea domeniului $\boldsymbol{S}_\Gamma$ utilizând reţeaua de elemente finite vor rezulta:

- Coordonatele tuturor nodurilor reţelei.
- Numărul de ordine al tuturor nodurilor precum şi al elementelor finite.
- Apartenenţa nodurilor la elementele finite.

Pentru suprafaţa oricărui element finit, e_{Sm} se adoptă pentru potenţial o dependenţă liniară.



Ca urmare, în orice punct al elementului finit potenţialul poate fi exprimat printr-o relaţie de forma

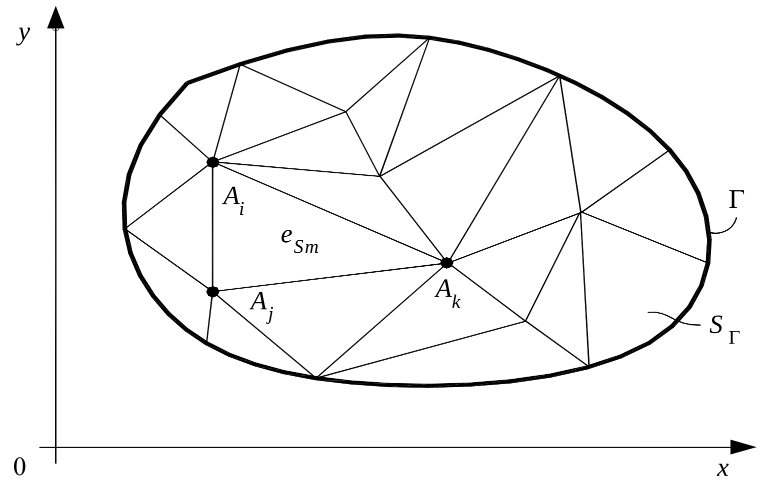
$$V = A + B \cdot x + C \cdot y$$

Pentru determinarea constantelor $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ **şi** $\boldsymbol{C}$ se pune condiţia ca potenţialul să ia în vârfurile triunghiului $\boldsymbol{A_i}$, $\boldsymbol{A_j}$ **şi** $\boldsymbol{A_k}$ respectiv valorile $\boldsymbol{V_i}$, $\boldsymbol{V_j}$ **şi** $\boldsymbol{V_k}$.

Se obţine astfel un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute:

$$\begin{cases} A + B \cdot x_i + C \cdot y_i = V_i \\ A + B \cdot x_j + C \cdot y_j = V_j \\ A + B \cdot x_k + C \cdot y_k = V_k \end{cases}$$

Prin rezolvarea sistemului:



$$\begin{cases} A + B \cdot x_i + C \cdot y_i = V_i \\ A + B \cdot x_j + C \cdot y_j = V_j \\ A + B \cdot x_k + C \cdot y_k = V_k \end{cases}$$

se obţin următoarele soluţii:

$$A = \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \left[\left(x_j \cdot y_k - x_k \cdot y_j \right) \cdot V_i + \left(x_k \cdot y_i - x_i \cdot y_k \right) \cdot V_j + \left(x_i \cdot y_j - x_j \cdot y_i \right) \cdot V_k \right]$$

$$B = \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \left[\left(y_j - y_k \right) \cdot V_i + \left(y_k - y_i \right) \cdot V_j + \left(y_i - y_j \right) \cdot V_k \right]$$

$$C = \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \left[\left(x_k - x_j \right) \cdot V_i + \left(x_i - x_k \right) \cdot V_j + \left(x_j - x_i \right) \cdot V_k \right]$$

în care

$$2 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(\text{aria triunghiului } A_i A_j A_k \right)$$

Înlocuind expresiile obţinute pentru constantele *A*, *B* şi *C* în relaţia

$$V = A + B \cdot x + C \cdot y$$

prin gruparea termenilor asemenea, se obţine expresia:

$$V = N_i \cdot V_i + N_j \cdot V_j + N_k \cdot V_k = \sum_{i,j,k} N_j \cdot V_j$$

în care expresiile coeficienţilor $\boldsymbol{N_i}$, $\boldsymbol{N_j}$ şi $\boldsymbol{N_k}$ se deduc prin permutări circulare ale relaţiei:

$$N_i = \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \left(a_i + b_i \cdot x + c_i \cdot y\right)$$

în care $\quad a_i = x_j \cdot y_k - x_k \cdot y_j$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_k - x_j$$

Exprimarea integralei: $$J = \frac{1}{2} \cdot \int_{S_\Gamma} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] \cdot \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$$

necesită cunoaşterea expresiilor pentru derivatele de ordinul unu ale potenţialului,

$\frac{\partial V}{\partial x}$ şi $\frac{\partial V}{\partial y}$

Acestea vor fi calculate pentru fiecare element în parte al reţelei de elemente finite, cu ajutorul unor relaţii de forma:

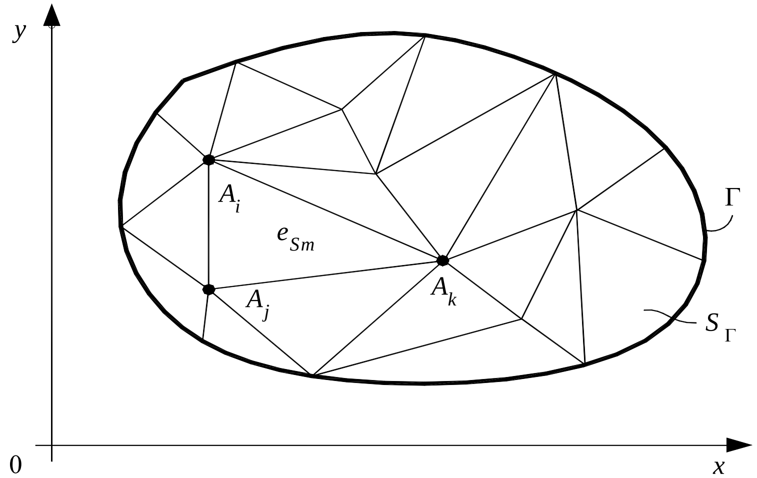
$$V = N_i \cdot V_i + N_j \cdot V_j + N_k \cdot V_k = \sum_{i,j,k} N_j \cdot V_j$$

Se obţin expresiile:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{i,j,k} N_j \cdot V_j \right] = \sum_{i,j,k} V_j \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \sum_{i,j,k} b_j \cdot V_j$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_{i,j,k} N_j \cdot V_j \right] = \sum_{i,j,k} V_j \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} = \frac{1}{2 \cdot \Delta} \cdot \sum_{i,j,k} c_j \cdot V_j$$

Deoarece aproximarea potenţialului se face pe fiecare element finit în parte, integrala *J* va trebui exprimată ca o sumă de integrale calculate pe fiecare element al reţelei, ca urmare:



$$J = \frac{1}{2}\cdot\int_{S_\Gamma}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right]\cdot \mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y = \sum_{e_{Sm}=1}^{n_e}\left\{\frac{1}{2}\cdot\int_{e_{Sm}}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right]\cdot \mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y\right\}$$

Înlocuind expresiile derivatelor (deduse anterior) se obţine:

$$J = \sum_{e_{Sm}=1}^{n_e}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\cdot\Delta^2}\int_{e_{Sm}}\left[\left(\sum_{i,j,k} b_j\cdot V_j\right)^2 + \left(\sum_{i,j,k} c_j\cdot V_j\right)^2\right]\cdot\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}y\right\}$$

Valorile potenţialelor care determină **obţinerea valorii minime** a integralei *J* se obţin prin

rezolvarea sistemului de ecuaţii: $\frac{\partial J}{\partial V_i} = 0;\qquad i = \overline{1, n}$

$$J=\sum_{e_{Sm}=1}^{n_e}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\cdot\Delta^2}\int_{e_{Sm}}\left[\left(\sum_{i,j,k}b_j\cdot V_j\right)^2+\left(\sum_{i,j,k}c_j\cdot V_j\right)^2\right]\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y\right\}$$

La efectuarea derivatelor din sistemul: $\dfrac{\partial J}{\partial V_i}=0;\qquad i=\overline{1,n}$

se vor avea în vedere următoarele:

- Deoarece mărimile V_i nu intervin în expresiile limitelor integralelor, derivatele integralelor pot fi calculate efectuând derivatele expresiilor de sub integrale.

- La efectuarea derivatei $\dfrac{\partial J}{\partial V_i}$ se vor obţine termeni nenuli doar în cazul acelor elemente finite la care aparţine nodul având indicele *i*.

Ca urmare, din suma $\sum\limits_{e_{Sm}=1}^{n_e}$, care se referă la toate elementele finite determinate de reţea, vor rămâne numai termenii corespunzători elementelor finite la care aparţine nodul având indicele *i*, la care se referă derivata, adică suma $\sum\limits_{e_{Sm}\in(i)}$

$$J=\sum_{e_{Sm}=1}^{n_e}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\cdot\Delta^2}\int_{e_{Sm}}\left[\left(\sum_{i,j,k}b_j\cdot V_j\right)^2+\left(\sum_{i,j,k}c_j\cdot V_j\right)^2\right]\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y\right\}$$

Ca urmare, sistemul: $\frac{\partial J}{\partial V_i}=0;\qquad i=\overline{1,n}$

se va scrie sub forma:

$$\frac{\partial J}{\partial V_i}=\sum_{e_{Sm}\in(i)}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\cdot\Delta^2}\cdot 2\cdot\int_{e_{Sm}}\left(b_i\cdot\sum_{i,j,k}b_j\cdot V_j+c_i\cdot\sum_{i,j,k}c_j\cdot V_j\right)\cdot \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y\right]=0;\qquad i=\overline{1,n}$$

Deoarece expresia de sub integrală reprezintă o constantă a cărei valoare depinde de elementul finit la care se referă integrala, expresia de sub integrală poate fi scoasă în faţa integralei. Ca urmare, în ecuaţiile sistemului rămâne de efectuat integrala:

$\int_{e_{Sm}}\mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}y$ a cărei valoare este egală cu aria elementului finit $\boldsymbol{e_{Sm}}$, notat anterior cu Δ. Se obţine în final sistemul de ecuaţii:

$$\sum_{e_{Sm}\in(i)}\frac{1}{4\cdot\Delta}\cdot\left(b_i\cdot\sum_{i,j,k}b_j\cdot V_j+c_i\cdot\sum_{i,j,k}c_j\cdot V_j\right)=0;\qquad i=\overline{1,n}$$

$$\sum_{e_{Sm}\in(i)} \frac{1}{4\cdot\Delta}\cdot\left(b_i\cdot\sum_{i,j,k} b_j\cdot V_j + c_i\cdot\sum_{i,j,k} c_j\cdot V_j\right) = 0\,; \qquad i=\overline{1,n}$$

Se poate obţine o formă mai simplă de scriere a sistemului prin explicitarea sumelor din paranteza rotundă şi gruparea convenabilă a termenilor, după cum urmează:

$$\frac{1}{4\cdot\Delta}\cdot\left(b_i\cdot\sum_{i,j,k} b_j\cdot V_j + c_i\cdot\sum_{i,j,k} c_j\cdot V_j\right) = \frac{1}{4\cdot\Delta}\cdot\left(b_i^2\cdot V_i + b_i\cdot b_j\cdot V_j + b_i\cdot b_k\cdot V_k\right) +$$

$$+\frac{1}{4\cdot\Delta}\cdot\left(c_i^2\cdot V_i + c_i\cdot c_j\cdot V_j + c_i\cdot c_k\cdot V_k\right) =$$

$$= \frac{1}{4\cdot\Delta}\cdot\left[\left(b_i^2 + c_i^2\right)\cdot V_i + \left(b_i\cdot b_j + c_i\cdot c_j\right)\cdot V_j + \left(b_i\cdot c_k + b_i\cdot c_k\right)\cdot V_k\right] =$$

$$= \sum_{i,j,k} h_{ij}\cdot V_j$$

În ultima sumă indicele ***j*** ia succesiv valorile ***i*, *j*, *k*** iar factorul $\boldsymbol{h_{ij}}$ are valoarea:

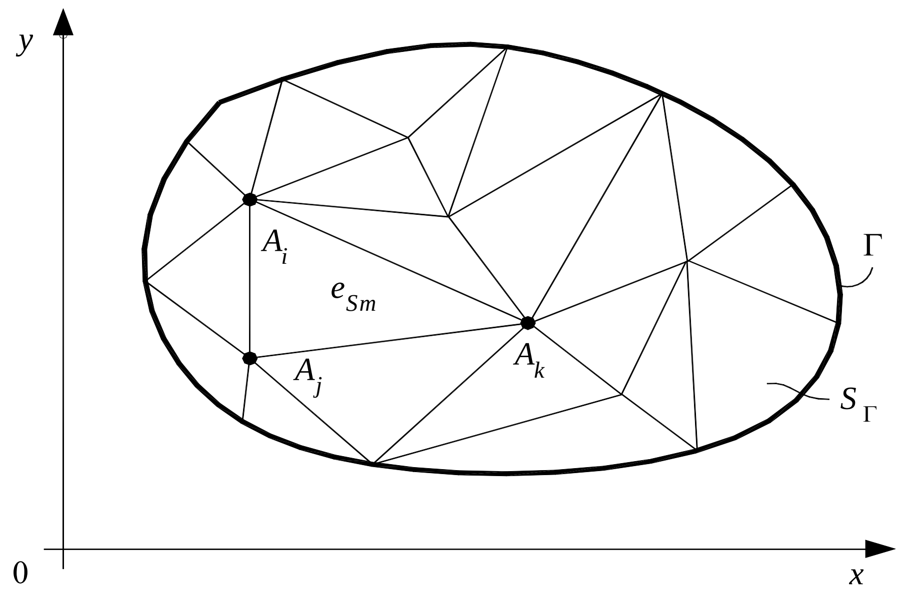
$$h_{ij} = \frac{1}{4\cdot\Delta}\cdot\left(b_i\cdot b_j + c_i\cdot c_j\right)$$

Cu aceste notaţii forma finală a sistemului de ecuaţii care permite rezolvarea ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

pe un domeniu bidimensional $\boldsymbol{S}_\Gamma$ pe a cărui frontieră sunt specificate condiţii de frontieră de specia întâi, prin metoda elementelor finite, este:

$$\sum_{e_{Sm} \in (i)} \sum_{i,j,k} h_{ij} \cdot V_j = 0 ; \quad i = \overline{1,n}$$



în care

$$h_{ij} = \frac{1}{4 \cdot \Delta} \cdot \left(b_i \cdot b_j + c_i \cdot c_j\right)$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = x_k - x_j$$