REZOLVAREA ECUAŢIILOR NELINIARE

Enunţul problemei

Fie ecuaţia neliniară: $\boldsymbol{f(x) = 0}$

pentru care se cunoaşte că admite o rădăcina în intervalul **[*a, b*]**. Se cere determinarea valorii rădăcinii $\alpha \in [a, b]$ astfel încât $\boldsymbol{f(\alpha) < \varepsilon}$, unde $\boldsymbol{\varepsilon}$ reprezintă **precizia** cu care se doreşte determinarea soluţiei.

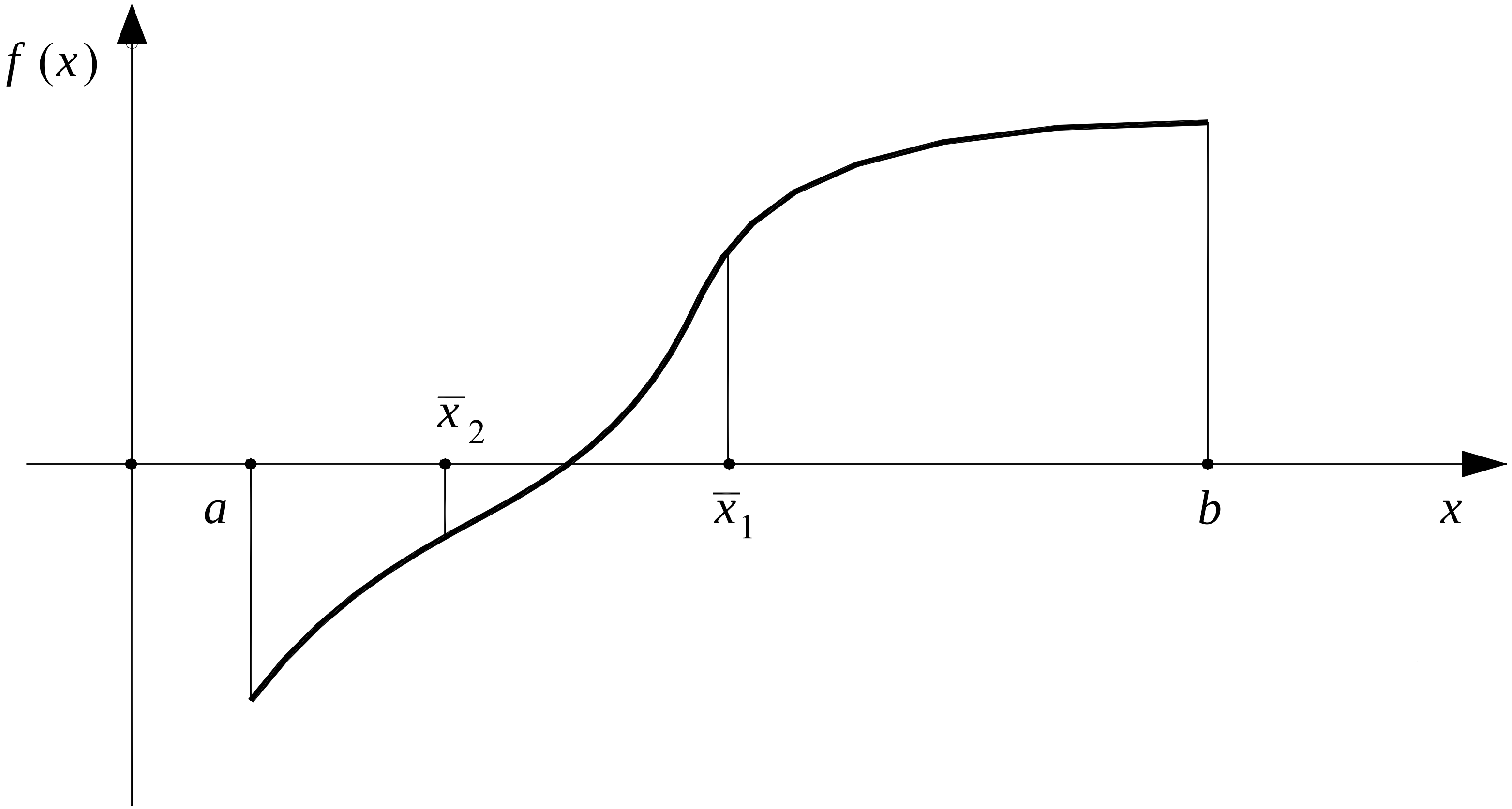
Determinarea intervalului în care se găseşte soluţia se poate face fie **analitic**, dacă se cunoaşte derivata funcţiei $\boldsymbol{f(x)}$, utilizând şirul lui Rolle, fie pe baza unor **considerente de natura tehnică**.

Toate metodele de rezolvare constau în **restrângerea** intervalului iniţial **[*a, b*]** în jurul rădăcinii căutate.

În cazul tuturor metodelor <u>se verifică în prealabil dacă în intervalul dat se afla o rădăcina a ecuaţiei</u>: Dacă $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ în interval se află o rădăcină, în caz contrar nu şi ca urmare procesul de căutare a soluţiei nu mai trebuie efectuat.

METODA ÎNJUMĂTĂŢIRII INTERVALULUI

Metoda constă în restrângerea intervalului iniţial [a, b] prin înjumătăţirii succesive, de fiecare dată stabilind în care subinterval se găseşte rădăcina.



Etapa 1

Se determină **mijlocul** intervalului iniţial [*a*, *b*]

$$\overline{x_1} = \frac{a+b}{2}$$

Se verifică **în ce subinterval se găseşte rădăcina**, testând valoarea produsului $f(a) \cdot f(\overline{x_1})$

$$f(a) \cdot f(\overline{x_1}) \begin{cases} \leq 0 & \Rightarrow \quad [a,\ \overline{x_1}] \\ > 0 & \Rightarrow \quad [\overline{x_1}, b] \end{cases}$$

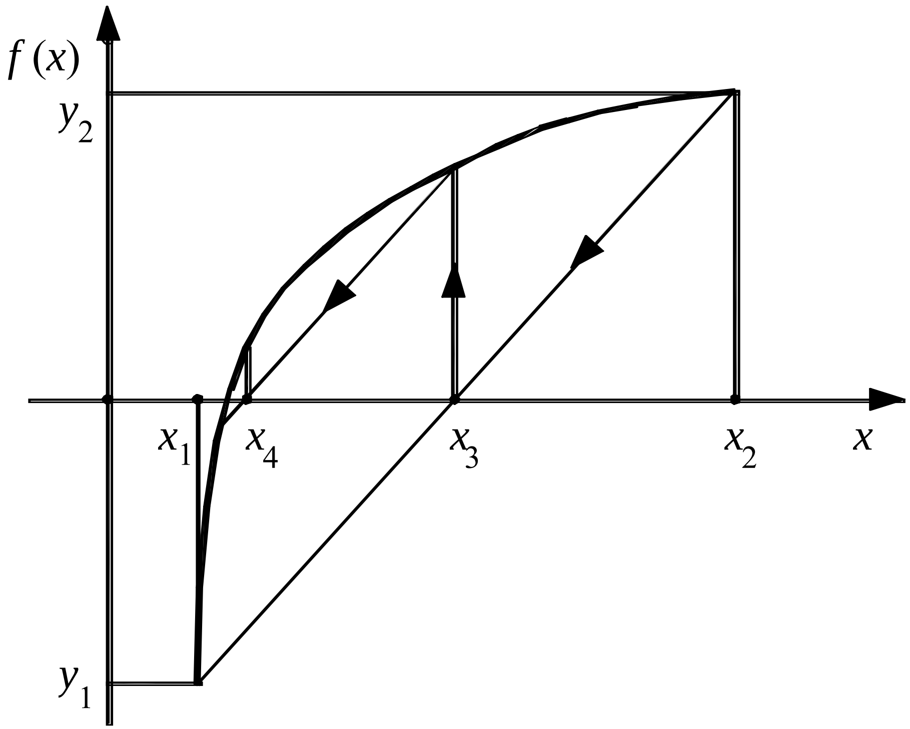
Se verifică dacă **s-a obţinut rădăcina**.

$$f(\overline{x_1}) \leq \varepsilon \begin{cases} \text{da} & \Rightarrow \quad \text{rădăcina este } \alpha = \overline{x_1} \text{ şi algoritmul de căutare se } \textbf{opreşte}; \\ \text{nu} & \Rightarrow \quad \text{rădăcina nu a fost determinată şi ca urmare se va mai } \textbf{parcurge o etapă}. \end{cases}$$

La etapele următoare se efectuează acelaşi tip de calcule dar pentru **intervalul restrâns la etapa precedentă**.

METODA SECANTEI FIXE

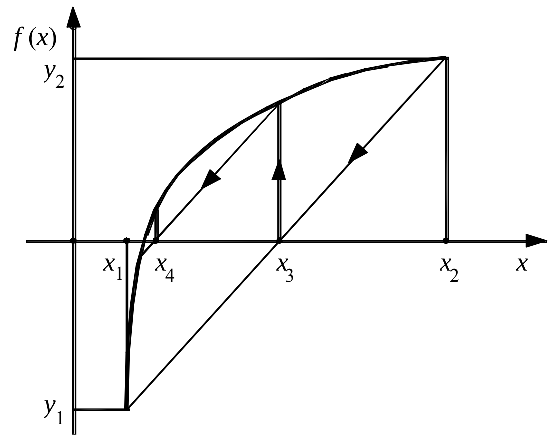
Această metodă utilizează, pentru apropierea de soluţie, **intersecţia dinte axa absciselor şi secanta la graficul funcţiei $f(x)$**, care uneşte punctele de pe grafic determinate de extremităţile intervalului de căutare specificat iniţial.



Panta secantei se va calcula cu relaţia: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

iar ecuaţia secantei se poate scrie sub forma: $y - y_2 = m \cdot (x - x_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad y - y_2 = m \cdot (x - x_2)$$



Abscisa punctului de intersecţie

al secantei cu axa orizontală este:

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2}{m}$$

pentru această valoare se recalculează funcţia

obţinându-se valoarea: $y_3 = f(x_3)$

În punctul de coordonate (x_3, y_3) se duce **o paralelă la secanta iniţială**, o dreaptă de **pantă *m***, care va fi utilizată pentru continuarea procesului de căutare. Ca urmare, valorile succesive care se vor obţine pentru determinarea soluţiei se pot scrie prin formula de recurenţă:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{m}$$

Drept **criteriu de oprire** al algoritmului de căutare **se poate utiliza relaţia**: $\left| x_k - x_{k-1} \right| < \varepsilon$

prin care se verifică dacă diferenţa dintre două determinări ale soluţiei este mai mică decât o valoare **ε**, impusă iniţial, **sau relaţia**:

$$\left| f(x_k) \right| < \varepsilon$$

prin care se verifică dacă valoarea funcţiei la determinarea în curs a devenit mai mică decât o valoare **ε**, impusă iniţial.

Pentru a face o **apreciere asupra convergentei metodei** se va utiliza dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei. Presupunând că valoarea exactă a soluţiei este α şi prin urmare $\boldsymbol{f(\alpha) = 0}$, atunci două determinării succesive ale soluţiei se vor putea scrie sub forma:

$$x_k = \alpha + e_k \qquad\qquad x_{k+1} = \alpha + e_{k+1}$$

în care $\boldsymbol{e_k}$ şi $\boldsymbol{e_{k+1}}$ vor reprezenta erorile produse la cele două etape succesive.

Înlocuind aceste valori în relaţia de recurenţă a metodei se obţine:

$$\alpha + e_{k+1} = \alpha + e_k - \frac{f\left(\alpha + e_k\right)}{m}$$

Prin dezvoltarea în **serie Taylor** a funcţiei în jurul punctului α şi păstrând numai **primii doi termeni ai dezvoltării**, se obţine egalitatea:

$$e_{k+1} = e_k - \frac{f\left(\alpha\right) + e_k \cdot f'\left(\alpha\right)}{m} \qquad \text{sau:} \qquad e_{k+1} = e_k \cdot \left(1 - \frac{f'\left(\alpha\right)}{m}\right)$$

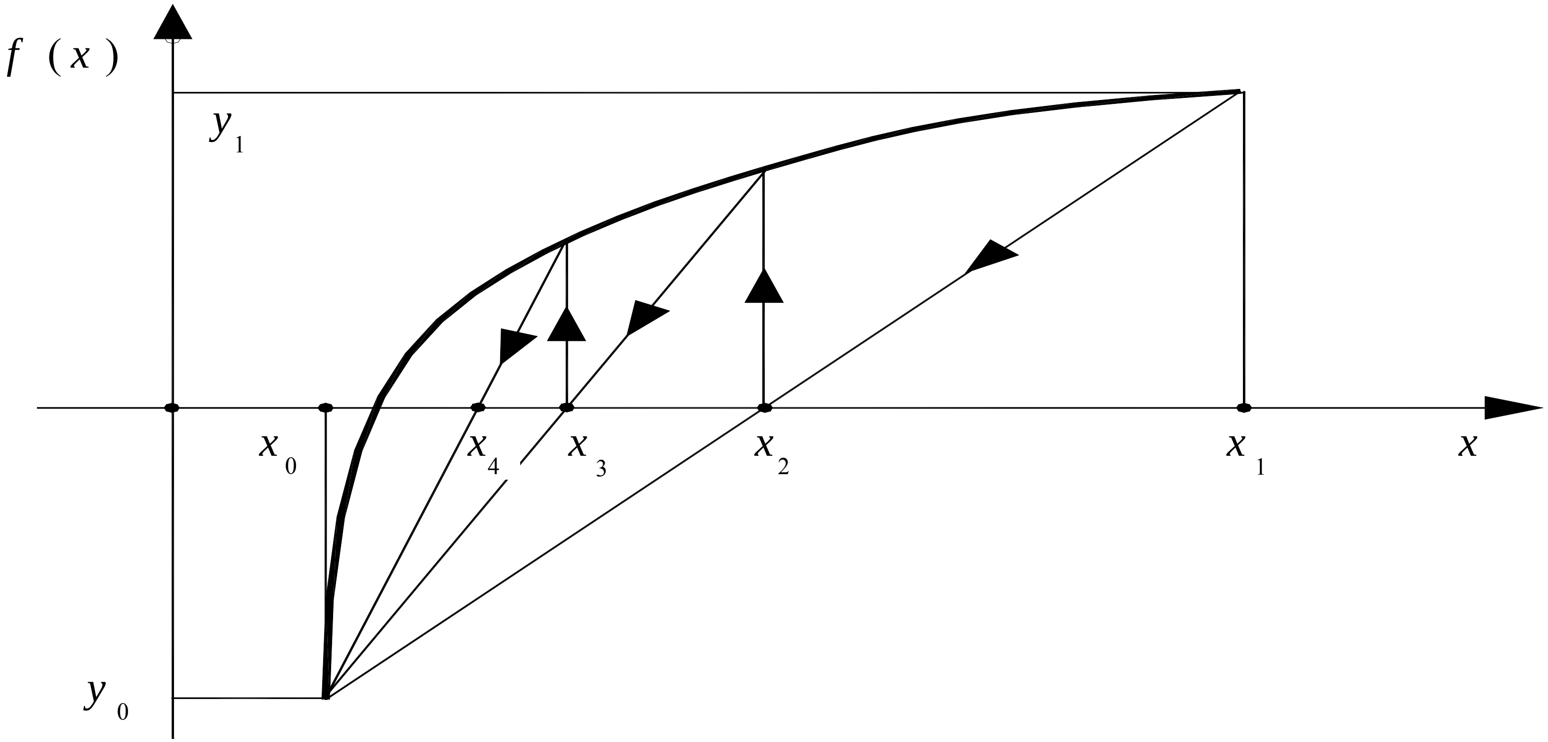
Prin această relaţie poate fi exprimată eroarea care se produce la o etapă oarecare faţă de eroarea produsă la etapa precedentă. **Procesul va fi convergent dacă paranteza are o valoare subunitară**, deci dacă:

$$\left|1 - \frac{f'\left(\alpha\right)}{m}\right| < 1$$

Această condiţie poate fi îndeplinită pentru **valori mari ale pantei secantei**.

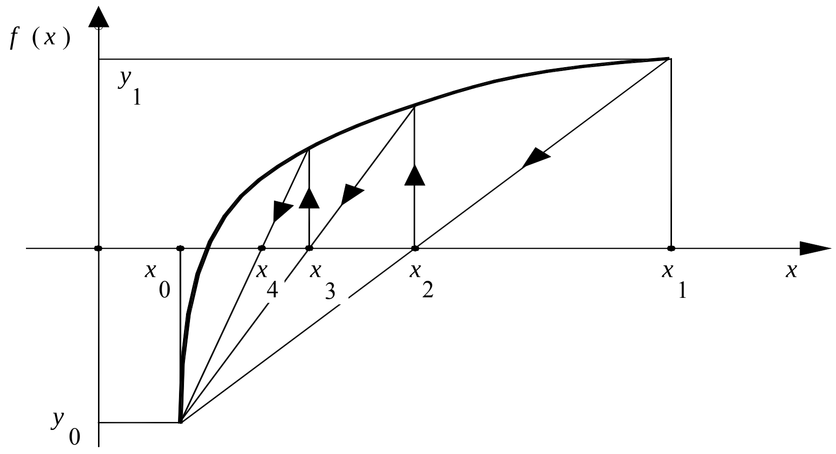
METODA SECANTEI VARIABILE

La această metodă, **la fiecare etapă se recalculează panta secantei**. În acest scop **punctele care reprezintă extremităţile secantei se aleg astfel**: unul dintre ele, de exemplu cel din stânga, este **fix** alegându-se limita din stânga a intervalului de căutare specificat iniţial; iar al doilea **variabil** determinat la fiecare etapă:



Etapa 1:

Se calculează panta secantei determinate de intervalul iniţial, respectiv punctele având coordonatele (x_0, y_0) şi (x_1, y_1):



$$m_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

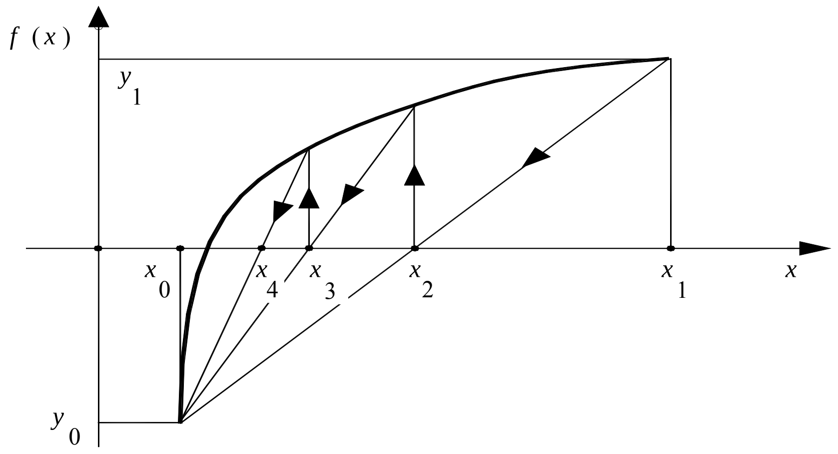
ca urmare ecuaţia secantei va fi: $y - y_1 = m_1 \cdot (x - x_1)$

Abscisa punctului de intersecţie a secantei cu axa orizontală se va obţine cu relaţia:

$$x_2 = x_1 - \frac{y_1}{m} = x_1 - \frac{f(x_1)}{m}$$

pentru această abscisă valoarea funcţiei va fi: $y_2 = f(x_2)$

Etapa 2:



Se calculează panta secantei determinate de intervalul iniţial, respectiv punctele având coordonatele (x_0, y_0) şi (x_2, y_2):

$$m_2 = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$$

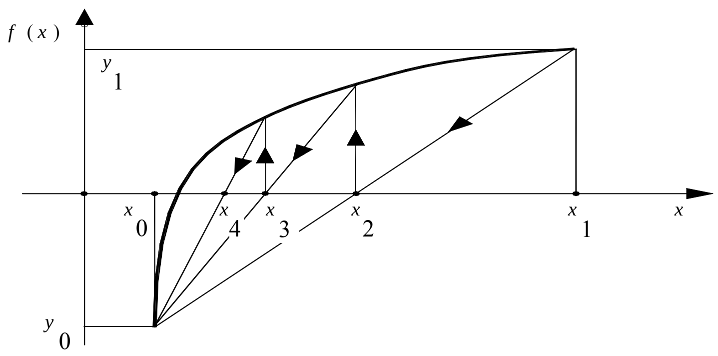
ca urmare ecuaţia secantei va fi: $y - y_2 = m_2 \cdot (x - x_2)$

Abscisa punctului de intersecţie a secantei cu axa orizontală se va obţine cu relaţia:

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2}{m} = x_2 - \frac{f(x_2)}{m}$$

pentru această abscisă valoarea funcţiei va fi: $y_3 = f(x_3)$

Etapa k:



Panta secantei la *etapa k:*

$$m_k = \frac{y_k - y_0}{x_k - x_0}$$

Coordonatele punctului care vor determina secanta la etapa următoare:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{m} \qquad\qquad y_{k+1} = f(x_{k+1})$$

Drept criteriu de oprire al algoritmului de căutare se poate utiliza relaţia:

$$|\, x_{k+1} - x_k \,| < \varepsilon$$

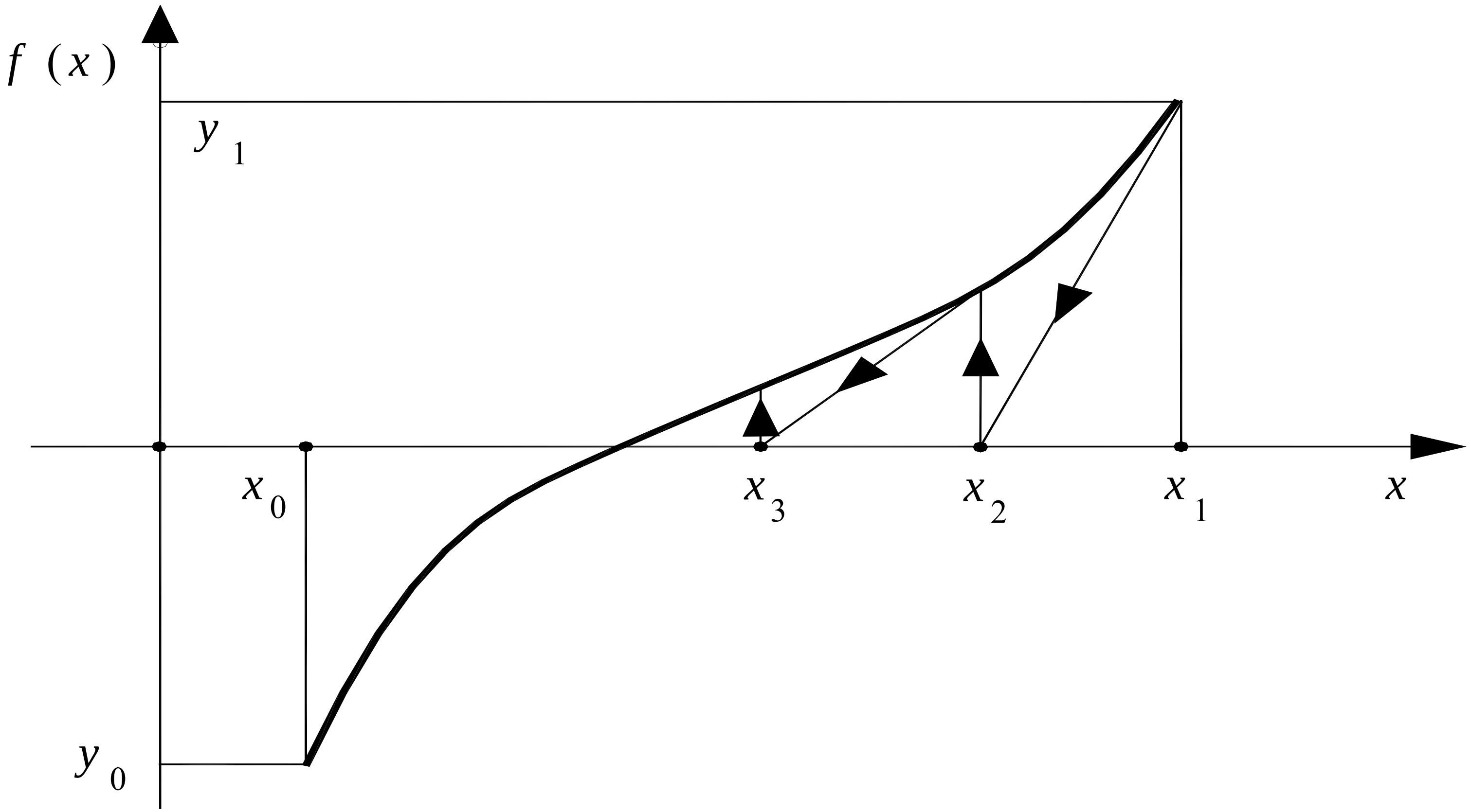
prin care se verifică dacă diferenţa dintre două determinări succesive ale soluţiei este mai mică decât o valoare **ε** impusă iniţial, sau relaţia:

$$|\, f(x_{k+1}) | < \varepsilon$$

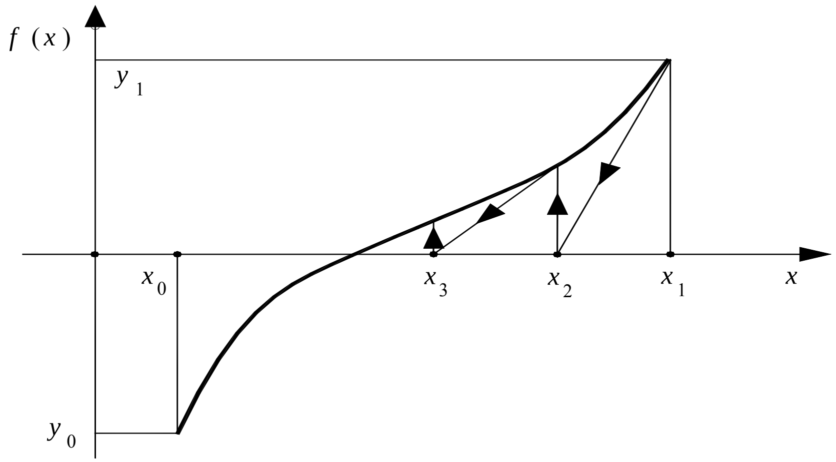
prin care se verifică dacă valoarea funcţiei la determinarea în curs a devenit mai mică decât o valoare **ε** impusă iniţial.

METODA TANGENTEI

Această metodă utilizează, pentru apropierea de soluţie, intersecţia dintre axa absciselor şi **tangenta** la graficul funcţiei ***f*(*x*)**, dusă în una dintre extremităţile intervalului de căutare, care la prima etapă, este cel specificat iniţial. Ca urmare aplicarea metodei necesită cunoaşterea atât a expresiei **funcţiei *f*(*x*)**, cât şi a expresiei **derivatei** acesteia ***f'*(*x*)**, .



Etapa 1:



Ecuaţia tangentei în punctul

de coordonate **(x_1, y_1)** va avea expresia:

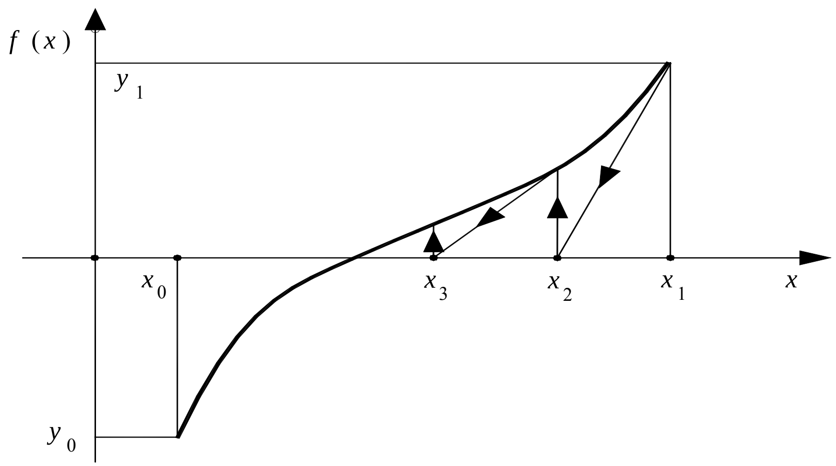
$$y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

Abscisa punctului de intersecţie al tangentei cu axa orizontală se va obţine cu relaţia:

$$x_2 = x_1 - \frac{y_1}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

pentru această abscisă valoarea funcţiei va fi $\boldsymbol{f(x_2)}$, iar a derivatei $\boldsymbol{f'(x_2)}$.

Etapa 2:



Ecuaţia tangentei în punctul

de coordonate (x_2, y_2) va avea expresia:

$$y - y_2 = f'(x_2)\cdot(x - x_2)$$

Abscisa punctului de intersecţie al tangentei cu axa orizontală se va obţine cu relaţia:

$$x_3 = x_2 - \frac{y_2}{f'(x_2)} = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

pentru această abscisă valoarea funcţiei va fi $f(x_3)$, iar a derivatei $f'(x_3)$.

Ca urmare, se pot stabili următoarele formule de recurenţă valabile pentru ***etapa k***:

Ecuaţia tangentei în punctul de coordonate $(\boldsymbol{x_k}, \boldsymbol{y_k})$ va avea expresia:

$$y - y_k = f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

Abscisa punctului de intersecţie al tangentei cu axa orizontală se va obţine cu relaţia:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{y_k}{f'(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

pentru această abscisă valoarea funcţiei va fi $\boldsymbol{f(x_{k+1})}$, iar a derivatei $\boldsymbol{f'(x_{k+1})}$.

Drept criteriu de oprire al algoritmului de căutare se poate utiliza relaţia:

$$\left| x_{k+1} - x_k \right| < \varepsilon$$

prin care se verifică dacă diferenţa dintre două determinări succesive ale soluţiei este mai mică decât o valoare ε impusă iniţial, sau relaţia:

$$\left| f(x_{k+1}) \right| < \varepsilon$$

prin care se verifică dacă valoarea funcţiei la determinarea în curs a devenit mai mică decât o valoare $\boldsymbol{\varepsilon}$ impusă iniţial.

Pentru a face o **apreciere asupra convergentei metodei** se va utiliza dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei. Presupunând că valoarea exactă a soluţiei este α şi prin urmare $\boldsymbol{f(\alpha) = 0}$, atunci două determinării succesive ale soluţiei se vor putea scrie sub forma:

$$x_k = \alpha + e_k \qquad\qquad x_{k+1} = \alpha + e_{k+1}$$

în care $\boldsymbol{e_k}$ şi $\boldsymbol{e_{k+1}}$ vor reprezenta erorile produse la cele două etape succesive. Înlocuind aceste valori în relaţia de recurenţă a metodei se obţine:

$$\alpha + e_{k+1} = \alpha + e_k - \frac{f(\alpha + e_k)}{f'(\alpha + e_k)}$$

Prin dezvoltarea în **serie Taylor** a funcţiei în jurul punctului α şi păstrând numai **primii doi termeni ai dezvoltării**, se obţine egalitatea:

$$e_{k+1} = e_k - \frac{f(\alpha) + e_k \cdot f'(\alpha)}{f'(\alpha + e_k)}$$

$$e_{k+1} = e_k \cdot \left(1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha + e_k)}\right) = e_k \cdot \frac{f'(\alpha + e_k) - f'(\alpha)}{f'(\alpha + e_k)} = e_k \cdot \frac{f'(\alpha) + e_k \cdot f''(\alpha) - f'(\alpha)}{f'(\alpha + e_k)}$$

$$e_{k+1} = e_k \cdot \left(1 - \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha + e_k)}\right) = e_k \cdot \frac{f'(\alpha + e_k) - f'(\alpha)}{f'(\alpha + e_k)} = e_k \cdot \frac{f'(\alpha) + e_k \cdot f''(\alpha) - f'(\alpha)}{f'(\alpha + e_k)}$$

Prin această relaţie poate fi exprimată eroarea care se produce la o etapă oarecare faţă de eroarea produsă la etapa precedentă:

$$e_{k+1} = e_k^2 \cdot \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha + e_k)}$$

Deoarece $e_{k+1} \cong e_k^2$ rezultă o convergenta mult mai bună faţă de metoda secantei.