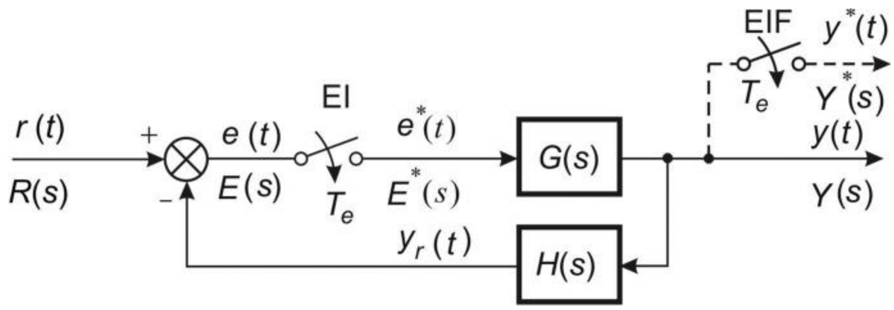
CAPITOLUL 4

SISTEME DISCRETE

OBIECTIVE

După studierea acestui capitol vei cunoaşte:

- Modul în care se realizează conversia analog-numerică a semnalelor şi cum se reconstituie semnalele continue din cele eşantionate.
- Definiţia, proprietăţile şi teoremele transformatei Z.
- Cele mai importante transformate Z precum şi perechile uzuale de transformate Laplace şi Z.
- Cum se determină transformata Z inversă a unor funcţii complexe de variabilă *z*.
- Definiţia, proprietăţile şi teoremele transformatei Z modificate.
- Modelele dinamice ale sistemelor discrete descrise prin ecuaţii cu diferenţe şi funcţii de transfer *z* şi operaţionale.
- Metodele de calcul exact şi aproximativ al funcţiilor de transfer *z*.
- Cum se calculează funcţiile de transfer echivalente pentru sistemele discrete complexe (cu mai multe elemente).
- Procedeele de analiză a răspunsului în timp al sistemelor discrete uzuale.
- Metodele folosite pentru evaluarea stabilităţii sistemelor discrete.
- Relaţiile utilizate pentru analiza erorilor staţionare a sistemelor discrete.
- Cum se aplică metoda locului rădăcinilor în sistemelor cu eşantionare.
- Modelele sistemelor discrete cu variabile de stare.



4.1 NOŢIUNI INTRODUCTIVE

Conducerea numerică a proceselor industriale a căpătat valenţe noi ca urmare a evoluţiei conceptelor de reglare şi mai ales datorită progreselor spectaculoase înregistrate în domeniul tehnologiei circuitelor integrate pe scară largă şi foarte largă (VLSI), a microprocesoarelor şi a sistemelor de interfaţă pentru achiziţia şi conversia datelor. Conceptele moderne de conducere a proceselor, concretizate în algoritmi de reglare de mare complexitate, pot fi acum implementate cu eficienţă prin utilizarea structurilor hardware cu procesoare de semnal, obţinându-se în acest mod sisteme flexibile cu performanţe de reglare deosebite.

În figura 4.1 sunt prezentate comparativ schemele-bloc funcţionale pentru un sistem de reglare continuu (Fig. 4.1a), respectiv pentru un sistem de reglare numeric (Fig. 4.1b).

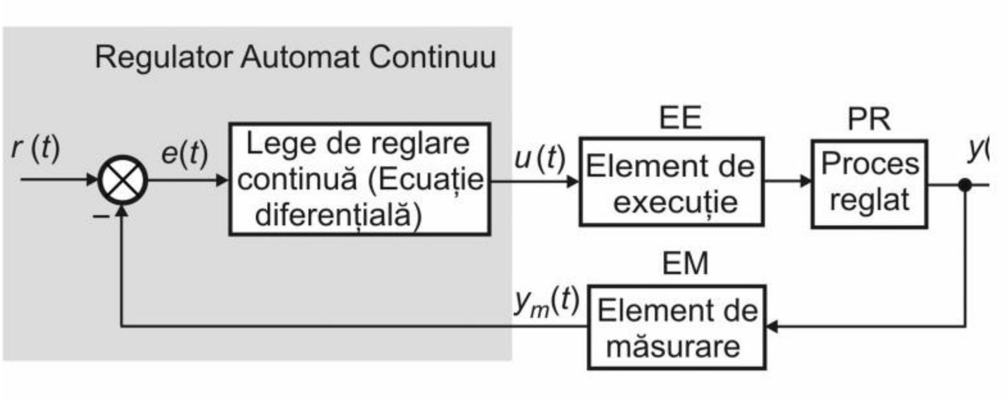


Fig. 4.1a

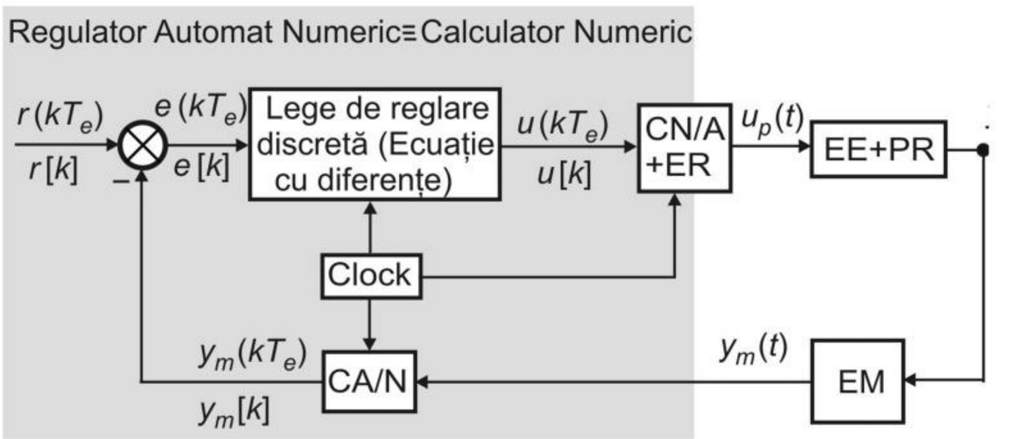


Fig. 4.1b

Diferenţele fundamentale între cele două implementări sunt determinate de faptul că sistemul numeric prelucrează eşantioane prelevate în anumite momente, din semnalul măsurat la ieşire iar procesarea datelor, conform legii de reglare, se face cu ajutorul unor ecuaţii algebrice recursive. Denumirea de sistem de reglare numeric este determinată de faptul că prelucrarea semnalelor se realizează în cadrul unui sistem numeric de calcul (procesor numeric).

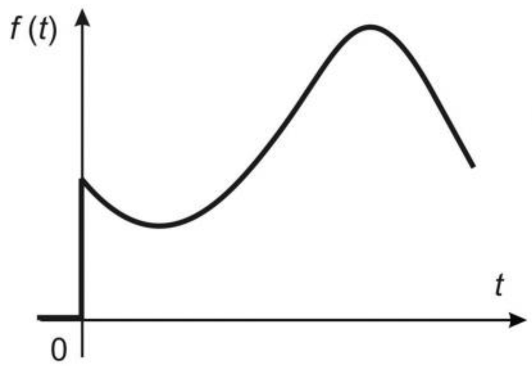
Elementele specifice ale unui sistem numeric sunt convertoarele analog/numeric (CA/N) şi numeric/analogic (CN/A), care realizează interfaţa între procesul continuu şi calculatorul numeric.

Convertorul **analog/numeric** (CA/N) transformă semnalele analogice în secvenţe temporale numerice, care sunt semnale discretizate în timp şi aplitudine reprezentate în formă binară.

Convertorul **numeric/analogic** (CN/A) realizează funcţia de reconstituire a semnalelor continue din semnalele numerice reprezentate în formă binară.
În cadrul procesului de conversie numeric-analogică se realizează şi o filtrare cu un filtru trece-jos (FTJ) a semnalelor discretizare în timp şi amplitudine.

4.2 CONVERSIA ANALOG-NUMERICĂ A SEMNALELOR. DISCRETIZAREA SEMNALELOR ANALOGICE

Pentru fixarea terminologiei se reaminteşte că un semnal $f(t)$ este numit *semnal analogic* sau *continuu în timp* dacă este definit pentru toate valorile reale ale variabilei timp, *t*. Dacă semnalul $f(t)$ este definit numai pentru valori discrete ale timpului *t*, semnalul este numit *semnal discret în timp* sau *semnal eşantionat*. Dacă semnalul eşantionat este cuantizat în amplitudine, adică poate lua, din punctul de vedere al amplitudinii, numai anumite valori, atunci el se numeşte *semnal discret*. Semnalele discrete (eşantionate şi cuantizate în amplitudine) reprezentate în formă binară se numesc *semnale numerice* (*digitale*).
Prima etapă a procesului de conversie analog-numerică este *eşantionarea*. Prin eşantionare se prelevează valorile semnalului continuu $f(t)$ la intervale de timp egale, kT_e $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. În acest fel variabila timp continuu *t*, este convertită în variabila timp discret kT_e cu $k \in \boldsymbol{Z}$ (mulţimea numerelor întregi). Intervalul temporal dintre două eşantioane succesive, notat cu T_e, se numeşte *perioadă de eşantionare*. Semnalul eşantionat (v. fig. 4.2,b) este o succesiune (un tren) de pulsuri modulate în amplitudine la valorile semnalului continuu prezentat în figura 4.2,a.



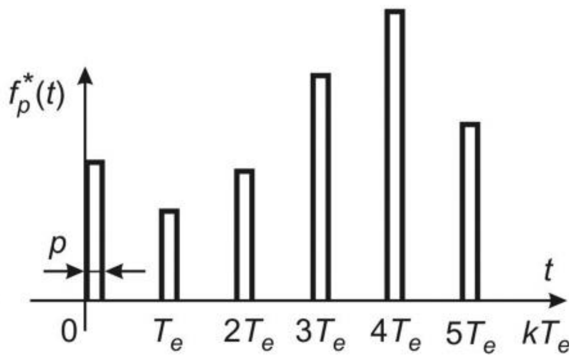


Fig. 4.2

Utilizarea semnalelor eşantionate reale modelate prin pulsuri modulate în amplitudine complică foarte mult analiza sistemelor discrete în timp. Din acest motiv şi având, de asemenea, în vedere că durata de menţinere a valorilor eşantionate (*p*) este practic foarte mică, se preferă ca semnalele eşantionate să fie modelate ca un tren de impulsuri unitare (Dirac) modulate în amplitudine (v. fig. 4.3). Semnalele modelate prin trenuri de impulsuri Dirac se numesc *semnale eşantioante ideal*.
În a doua etapă a procesului de conversie analog-numerică semnalul eşantionat este *cuantizat în amplitudine*. Cuantizarea în amplitudine asociază semnalului iniţial (semnalul eşantionat ideal) o valoare cât mai apropiată dintro mulţime de valori aprioric fixată, numite *niveluri de cuantizare*.

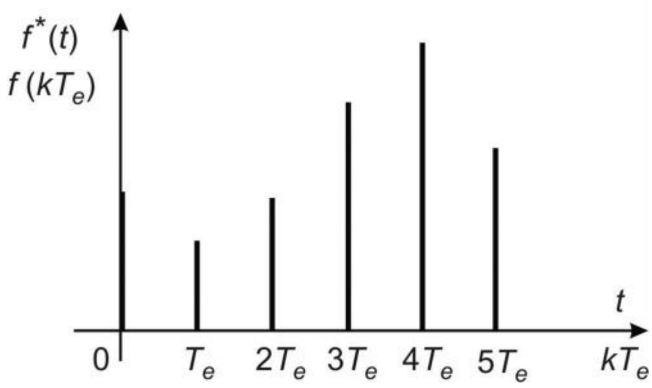


Fig. 4.3

Diferenţa dintre două niveluri de cuantizare succesive $q = f_{n+1} - f_n$, poartă numele de *pas de cuantizare*. Modul de realizare a procesului de cuantizare în amplitudine prin trunchiere (vezi § 4.2.2) este ilustrat grafic în figura 4.4, unde cu linie subţire s-au reprezentat eşantioanele ideale.

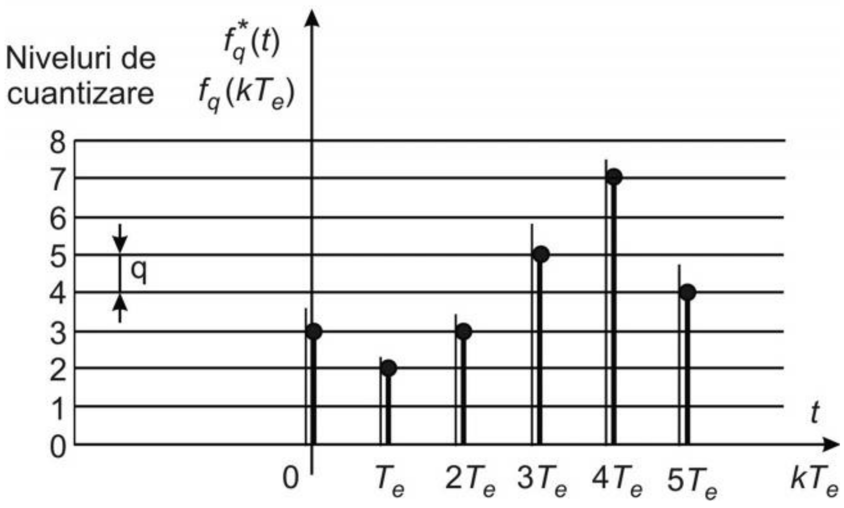


Fig. 4.4

În finalul procesului de conversie analog-numerică, secvenţa semnalului eşantionat şi cuantizat este *codificată* aşa cum se vede în figura 4.5.

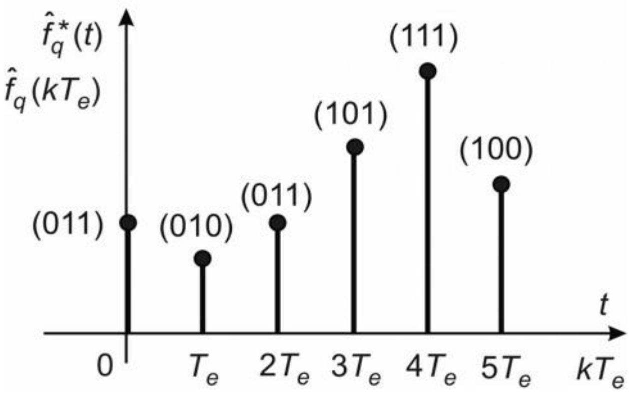


Fig. 4.5

Prin codificare, fiecărui eşantion cuantizat în amplitudine îi este atribuită o valoare reprezentată în cod, cel mai frecvent utilizat fiind codul binar natural. Procesul de codificare va fi detaliat în paragraful 4.2.5.

4.2.1 Eşantionarea ideală

Semnalele eşantionate ideal prezintă o importanţă deosebită pentru dezvoltarea metodelor de analiză a sistemelor discrete. Se poate remarca faptul că sistemele discrete care prelucrează semnale eşantionate ideal (deci la care se neglijează cuantizarea de amplitudine) sunt sisteme liniare.
Un aspect extrem de important al discretizării în timp a semnalelor, cu implicaţii importante în ceea ce priveşte sistemele discrete, este modificarea spectrului semnalului continuu. Consecinţa cea mai importantă a procesului de eşantionare este modificarea puternică a spectrului faţă de cel al semnalului original.
Semnalele eşantionate pot fi descrise cu ajutorul secvenţelor temporale notate:

$$\{f(kT_e)\}_{k\geq 0}=\{f(0),f(T_e),f(2T_e),\ldots\}\,, \tag{4.1}$$

sau prin funcţii definite în timp discret exprimate conform relaţiilor:

$$f(kT_e) \quad \text{sau} \quad f[k], \quad \text{cu} \quad k\in \boldsymbol{Z}\,, \tag{4.2}$$

funcţii care au argumentul timp cu valori reale în primul caz, respectiv cu valori întregi, în al doilea caz. Se remarcă faptul că în cazul argumentului timp cu valori reale, se folosesc parantezele rotunde, iar pentru cazul argumentului timp cu valori întregi se foloseşte notaţia specială cu paranteze drepte.
O descriere frecvent folosită pentru semnalele eşantionate ideal, utilizează modalităţile de reprezentare şi notaţiile specifice semnalelor continue. În acest caz, semnalul eşantionat ideal se notează cu $f^*(t)$. Procesul de eşantionare ideală este modelat şi prezentat în schemele bloc funcţionale ca un întrerupător sincron (cu perioada T_e), având durata de închidere infinit mică, denumit *eşantionor ideal*. Simbolul elementului eşantionor ideal (EI) este prezentat grafic în figura 4.6.
Semnalele eşantionate ideal sunt modelate, aşa cum s-a văzut mai sus, prin trenuri (secvenţe) de impulsuri Dirac. Matematic aceste semnale pot fi descrise folosind un tren de impulsuri Dirac unitare numit *funcţia delta Dirac* exprimat conform relaţiei:

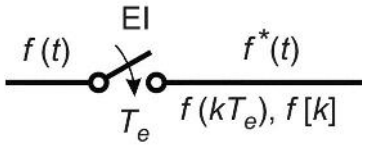


Fig. 4.6

$$\delta_{T_e}(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_e)\,. \tag{4.3}$$

Semnalul eşantionat $f^*(t)$ se obţine prin înmulţirea semnalului analogic $f(t)$ cu funcţia delta Dirac (vezi Fig. 4.7). Astfel, se obţine relaţia de descriere a unui semnal eşantionat ideal:

$$f^*(t)=f(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_e)\,, \tag{4.4}$$

de unde, având în vedere proprietatea impulsului Dirac exprimată conform relaţiei:

$$f(t)\delta(t-kT_e)=f(kT_e)\delta(t-kT_e)\,, \tag{4.5}$$

rezultă o altă expresie de descriere a semnalelor eşantionate ideal:

$$f^*(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(kT_e)\delta(t-kT_e)\,. \tag{4.6}$$

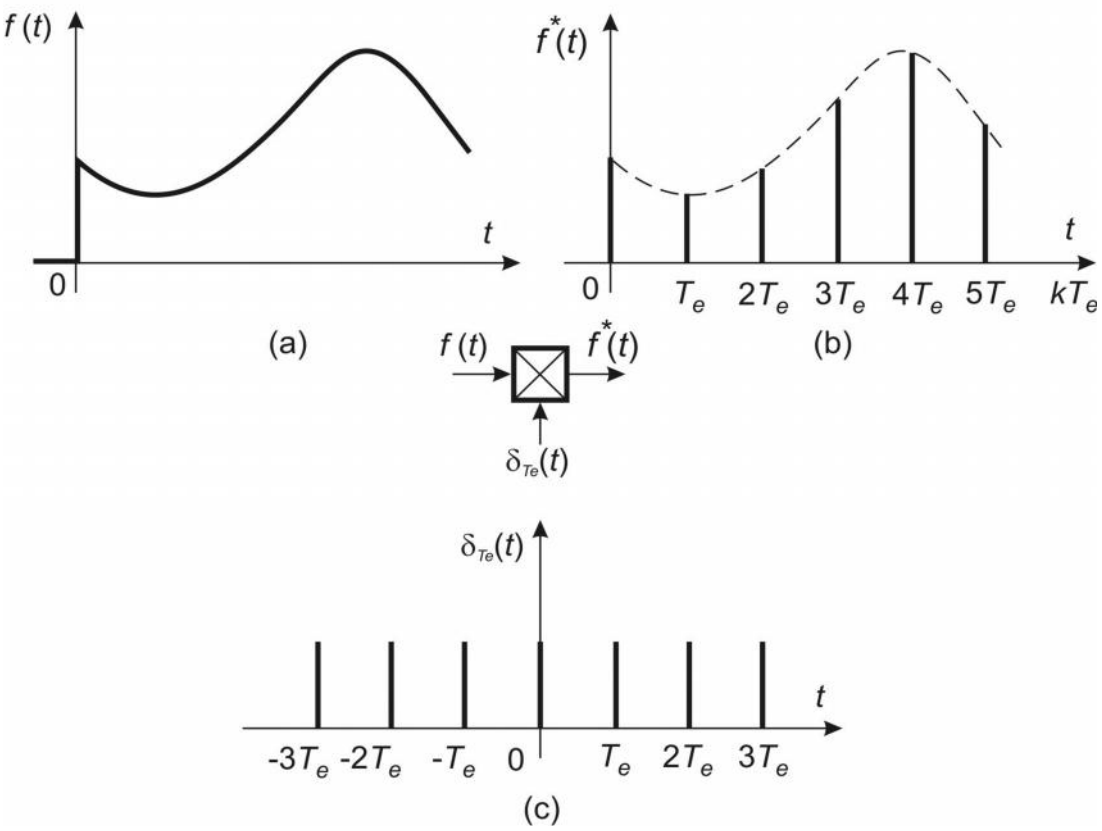


Fig. 4.7

Relaţia (4.6) este utilă pentru calculul transformatei Laplace a unui semnal eşantionat ideal. Aplicând definiţia transformatei Laplace se obţine:

$$F^*(s) = \mathbf{L}\ \{f^*(t)\} = \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e)\,\delta(t-kT_e) \right] \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,, \tag{4.7}$$

respectiv, după intervertirea operaţiilor de integrare şi sumare:

$$F^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e) \int_0^{\infty} \delta(t-kT_e)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.8}$$

Integrala se evaluează cu proprietatea de filtrare a impulsului Dirac rezultând astfel:

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e)\,\mathrm{e}^{-s\,k\,T_e}\,. \tag{4.9}$$

Există şi o altă formă de descriere a semnalelor eşantionate ideal, care se deduce având în vedere faptul că semnalul delta Dirac este periodic de perioadă T_e. Un semnal periodic poate fi reprezentat prin seria Fourier complexă exprimată conform relaţiei:

$$\delta_{Te}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{C}_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\,\omega_e\,t}\,, \tag{4.10}$$

unde $\omega_e = 2\pi/T_e$ este pulsaţia de eşantionare.

Coeficienţii Fourier complecşi, $\underline{C}_n$ se determină cu formula:

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T_e}\int_{-T_e/2}^{T_e/2} \delta_{T_e}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_e t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T_e}\int_{-T_e/2}^{T_e/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_e)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_e t}\mathrm{d}t\ . \tag{4.11}$$

Deoarece în suma de sub integrală, numai impulsul $\delta(t)$ (obţinut pentru $k=0$) aparţine intervalului de integrare, rezultă:

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T_e}\int_{-T_e/2}^{T_e/2} \delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_e t}\mathrm{d}t\ , \tag{4.12}$$

de unde, având în vedere proprietatea de filtrare a impulsului Dirac, se obţine:

$$\underline{C}_n = \frac{1}{T_e}\ . \tag{4.13}$$

Prin urmare, semnalul eşantionat ideal poate fi descris şi cu relaţia:

$$f^*(t) = \frac{1}{T_e}f(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_e t}\ , \tag{4.14}$$

sau:

$$f^*(t) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(kT_e)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_e t}\ . \tag{4.15}$$

În ultimele două relaţii s-a înlocuit, pentru a se uniformiza notaţiile, indicele de sumare *n* cu *k*, modificarea fiind întrutotul corectă.
Cu relaţia (4.14) se poate deduce o altă formă pentru transformata Laplace a unui semnal eşantionat ideal. Aplicând definiţia şi teorema deplasării în complex (de înmulţire a unui semnal cu o exponenţială) a transformatei Laplace se obţine:

$$F^*(s) = \mathbf{L}\ \{f^*(t)\} = \int_0^{\infty}\left[\frac{1}{T_e}f(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_e t}\right]\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\ , \tag{4.16}$$

respectiv:

$$F^*(s) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty}[f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_e t}]e^{-st}\mathrm{d}t\ , \tag{4.17}$$

sau, în final:

$$F^*(s) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F(s-\mathrm{j}k\omega_e)\ , \tag{4.18}$$

unde $F(s) = \mathbf{L}\ \{f(t)\}$.

4.2.1.1 Analiza spectrală a semnalelor eşantionate ideal. Fenomenul de “aliasing”

Analiza spectrală a semnalelor se face în mod sistematic cu transformata Fourier. Spectrul complex de amplitudine al unui semnal continuu $f(t)$, se obţine prin aplicarea transformatei Fourier, conform relaţiei:

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.19}$$

Deoarece $F(j\omega)\in \boldsymbol{C}$, pentru analiza spectrală se preferă utilizarea modulului funcţiei spectrale de amplitudine notat cu $|F(j\omega)|$. În figura 4.8 se prezintă, ca exemplu, forma de variaţie a spectrului de amplitudine a semnalului continuu $f(t)$. Se consideră că semnalul continuu $f(t)$ are spectrul cu bandă limitată.

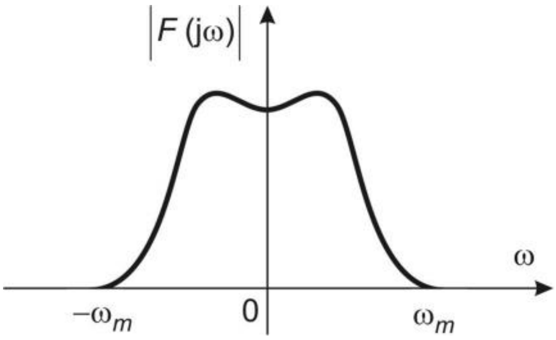


Fig. 4.8.

Se notează cu ω_m pulsaţia maximă conţinută în spectrul $|F(j\omega)|$. Pentru a se determina funcţia spectrală de amplitudine a semnalului eşantionat ideal la aplicarea relaţiei de definiţie a transformatei Fourier, se utilizează relaţia (4.14). Astfel, se obţine succesiv:

$$F^{*}(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f^{*}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\,, \tag{4.20}$$

respectiv:

$$\begin{aligned} F^{*}(\mathrm{j}\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{T_e}f(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\,\omega_e t}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-k\,\omega_e)t}\mathrm{d}t=\\ &=\frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}F(\omega-k\,\omega_e). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Din ultima relaţie rezultă că spectrul unui semnal eşantionat este format dintr-o infinitate de spectre similare cu cel al semnalului continuu, ponderate cu $1/T_e$ şi centrate pe valori multiplu întreg al pulsaţiei de eşantionare. În figura 4.9 se prezintă modulul spectrului de amplitudine al semnalului eşantionat ideal $|T_e F^{*}(j\omega)|$, considerându-se două situaţii diferite. Spectrul semnalului eşantionat este înmulţit cu T_e pentru a se elimina acţiunea factorului de ponderare $1/T_e$. Curbele prezentate în figurile 4.9a şi 4.9b ilustrează, de asemenea, câteva consecinţe extrem de importante ale procesului de eşantionare.

În figura 4.9a se prezintă spectrul semnalului eşantionat în cazul $\omega_e/2>\omega_m$, ceea ce înseamnă că frecvenţa de eşantionare $\omega_e=2\pi/T_e$ depăşeşte de două ori cea mai înaltă pulsaţie conţinută în spectrul semnalului continuu. În acest caz este evident că spectrul semnalului original poate fi reconstituit prin filtrarea spectrului $F^*(j\omega)$ cu un filtru trece-jos (FTJ) care elimină componentele spectrale definite cu relaţia:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(\omega - k\,\omega_e)\text{, cu } k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4.22}$$

În figura 4.9b se prezintă spectrul periodic al semnalului eşantionat $F^*(j\omega)$ în cazul $\omega_e/2 < \omega_m$, ceea ce înseamnă că pulsaţia de eşantionare este mai mică decât dublul celei mai mari pulsaţii conţinute în spectrul semnalului continuu. Se vede că în acest caz există o suprapunere a lobilor adiacenţi, fenomen (efect) numit „*aliasing*". Având în vedere că semnalul original este refăcut din semnalul eşantionat cu un filtru trece-jos (FTJ) care, în mod ideal, are caracteristica prezentată în figura 4.9b (cu linie întreruptă), din figură se constată că spectrul reconstituit este distorsionat faţă de cel original în zona pulsaţiilor cuprinse între $\omega_e - \omega_m$ şi $\omega_e/2$. În acest interval al pulsaţiilor, spectrul lobului principal se suprapune (amestecă, aliază) cu spectrul lobului centrat pe pulsaţia ω_e.

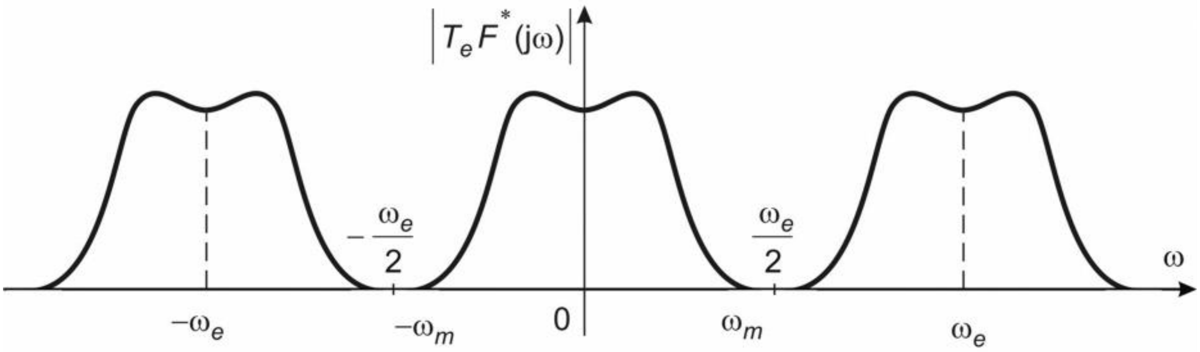


Fig. 4.9a

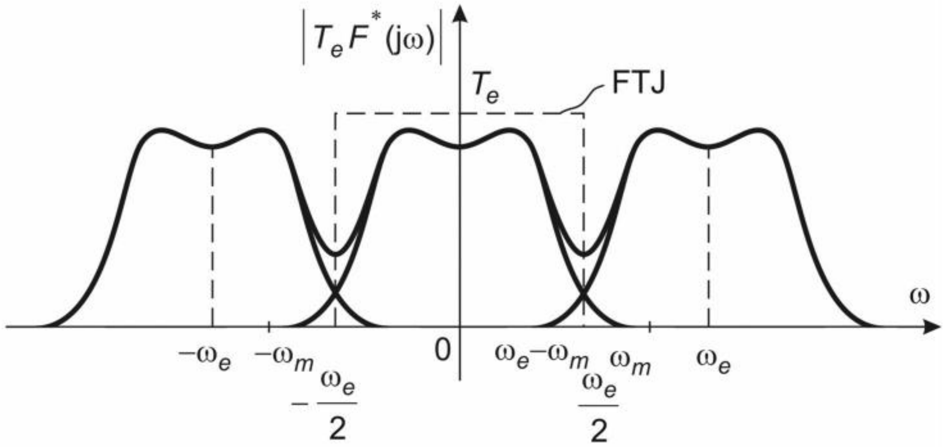


Fig. 4.9b

Erorile cauzate de fenomenul de aliasing pot să devină foarte importante dacă semnalul continuu conţine zgomote cu amplitudine mare.

Soluţia practică de eliminare sau minimizare a efectelor fenomenului de aliasing constă în filtrarea cu un filtru trece-jos a semnalului continuu, înainte ca acesta să fie aplicat

convertorului analog/numeric. Acest filtru denumit de „*anti-aliasing*” trebuie să înlăture complet componentele cu pulsaţie mai mare decât $\omega_e/2$. În figura 4.10 se prezintă spectrul semnalului eşantionat care se obţine dacă se aplică o filtrare anti-aliasing.
Pulsaţia critică la care apare fenomenul de aliasing este numită în literatură *pulsaţie Nyquist* şi este notată $\omega_N = \omega_e/2$.

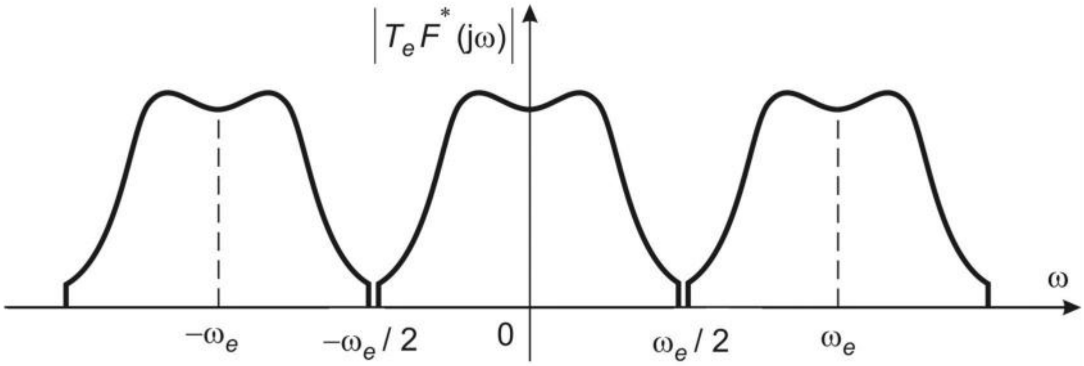


Fig. 4.10.

Un corolar al aspectelor legate de fenomenul de aliasing este *teorema eşantionării* (*Shannon*). Conform acestei teoreme un semnal se poate reconstitui din eşantioanele sale dacă pulsaţia de eşantionare este cel puţin de două ori mai mare decât cea mai mare pulsaţie conţinută în semnalul continuu, adică:

$$\omega_N = \frac{\omega_e}{2} \geq \omega_m \text{ sau } \frac{2\pi}{2T_e} \geq \frac{2\pi}{T_m} \text{ respectiv } T_e \leq \frac{T_m}{2}, \tag{4.23}$$

unde s-a notat cu T_m perioada corespunzătoare pulsaţiei ω_m.
Se remarcă totuşi faptul că acestă limită inferioară $(\omega_e/2 \cong \omega_m)$ are un caracter pur teoretic. În practică, pentru refacerea cât mai exactă a unui semnal din eşantioanele sale este necesar ca $\omega_e/2 \geq 5\omega_m$.

4.2.2 Cuantizarea

După eşantionare următorul pas în conversia analog-numerică este cuantizarea în amplitudine. Fiecare eşantion $f(kT_e)$ este aproximat cu o valoare care este multiplu întreg al unei cantităţi de bază q numită *pas de cuantizare*. Cuantizarea în amplitudine se poate realiza în două moduri:

- prin rotunjire;
- prin trunchiere.

Operaţia este ilustrată în figura 4.11 în care se prezintă caracteristica statică („intrare-ieşire”) a unui element de cuantizare în amplitudine cu rotunjire.

În acest caz fiecare valoare din intervalul $(k-1/2)q$ şi $(k+1/2)q$, este aproximată prin valoarea *kq.* La cuantizarea prin trunchiere fiecare valoare a semnalului de intrare, cuprinsă în intervalul *kq* şi $(k+1)q$, este aproximată prin valoarea *kq*. Caracteristica statică a acestui procedeu de cunatizare se obţine deplasând în dreapta cu $q/2$ caracteristica prezentată în figura 4.11. Ambele metode de cuantizare introduc erori în reprezentarea semnalelor cuantizate.

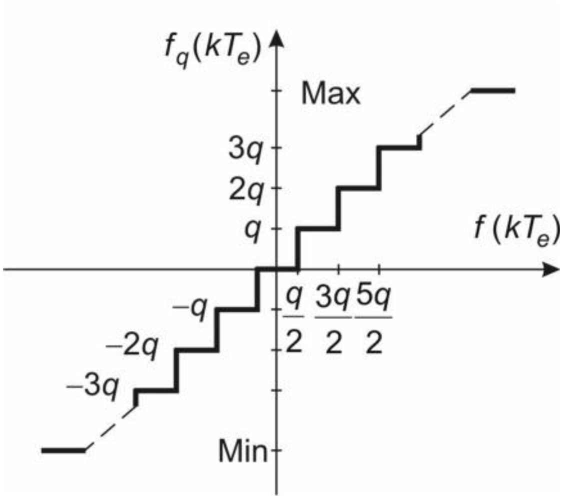


Fig. 4.11

Dacă se notează:

$$f(kT_e) = f_q(kT_e) + \varepsilon(kT_e)\,, \tag{4.24}$$

se poate constata uşor că, la cuantizarea prin rotunjire, eroarea se modifică liniar de la $-q/2$ la $q/2$ în timp ce la cuantizarea prin trunchiere eroarea este variabilă liniar de la 0 la q.
Se remarcă faptul că ordinea în care se fac operaţiile de eşantionare şi cuantizare nu este obligatorie să fie cea prezentată mai sus. Este posibil, fără a exista nici o schimbare în ceea ce priveşte fenomenul de aliasing prezentat mai înainte, ca să se facă mai întâi cuantizarea de amplitudine şi apoi eşantionarea.

4.2.3 Codificarea binară a semnalelor eşantionate

Având semnalul eşantionat în timp şi cuantizat în amplitudine, se ajunge la o secvenţă de numere $\{f_q(kT)\}$ care sunt acum codificate în formă binară. Aceasta este etapa finală în procesul de conversie analog-digitală după care secvenţa codificată poate fi aplicată unui procesor numeric (digital). Procesorul prelucrează secvenţa efectuând o serie de operaţii standard printre care stocarea într-o memorie, multiplicarea cu un număr, adunarea şi deplasarea în timp. În fiecare operaţie care implică elementele componente ale secvenţei şi alte numere, fiecare mărime este reprezentată printr-un număr binar. În continuare se discută cele mai utilizate reprezentări ale numerelor şi se compară rezultatele obţinute.
Reprezentarea simbolică a informaţiei într-un sistem numeric/digital poate fi analizată prin prisma sistemelor de numeraţie şi a codurilor utilizate.
Sistemul de numeraţie este format din totalitatea regulilor de reprezentare a numerelor cu ajutorul unor simboluri numite *cifre*. Sistemele de numeraţie sunt de două feluri: *poziţionale* şi *nepoziţionale*. În sistemele de calcul se folosesc în special sistemele de numeraţie poziţionale, datorită simplităţii de reprezentare şi de efectuare a calculelor aritmetice.
Un sistem de numeraţie poziţional este caracterizat prin *bază*; aceasta reprezintă numărul total de simboluri (cifre) ale sistemului.
Într-un sistem de numeraţie de bază *b*, un număr *N*, format din parte întreagă şi parte fracţionară, se poate reprezenta într-una din următoarele forme:

$$N = \begin{cases} a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m} \\ a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \cdots + a_1b^1 + a_0b^0 + a_{-1}b^{-1} + a_{-2}b^{-2} + \cdots + a_{-m}b^{-m} = \sum_{t=-m}^{n-1} a_t b^t \end{cases}$$
(4.25)

unde, b este baza sistemului, a_i sunt cifrele, n numărul de cifre ale părţii întregi, m numărul de cifre ale părţii fracţionare, a_{n-1} cifra cea mai semnificativă (CMS), a_{-m} cifra cea mai puţin semnificativă (CMPS).
Deoarece numărul de cifre utilizate în sistem este egal cu baza, rezultă că:

$0 \le a_i \le b-1$, unde $-m \le i \le n-1$. (4.26)

Dacă $n = 0$, atunci numărul N este subunitar, iar dacă $m = 0$, atunci N este întreg.
Relaţia (4.25) arată de ce astfel de sisteme sunt denumite poziţionale: fiecare cifră a_i intră în valoarea numărului respectiv cu o pondere dată de puterea i a bazei b. Fiecare număr se obţine din numărul anterior prin adăugarea unei unităţi la ultima cifră.
În sistemele numerice/digitale, semnalele pot avea, în mod normal, una din singurele două stări posibile: de jos sau de sus, cu sarcină sau fără sarcină, oprit sau pornit. Astfel de semnale sunt intrepretate ca reprezentând cifre binare (sau biţi), ale căror valori posibile sunt 0 şi 1. Aceasta este cauza pentru care s-a ales baza de numeraţie 2 (sau binară) pentru reprezentarea numerelor în sistemele numerice/digitale.
În cazul numerelor binare, virgula se numeşte virgulă binară. Bitul cel mai din stânga al unui număr binar este numit bitul cel mai semnificativ (MSB – most significant bit); bitul cel mai din dreapta este bitul cel mai puţin semnificativ (LSB – least significant bit).
În general, conversia între două baze de numeraţie nu se poate efectua doar printr-o simplă substituire; sunt necesare unele operaţii aritmetice, existând în acest sens algoritmi de conversie.
Un număr zecimal având atât parte întreagă cât şi parte fracţionară poate fi convertit într-un număr binar după următorul algoritm:

(i) Partea întreagă a numărului zecimal se împarte succesiv la 2 (baza sistemului în care se face conversia), până când câtul devine 0. Resturile împărţirii succesive reprezintă cifrele numărului scris în noua bază. Aceste cifre (biţi) sunt calculate în ordine crescătoare, bitul cu rangul cel mai puţin semnificativ fiind primul.
(ii) Partea fracţionară a numărului zecimal se înmulţeşte cu 2, separându-se apoi partea întreagă. Se continuă astfel prin înmulţirea părţii fracţionare obţinute până când aceasta devine nulă sau se obţine precizia dorită. Partea întreagă a produsului reprezintă un bit al numărului fracţionar exprimat în binar. Aceşti biţi sunt calculaţi în ordine descrescătoare, cel mai semnificativ fiind primul.

Exemplu. Să se convertească numărul zecimal $179{,}7109375_{(10)}$ în sistemul binar.

	Cât	Rest		Parte întreagă	Parte fracţionară
179:2	89	1 (LSB*)			
89:2	44	1	0,7109375×2	1 (MSB*)	0,421875
44:2	22	0	0,421875×2	0	0,84375
22:2	11	0	0,84375×2	1	0,68750
11:2	5	1	0,6875×2	1	0,3750
5:2	2	1	0,375×2	0	0,75
2:2	1	0	0,75×2	1	0,5
1:2	0	1 (MSB*)	0,5×2	1 (LSB*)	0,0

(*) Notaţiile LSB şi MSB se referă în acest caz la situaţia în care s-ar lua în considerare separat, ca numere distincte, partea întreagă şi partea fracţionară, deci nu pentru numărul întreg.
Deci: $179,7109375_{(10)} = 10110011.1011011_{(2)}$.
În literatura de specialitate sunt prezentaţi diverşi algoritmi pentru conversia binar-zecimală, cel mai cunoscut şi utilizat fiind cel care foloseşte modul de scriere sub formă de puteri (v. rel. (4.25)).

Exemplu

Să se convertească în sistemul zecimal, numărul binar $1101.101_{(2)}$.

$$1101.101_{(2)} = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 0\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} = 13{,}625_{(10)}.$$

Reprezentarea numerelor în sistemul de numeraţie binar prezintă mai multe forme în funcţie de soluţia aleasă pentru a se indica poziţia virgulei/punctului şi semnul numărului. Poziţia fixă sau variabilă a virgulei determină reprezentarea numită în *virgulă fixă* sau, respectiv în *virgulă mobilă*.

4.2.3.1 Reprezentarea numerelor în virgulă fixă

Blocurile aritmetice ale sistemelor de calcul care lucrează în *virgulă fixă*, consideră virgula plasată în faţa celei mai semnificative cifre a numărului. Pentru a se indica semnul numărului există mai multe tehnici, fiecare dintre acestea determinând un mod de reprezentare: prin *mărime/modul şi semn* (*cod direct*), prin *complement faţă de* 2 (*cod complementar*) şi prin *complement faţă de* 1 (*cod invers*).
Înainte de a ne referi la fiecare dintre aceste reprezentări utilizate, să definim noţiunea de complement al unui număr N scris într-o bază b.

Definiţie.
i) Se numeşte complement faţă de baza b al numărului $N_{(b)}$, numărul $[N]_{\text{comp}}$ definit prin relaţia:

$$[N]_{\text{comp}} = b^n - N_{(b)}. \tag{4.27}$$

ii) Se numeşte complement faţă de $b-1$ al numărului $N_{(b)}$ numărul $[N]_{\text{inv}}$ definit de relaţia:

$$[N]_{\text{inv}} = b^n - N_{(b)} - b^{-m}, \tag{4.28}$$

unde, n reprezintă numărul de cifre ale părţii întregi a numărului N, iar m reprezintă numărul de cifre ale părţii fracţionare a numărului N.

Exemple

În sistemul de numeraţie binar:

$$[N]_{\text{comp}} = 2^n - N_{(2)} \text{ şi } [N]_{\text{inv}} = 2^n - N_{(2)} - 2^{-m}. \tag{4.29}$$

Dacă $N_{(2)} = 1011.11$, atunci:

$$[N]_{\text{comp}} = 2^4 - 1011.11 = 10000 - 1011.11 = 0100.01,$$

iar:

$$[N]_{\text{inv}} = 2^4 - 1011.11 - 2^{-2} = 10000 - 1011.11 - 0.01 = 0100.00.$$

Cele trei moduri de reprezentare ale numerelor, menţionate anterior, sunt identice dacă numărul *N* este pozitiv, iar dacă numărul este negativ, în reprezentarea prin mărime şi semn cifrele numărului sunt chiar cifrele numărului considerat, în timp ce în celelalte două moduri de reprezentare, cifrele numărului reprezintă complementul faţă de 2 respectiv faţă de 1.

Reprezentarea prin mărime şi semn (cod direct)

Reprezentarea prin mărime şi semn a unui număr algebric *N* este dată de relaţia:

$$[N]_{\text{dir}} = a_n 2^n + \sum_{i=-m}^{n-1} a_i 2^i \,, \tag{4.30}$$

unde, a_n reprezintă bitul de semn şi ia valoarea 0 dacă $N \geq 0$ şi valoarea 1 dacă $N \leq 0$, iar a_i $(-m \leq i \leq n-1)$ sunt biţii numărului *N*.

Exemple

$$[+9]_{\text{dir}} = \overbrace{0}^{\text{bit de semn}} \; \underbrace{1001}_{\text{valoarea numarului}} \,, \quad [-9]_{\text{dir}} = \overbrace{1}^{\text{bit de semn}} \; \underbrace{1001}_{\text{valoarea numarului}} \,, \quad [-0.6875]_{\text{dir}} = \overbrace{1}^{\text{bit de semn}} \; \underbrace{1011}_{\text{valoarea numarului}}$$

Acest sistem de reprezentare are avantajul de a fi foarte asemănător cu scrierea “normală” (semnul se indică printr-un bit special), dar din punctul de vedere al realizării calculelor prezintă unele dezavantaje. Realizarea unei operaţii de adunare sau scădere a două numere nu depinde numai de funcţia de executat ci şi de semnul numerelor respective; în aceste condiţii este necesară examinarea, înainte de executarea operaţiei respective a bitului de semn. Pe de altă parte, blocul aritmetic al unui sistem numeric se poate simplifica mult dacă în loc să conţină dispozitive de adunare şi scădere, conţine numai dispozitive de adunare. Acest lucru poate fi realizat prin alegerea convenabilă a sistemului de reprezentare a numerelor şi anume prin reprezentarea în *cod complementar*.

Reprezentarea prin complementul faţă de 2 (cod complementar)

Un număr algebric *N* se reprezintă prin complementul faţă de 2, în forma indicată de relaţia:

$$[N]_{\text{comp}} = \begin{cases} 0 \times 2^n + \displaystyle\sum_{i=-m}^{n-1} a_i 2^i, & \text{pentru } N \geq 0, \\ 1 \times 2^n + \displaystyle\sum_{i=-m}^{n-1} \bar{a}_i 2^i + 2^{-m}, & \text{pentru } N \leq 0, \end{cases} \tag{4.31}$$

unde, $\bar{a}_i = 1 - a_i$, reprezintă complementul faţă de 1 al cifrei a_i $(-m \leq i \leq n-1)$.

Exemple.

$[+9]_{\text{comp}} = 01001$; $[-9]_{\text{comp}} = ?$

Deoarece $-9 = -1001_{(2)}$,

– se trece numărul în cod complementar:

$1001 \to 0111$,

– reprezentarea numărului -9 în cod complementar va fi:

$[-9]_{\text{comp}} = 10111$.

Se poate demonstra că reprezentarea numărului prin complement faţă de 2 corespunde chiar valorii reale a numărului.

Reprezentarea prin complementul faţă de 1 (cod invers)

Un număr algebric N se reprezintă prin complementul faţă de 1, în forma indicată de relaţia:

$$[N]_{\text{inv}} = \begin{cases} 0 \times 2^n + \sum_{i=-m}^{n-1} a_i 2^i, & pentru \;\; N \geq 0, \\ 1 \times 2^n + \sum_{i=-m}^{n-1} \overline{a}_i 2^i, & pentru \;\; N \leq 0, \end{cases} \tag{4.32}$$

unde, $\overline{a}_i = 1 - a_i$, reprezintă complementul faţă de 1 al cifrei a_i $(-m \leq i \leq n-1)$.

Exemple.

$[+9]_{\text{inv}} = 01001$; $[-9]_{\text{inv}} = ?$

Deoarece $-9 = -1001_{(2)}$,

– se trece numărul în cod invers:

$1001 \to 0110$,

– reprezentarea numărului –9 în cod invers va fi:

$[-9]_{\text{inv}} = 10110$.

Urmărind exemplele prezentate mai sus, se poate observa că, aşa cum s-a mai menţionat, cele trei forme de reprezentare coincid în cazul numerelor pozitive şi diferă în cazul numerelor negative.

4.2.3.2 Reprezentarea numerelor în virgulă mobilă

Necesitatea reprezentării în sistemele numerice de calcul a numerelor foarte mari sau foarte mici, cu un grad de precizie ridicat a condus la modul de reprezentare în virgulă mobilă. Acest mod de reprezentare este binecunoscut în sistemul zecimal. Un număr *N* reprezentat în virgulă mobilă (flotantă) are două componente. Prima *E*, denumită *expo-nent*, dă indicaţii asupra ordinului de mărime al numărului, iar a doua, denumită *mantisă M*, asupra mărimii exacte a numărului într-un anumit domeniu:

$$N = M \times b^E, \tag{4.33}$$

în care *b* este baza sistemului de numeraţie (în cazul studiat 2).
Reprezentarea numerelor algebrice în virgulă mobilă este ilustrată în figura 4.12. Se observă că numărul este reprezentat pe 32 de poziţii binare din care: una (SE) este utilizată pentru semnul exponentului, una (SM) pentru semnul mantisei, biţii 1÷6 pentru exponent şi biţii 8÷31 pentru mantisă.

SE							SM					…	
0	1	2	3	4	5	6	7						31

Fig. 4.12

În fig. 4.13 s-au reprezentat numerele $-2^{7}\times 0.1011$, $+2^{-4}\times 0.11011$, $-2^{-15}\times 0.111$, $+2^{29}\times 0.10111$. Pentru a se indica semnul exponentului şi al mantisei s-a utilizat convenţia: 0 pentru semnul „+” şi 1 pentru semnul „–”.

(a)	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	…	0	$N=-2^{7}\times 0.1011$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8						31	

(b)	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	…	0	$N=2^{4}\times 0.11011$
	0						6	7	8							31	

(c)	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	…	0	$N=-2^{-15}\times 0.111$
	0						6	7	8					31	

(d)	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	…	0	$N=2^{29}\times 0.10111$
	0						6	7	8						31	

Fig. 4.13

4.3 RECONSTITUIREA SEMNALELOR CONTINUE DIN CELE EŞANTIONATE

Refacerea semnalelor originale (continue) din cele eşantionate se realizează cu dispozitivul convertor numeric/analogic, care furnizează la ieşire un semnal continuu (de obicei o tensiune) egal sau proporţional (cel puţin în unele momente) cu semnalul numeric exprimat în cod. Funcţia principală pe care trebuie să o realizeze convertorul numeric/analogic este aceea de filtrare a lobilor laterali de frecvenţă înaltă. Eliminarea acestora din semnalul eşantionat $f^{*}(t)$ se poate face, aşa cum s-a arătat în secţiunea anterioară, cu un filtru trece-jos ideal cu caracteristica modul-pulsaţie prezentată în figura 4.14.

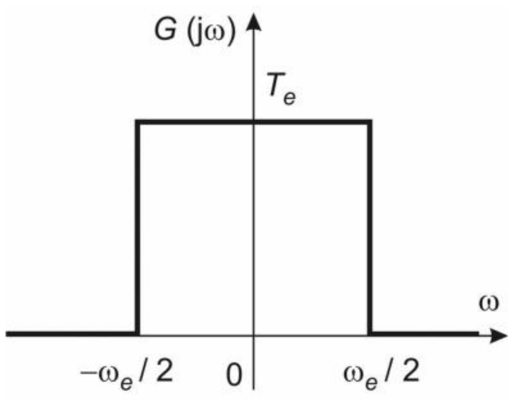


Fig. 4.14

Se menţionează totuşi că realizarea practică a unui astfel de filtru este imposibilă deoarece elementul este necauzal. Această caracteristică se poate demonstra dacă se calculează răspunsul pondere al filtrului. Aplicându-se transformata Fourier inversă pentru funcţia de frecvenţă din figura 4.14 se obţine succesiv:

$$g(t)=\Im^{-1}\{F(j\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_e/2}^{+\omega_e/2} T_e\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{T_e}{2\pi}\left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{j}t}\right|_{-\omega_e/2}^{+\omega_e/2}=\frac{T_e}{\pi t}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega_e t}{2}}-e^{-\mathrm{j}\frac{\omega_e t}{2}}}{2\mathrm{j}}=$$

$$=\frac{T_e}{\pi t}\sin\frac{\omega_e t}{2}=\frac{\sin\frac{\omega_e t}{2}}{\frac{\omega_e t}{2}}\text{, cu } t\in \boldsymbol{R}\,, \tag{4.34}$$

de unde rezultă că ieşirea unui astfel de element este diferită de zero înainte de a se aplica semnalul de intrare, adică impulsul unitar. Un astfel de element se spune că este necauzal şi nu este realizabil fizic.

Convertorul numeric/analogic fizic trebuie să genereze (producă) semnalul continuu din intervalul kT_e, $(k+1)T_e$, bazându-se pe valorile eşantioanelor din momentele kT_e, $(k-1)T_e$, $(k-2)T_e$,..., adică cunoscând valorile $f(kT_e)$, $f((k-1)T_e)$, $f((k-2)T_e)$,... .

Pentru calculul matematic aproximativ al semnalului continuu în intervalul kT_e, $(k+1)T_e$, pe baza eşantioanelor precedente, se utilizează de obicei dezvoltarea în serie Taylor a lui $f(t)$ în acest interval:

$$f_k(t)=f(kT_e)+f^{(1)}(kT_e)(t-kT_e)+\ldots\text{, pentru } kT_e\le t<(k+1)T_e\,. \tag{4.35}$$

În relaţia (4.35) $f^{(1)}(kT_e)$ este notaţia pentru derivata de ordinul unu. Calculul nu-meric al derivatei se face folosind diferenţa de ordinul unu:

$$f^{(1)}(kT_e)=\frac{f(kT_e)-f((k-1)T_e)}{T_e}\,. \tag{4.36}$$

Cea mai simplă realizare practică a unui convertor numeric/analogic se obţine dacă semnalul continuu în intervalul de la kT_e la $(k+1)T_e$ este aproximat, prin extrapolare, cu valoarea funcţiei $f(kT_e)$. Dispozitivul astfel realizat se numeşte *element de reţinere* (*extrapolator*) *de ordinul zero*.

O realizare mai complexă rezultă dacă semnalul $f_k(t)$ este aproximat în intervalul kT_e, $(k+1)T_e$ cu relaţia (4.35) în care se foloseşte şi prima derivată. Dispozitivul se nu-meşte în acest caz *element de reţinere* (*extrapolator*) *de ordinul unu*.

4.3.1 Elementul de reţinere (extrapolatorul) de ordinul zero (E0)

Semnalul de ieşire continuu al convertorului numeric/analogic este generat conform relaţiei:

$$f_k(t)=f(kT_e)\text{, pentru } kT_e\le t<(k+1)T_e\,. \tag{4.37}$$

Răspunsul la impuls (pondere) al elementului de reţinere de ordinul zero, ilustrat grafic în figura 4.15b, este:

$$g_{E0}(t)=\begin{cases}1\text{, pentru } 0\le t<T_e, \\ 0 \text{ altfel}\end{cases}. \tag{4.38}$$

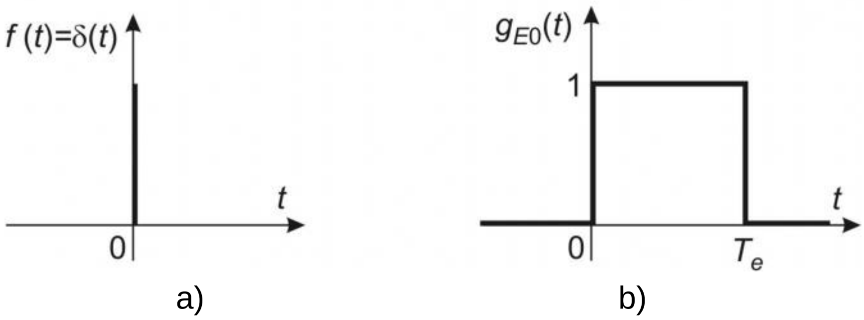


Fig. 4.15

Pentru a se deduce funcţia de transfer a elementului de reţinere de ordin zero, se are în vedere că:

$$g_{E0}(t) = 1_+(t) - 1_+(t - T_e)\,, \tag{4.39}$$

de unde, după aplicarea transformatei Laplace, rezultă:

$$G_{E0}(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s}\,. \tag{4.40}$$

Înlocuind $s = \mathrm{j}\omega$ se obţine funcţia de frecvenţă:

$$G_{E0}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1 - e^{-\mathrm{j}\omega T_e}}{\mathrm{j}\omega} = \frac{e^{-\mathrm{j}\omega T_e/2}\left(e^{\mathrm{j}\omega T_e/2} - e^{-\mathrm{j}\omega T_e/2}\right)}{\mathrm{j}\omega} =$$

$$= \frac{2e^{-\mathrm{j}\omega T_e/2}\sin\dfrac{\omega T_e}{2}}{\omega} = T_e\,\frac{\sin(\omega T_e/2)}{(\omega T_e/2)}\,e^{-\mathrm{j}\omega T_e/2}\,. \tag{4.41}$$

respectiv, cu notaţia $T_e = 2\pi/\omega_e$, rezultă:

$$G_{E0}(\mathrm{j}\omega) = \frac{2\pi}{\omega_e}\,\frac{\sin(\pi\omega/\omega_e)}{(\pi\omega/\omega_e)}\,e^{-\mathrm{j}(\pi\omega/\omega_e)}\,. \tag{4.42}$$

Din relaţia (4.42) se pot determina caracteristicile de frecvenţă:
– modul-pulsaţie:

$$\left|G_{E0}(\mathrm{j}\omega)\right| = \frac{2\pi}{\omega_e}\left|\frac{\sin(\pi\omega/\omega_e)}{(\pi\omega/\omega_e)}\right|, \tag{4.43}$$

– fază-pulsaţie:

$$\varphi_{E0}(\omega) = \arg G_{E0}(\mathrm{j}\omega) = -\frac{\pi\omega}{\omega_e}\,. \tag{4.44}$$

În figura 4.16 se prezintă grafic cele două caracteristici de frecvenţă pentru elementul de reţinere de ordinul zero. Figura conţine, de asemenea, caracteristicile de frecvenţă pentru elementul de reţinere de ordinul unu, care va fi prezentat în continuare.
Din graficul modul-pulsaţie se vede că elementul de reţinere de ordinul zero se comportă ca un filtru trece-jos.

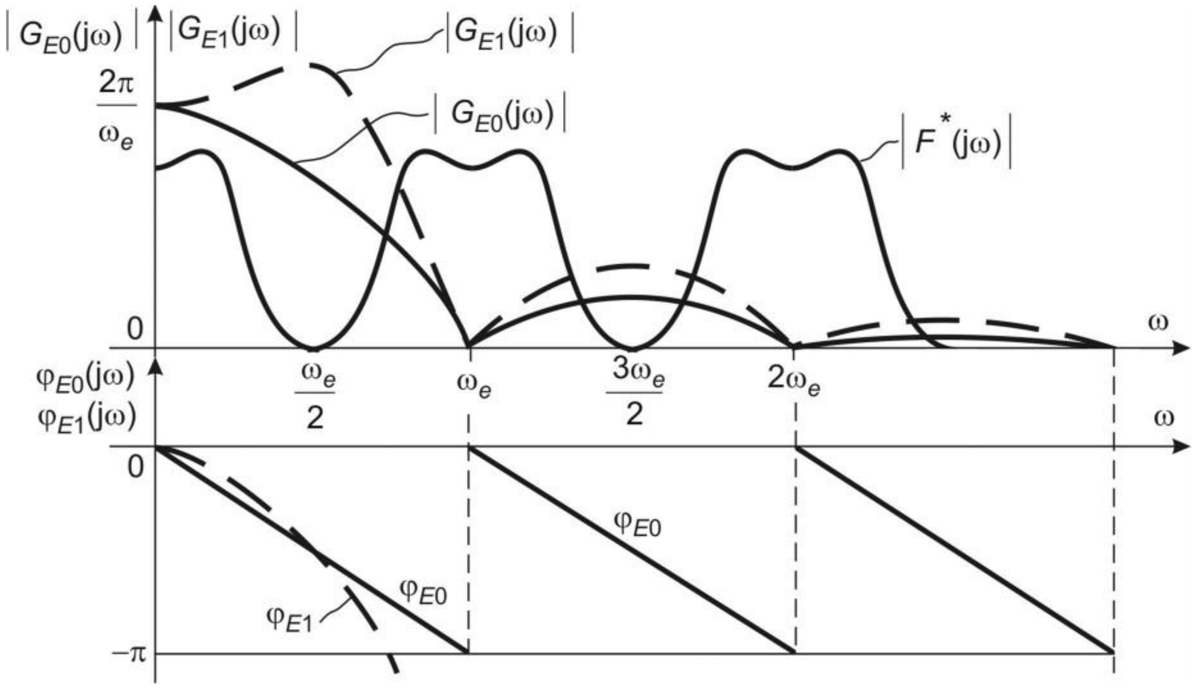


Fig. 4.16

Comparativ cu caracteristica filtrului ideal prezentată în figura 4.14 se observă că pulsaţia de tăiere a elementului de reţinere de ordinul zero este dublă faţă de cea a filtrului ideal. La pulsaţia $\omega_e/2$, care este pulsaţia de tăiere a filtrului cu caracteristica ideală, valoarea modulului este:

$$\left|G_{E0}\left(\frac{\omega_e}{2}\right)\right| = \frac{4}{\omega_e}. \qquad (4.45)$$

4.3.2 Elementul de reţinere (extrapolatorul) de ordinul unu (E1)

Acest element foloseşte pentru generarea semnalului continuu relaţia:

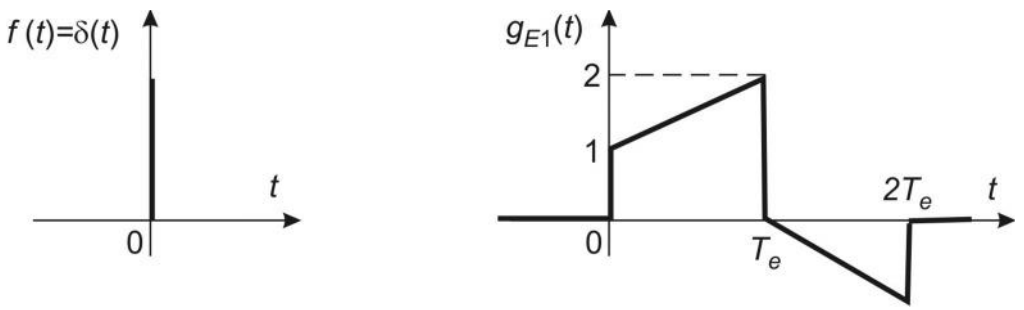
$$f_k(t) = f(kT_e) + \frac{f(kT_e) - f((k-1)T_e)}{T_e}(t - T_e). \qquad (4.46)$$

Răspunsul pondere (la impuls) care se obţine în acest caz este definit pe durata a două perioade de eşantionare, conform relaţiei (v. şi fig. 4.17b):

$$g_{E1}(t) = \begin{cases} 1 + t/T_e \text{ pentru } 0 \le t < T_e \\ 1 - t/T_e \text{ pentru } T_e \le t < 2T_e \\ 0 \text{ altfel} \end{cases}. \qquad (4.47)$$

Funcţia de transfer a extrapolatorului de ordinul unu, dedusă pe baza răspunsului pondere prezentat în figura 4.17b, este:

$$G_{E1}(s) = \mathbf{L}\ \{g_{E1}\} = \left(\frac{1 - e^{-sT_e}}{s}\right)^2 \frac{sT_e + 1}{T_e}. \qquad (4.48)$$



a) b)

Fig. 4.17

Caracteristicile modul-pulsaţie şi fază-pulsaţie ale elementului de reţinere de ordinul unu sunt prezentate, comparativ cu cele ale elementului de reţinere de ordinul zero, în figura 4.16. Se remarcă faptul că la frecvenţe joase (mai mici de $\omega_e/4$) elementul de ordinul unu are o întârziere de fază mai mică decât a elementului de ordinul zero.
Elementul de reţinere de ordinul unu are dezavantajul că pentru $\omega > \omega_e/2$, unde $\omega_e/2$ este pulsaţia de tăiere a filtrului ideal, amplificarea (modulul) este mult mai mare decât la extrapolatorul de ordinul zero. Un dezavantaj major al elementului de reţinere de ordinul unu, care impune utilizarea elementului de reţinere de ordinul zero, este complexitatea mai mare la implementarea hardware a acestuia.

4.4 TRANSFORMATA Z

Transformata *z* reprezintă o metodă de analiză a semnalelor eşantionate şi a sistemelor liniare discrete. Metoda transformatei Z oferă un mecanism simplu, bazat pe funcţii raţionale de variabilă complexă, pentru descrierea semnalelor eşantionate.

4.4.1 Definiţia transformatei *Z*

Se consideră un semnal eşantionat descris în domeniul timpului cu relaţia (4.6):

$$f^*(t) = f(t)\,|_{t=0}\;\delta(t) + \ldots + f(t)\,|_{t=kT_e}\;\delta(t-kT_e) + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e)\delta(t-kT_e),$$

care are, cum s-a văzut mai înainte (v. rel. (4.9)), transformata Laplace:

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e)e^{-s\,k\,T_e},$$

unde $f(kT_e)$ reprezintă valorile semnalului continuu în momentele de eşantionare.
Prin definiţie, transformata *Z* a semnalului eşantionat $f^*(t)$ este:

$$F(z) = F^*(s)\Big|_{s=(1/T_e)\ln z} = f(0) + f(T_e)z^{-1} + \cdots + f(kT_e)z^{-k} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e)z^{-k}\,. \qquad (4.49)$$

Se remarcă faptul că la definirea transformatei *Z* se poate scrie suma de la $k=-\infty$ la $k=+\infty$, adică:

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT_e)z^{-k} \text{ ,} \tag{4.50}$$

fapt posibil, având în vedere că semnalele cauzale folosite în automatică sunt nule pentru $k<0$.
Transformata *Z* a unui semnal continuu $f(t)$ care este eşantionat se notează prin:

$$F(z)=\mathcal{Z}\{f(t)\}\text{ ,} \tag{4.51}$$

unde $\mathcal{Z}$ este simbolul pentru transformata *Z*.
O altă variantă de definire a transformatei *Z* are la bază descrierea specifică unui semnal discret (v. rel. (4.2)). În acest caz transformata *Z* se defineşte cu relaţia:

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]z^{-k}\text{ .} \tag{4.52}$$

Se subliniază faptul că la această versiune de calcul a transformatei *Z*, parametrul T_e nu apare explicit în relaţiile care rezultă astfel (se consideră $T_e=1$).
O proprietate calitativă a transformatei *Z* este faptul că aceasta nu este univoc definită. Proprietatea constituie un dezavantaj important al transformatei *Z*. Acest aspect este ilustrat în figura 4.18. De aici se vede că versiunile eşantionate ale semnalelor din figurile 4.18,a şi 4.18,b sunt similare cu toate că semnalele continue sunt diferite.
Matematic avem:

$$f_1(t)\neq f_2(t)\text{ ,} \tag{4.53}$$

dar:

$$f_1^*(t)=f_2^*(t)\text{ ,} \tag{4.54}$$

deci:

$$F_1(z)=F_2(z)\text{ .} \tag{4.55}$$

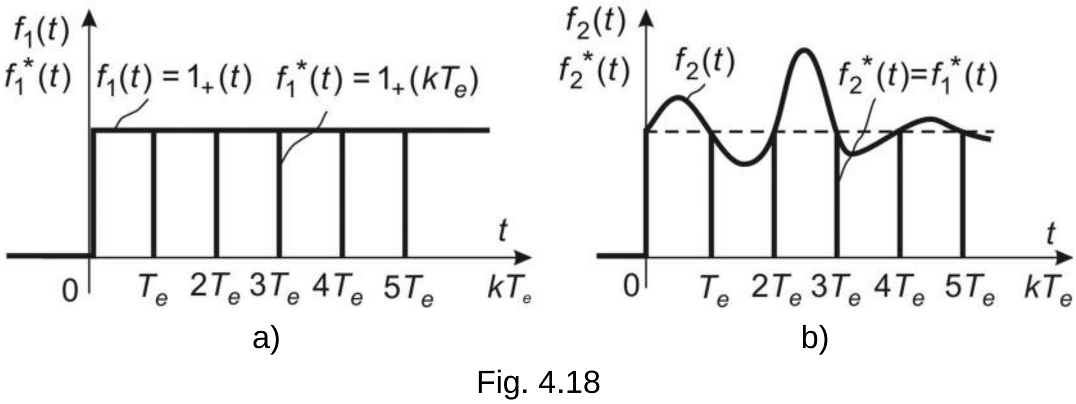


Fig. 4.18

4.4.2 Calculul transformatei *Z* bazat pe definiţie

Transformata *Z* a unor semnale simple poate fi calculată folosindu-se definiţia. Se va prezenta, în continuare, modul de calcul pentru câteva din semnalele speciale din automatică.

Exemplul 1

Să se determine transformata *Z* pentru impulsul Dirac definit cu relaţia:

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & \text{pentru } t=0\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$$

Se poate vedea uşor că versiunea eşantionată şi semnalul original sunt identice, deci:

$$\delta^*(t)=\delta(t); \tag{4.56}$$

prin urmare transformata Laplace eşantionată va fi:

$$\Delta^*(s)=\mathbf{L}\ \{\delta^*(t)\}=1, \tag{4.57}$$

de unde rezultă

$$\mathcal{Z}\{\delta(t)\}=1. \tag{4.58}$$

Exemplul 2

Un semnal specific sistemelor discrete, care poate fi realizat practic relativ uşor, într-o formă aproximativă, este impulsul unitar notat şi definit ca în relaţiile:

$$\delta_1(t)=\begin{cases}1, & \text{pentru } t=0\\ 0, & \text{altfel}\end{cases} \quad \text{respectiv,} \quad \delta_1[k]=\begin{cases}1, & \text{pentru } k=0,\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}. \tag{4.59}$$

Versiunea întârziată a acestui semnal este:

$$\delta_1(t-\tau)=\begin{cases}1, & \text{pentru } t=\tau\\ 0, & \text{altfel}\end{cases} \quad \text{respectiv,} \quad \delta_1[k-\lambda]=\begin{cases}1, & \text{pentru } k=\lambda,\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}, \tag{4.60}$$

unde $k,\lambda\in$ **Z** sau **N**.

Transformata *Z* a impulsului unitar se poate calcula direct prin aplicarea relaţiei de definiţie:

$$\mathcal{Z}\{\delta_1[k]\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta_1[k]z^{-k}=z^0=1. \tag{4.61}$$

Exemplul 3

Se calculează transformata *Z* pentru secvenţa treaptă unitară definită conform relaţiei:

$$1_+^*(t)=1_+(kT_e)=\begin{cases}1, & \text{pentru } k\ge 0\\ 0, & \text{pentru } k<0\end{cases}. \tag{4.62}$$

Când funcţia treaptă unitară este eşantionată ideal se obţine un tren de impulsuri unitare ca în figura 4.18,a. Aplicându-se relaţia de definiţie a transformatei *Z* în acest caz se obţine:

$$F(z)=\mathcal{Z}\{1_+^*(t)\}=\sum_{k=0}^{+\infty}z^{-k}=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\dots, \tag{4.63}$$

expresie care poate fi scrisă în forma restrânsă:

$$F(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}, \qquad |z|<1. \tag{4.64}$$

Observaţie. Forma restrânsă se obţine considerându-se suma o serie de puteri ale lui z^{-1} şi aplicându-se apoi relaţia:

$$F(z) = \lim_{k \to \infty} \frac{1-(z^{-1})^k}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}}. \tag{4.65}$$

Rezultatul este valabil dacă $|z| < 1$.

Exemplul 4

Să se calculeze transformata Z pentru funcţia exponenţială $f(t) = \mathrm{e}^{-at}$, $t \geq 0$. Se consideră că pentru $t < 0$, $f(t) = 0$.
Aplicându-se relaţia de definiţie se obţine:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{\mathrm{e}^{-at}\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-akT_e} z^{-k} = 1 + (z\mathrm{e}^{aT_e})^{-1} + (z\mathrm{e}^{aT_e})^{-2} + \ldots \tag{4.66}$$

Notând cu $x = (z\mathrm{e}^{aT_e})^{-1}$, dacă $|x| < 1$, adică dacă $\left|z\mathrm{e}^{aT_e}\right| < 1$, respectiv $|z| < \mathrm{e}^{-aT_e}$ şi folosind raţionamentul de la treapta unitară, rezultă:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{\mathrm{e}^{-at}\} = \frac{1}{1-(z\mathrm{e}^{aT_e})^{-1}} = \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT_e}}. \tag{4.67}$$

Exemplul 5

Să se calculeze transformata Z pentru semnalul $f(t) = r^t$, unde $r > 0$ şi $|r| < 1$.

O soluţie rapidă se poate obţine dacă se observă că funcţia putere $f(t) = r^t$ constituie de fapt un caz particular al funcţiei exponenţiale, deoarece se poate scrie succesiv:

$$f(t) = \mathrm{e}^{-at} = (\mathrm{e}^{-a})^t = r^t. \tag{4.68}$$

Aşadar soluţia problemei este:

$$\mathcal{Z}\{r^t\} = \frac{z}{z-r^{T_e}} = \frac{z}{z-p}, \quad \text{unde} \quad p = r^{T_e}. \tag{4.69}$$

Rezumând rezultatele obţinute în exemplele anterioare vom avea următoarele perechi de transformate Laplace (TL) şi Z (TZ):

		TL	TZ
1.	Impuls Dirac, $\delta(t)$	1	1
2.	Impuls unitar, $\delta_1(t)$	1	1
3.	Treaptă unitară, $1_+(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
4.	Funcţie exponenţială, e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT_e}}$

Aceste rezultate sunt utile pentru introducerea unei metode simple, cu caracter general, pentru calculul transformatelor Z.

4.4.3 Calculul transformatei *Z* pe baza transformatei Laplace

Se consideră semnalul descris de transformata Laplace:

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}, \tag{4.70}$$

care are rădăcini simple, reale sau complexe, pentru polinomul de la numitor. Având în vedere descompunerea în fracţii simple:

$$F(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s+p_i}, \tag{4.71}$$

unde:

$$c_i=(s+p_i)\left.\frac{B(s)}{A(s)}\right|_{s=-p_i}, \tag{4.72}$$

şi perechile de transformate Laplace şi *Z* prezentate mai înainte, rezultă transformata *Z*:

$$F(z)=\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{z}{z-e^{-p_iT_e}}. \tag{4.73}$$

Exemplul 6

Să se determine transformatele *Z* pentru semnalele $f_1(t)=\sin\omega t$ şi $f_2(t)=\cos\omega t$, $t\geq 0$
Se va calcula mai întâi transformata *Z* pentru $f_1(t)=\sin\omega t$ care are transformata Laplace:

$$F_1(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \tag{4.74}$$

cu rădăcinile simple $p_{1,2}=\pm j\omega$. Descompunerea în fracţii simple este:

$$F_1(s)=\frac{c_1}{s+\mathrm{j}\omega}+\frac{c_2}{s-\mathrm{j}\omega}, \tag{4.75}$$

unde:

$$c_1=(s+\mathrm{j}\omega)\left.\frac{\omega}{(s+\mathrm{j}\omega)(s-\mathrm{j}\omega)}\right|_{s=-\mathrm{j}\omega}=\frac{\omega}{-2\mathrm{j}\omega}=-\frac{1}{2\mathrm{j}}, \tag{4.76}$$

$$c_2=(s-\mathrm{j}\omega)\left.\frac{\omega}{(s+\mathrm{j}\omega)(s-\mathrm{j}\omega)}\right|_{s=+\mathrm{j}\omega}=\frac{\omega}{2\mathrm{j}\omega}=\frac{1}{2\mathrm{j}}.$$

Se obţine astfel:

$$F_1(s)=\frac{1}{2\,\mathrm{j}}\left[\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega}\right], \tag{4.77}$$

În final rezultă:

$$\mathcal{Z}\{\sin\omega t\} = F_1(z) = \frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega T_e}} - \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e}}\right] = \frac{z}{2\mathrm{j}}\frac{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e} - z + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}}{(z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e})(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e})} =$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e}}{2\mathrm{j}}\frac{z}{z^2 - z(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e}) + 1} = \frac{z\sin\omega T_e}{z^2 - 2z\cos\omega T_e + 1}. \tag{4.78}$$

Transformata Laplace a funcţiei $f_2(t) = \cos\omega t$ este:

$$F_2(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \tag{4.79}$$

cu descompunerea în fracţii simple se obţine:

$$F_2(s) = \frac{c_1}{s + \mathrm{j}\omega} + \frac{c_2}{s - \mathrm{j}\omega}, \tag{4.80}$$

unde:

$$c_1 = \left.\frac{s}{s - \mathrm{j}\omega}\right|_{s=-\mathrm{j}\omega} = \frac{-\mathrm{j}\omega}{-2\mathrm{j}\omega} = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \left.\frac{s}{s + \mathrm{j}\omega}\right|_{s=+\mathrm{j}\,\omega} = \frac{\mathrm{j}\,\omega}{2\mathrm{j}\omega} = \frac{1}{2}. \tag{4.81}$$

Înlocuind c_1 şi c_2 în expresia (4.80) se obţine în continuare:

$$F_2(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s + \mathrm{j}\omega} + \frac{1}{s - \mathrm{j}\omega}\right], \tag{4.82}$$

de unde, rezultă:

$$\mathcal{Z}\{\cos\omega t\} = F_2(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}} + \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega T_e}}\right] = \frac{z}{2}\frac{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T_e} + z - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}}{z^2 - 2z\cos\omega T_e + 1} =$$
$$= \frac{z[z-(e^{\mathrm{j}\,\omega T_e} + e^{-\mathrm{j}\,\omega T_e})/2]}{z^2 - 2z\cos\omega T_e + 1} = \frac{z\,(z-\cos\omega T_e)}{z^2 - 2z\cos\omega T_e + 1}. \tag{4.83}$$

4.4.4 Proprietăţile şi teoremele transformatei *Z*

Calculul transformatelor *Z* se poate simplifica în mod considerabil prin utilizarea unor proprietăţi cu caracter general şi al unor teoreme. Lista proprietăţilor şi teoremelor transformatei *Z* este prezentată sintetic în tabelul 4.1.

Tabelul 4.1

Nr. crt.	Denumire proprietate sau teoremă	Notaţii generale: $\mathcal{Z}\{f(t)\} = \mathcal{Z}\{f[k]\} = F(z)$, $\mathcal{Z}\{f_1(t)\} = \mathcal{Z}\{f_1[k]\} = F_1(z)$, $\mathcal{Z}\{f_2(t)\} = \mathcal{Z}\{f_2[k]\} = F_2(z)$, $t \geq 0$
1.	Liniaritate	$\mathcal{Z}\{Af(t)\} = \mathcal{Z}\{Af[k]\} = AF(z)$
2.	Superpoziţie	$\mathcal{Z}\{f_1(t) \pm f_2(t)\} = F_1(z) \pm F_2(z)$,

		$\mathcal{Z}\{f_1[k] \pm f_2[k]\} = F_1(z) \pm F_2(z)$
3.	Deplasare (întârziere) în timp	$\mathcal{Z}\{f(t-\lambda T_e)\} = z^{-\lambda}F(z)$, $\mathcal{Z}\{f[k-\lambda]\} = z^{-\lambda}F(z)$, $\mathcal{Z}\{f(t+\lambda T_e)\} = z^{\lambda}\left[F(z) - \sum_{i=0}^{\lambda-1} u(iT_e)z^{-i}\right]$, $\mathcal{Z}\{f[k+\lambda]\} = z^{\lambda}\left[F(z) - \sum_{i=0}^{\lambda-1} u(iT_e)z^{-i}\right]$.
4.	Deplasare în complex	$\mathcal{Z}\{e^{\pm at}f(t)\} = F(z)\Big\vert_{z=z\,e^{\mp aT_e}} = F(z\,e^{\mp aT_e})$ $\mathcal{Z}\{e^{\pm at}f[k]\} = F(z)\Big\vert_{z=z\,e^{\mp ak}} = F(z\,e^{\mp ak})$
5.	Teorema derivării parţiale	$\mathcal{Z}\left\{\frac{\partial}{\partial a}f(t,a)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{\partial}{\partial a}f([k],a)\right\} = \frac{\partial}{\partial a}F(z,a)$
6.	Teorema produsului de convoluţie a secvenţelor temporale	$f_1(kT_e) * f_2(kT_e) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_1(iT_e)f_2[(k-i)T_e]$ $\mathcal{Z}\{f_1(kT_e) * f_2(kT_e)\} = F_1(z) \cdot F_2(z)$
7.	Teorema valorii iniţiale	$\lim_{k\to 0} f(kT_e) = \lim_{k\to 0} f[k] = \lim_{z\to\infty} F(z)$ Condiţie de aplicare: $\lim_{z\to\infty} F(z)$ există.
8.	Teorema valorii finale	$\lim_{t\to\infty} f^*(t) = \lim_{k\to\infty} f[k] = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$ Condiţie de aplicare: funcţia $(1-z^{-1})F(z)$ trebuie să aibă polii în interiorul cercului de rază unitară.

În exemplele următoare se vor deduce transformatele Z pentru unele semnale speciale folosite în teoria sistemelor şi se va ilustra modul de aplicare a unor teoreme.

Exemplul 7

Să se determine transformata Z pentru funcţia treaptă unitară întârziată cu două perioade de eşantionare ($2T_e$), reprezentată în figura 4.19.

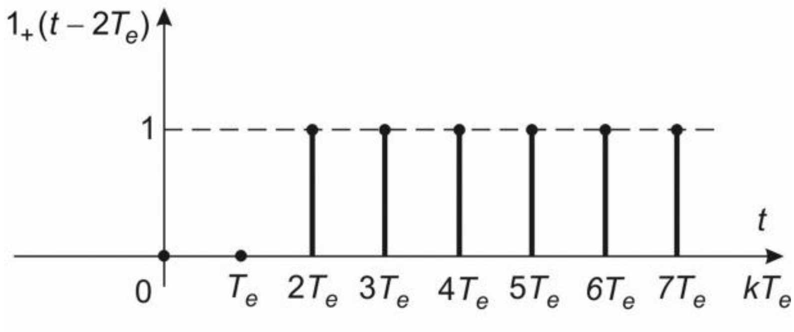


Fig. 4.19

Se aplică teorema de deplasare în timp şi se obţine astfel:

$$\mathcal{Z}\{1_+(t-2T_e)\} = z^{-2}\mathcal{Z}\{1_+(t)\} = z^{-2}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z(z-1)}. \tag{4.84}$$

Observaţie. Teorema de deplasare în timp se aplică numai dacă întârzierea este multiplu întreg al perioadei de eşantionare. Când înârzierea τ este mai mică decât o perioadă de eşantionare sau când $\tau = \lambda T_e + \lambda T_e$, cu $0 \le \lambda < 1$, calculul transformatei Z se realizează cu un procedeu special denumit *transformata Z modificată*, metodă care se va prezenta ulterior.

Exemplul 8

Să se calculeze transformata Z a funcţiei rampă unitară $f(t) = t$,$t \ge 0$.
Se utilizează teorema derivării parţiale aplicată funcţiei exponenţiale. Se observă că:

$$t = \lim_{a\to 0}\left\{-\frac{\partial}{\partial a}[e^{-at}]\right\} = \lim_{a\to 0}[te^{-at}]. \tag{4.85}$$

Soluţia problemei va fi:

$$\mathcal{Z}\{t\}_{t\ge 0} = -\lim_{a\to 0}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{z}{z-e^{-aT_e}}\right) = -\lim_{a\to 0}\frac{-zT_e e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2} = \frac{zT_e}{(z-1)^2}. \tag{4.86}$$

Exemplul 9

Să se deducă transformata Z a funcţiei parabolă unitară $f(t) = t^2/2$, $t \ge 0$.
Folosind exemplul de mai înainte se observă că:

$$\frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\lim_{a\to 0}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}[e^{-at}]\right\}, \tag{4.87}$$

de unde, prin aplicarea teoremei derivării parţiale, se obţine succesiv:

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{t^2}{2}\right\} = \frac{1}{2}\lim_{a\to 0}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[\frac{z}{z-e^{-aT_e}}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to 0}\frac{e^{-aT_e}zT_e^2(z-e^{-aT_e})^2 + 2zT_e^2e^{-aT_e}(z-e^{-aT_e})}{(z-e^{-aT_e})^4} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{a \to 0} \frac{zT_e^2 (z - e^{-aT_e} + 2) e^{-aT_e}}{(z - e^{-aT_e})^3}, \tag{4.88}$$

de unde, în final, rezultă:

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{t^2}{2}\right\}_{t \geq 0} = \frac{1}{2} \frac{zT_e^2 (z+1)}{(z-1)^3}. \tag{4.89}$$

Exemplul 10

Să se calculeze transformata Laplace pentru semnalul $f(t) = te^{-at}$.
Se cunoaşte că (v. rel. (4.86)):

$$\mathcal{Z}\{t\}_{t \geq 0} = \frac{zT_e}{(z-1)^2} = F_1(z).$$

Se aplică în continuare teorema deplasării în complex, de unde rezultă:

$$F(z) = \mathcal{Z}\{te^{-at}\} = F_1(ze^{aT_e}), \tag{4.90}$$

$$F(z) = \frac{zT_e e^{aT_e}}{(ze^{aT_e} - 1)^2} = \frac{zT_e e^{-aT_e}}{(z - e^{-aT_e})^2}. \tag{4.91}$$

Exemplul 11

Să se determine transformatele *Z* pentru funcţiile:

$f_1(t) = e^{-at} \sin \omega t$ şi $f_2(t) = e^{-at} \cos \omega t$.

Se aplică teorema deplasării în complex. În aceste condiţii se obţine:

$$F_1(z) = \left. \frac{z \sin \omega T_e}{z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1} \right|_{z = z\, e^{aT_e}} = \frac{ze^{aT_e} \sin \omega T_e}{z^2 e^{2aT_e} - 2ze^{aT_e} \cos \omega T_e + 1} =$$

$$= \frac{ze^{-aT_e} \sin \omega T_e}{z^2 - 2ze^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e}}, \tag{4.92}$$

$$F_2(z) = \left. \frac{z(z - \cos \omega T_e)}{z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1} \right|_{z = z\, e^{aT_e}} = \frac{ze^{aT_e} (ze^{aT_e} - \cos \omega T_e)}{z^2 e^{2aT_e} - 2ze^{aT_e} \cos \omega T_e + 1} =$$

$$= \frac{z^2 - ze^{-aT_e} \cos \omega T_e}{z^2 - 2ze^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e}}. \tag{4.93}$$

Exemplul 12

Fiind dată funcţia complexă (transformata *Z*):

$$F(z) = \frac{0{,}792 z^2}{(z-1)(z^2 - 0{,}416z + 0{,}208)}, \tag{4.94}$$

să se determine valoarea finală $f(kT_e)$, $k \to \infty$.

Deoarece funcţia complexă:

$$(1-z^{-1})F(z)=\frac{0{,}792z^2}{z^2-0{,}416z+0{,}208}, \tag{4.95}$$

are polii în planul z în interiorul cercului de rază unitară, se poate aplica teorema valorii finale. Astfel, se obţine:

$$\lim_{k\to\infty} f(kT_e)=\lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})F(z)]=\lim_{z\to 1}\frac{0{,}792z^2}{z^2-0{,}416z+0{,}208}=1. \tag{4.96}$$

În tabelul 4.2 sunt prezentate transformatele Laplace, respectiv transformatele Z pentru o serie de funcţii utilizate mai frecvent în automatică.

Tabelul 4.2

Nr. crt.	Funcţia de timp $f(t)$, $t\geq 0$	Transformata Laplace	Transformata Z
1	Impuls Dirac, $\delta(t)$	1	1
2	Impuls unitar, $\delta_1(t)$	1	1
3	Treaptă unitară, $1_+(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{zT_e}{(z-1)^2}$
5	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{zT_e^2(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_e}}$
7	$t\,e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{zT_e\,e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2}$
8	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z\sin\omega T_e}{z^2-2z\cos\omega T_e+1}$
9	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos\omega T_e)}{z^2-2z\cos\omega T_e+1}$
10	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z\,e^{-aT_e}\sin\omega T_e}{z^2-2z\,e^{-aT_e}\cos\omega T_e+e^{-2aT_e}}$
11	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-z\,e^{-aT_e}\cos\omega T_e}{z^2-2z\,e^{-aT_e}\cos\omega T_e+e^{-2aT_e}}$

4.4.5 Transformarea planului s în planul z

Deoarece anumite proprietăţi ale sistemelor continue au fost analizate folosindu-se configuraţia în planul complex s a polilor şi zerourilor, prezintă interes studiul transformării planului s (a unor porţiuni din acesta sau a unor drepte cu anumite caracteristici) în planul z.

Schimbarea de variabilă $z = e^{sT_e}$ constituie o transformare conformă a planului s în planul z. Din punctul de vedere al transformării $z = e^{sT_e}$, planul s este împărţit într-un număr infinit de fâşii de periodicitate, limita acestor fâşii fiind dreptele orizontale, paralele cu axa abscisei, aşa cum se arată în figura 4.20,a.

Prima fâşie (numită *primară*) este cuprinsă între $\omega = -\omega_e/2$ şi $\omega_e/2$, iar celelalte fâşii sunt cuprinse între $-\omega_e/2$ şi $-3\omega_e/2$, $-3\omega_e/2$ şi $-5\omega_e/2$, … pentru pulsaţiile negative, respectiv între $\omega_e/2$ şi $3\omega_e/2$, $3\omega_e/2$ şi $5\omega_e/2$ … pentru pulsaţiile pozitive.

Împărţirea planului *s* în fâşii este o consecinţă a proprietăţii de periodicitate a funcţiei exponenţiale de exponent complex care corespunde schimbării de variabilă:

$$e^{sT_e} = e^{(\sigma + j\omega)T_e} = e^{\sigma T_e} e^{j2\pi\omega/\omega_e}. \tag{4.97}$$

Se poate verifica uşor că pentru $\omega \in (-\omega_e/2, \omega_e/2)$ rezultă $e^{sT_e} \in e^{\sigma T_e}(e^{-j\pi} \div e^{j\pi})$; un rezultat similar rezultă, de exemplu, pentru $\omega \in (\omega_e/2, 3\omega_e/2)$, când avem $e^{sT_e} \in e^{\sigma T_e}(e^{j\pi} \div e^{j3\pi}) \equiv e^{\sigma T_e}(e^{j\pi} \div e^{-j\pi})$.

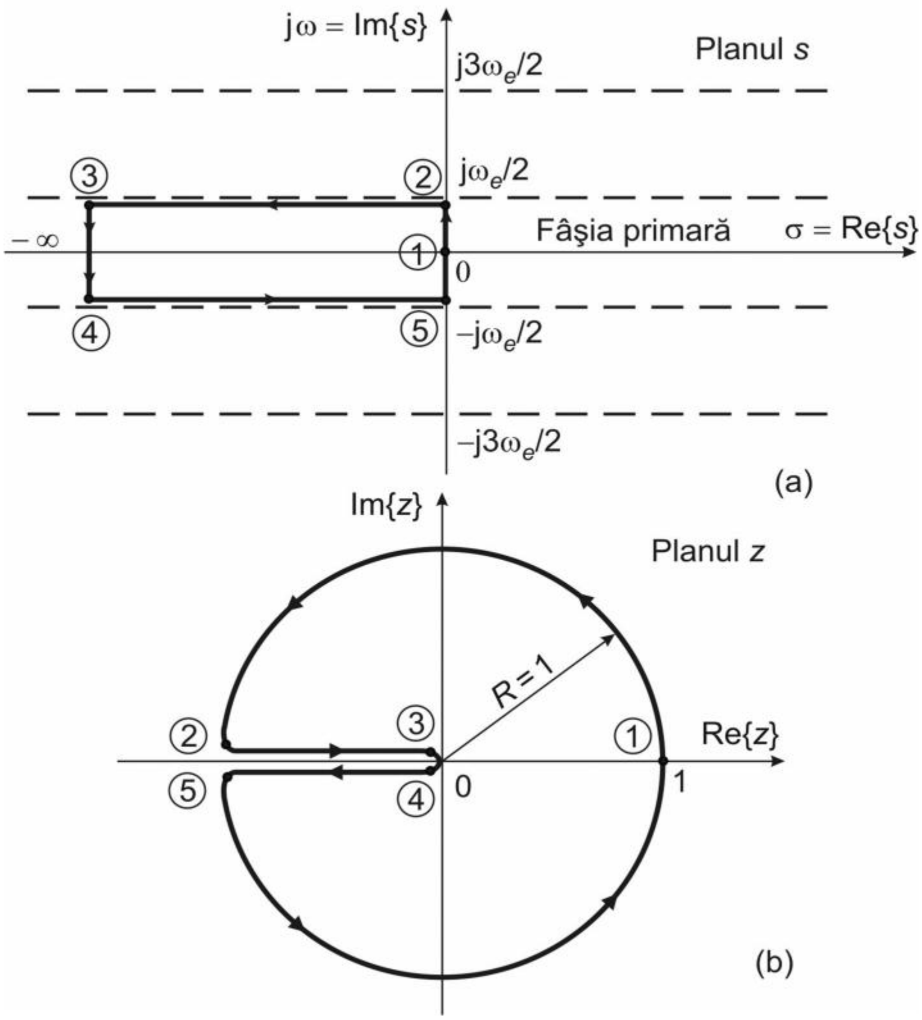


Fig. 4.20

4.4.5.1 Transformarea semiplanului complex stâng în planul z

Având în vedere periodicitatea se consideră porţiunea din semiplanul stîng al fâşiei primare definită în planul *s* prin conturul 1 – 2 – 3 – 4 – 5 (v. fig. 4.20a). Se va analiza, pentru fiecare interval din conturul poligonal închis, curba care rezultă în planul z prin transformarea conformă $z = \mathrm{e}^{sT_e}$.

Intervalul 1 – 2:

$$s = 0 + \mathrm{j}\omega\Big|_{\omega\in(0,\omega_e/2)} \rightarrow z = \mathrm{e}^{(0+\mathrm{j}\omega)T_e}\Big|_{\omega\in(0,\omega_e/2)}, \tag{4.98}$$

$$|z| = \left|e^{\mathrm{j}\omega T_e}\right|_{\omega\in(0,\omega_e/2)} = 1 \text{ cu } z_1 = e^{\mathrm{j}0T_e} = 1 \text{ şi } z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_e T_e/2} = -1. \tag{4.99}$$

Prin urmare, dreapta verticală cuprinsă între punctele 1 şi 2 se transformă în planul z într-un arc de cerc de rază unitară între punctele $z_1 = 1$ şi $z_2 = -1$.

Intervalul 2 – 3:

$$s = \sigma + \mathrm{j}\,\frac{\omega_e}{2}\Big|_{\sigma\in(0,-\infty)} \rightarrow z = \mathrm{e}^{\sigma T_e}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_e T_e/2} = -\,\mathrm{e}^{\sigma T_e}\Big|_{\sigma\in(0,-\infty)}. \tag{4.100}$$

Când σ se modifică de la 0 la $-\infty$, *z* va fi un număr real cu valori cuprinse între -1 şi 0. Deci schimbarea de variabilă transformă dreapta orizontală la $\omega = \omega_e/2$, cu σ cuprins în intervalul $(0,-\infty)$, într-o dreaptă, de asemenea orizontală, suprapusă semiaxei reale negative a planului z, cuprinsă între $z_2 = -1$ şi $z_3 = 0$.

Intervalul 3 – 4:

Deoarece $s = \sigma + \mathrm{j}\omega\big|_{\sigma=-\infty,\,\omega\in(\omega_e/2,-\omega_e/2)}$, în planul *z* avem

$$z = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\infty T_e}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}\Big|_{\omega\in(\omega_e/2,-\omega_e/2)} = 0\cdot e^{\mathrm{j}\omega T_e}\Big|_{\omega\in(\omega_e/2,-\omega_e/2)} = 0. \tag{4.101}$$

Dacă ω ia valori în gama $(\omega_e/2,-\omega_e/2)$ punctul *z* se deplasează în jurul originii pe un arc de cerc cu rază infinit mică.

Intervalul 4 – 5:

$$s = \sigma - \mathrm{j}\frac{\omega_e}{2}\Big|_{\sigma\in(-\infty,\,0)} \rightarrow z = \mathrm{e}^{\,\sigma T_e}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega T_e/2} = -\,\mathrm{e}^{\,\sigma T_e}\Big|_{\sigma\in(-\infty,0)}. \tag{4.102}$$

Transformarea este asemănătoare cu cea realizată între punctele 2 şi 3. De această dată variabila *z* ia valori pe semiaxa reală negativă între punctele $z_4 = 0$ şi $z_5 = -1$.

Intervalul 5 – 1:

$$s = 0 + \mathrm{j}\omega\Big|_{\omega\in(-\omega_e/2,0)} \rightarrow z = \mathrm{e}^{(0+\mathrm{j}\omega)T_e}\Big|_{\omega\in(-\omega_e/2,0)},\ |z| = \left|e^{\mathrm{j}\omega T_e}\right|_{\omega\in(-\omega_e/2,0)} = 1,$$

$$\text{cu } z_5 = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_e T_e/2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi} = -1 \text{ şi } z_6 = z_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}0T_e} = 1. \tag{4.103}$$

Asemănător cu transformarea conformă a dreptei 1 – 2, rezultă, şi în acest caz, un semicerc de rază unitară care începe în punctul $z_5 = -1$ şi se termină în punctul

$z_6 = z_1 = 1$.

Rezumând, fâşia primară din semiplanul complex stâng (respectiv prin periodicitate întreg semiplanul stâng al variabilei complexe *s*) se transformă, prin schimbarea de variabilă $z = e^{sT_e}$, în planul z, în interiorul cercului de rază unitară. Rezultatul este ilustrat grafic în figura 4.20b. În concluzie, toate punctele din semiplanul stâng *s* sunt transformate în interiorul cercului de rază unitară din planul *z*. Punctele din semiplanul *s* drept sunt transformate în exteriorul cercului de rază unitară din planul *z*.

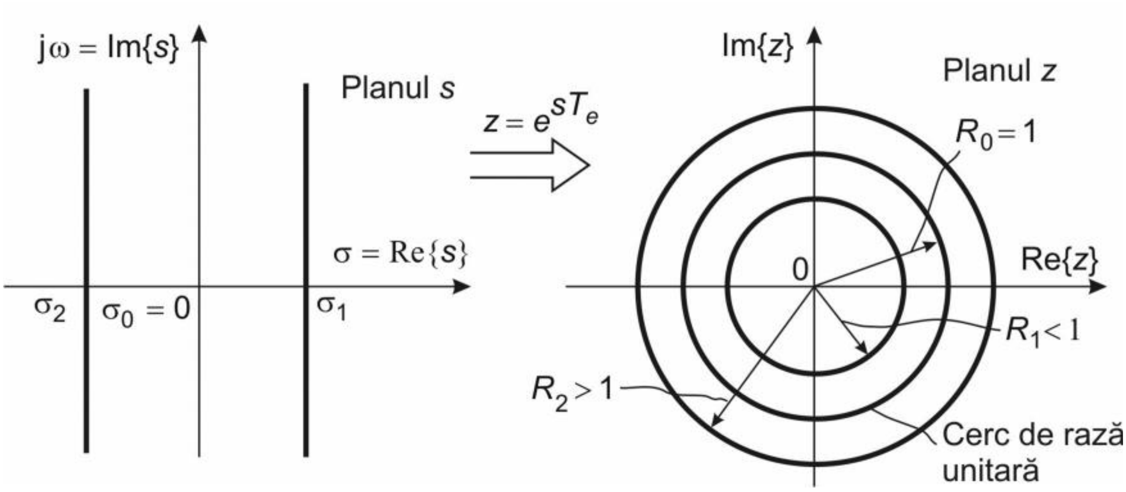
4.4.5.2 Locuri geometrice pentru σ = Re{*s*} = constant

Pentru $\sigma = \mathrm{Re}\{s\} = \text{constant}$ în planul *s*, în planul *z* vom avea

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T_e} = e^{\sigma T_e} e^{j\omega T_e} = Re^{j\omega T_e},$$

unde $R = e^{\sigma T_e}$.

Dacă $\sigma_0 = 0$, $R = R_0 = 1$, pentru $\sigma_1 < 0$ avem $R = R_1 < 1$, iar pentru $\sigma_2 > 0$ vom avea $R = R_2 > 1$. Deoarece $\left| e^{j\omega T_e} \right|_{\omega \in (-\omega_e/2,\, \omega_e/2)} = 1$, rezultă că locul geometric care se obţine când $\sigma = \mathrm{Re}\{s\} = \text{ct.}$, este un cerc de rază *R* (v. fig. 4.21b).

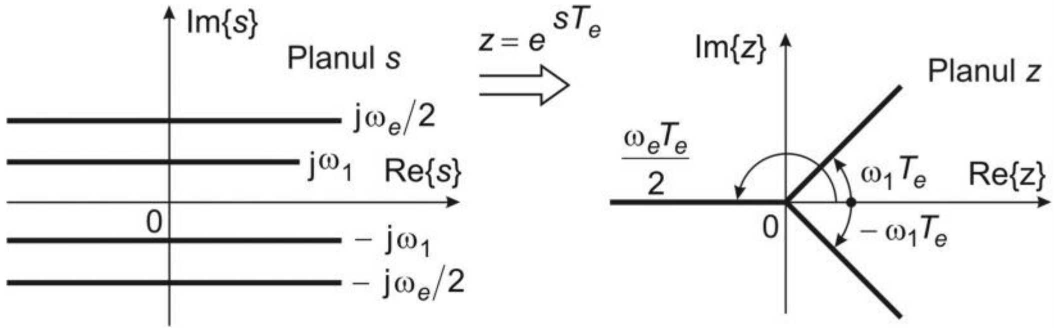


a) b)

Fig. 4.21

4.4.5.3 Locuri geometrice de pulsaţie constantă

Pentru $s = (\sigma + j\omega_1)T_e$, cu $\omega_1 = \text{ct.}$ şi $\sigma \in (-\infty, +\infty)$, în planul z vom avea $z = e^{\sigma T_e} e^{j\omega_1 T_e} \Big|_{\omega_1 = \text{ct.},\, \sigma \in (-\infty, +\infty)}$, ceea ce reprezintă o dreaptă care trece prin originea planului complex *z* şi care are unghiul $\theta = \omega_1 T_e$ cu axa reală pozitivă (v. fig. 4.22b).



a) b)

Fig. 4.22

4.4.5.4 Locuri geometrice de amortizare constantă

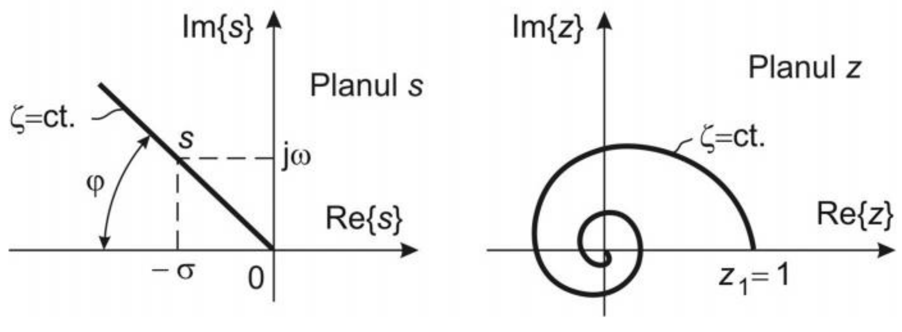
În planul *s*, locul geometric pentru un pol complex cu amortizare constantă ($\zeta = \text{ct.}$) este o dreaptă care are unghiul cu semiaxa reală negativă $\varphi = \arccos\zeta$ (v. fig. 4.23a). Punctul curent *s* de pe dreaptă are ecuaţia:

$$s = -\sigma + \mathrm{j}\omega = -\omega \mathrm{ctg}\varphi + \mathrm{j}\omega. \tag{4.104}$$

Traiectoria din planul z va avea ecuaţia:

$$z = \mathrm{e}^{sT_e} = \mathrm{e}^{-\omega T_e \mathrm{ctg}\varphi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}\Big|_{\omega\in[0,\infty)}\ , \tag{4.105}$$

ceea ce reprezintă o spirală logaritmică care pleacă din punctul $z_1 = e^0 = 1$ şi se termină în originea planului z (v. fig. 4.23b). Se remarcă faptul că la fiecare parcurgere a unei fâşii de periodicitate, pentru $\omega \in [n\omega_e/2, (n+2)\omega_e/2]$, se obţine o parcurgere completă a spiralei.



a) b)

Fig. 4.23.

4.4.6 Transformata *Z* inversă

Procesul de trecere de la o funcţie de variabilă complexă $F(z)$, la un semnal eşantionat descris printr-o secvenţă temporală $f(kT_e)$ sau $f[k]$ se numeşte *transformata Z inversă*. Notaţia utilizată pentru transformata *Z* inversă este $f[k] = f(kT_e) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\}$. De obicei, prin aplicarea transformatei *Z* inverse se obţine secvenţa temporală $f[k]$ în care nu apare explicit perioada de eşantionare T_e.

În practică se utilizează 3 metode de evaluare a transformatei Z inverse:
– metoda formulei de inversiune;
– metoda dezvoltării în fracţii simple;
– metoda seriilor infinite de puteri ale lui z^{-1}.

4.4.6.1 Metoda formulei de inversiune

Matematic $f(kT_e)$ se obţine din $F(z)$ cu formula (numită *de inversiune*) exprimată conform relaţiei:

$$f[k] = f(kT_e) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} \mathrm{d}z\,, \tag{4.106}$$

unde Γ este o curbă închisă din planul z care include toate singularităţile (polii şi zerourile) funcţiei complexe $F(z)z^{k-1}$.

Pentru evaluarea concretă a integralei de inversiune se foloseşte teorema reziduuri-lor, care se prezintă în continuare. Metoda se bazează pe faptul că majoritatea semnalelor fizice au transformata Z exprimată sub forma unor funcţii raţionale de variabilă z conform expresiei:

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}, \quad n \ge m\,. \tag{4.107}$$

Ca şi în cazul sistemelor continue, sistemele discrete fizic realizabile trebuie să îndeplinească condiţia:

$$grad\, A(z) \ge grad\, B(z) \text{ sau } n \ge m\,. \tag{4.108}$$

Se consideră că $A(z)$ are rădăcini simple distincte reale sau complexe, notate p_i. În acest caz integrantul din formula de inversiune va fi:

$$F_0(z) = \frac{B(z) z^{k-1}}{\prod_{i=1}^{n} (z - p_i)}\,, \tag{4.109}$$

iar evaluarea cu teorema reziduurilor conduce la rezultatul:

$$f[k] = f(kT_e) = \sum_{i=1}^{n} r_i(k)\,, \tag{4.110}$$

unde r_i se calculează cu relaţia:

$$r_i[k] = (z - p_i) F_0(z)\Big|_{z = p_i}\,. \tag{4.111}$$

Exemplul 13

Să se determine transformata Z inversă pentru funcţia complexă:

$$F(z) = \frac{z(3z-1)}{(z-1)(z-0{,}5)}\,. \tag{4.112}$$

$$F_0(z) = z^{k-1} F(z) = \frac{z^k (3z-1)}{(z-1)(z-0{,}5)}\,. \tag{4.113}$$

Funcţia semnal este $f[k]=r_1+r_2$, unde reziduurile vor fi:

– la $z=1$:

$$r_1=\left.\frac{z^k(3z-1)}{z-0{,}5}\right|_{z=1}=\frac{2}{0{,}5}=4\,; \qquad (4.114)$$

– la $z=0{,}5$:

$$r_2=\left.\frac{z^k(3z-1)}{z-1}\right|_{z=+0{,}5}=\frac{(0{,}5)^k\cdot 0{,}5}{-0{,}5}=-(0{,}5)^k\,. \qquad (4.115)$$

În final se obţine:

$$f[k]=4-(0{,}5)^k,\quad k\geq 0\,. \qquad (4.116)$$

Observaţie. Deoarece $F(z)$ nu conţine explicit perioada de eşantionare T_e, această mărime nu apare nici în expresia funcţiei de timp eşantionate ideal, $f[k]$.

Exemplul 14

Să se calculeze transformata Z inversă pentru funcţia complexă:

$$F(z)=\frac{z(1-\mathrm{e}^{-aT_e})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-aT_e})}\,. \qquad (4.117)$$

Se detemină reziduurile funcţiei:

$$F_0(z)=\frac{z^{k-1}z(1-\mathrm{e}^{-aT_e})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-aT_e})}=\frac{z^k(1-\mathrm{e}^{-aT_e})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-aT_e})}\,, \qquad (4.118)$$

pentru polii $z=+1$ şi $z=\mathrm{e}^{-aT_e}$. Se obţine astfel semnalul eşantionat:

$$f[k]=r_1+r_2=\left.\frac{z^k(1-\mathrm{e}^{-aT_e})}{z-\mathrm{e}^{-aT_e}}\right|_{z=1}+\left.\frac{z^k(1-\mathrm{e}^{-aT_e})}{z-1}\right|_{z=\mathrm{e}^{-aT_e}}=1-\mathrm{e}^{-akT_e}\,. \qquad (4.119)$$

4.4.6.2 Metoda dezvoltării în fracţii simple

Se consideră din nou că funcţia complexă $F(z)$ este o funcţie raţională scrisă conform relaţiei (4.107). Asemănător transformatei Laplace inverse, funcţiile de timp eşantionate se pot obţine prin dezvoltarea în fracţii simple a funcţiei $F(z)$. Apare însă o mică modificare faţă de metoda utilizată la calculul transformatei Laplace inverse. După cum se cunoaşte, la calculul transformatei Laplace inverse, în cazul polilor simpli, dezvoltarea în fracţii simple are expresia:

$$F(s)=\frac{c_1}{s+p_1}+\cdots+\frac{c_i}{s+p_i}+\cdots+\frac{c_n}{s+p_n}\,, \qquad (4.120)$$

de unde rezultă funcţia de timp:

$$f(t)=c_1e^{-p_1t}+\cdots+c_ie^{-p_it}+\cdots+c_ne^{-p_nt}\,. \qquad (4.121)$$

Considerându-se acum transformata Z a expresiei (4.121), se obţine:

$$F(z)=\frac{c_1 z}{z-e^{-p_1 T_e}}+\cdots+\frac{c_i z}{z-e^{-p_i T_e}}+\cdots+\frac{c_n z}{z-e^{-p_n T_e}}\,. \qquad (4.122)$$

De aici se vede că la calculul transformatei Z inverse cu metoda dezvoltării în fracţii simple este necesar să se considere de fapt funcţia $F(z)/z$. Dezvoltarea astfel obţinută este apoi multiplicată cu z în ambii membri.

Concret, la aplicarea metodei descompunerii în fracţii simple pentru calculul transformatei Z inverse se parcurg următoarele etape:

1. Se calculează:

$$F_1(z)=\frac{F(z)}{z}=\frac{B(z)}{zA(z)}\,. \qquad (4.123)$$

Observaţie. De obicei $B(z)$ conţine pe z ca factor, deci z de la numitorul funcţiei $F_1(z)$ se va simplifica şi aceasta va avea expresia:

$$F_1(z)=\frac{B_1(z)}{A(z)}\,. \qquad (4.124)$$

2. Presupunând că $A(z)$ are poli distincţi, p_{d_i}, avem dezvoltarea în fracţii simple:

$$F_1(z)=\frac{c_1}{z-p_{d_1}}+\cdots+\frac{c_i}{z-p_{d_i}}+\cdots+\frac{c_n}{z-p_{d_n}}\,, \qquad (4.125)$$

unde

$$c_i=(z-p_{d_i})\frac{B(z)}{zA(z)}\bigg|_{s=p_{d_i}}\,. \qquad (4.126)$$

3. Aplicând transformata Z inversă fracţiilor simple multiplicate cu z, rezultă:

$$f[k]=f(kT_e)=c_1(p_{d_1})^k+\ldots+c_i(p_{d_i})^k+\ldots+c_n(p_{d_n})^k\,. \qquad (4.127)$$

Exemplul 15

Să se calculeze cu metoda descompunerii în fracţii simple, funcţiile de timp pentru funcţiile complexe din exemplele 13 şi 14 (v. rel. (4.112), (4.117)):

a) $F(z)=\dfrac{z(3z-1)}{(z-1)(z-0{,}5)}$,

b) $F(z)=\dfrac{z(1-\mathrm{e}^{-aT_e})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-aT_e})}$.

a) Se calculează mai întâi:

$$F_1(z)=\frac{F(z)}{z}=\frac{3z-1}{(z-1)(z-0{,}5)}\,, \qquad (4.128)$$

iar apoi, presupunând că polinomul de la numitor are poli distincţi, se obţine:

$$F_1(z)=\frac{c_1}{z-1}+\frac{c_2}{z-0{,}5}\,, \qquad (4.129)$$

unde:

$$c_1 = \left.\frac{3z-1}{z-0{,}5}\right|_{z=1} = \frac{2}{0{,}5} = 4, \quad c_2 = \left.\frac{3z-1}{z-1}\right|_{z=0{,}5} = \frac{0{,}5}{-0{,}5} = -1. \tag{4.130}$$

Rezultă astfel dezvoltarea în fracţii simple:

$$F_1(z) = \frac{4}{z-1} - \frac{1}{z-0{,}5}, \tag{4.131}$$

deci:

$$F(z) = \frac{4z}{z-1} - \frac{z}{z-0{,}5}, \tag{4.132}$$

de unde, prin aplicarea transformatei Z inverse, se obţine:

$$f[k] = 4 - (0{,}5)^k, \quad k \geq 0. \tag{4.133}$$

b) Urmărindu-se etapele algoritmului metodei descompunerii în fracţii simple rezultă succesiv:

$$F_1(z) = \frac{F(z)}{z} = \frac{1-\mathrm{e}^{-aT_e}}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-aT_e})}, \tag{4.134}$$

$$F_1(z) = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-\mathrm{e}^{-aT_e}}, \tag{4.135}$$

unde:

$$c_1 = \left.\frac{1-\mathrm{e}^{-aT_e}}{z-\mathrm{e}^{-aT_e}}\right|_{z=1} = 1, \quad c_2 = \left.\frac{1-\mathrm{e}^{-aT_e}}{z-1}\right|_{z=\mathrm{e}^{-aT_e}} = -1. \tag{4.136}$$

Astfel, se obţine:

$$F(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT_e}}, \tag{4.137}$$

de unde, prin aplicarea transformatei Z inverse, rezultă:

$$f(kT_e) = 1 - (\mathrm{e}^{-aT_e})^k, \qquad k \geq 0. \tag{4.138}$$

4.4.6.3 Metoda seriilor infinite de puteri ale lui z^{-1}

La această metodă $F(z)$ se scrie sub forma unei serii infinite de puteri ale lui z^{-1}. Considerându-se din nou forma raţională a funcţiei complexe (v. rel. (4.107)):

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}, \quad n \geq m,$$

după împărţirea realizată după regula împărţirii infinite a polinoamelor rezultă:

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots \tag{4.139}$$

Comparând rezultatul obţinut cu relaţia de definiţie a transformatei Z (v. rel. (4.49)) se constată că:

$$f(0)=f_0\,,\ f(T_e)=f_1,\ f(2T_e)=f_2,\ \ldots,\ f(kT_e)=f_k,\ldots, \tag{4.140}$$

Pentru aplicarea metodei seriilor infinite de puteri ale lui z^{-1} este indicat ca înainte de împărţirea polinoamelor, funcţia complexă să fie scrisă în forma cu variabilă z^{-1} ca în următoarea relaţie:

$$F(z^{-1})=\frac{c_0+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}\cdots}{1+d_1z^{-1}+d_2z^{-2}\cdots}. \tag{4.141}$$

Exemplul 16

Folosind metoda seriilor infinite de puteri ale lui z^{-1}, să se determine funcţia de timp pentru transformata *Z* următoare:

$$F(z)=\frac{z}{z-0{,}8}. \tag{4.142}$$

Funcţia complexă în forma cu z^{-1} are următoarea expresie:

$$F(z)=\frac{1}{1-0{,}8z^{-1}}. \tag{4.143}$$

Împărţirea infinită realizată conform schemei prezentate în continuare furnizează soluţia:

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+0{,}8z^{-1}+0{,}64z^{-2}+0{,}512z^{-3}+\cdots \\
\hline
1-0{,}8z^{-1} & 1 \\
 & 1-0{,}8z^{-1} \\
\hline
 & \quad 0{,}8z^{-1} \\
 & \quad 0{,}8z^{-1}-0{,}64z^{-2} \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad 0{,}64z^{-2} \\
 & \qquad\quad 0{,}64z^{-2}-0{,}512z^{-3} \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad 0{,}512z^{-3}-\ldots
\end{array}$$

$$F(z^{-1})=1+0{,}8z^{-1}+0{,}64z^{-2}+0{,}512z^{-3}+0{,}41z^{-4}+\cdots, \tag{4.144}$$

de unde, prin comparaţie cu:

$$F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}f(kT_e)z^{-k}\ ,$$

se obţine secvenţa temporală $\{f(kT_e)\}=\{1;\ 0{,}8;\ 0{,}64;\ 0{,}512;\ 0{,}41;\ldots\}$.

Exemplul 17

Să se determine secvenţa temporală a semnalului $f(kT_e)$ cu metoda seriilor infinite de puteri, pentru funcţia complexă:

$$F(z)=\frac{z(z+1)}{(z-1)(z-0{,}5)}\,. \tag{4.145}$$

Se calculează mai întâi forma în z^{-1}:

$$F(z^{-1})=\frac{1+z^{-1}}{1-1{,}5z^{-1}+0{,}5z^{-2}}\,; \tag{4.146}$$

apoi se împart cele două polinoame conform schemei prezentate în continuare:

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+2{,}5z^{-1}+3{,}25z^{-2}+3{,}625z^{-3}+\ldots \\
\hline
1-1{,}5z^{-1}+0{,}5z^{-2} & 1+z^{-1} \\
 & 1-1{,}5z^{-1}+0{,}5z^{-2} \\
 & \quad 2{,}5z^{-1}-0{,}5z^{-2} \\
 & \quad 2{,}5z^{-1}-3{,}75z^{-2}+1{,}25z^{-3} \\
 & \qquad 3{,}25z^{-2}-1{,}25z^{-3} \\
 & \qquad 3{,}25z^{-2}-4{,}875z^{-3}+1{,}625z^{-4} \\
 & \qquad\quad 3{,}625z^{-3}-1{,}625z^{-4} \\
 & \qquad\quad 3{,}625z^{-3}-\cdots
\end{array}$$

Prin comparaţie directă cu:

$$F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} f[k]\,z^{-k}\ ,$$

rezultă secvenţa temporală

$f[0]=1;\ f[1]=2{,}5;\ f[2]=3{,}25;\ f[3]=3{,}625;\ldots$,

care poate fi scrisă în mod echivalent $\{f(kT_e)\}=\{1;\ 2{,}5;\ 3{,}25;\ 3{,}625;\ldots\}$.

Calculul analitic cu metoda seriilor infinite de puteri ale lui z^{-1} este laborios, preferându-se în acest caz calculul numeric asistat de calculator.

4.5 TRANSFORMATA *Z* MODIFICATĂ

Transformata *Z* ordinară prezintă dezavantajul că specifică valorile funcţiei de timp numai din momentele de eşantionare, $f(kT_e)$. Prin urmare $F(z)$ nu conţine nici o informaţie referitoare la valoarea lui $f(t)$ între momentele de eşantionării. Pentru a se evalua valorile semnalului $f(t)$ între momentele eşantionării s-a dezvoltat *metoda transformatei Z modificate* (*întârziate*). Această metodă este utilă pentru modelarea sistemelor cu timp mort (cu valori mai mici decât perioada de eşantionare T_e) şi, de asemenea, pentru descrierea semnalelor eşantionate cu timp mort.
Metoda este în esenţă o modificare a metodei transformatei *Z* ordinare, care se obţine prin introducerea unui timp mort fictiv. Modificând, prin variaţia unui parametru, acest timp mort se poate reconstitui virtual toată informaţia conţinută în semnalul continuu între momentele eşantionării.
Se presupune că timpul mort poate fi exprimat prin următoarea relaţie:

$$\tau = \lambda T_e + \lambda T_e \text{, unde } \lambda \in \boldsymbol{Z} \text{ şi } 0 \le \lambda < 1. \tag{4.147}$$

Dacă $\lambda = 0$, deci timpul mort este multiplu întreg al perioadei de eşantionare, transformata *Z* a semnalului de argument întârziat se determină folosind teorema deplasării în real cu relaţia:

$$F_{\hat{i}}(z) = \mathcal{Z}\{f(t - \lambda T_e)\}_{t \ge \lambda T_e} = z^{-\lambda} F(z). \tag{4.148}$$

4.5.1 Definiţia şi calculul transformatei *Z* modificate

Transformata *Z* modificată se introduce pentru semnalele întârziate cu timp mort mai mic decât perioada de eşantionare.
Pentru definirea transformatei *Z* modificate se consideră semnalul original $f(t)$ şi versiunea întârziată a acestuia:

$$f_{\hat{i}}(t) = f(t - \lambda T_e) \text{, cu } 0 \le \lambda < 1, \tag{4.149}$$

care se prezintă grafic în figura 4.24.

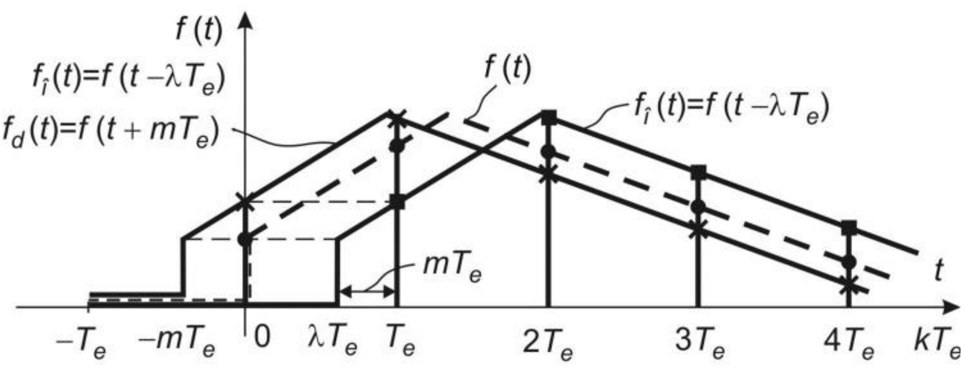


Fig. 4.24

Se remarcă faptul că $f(t)$ este definită numai pentru $t \geq 0$, fiind nulă pentru $t < 0$. De asemenea $f_{î}(t) = f(t - \lambda T_e)$ va fi diferită de zero numai pentru $t \geq \lambda T_e$, având valoarea zero pentru $t < \lambda T_e$.
Se reaminteşte că un semnal eşantionat este scris conform expresiei (v. §4.4.1):

$$f^*(t) = f(t)|_{t=0}\ \delta(t) + f(t)|_{t=T_e}\ \delta(t - T_e) + \ldots + f(t)|_{t=kT_e}\ \delta(t - kT_e) + \ldots$$

Prin urmare semnalul întârziat eşantionat va fi descris conform relaţiei:

$$f_{î}^*(t) = f(t - \lambda T_e)|_{t=0}\ \delta(t) + f(t - \lambda T_e)|_{t=T_e}\ \delta(t - T_e) + \ldots.$$

$$+ f(t - \lambda T_e)|_{t=kT_e}\ \delta(t - kT_e) + \ldots. \qquad (4.150)$$

Având însă în vedere că $f(t - \lambda T_e)$ există numai pentru $t > \lambda T_e$ vom avea deci $f(t - \lambda T_e)|_{t=0} = 0$, şi după înlocuirea timpului cu multiplul întreg al perioadei de eşantionare, se obţine:

$$f_{î}^*(t) = f[(1-\lambda)T_e]\delta(t - T_e) + f[T_e + (1-\lambda)T_e]\delta(t - 2T_e) + \ldots$$

$$+ f[(k-1)T_e + (1-\lambda)T_e]\delta(t - kT_e) + \ldots, \qquad (4.151)$$

respectiv, dacă se notează $1 - \lambda = m$, rezultă expresia:

$$f_{î}^*(t) = f(mT_e)\delta(t - T_e) + \ldots + f[mT_e + (k-1)T_e]\delta(t - kT_e) + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} f[mT_e + (k-1)T_e]\delta(t - kT_e). \qquad (4.152)$$

Pentru definirea corectă a transformatei *Z* este însă necesar ca în suma din ultima relaţie să apară şi un eşantion (diferit de zero) pentru $k = 0$. Astfel este posibil să se coreleze transformata *Z* a semnalului întârziat cu transformata *Z* a semnalului original. În acest scop semnalul întârziat se consideră ca fiind un semnal decalat înainte cu mT_e şi apoi întârziat cu o perioadă de eşantionare. Versiunea eşantionată a semnalului decalat înainte (v. fig. 4.24) este descrisă de relaţia:

$$f_d^*(t) = f(t + mT_e)|_{t=0}\ \delta(t) + f(t + mT_e)|_{t=T_e}\ \delta(t - T_e) + \ldots$$

$$+ f(t + mT_e)|_{t=kT_e}\ \delta(t - kT_e) + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e + mT_e)\delta(t - kT_e), \qquad (4.153)$$

de unde, având în vedere definiţia transformatei *Z*, rezultă:

$$F_d(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(kT_e + mT_e) z^{-k} = \mathcal{Z}\{f(t + mT_e)\}. \qquad (4.154)$$

În continuare, deoarece semnalul studiat $f(t - \lambda T_e)$ este identic cu semnalul fictiv $f(t + mT_e)$ întârziat cu o perioadă de eşantionare, rezultă imediat:

$$F_î(z) = z^{-1}F_d(z) = z^{-1}\mathcal{Z}\{f(t+mT_e)\}\,. \qquad (4.155)$$

Din analiza făcută mai înainte rezultă că transformata Z a semnalului întârziat:

$$f_î(t) = f(t-\lambda T_e) = f[t-(1-m)T_e] \text{ cu } \lambda, m \in (0,1)\,, \qquad (4.156)$$

numită în continuare *transformata Z modificată*, notată $F(z,m)$ sau $\mathcal{Z}_m\{f(t)\}$, se calculează cu relaţia:

$$F(z,m) = \mathcal{Z}_m\{f(t)\} = \mathcal{Z}\{f(t-\lambda T_e)\} = z^{-1}\mathcal{Z}\{f[(t+mT_e)\},\ m = 1-\lambda\,. \qquad (4.157)$$

Exemplul 18

Să se calculeze transformata Z modificată pentru semnalul treaptă unitară. Avându-se în vedere definiţia se poate scrie:

$$1_+(t-\lambda T_e) = 1_+[t-(1-m)T_e] = 1_+[(t+mT_e)-T_e]\,. \qquad (4.158)$$

Reprezentările grafice ale semnalelor $1_+(t-\lambda T_e) = 1_+[(t+mT_e)-T_e]$ şi $1_+(t+mT_e)$ sunt ilustrate în figura 4.25.

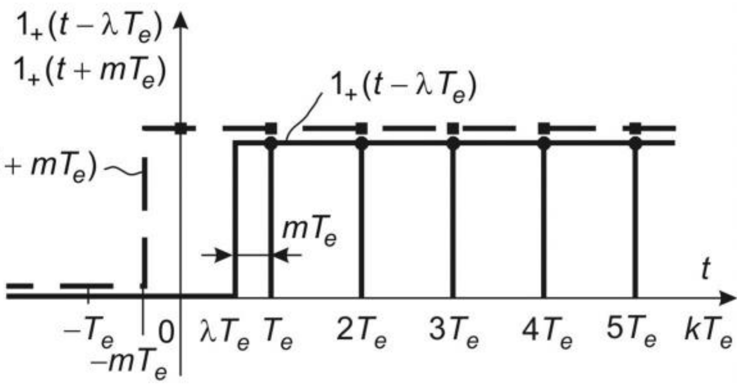


Fig. 4.25

Din grafic se constată că versiunea eşantionată a semnalului $1_+(t+mT_e)$ este identică cu cea a semnalului $1_+(t)$ deci transformatele Z sunt şi ele identice, aşadar:

$$\mathcal{Z}\{1_+(t+mT_e)\} = \frac{z}{z-1}, \qquad (4.159)$$

şi prin urmare:

$$\mathcal{Z}_m\{1_+(t)\} = z^{-1}\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1}\,. \qquad (4.160)$$

Exemplul 19

Să se determine transformata Z modificată pentru semnalul rampă unitară.
În figura 4.26 sunt schiţate semnalele rampă unitară întârziată şi respectiv decalată înainte. Aplicându-se formula de definiţie se obţine succesiv:

$$\mathcal{Z}_m\{t\}_{t\ge 0} = z^{-1}\mathcal{Z}\{t+mT_e\} = z^{-1}[\mathcal{Z}\{t\} + mT_e\mathcal{Z}\{1_+(t)\}]$$

$$= z^{-1}\left[\frac{zT_e}{(z-1)^2} + mT_e\,\frac{z}{z-1}\right] = \frac{mT_e}{z-1} + \frac{T_e}{(z-1)^2}\,. \tag{4.161}$$

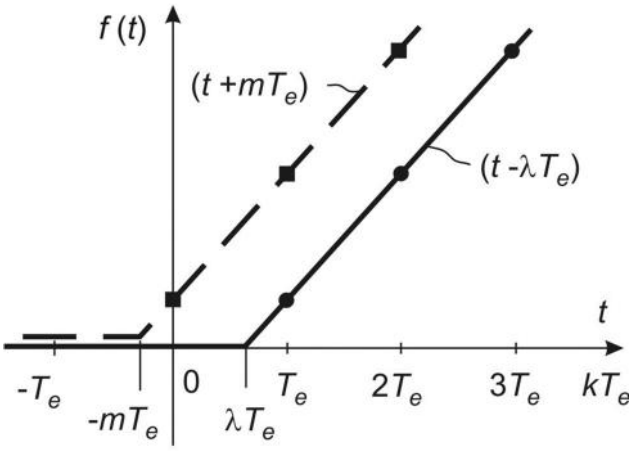


Fig. 4.26

Exemplul 20

Să se determine transformata *Z* modificată pentru funcţia $f(t) = e^{-at}$, $t \geq 0$.
Schiţa semnalelor întârziat şi a celui fictiv decalat în avans este prezentată în figura 4.27.

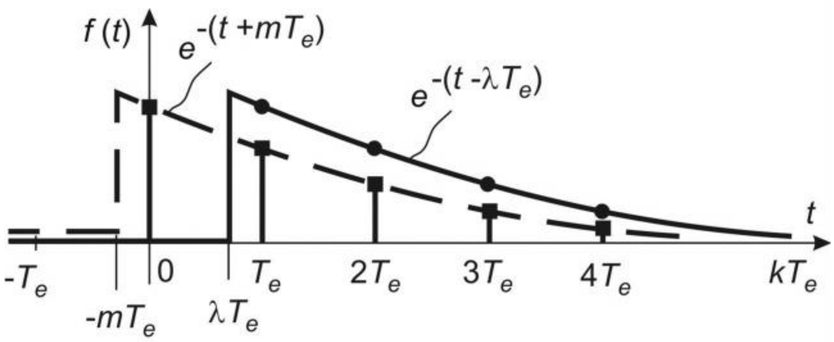


Fig. 4.27

Transformata *Z* modificată se calculează cu formula de definiţie:

$$\mathcal{Z}_m\{e^{-at}\} = z^{-1}\mathcal{Z}\{e^{-a(t+mT_e)}\} = z^{-1}e^{-amT_e}\,\frac{z}{z-e^{-aT_e}} = \frac{e^{-amT_e}}{z-e^{-aT_e}}\,. \tag{4.162}$$

Exemplul 21

Să se calculeze transformata *Z* modificată pentru semnalul parabolă definit prin relaţia $f(t) = t^2$.

Se cunoaşte că (v. exemplele 8 şi 9):

$$\mathcal{Z}\{t^2\}_{t\geq 0} = \frac{T_e^2 z(z+1)}{(z-1)^3} \text{ şi } \mathcal{Z}\{t\}_{t\geq 0} = \frac{zT_e}{(z-1)^2}\,.$$

Se aplică în continuare relaţia de definiţie. Se obţine astfel:

$$\mathcal{Z}_m[t^2] = z^{-1}\mathcal{Z}[(t+mT_e)^2] = z^{-1}[\mathcal{Z}\{t^2\} + 2mT_e\mathcal{Z}\{t\} + m^2T_e^2\mathcal{Z}\{1_+(t)\}] =$$

$$= z^{-1}\left[\frac{T_e^2 z(z+1)}{(z-1)^3} + 2mT_e\frac{zT_e}{(z-1)^2} + m^2T_e^2\frac{z}{z-1}\right] = T_e^2\left[\frac{m^2}{z-1} + \frac{2m}{(z-1)^2} + \frac{z+1}{(z-1)^3}\right]. \quad (4.163)$$

Tabelul 4.3 prezintă sintetic proprietăţile şi teoremele transformatei *Z* modificate.

Tabelul 4.3

Nr. crt.	Denumire, proprietate sau teoremă	Relaţii Notaţii generale: $F(z) = \mathcal{Z}\{f(t)\}$, $F(z,m) = z^{-1}\mathcal{Z}\{f(t+mT_e)\}$, $0 < m < 1$
1	Cazuri particulare pentru valorile lui $m = 0$ şi $m = 1$	$F(z,0) = z^{-1}F(z)$ $F(z,1) \neq F(z)$
2	Deplasare (întârziere) în timp	$\mathcal{Z}_m\{f(t \pm \lambda T_e)] = z^{\pm\lambda}F(z,m)$
3	Deplasare în complex	$\mathcal{Z}_m\{e^{\pm at}f(t)\} = \mathcal{Z}_m\{F(s \mp a)\} = e^{\pm aT_e(m-1)}F(ze^{\mp aT_e},m)$
4	Teorema valorii iniţiale	$\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = \lim\limits_{\substack{k\to 0\\ m\to 0}} f(kT_e,m) = \lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ m\to 0}} zF(z,m)$
5	Teorema valorii finale	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ 0\le m<1}} f(kT_e,m) = \lim\limits_{\substack{z\to 1\\ 0\le m<1}} (1-z^{-1})F(z,m)$ Condiţie de aplicare: funcţia $(1-z^{-1})F(z,m)$ posedă poli în interiorul cercului de rază unitară.

Exemplul 22

Fiind date $f(t)$ şi $F(s)$ cu $f(t) = t\,|_{t\ge 0}$ şi respectiv $F(s) = 1/s^2$, să se calculeze transformata *Z* modificată a funcţiei $f_1(t) = f(t)e^{-at} = te^{-at}$.
Din exemplul 21 se cunoaşte că:

$$\mathcal{Z}_m\{t\}_{t\ge 0} = \frac{mT_e}{z-1} + \frac{T_e}{(z-1)^2},$$

iar din proprietatea de deplasare în complex avem:

$$\mathcal{Z}_m\{te^{-at}\}_{t\ge 0} = \mathcal{Z}_m\{1/(s+a)^2\} = e^{-aT_e(m-1)}\mathcal{Z}\{ze^{aT_e},m\}, \quad (4.164)$$

deci:

$$\mathcal{Z}_m\{te^{-at}\}_{t\ge 0} = e^{-aT_e(m-1)}\left[\frac{mT_e}{z-1} + \frac{T_e}{(z-1)^2}\right]. \quad (4.165)$$

4.5.2 Transformata *Z* modificată inversă

Transformata *Z* modificată $F(z,m)$, are drept scop principal de a furniza valorile semnalului $f(t)$ între momentele de eşantionare. Aceste valori se pot calcula cu transformata *Z* modificată inversă notată conform relaţiei:

$$f(kT_e,m)=\mathcal{Z}_m^{-1}\{F(z,m)\}\,. \tag{4.166}$$

Transformata *Z* modificată inversă se poate determina cu următoarele procedee:
– metoda fomulei de inversiune;
– metoda seriilor infinite de puteri ale lui z^{-1}.
Se remarcă faptul că metoda descompunerii în fracţii simple nu poate fi aplicată, în general, transformatelor *Z* modificate. Aplicarea celor două metode se face în acelaşi mod ca la transformata *Z* ordinară.
Coeficienţii corespunzători funcţiei de timp $f(kT_e,m)$ sunt dependenţi de parametrul *m*.
Valorile semnalului $f(t)$ în momentele de eşantionare se deduc conform schemei:
– pentru *k* oarecare şi $m=0$ avem:

$$f(kT_e,0)=f((k-1)T_e^+)\,; \tag{4.167}$$

– pentru *k* oarecare şi $m=1$ rezultă:

$$f(kT_e,1)=f(kT_e^-)\,. \tag{4.168}$$

Valorile semnalului între momentele de eşantionare se obţin modificând *m* între 0 şi 1.

Exemplul 23

Se dă transformata *Z* modificată:

$$F(z,m)=\frac{\mathrm{e}^{-mT_e}}{z-\mathrm{e}^{-T_e}}\,. \tag{4.169}$$

Se cere să se reconstituie semnalul original folosind metoda seriilor infinite de puteri ale lui z^{-1}.
Din exemplul 20 se cunoaşte că această transformată *Z* modificată se obţine pentru semnalul $f(t)=\mathrm{e}^{-t}$. Mai întâi se determină funcţia:

$$F(z^{-1},m)=\frac{\mathrm{e}^{-mT_e}z^{-1}}{1-z^{-1}\mathrm{e}^{-T_e}}\,, \tag{4.170}$$

şi apoi se calculează, cu regula de împărţire a polinoamelor, seria de puteri ale lui z^{-1}:

$$
\begin{array}{l|l}
1-z^{-1}e^{-T_e} & e^{-mT_e}z^{-1}+e^{-(m+1)T_e}z^{-2}+e^{-(m+2)T_e}z^{-3}+\ldots+e^{-(m+k)T_e}z^{-(k+1)} \\
\hline
e^{-mT_e}z^{-1} & \\
e^{-mT_e}z^{-1}-z^{-2}e^{-(m+1)T_e} & \\
\hline
\quad z^{-2}e^{-(m+1)T_e} & \\
\quad z^{-2}e^{-(m+1)T_e}-z^{-3}e^{-(m+2)T_e} & \\
\hline
\qquad z^{-3}e^{-(m+2)T_e} & \\
\qquad z^{-3}e^{-(m+2)T_e}-z^{-4}e^{-(m+3)T_e} &
\end{array}
$$

Se obţine astfel:

$$F(z,m)=e^{-mT_e}z^{-1}+e^{-(m+1)T_e}z^{-2}+\ldots+e^{-(m+k)T_e}z^{-(k+1)}+\ldots \tag{4.171}$$

Funcţia de timp în decursul primei perioade de eşantionare se determină pentru $k=1$ şi $m\in[0,1]$. Astfel se obţine:

$$
\begin{aligned}
&k=1,\quad m=0 && f(0^+)=e^{-mT_e}\Big|_{m=0}=1,\\
&m\in(0,1) && f(t)=e^{-mT_e}\Big|_{m\in(0,1)},\\
&m=1 && f(T_e^-)=e^{-T_e}.
\end{aligned}
\tag{4.172}
$$

În a doua perioadă de eşantionare avem:

$$
\begin{aligned}
&k=2,\quad m=0 && f(T_e^+)=e^{-(m+1)T_e}\Big|_{m=0}=e^{-T_e},\\
&m\in(0,1) && f(t)=e^{-(m+1)T_e}\Big|_{m\in(0,1)},\\
&m=1 && f(2T_e^-)=e^{-(m+1)T_e}\Big|_{m=1}=e^{-2T_e},
\end{aligned}
\tag{4.173}
$$

iar în perioada k de eşantionare semnalul reconstituit va fi:

$$
\begin{aligned}
&k=k,\quad m=0 && f[(k-1)T_e^+]=e^{-(m+k-1)T_e}\Big|_{m=0}=e^{-(k-1)T_e},\\
&m\in(0,1) && f(t)=e^{-(m+k-1)T_e}\Big|_{m\in(0,1)},\\
&m=1 && f(kT_e^-)=e^{-(m+k-1)T_e}\Big|_{m=1}=e^{-kT_e}.
\end{aligned}
\tag{4.174}
$$

Semnalul reconstituit este reprezentat grafic în figura 4.28.

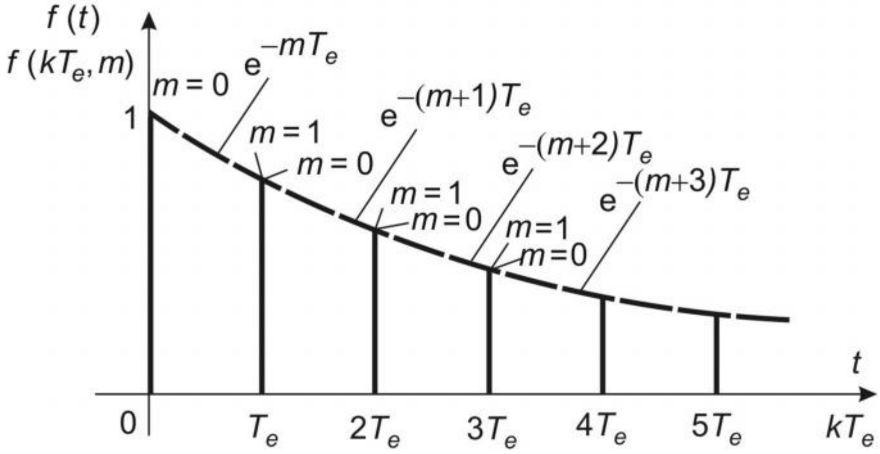


Fig. 4.28

Exemplul 24

Să se reconstituie semnalul continuu care are transformata Z modificată exprimată conform relaţiei:

$$F(z,m)=\frac{z\mathrm{e}^{-mT_e}}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T_e})}\,. \tag{4.175}$$

Se aplică metoda formulei de inversiune. Mai întâi se scrie funcţia complexă:

$$F_0(z,m)=z^{k-1}F(z,m)=\frac{z^k\mathrm{e}^{-mT_e}}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-T_e})}\,, \tag{4.176}$$

iar apoi se calculează reziduurile conform relaţiei:

$$f(kT_e,m)=c_1+c_2=\left.\frac{z^k\mathrm{e}^{-mT_e}}{z-\mathrm{e}^{-T_e}}\right|_{z=1}+\left.\frac{z^k\mathrm{e}^{-mT_e}}{z-1}\right|_{z=\mathrm{e}^{-T_e}}=\frac{\mathrm{e}^{-mT_e}}{1-\mathrm{e}^{-T_e}}-\frac{\mathrm{e}^{-(k+m)T_e}}{1-\mathrm{e}^{-T_e}}=$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-mT_e}}{1-\mathrm{e}^{-T_e}}(1-\mathrm{e}^{-kT_e})\,. \tag{4.177}$$

În continuare se calculează funcţia de timp $f(t)$ reconstituită din transformata Z modificată.
Pentru $k=1$ avem:

$$f(T_e,m)=\frac{\mathrm{e}^{-mT_e}}{1-\mathrm{e}^{-T_e}}(1-\mathrm{e}^{-T_e})=\mathrm{e}^{-mT_e}\,, \tag{4.178}$$

de unde rezultă, pentru $m=0$:

$$f(0^+)=1, \tag{4.179}$$

iar pentru $m=1$:

$$f(T_e^-)=\mathrm{e}^{-T_e}\,. \tag{4.180}$$

În intervalul $(0,T_e)$, $f(t)=\mathrm{e}^{-mT_e}$, cu $m\in(0,1)$.

Pentru $k = 2$, avem:

$$f(2T_e, m) = \frac{e^{-mT_e}}{1 - e^{-T_e}}(1 - e^{-2T_e}) = e^{-mT_e}(1 + e^{-T_e}), \tag{4.181}$$

de unde rezultă, pentru $m = 0$:

$$f(T_e^+) = \frac{1 - e^{-2T_e}}{1 - e^{-T_e}} = 1 + e^{-T_e}, \tag{4.182}$$

iar pentru $m = 1$ vom avea:

$$f(2T_e^-) = e^{-T_e}(1 + e^{-T_e}). \tag{4.183}$$

Considerând o valoare oarecare pentru k se obţine, pentru $m = 0$:

$$f[(k-1)T_e^+] = \frac{1 - e^{-kT_e}}{1 - e^{-T_e}} = 1 + e^{-T_e} + \ldots + e^{-(k-1)T_e}, \tag{4.184}$$

iar pentru $m = 1$ rezultă:

$$f(kT_e^-) = e^{-T_e}\frac{1 - e^{-kT_e}}{1 - e^{-T_e}} = e^{-T_e}[1 + e^{-T_e} + \cdots + e^{-(k-1)T_e}]. \tag{4.185}$$

Se constată că $f(kT_e^-) \neq f(kT_e^+)$ deci în momentele care sunt multiplu întreg al perioadei de eşantionare, semnalul $f(t)$ are o discontinuitate. Forma de variaţie a semnalului reconstituit după aplicarea transformatei Z modificate este prezentată în graficul din figura 4.29.

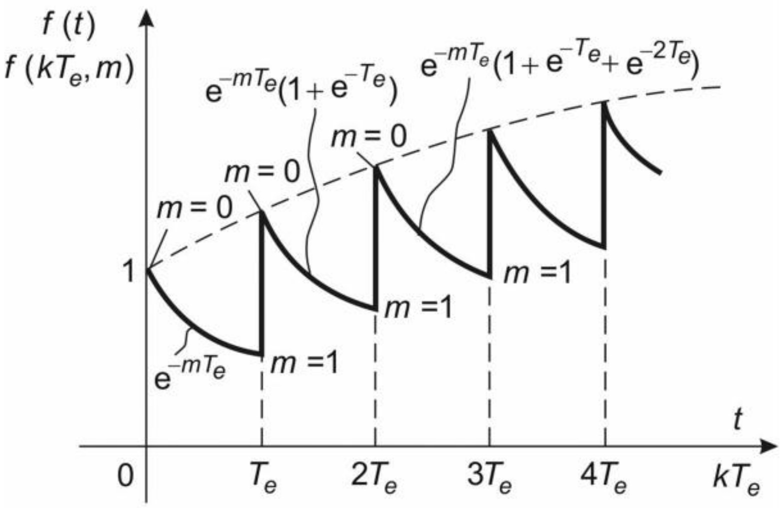


Fig. 4.29

4.6 MODELE DINAMICE ALE SISTEMELOR DISCRETE

Modelul dinamic al unui sistem (continuu sau discret) ilustrează modul în care se obţine semnalul de ieşire din semnalul de intrare. În cazul sistemelor liniare şi continue modelul dinamic de bază este ecuaţia diferenţială cu coeficienţi constanţi cu forma generală:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}+\alpha_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\ldots+\alpha_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+\alpha_0 y(t)=\\&\qquad=\beta_m\frac{\mathrm{d}^m u(t)}{\mathrm{d}t^m}+\beta_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}u(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\ldots+\beta_1\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+\beta_0 u(t),\end{aligned}\tag{4.186}$$

unde $u(t)$ şi $y(t)$ sunt funcţiile continue de timp asociate mărimilor de intrare respectiv de ieşire, iar coeficienţii α_i $(i=0,\ldots,n-1)$ şi β_j $(j=0,\ldots,m)$ sunt constante cu valori reale. Echivalentul discret al ecuaţiilor diferenţiale este *ecuaţia cu diferenţe*.

4.6.1 Ecuaţii liniare cu diferenţe

Se reaminteşte că semnalele discrete sunt descrise, folosind notaţiile specifice, ca secvenţe temporale de numere de forma $u(kT_e)$ sau $u[k]$ pentru mărimea de intrare, respectiv $y(kT_e)$ sau $y[k]$ pentru mărimea de ieşire.

Având în vedere evoluţia în timp a acestor semnale, valorile $u[k]$ şi $y[k]$ se vor numi *eşantioane curente* ale mărimilor respective iar valorile $y[k-i]$ şi $u[k-j]$, cu $i=1,\ldots,n$ şi $j=1,\ldots,m$, vor fi *eşantioane anterioare* ale mărimilor considerate.

Ecuaţiile liniare cu diferenţe, scrise în forma recurentă (care se va prezenta ulterior) determină eşantionul curent al mărimii de ieşire în funcţie de eşantioanele anterioare ale mărimilor de intrare şi ieşire.

Ecuaţiile cu diferenţe se pot introduce în mai multe moduri. Se va ilustra deducerea ecuaţiilor cu diferenţe pornind de la ecuaţia diferenţială, prin aproximarea succesivă a derivatelor cu diferenţa de ordinul unu. Aproximarea se face conform schemei care se prezintă în continuare, pentru mărimea de ieşire:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\cong\frac{\Delta y_k}{T_e}=\frac{y[k]-y[k-1]}{T_e},\tag{4.187}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)\cong\frac{\dfrac{\Delta y_k}{T_e}-\dfrac{\Delta y_{k-1}}{T_e}}{T_e}=\frac{y[k]-2y[k-1]+y[k-2]}{T_e^2},\tag{4.188}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 y(t)}{\mathrm{d}t^3}\cong\frac{y[k]-3y[k-1]+3y[k-2]-y[k-3]}{T_e^3},\tag{4.189}$$

…………………………………………………

Forma exactă pentru derivata de ordinul n nu este relevantă, deoarece, de obicei, ecuaţia cu diferenţe se calculează în alt mod. Se remarcă faptul că în relaţiile scrise mai înainte pentru aproximarea derivatelor s-a folosit notaţia $y[k]\equiv y(kT_e)$. De asemenea, la deducerea ecuaţiilor cu diferenţe funcţiile de timp $y(t)$ şi $u(t)$ au fost înlocuite cu eşantioanele $y[k]$ şi $u[k]$, deci:

$$y(t) \cong y[k] \text{ şi } u(t) \cong u[k]. \tag{4.190}$$

Aplicând, în ecuaţia diferenţială de mai sus, schema de aproximare a derivatelor se obţine forma generală a unei ecuaţii cu diferenţe:

$$y[k]+a_1y[k-1]+\ldots+a_ny[k-n]=b_0u[k]+b_1u[k-1]+\ldots+b_mu[k-m], \tag{4.191}$$

unde $k \in \boldsymbol{Z}$ sau $\boldsymbol{N}$, $n,m \in \boldsymbol{N}$ şi $a_i, b_j \in \boldsymbol{R}$.

Ordinul maxim al eşantionului anterior care apare în ecuaţia cu diferenţe este determinat de ordinul sistemului *n*, fiind $k-n$.

Dacă sistemul liniar conţine un timp mort pur, multiplu întreg al perioadei de eşantionare, de forma $\tau = \lambda T_e$, cu $\lambda \in N$, ecuaţia cu diferenţe se va scrie conform relaţiei:

$$y[k]+a_1y[k-1]+\ldots+a_ny[k-n]=b_0u[k-\lambda]+b_1u[k-\lambda-1]+\ldots+b_mu[k-\lambda-m]. \tag{4.192}$$

O formă particulară a ecuaţiei cu diferenţe (4.192) care permite calculul recurent al eşantionului curent al mărimii de ieşire, în funcţie de eşantioanele anterioare ale intrării şi ieşirii, este exprimată conform relaţiei:

$$y[k]=-a_1y[k-1]+\ldots-a_ny[k-n]+b_0u[k]+b_1u[k-1]+\ldots+b_mu[k-m], \lambda=0, \tag{4.193}$$

Sistemele discrete care au toţi coeficienţii $a_i, i=1,\ldots,n$ egali cu zero se numesc *sisteme cu răspuns finit la impuls* (**F***inite* **I***mpulse* **R***esponse* – FIR).

Dacă cel puţin un coeficient a_i este diferit de zero sistemul discret se numeşte *auto-regresiv* sau, în mod alternativ, *sistem cu răspuns infinit la impuls* (I*nfinite* I*mpulse* R*esponse* – IIR).

În legătură cu modul în care s-a dedus mai înainte ecuaţia cu diferenţe se poate remarca faptul că rezultatul obţinut este aproximativ, fapt reflectat în valorile coeficienţilor care vor fi diferite de valorile exacte care se obţin când se foloseşte transformata *Z*. Aspectele de principiu sunt însă valabile şi în acest caz.

Exemplul 25

Să se determine ecuaţia cu diferenţe pentru sistemul de ordinul întâi cu funcţia de transfer:

$$G(s)=\frac{K}{sT+1}.$$

Având în vedere relaţia de definiţie a funcţiei de transfer, rezultă într-o primă etapă:

$$Y(s)=\frac{K}{sT+1}U(s),$$

respectiv:

$$sTY(s)+Y(s)=U(s).$$

Ecuaţia diferenţială se obţine prin aplicarea transformatei Laplace inverse, folosind proprietatea de derivare a transformatei Laplace, în condiţii iniţiale nule, pentru mărimea de ieşire $Y(s)$:

$$T\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)=Ku(t).$$

Aproximând derivata cu diferenţa de ordinul unu se obţine succesiv:

$$T\frac{y[k]-y[k-1]}{T_e}+y[k]=Ku[k],\tag{4.194}$$

$$y[k](1+\frac{T}{T_e})-\frac{T}{T_e}y[k-1]=Ku[k],\tag{4.195}$$

$$y[k]-\frac{T}{T_e+T}y[k-1]=\frac{KT_e}{T_e+T}u[k],\tag{4.196}$$

respectiv:

$$y[k]+a_1y[k-1]=b_0u[k],\tag{4.197}$$

unde $a_1=-\frac{T}{T_e+T}$ şi $b_0=\frac{KT_e}{T_e+T}$.

Exemplul 26

Să se determine ecuaţia cu diferenţe pentru elementul integrator cu funcţia de transfer:

$$G(s)=\frac{1}{s}.$$

Ecuaţia integro-diferenţială a elementului integrator este:

$$y(t)=\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

sau, în mod echivalent:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=u(t).$$

Aproximând derivata cu diferenţa de ordinul unu se obţine:

$$\frac{y[k]-y[k-1]}{T_e}=u[k],\tag{4.198}$$

sau:

$$y[k]-y[k-1]=T_eu[k];\tag{4.199}$$

deci ecuaţia cu diferenţe va fi:

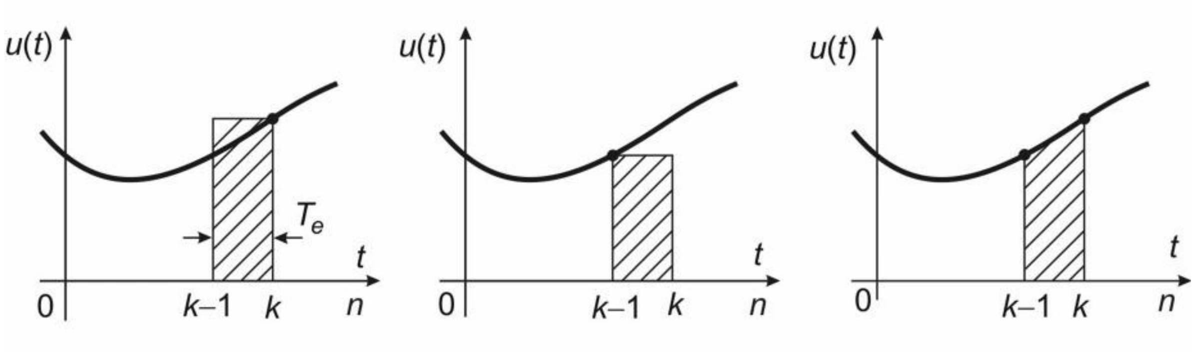
$$y[k]+a_1y[k-1]=b_0u[k],\tag{4.200}$$

cu $a_1=-1$ şi $b_0=T_e$.

Se poate remarca faptul că forma recurentă a ecuaţiei cu diferenţe:

$$y[k]=y[k-1]+T_eu[k],\tag{4.201}$$

este identică cu relaţia de calcul numeric a integralei cu metoda aproximativă Euler a dreptunghiului înapoi respectiv cu latura din spate pe curbă - (*Backward Rectangular Rule*), prezentată în figura 4.30a.



a) b) c)

Fig. 4.30

Integrarea numerică aproximativă se poate face, în mod alternativ şi cu metodele prezentate grafic în figurile 4.30b şi 4.30c.
Integrarea prezentată în figura 4.30b corespunde metodei Euler a dreptunghiului înainte respectiv cu latura din faţă pe curbă - (*Forward Rectangular Rule*), care evaluează numeric integrala cu forma recurentă a ecuaţiei cu diferenţe conform relaţiei:

$$y[k] = y[k-1] + T_e u[k-1]. \tag{4.202}$$

Această formă a ecuaţiei cu diferenţe se obţine dacă la aproximarea cu diferenţe de ordinul unu a ecuaţiei diferenţiale, valoarea $u(t)$ se înlocuieşte cu eşantionul de la momentul $(k-1)T_e$, deci $u(t) \cong u[k-1]$.
În figura 4.30c se prezintă metoda de integrare a trapezului (*Trapezoid Rule*) exprimată prin forma recurentă a ecuaţiei cu diferenţe:

$$y[k] = y[k-1] + \frac{T_e}{2}(u[k] - u[k-1]). \tag{4.203}$$

4.6.2 Operatorul de întârziere cu un pas. Funcţii de transfer operaţionale

Un alt tip de model pentru sistemele discrete se poate introduce, pornind de la ecuaţia cu diferenţe, pe baza operatorului de întârziere cu un pas q^{-1}, care este definit cu relaţii de forma:

$$q^{-1}y[k] = y[k-1], \text{ respectiv } q^{-1}u[k] = u[k-1]. \tag{4.204}$$

Aplicând în mod repetat operatorul de întârziere cu un pas se obţin expresiile formale următoare:

$$y[k-i] = q^{-i}y[t] \text{ ,respectiv } u[k-j] = q^{-j}u[t]. \tag{4.205}$$

Înlocuind aceste expresii în ecuaţia cu diferenţe (4.191) se obţine relaţia algebrică:

$$(1 + a_1q^{-1} + \ldots + a_nq^{-n})y[k] = q^{-\lambda}(b_0 + b_1q^{-1} + \ldots + b_mq^{-m})u[k], \tag{4.206}$$

de unde, cu notaţiile:

$$A(q) \equiv A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_n q^{-n} , \tag{4.207}$$

$$B(q) \equiv B(q^{-1}) = q^{-\lambda}(b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_m q^{-m}) , \tag{4.208}$$

se obţine modelul operaţional:

$$y[k] = \frac{B(q)}{A(q)} u[k] = G(q) u[k] . \tag{4.209}$$

Funcţia raţională de argument q :

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{q^{-\lambda}(b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_m q^{-m})}{1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_n q^{-n}} , \tag{4.210}$$

se numeşte *funcţie de transfer operaţională*. Se remarcă faptul că argumentul q care apare în această funcţie de transfer nu are caracterul unei variabile complexe fiind doar o notaţie formală care acţionează conform definiţiei din relaţiile (4.204).

Exemplul 27

Să se determine funcţia de transfer operaţională pentru elementul de ordinul unu.
Rezolvare
Ecuaţia cu diferenţe pentru elementul de ordinul unu este (v. rel. (4.197)):

$$y[k] + a_1 y[k-1] = b_0 u[k] .$$

Folosind operatorul de întârziere cu un pas:

$$y[t-1] = q^{-1} y[k] ,$$

în această ecuaţie, se obţine:

$$(1 + a_1 q^{-1}) y[k] = b_0 u[k] , \tag{4.211}$$

de unde rezultă într-o primă etapă:

$$y[k] = \frac{b_0}{1 + a_1 q^{-1}} u[k] , \tag{4.212}$$

deci funcţia de transfer operaţională este:

$$G(q) = \frac{b_0}{1 + a_1 q^{-1}} . \tag{4.213}$$

4.6.3 Funcţii de transfer *z*

Modelul cel mai des folosit în cazul sistemelor discrete, echivalentul funcţiei de transfer *s* de la sistemele continue, este funcţia de transfer *z*.
Funcţia de transfer *z* se determină considerând procesul discretizat cu schema funcţională din figura 4.31.

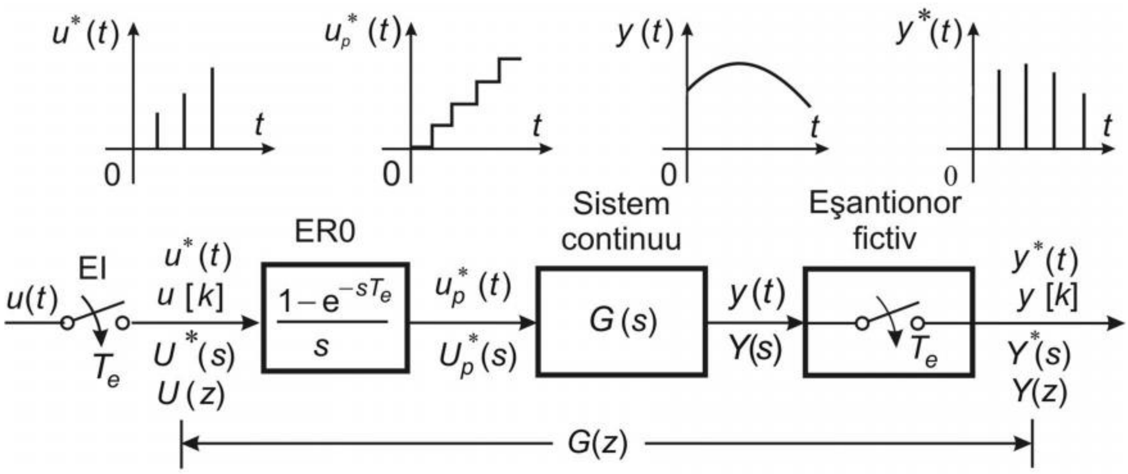


Fig. 4.31

În figură se prezintă, de asemenea, formele tipice de variaţie ale semnalelor asociate elementelor funcţionale din schemă.
Se remarcă faptul că la definirea unei funcţii de transfer *z* este esenţialmente necesar ca mărimile de intrare şi ieşire să fie eşantionate. De regulă, semnalul de intrare este eşantionat, dar nu acelaşi lucru se întâmplă cu semnalul de ieşire. În cazul acesta la ieşire se introduce un eşantionor fictiv. Desigur că se presupune, de asemenea, că eşantioanele ideale de la intrare şi ieşire sunt sincronizate şi evident au aceleaşi perioade de eşantionare.

4.6.3.1 Calculul analitic exact al funcţiilor de transfer z

Ca o regulă generală la deducerea funcţiilor de transfer *z*, pe baza unor scheme-bloc, în prima etapă se scrie relaţia dintre transformata Laplace eşantionată a ieşirii, $Y^*(s)$ şi cea a intrării, $U^*(s)$. Pentru schema din figura 4.31 vom avea succesiv:

$$Y(s) = \frac{1-e^{-sT_e}}{s} G(s) U^*(s),$$

$$Y^*(s) = \left[\frac{1-e^{-sT_e}}{s} G(s)\right]^* U^*(s). \tag{4.214}$$

În continuare se aplică, conform definiţiei (v. rel. (4.49)), transformata *Z* relaţiei de mai sus şi astfel se obţine:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-sT_e}}{s} G(s)\right\} U(z), \tag{4.215}$$

de unde, având în vedere că $e^{sT_e} = z$, rezultă:

$$Y(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}U(z)\,. \tag{4.216}$$

În final se obţine relaţia de calcul exact a funcţiei de transfer z, pentru un sistem continuu cu funcţia de transfer $G(s)$ precedat de un element de reţinere de ordinul zero:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}. \tag{4.217}$$

Observaţii.

a) Transformata $\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$ trebuie interpretată conform relaţiei:

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \equiv \mathcal{Z}\left\{\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}\right\}. \tag{4.218}$$

b) Există situaţii în care elementul de reţinere de ordinul zero care precede elementul continuu de sistem, lipseşte. În acest caz vom avea:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G(s)\}\,. \tag{4.219}$$

Se menţionează totuşi că astfel de situaţii apar rar, mai ales când elementele de sistem sunt conectate în serie, paralel sau cu reacţie.
Funcţia de transfer z se poate deduce (metoda este folosită mai rar) din ecuaţia cu diferenţe. Având în vedere teorema de deplasare în timp, dacă se aplică transformata Z ecuaţiei cu diferenţe (4.187), se obţine:

$$(1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n})Y(z) = z^{-\lambda}(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m})U(z), \tag{4.220}$$

de unde rezultă:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-\lambda}(b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m})}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}}\,. \tag{4.221}$$

Comparând funcţia de transfer de mai sus (v. rel. (4.217)) cu funcţia de transfer operaţională (v. rel. (4.210)), se observă că acestea sunt formal asemenea. Prin urmare, funcţia de transfer operaţională se poate obţine din funcţia de transfer z, forma în z^{-1}, prin simpla înlocuire a lui z cu q. Invers, funcţia de transfer z se poate deduce foarte simplu din funcţia de transfer operaţională, înlocuind q cu z.

Exemplul 28

Să se determine funcţia de transfer z exactă pentru ansamblul format dintr-un element integrator şi un element de reţinere de ordinul zero.
Elementul integrator are funcţia de transfer:

$$G(s) = \frac{1}{sT_i}\,.$$

Aplicând relaţia de definiţie a transformatei Z rezultă:

$$G(z)=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2T_i}\right\}=\frac{1}{T_i}\frac{z-1}{z}\frac{zT_e}{(z-1)^2}=\frac{T_e}{T_i}\frac{1}{z-1},\qquad(4.222)$$

respectiv:

$$G(z^{-1})=\frac{T_e}{T_i}\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}.\qquad(4.223)$$

Exemplul 29

Să se deducă funcţia de transfer *z* exactă pentru ansamblul format din elementul de ordinul unu şi elementul de reţinere de ordin zero.
Se porneşte de la funcţia de transfer standard a elementului de ordinul unu:

$$G(s)=\frac{K}{sT+1}=\frac{K\sigma}{s+\sigma}.$$

Se observă că polul continuu al sistemului este $-p_c=-\sigma$. Pentru deducerea funcţia de transfer *z* se aplică definiţia. Se obţine:

$$G(z)=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{K\sigma}{s(s+\sigma)}\right\}.\qquad(4.224)$$

Pentru a se calcula transformata *Z* se efectuează mai întâi descompunerea în fracţii simple a funcţiei din paranteză, care este:

$$\frac{K\sigma}{s(s+\sigma)}=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{s+\sigma},\qquad(4.225)$$

cu coeficienţii:

$$c_1=\left.\frac{K\sigma}{s+\sigma}\right|_{s=0}=K,\quad c_2=\left.\frac{K\sigma}{s}\right|_{s=-\sigma}=-K,\qquad(4.226)$$

deci:

$$\frac{K\sigma}{s(s+\sigma)}=\frac{K}{s}-\frac{K}{s+\sigma}.\qquad(4.227)$$

În continuare vom avea:

$$G(z)=(1-z^{-1})K\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-\sigma T_e}}\right]=K\frac{z-1}{z}\frac{z(z-e^{-\sigma T_e}-z+1)}{(z-1)(z-e^{-\sigma T_e})},\qquad(4.228)$$

de unde, în final, se obţine transformata *Z* exactă a elementului de ordinul unu cu element de reţinere de ordinul zero:

$$G(z)=K\frac{1-e^{-\sigma T_e}}{z-e^{-\sigma T_e}}.\qquad(4.229)$$

Exemplul 30

Să se determine funcţia de transfer *z* exactă pentru ansamblul format din sistemul de ordinul doi cu poli reali şi elementul de reţinere de ordinul zero.
Se presupune că sistemul continuu are funcţia de transfer:

$$G(s) = \frac{Kp_1p_2}{(s+p_1)(s+p_2)}. \tag{4.230}$$

Funcţia de transfer *z* pentru ansamblul menţionat se determină cu ajutorul relaţiei de definiţie:

$$G(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{Kp_1p_2}{s(s+p_1)(s+p_2)}\right\}. \tag{4.231}$$

Pentru evaluarea transformatei *Z*, se va folosi dezvoltarea în fracţii simple:

$$\frac{Kp_1p_2}{s(s+p_1)(s+p_2)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+p_1} + \frac{c_3}{s+p_2}, \tag{4.232}$$

unde:

$$c_1 = \left.\frac{Kp_1p_2}{(s+p_1)(s+p_2)}\right|_{s=0} = K,$$

$$c_2 = \left.\frac{Kp_1p_2}{s(s+p_2)}\right|_{s=-p_1} = K\frac{p_2}{p_1-p_2}, \tag{4.233}$$

$$c_3 = \left.\frac{Kp_1p_2}{s(s+p_1)}\right|_{s=-p_2} = -K\frac{p_1}{p_1-p_2}.$$

Înlocuind coeficienţii şi dezvoltarea în fracţii simple în relaţia (4.231) se obţine succesiv:

$$G(z) = K\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s} + \frac{p_2}{p_1-p_2}\frac{1}{s+p_1} - \frac{p_1}{p_1+p_2}\frac{1}{s+p_2}\right\} =$$

$$= K\frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{z-1} + \frac{1}{p_1-p_2}\left(\frac{p_2z}{z-\mathrm{e}^{-p_1T_e}} - \frac{p_1z}{z-\mathrm{e}^{-p_2T_e}}\right)\right] =$$

$$= \frac{b_1z+b_0}{(z-\mathrm{e}^{-p_1T_e})(z-\mathrm{e}^{-p_2T_e})} = \frac{b_1z+b_0}{(z-p_{d1})(z-p_{d2})} = \frac{b_1z+b_0}{z^2+a_1z+a_0}, \tag{4.234}$$

unde:

$$b_1 = K[1-\mathrm{e}^{-p_1T_e} - \mathrm{e}^{-p_2T_e} + \frac{p_1\mathrm{e}^{-p_1T_e} - p_2\mathrm{e}^{-p_2T_e}}{p_1-p_2}],$$

$$b_0 = K[e^{-(p_1+p_2)T_e} - \frac{p_1e^{-p_1T_e} - p_2e^{-p_2T_e}}{p_1-p_2}],$$

$$a_1 = -(e^{-p_1 T_e} + e^{-p_2 T_e}),\ a_0 = e^{-(p_1+p_2)T_e}. \qquad (4.235)$$

Analizând rezultatele din exemplele prezentate, se remarcă faptul că funcţiile de transfer z obţinute au polii discreţi corelaţi cu polii elementului continuu conform relaţiei:

$$p_{di} = e^{-p_{ci} T_e}. \qquad (4.236)$$

Această corelaţie se menţine oricare ar fi ordinul sistemului, respectiv numărul de poli ai sistemului continuu.
Tabelul 4.4 prezintă transformata Z exactă pentru elementele uzuale de sistem cu element de reţinere de ordinul zero.

Tabelul 4.4

$G(s)$	$G(z)$
$\dfrac{1}{sT_i}$	$\dfrac{b_0}{z-1} = \dfrac{b_0 z^{-1}}{1-z^{-1}},\quad b_0 = \dfrac{T_e}{T_i}$
$\dfrac{K}{sT+1} = \dfrac{K\sigma}{s+\sigma},\ \sigma = \dfrac{1}{T_e}$	$\dfrac{b_0}{z+a_0} = \dfrac{b_0 z^{-1}}{1+a_0 z^{-1}},\quad b_0 = K(1-e^{-\sigma T_e}),\ a_0 = -e^{-\sigma T_e}$
$\dfrac{Kp_1 p_2}{(s+p_1)(s+p_2)}$	$\dfrac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} = \dfrac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}$, $a_1 = -(e^{-p_1 T_e} + e^{-p_2 T_e}),\ a_0 = e^{-(p_1+p_2)T_e}$, $b_1 = 1-(e^{-p_1 T_e} + e^{-p_2 T_e}) + \dfrac{p_1 e^{-p_1 T_e} - p_2 e^{-p_2 T_e}}{p_1 - p_2}$, $b_0 = e^{-(p_1+p_2)T_e} + \dfrac{p_1 e^{-p_1 T_e} - p_2 e^{-p_2 T_e}}{p_1 - p_2}$.
$\dfrac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ $0 \le \zeta < 1$	$\dfrac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z^1 + a_0} = \dfrac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}}$, $A = e^{-\zeta\omega_n T_e},\ B = \cos(\omega_n T_e \sqrt{1-\zeta^2})$, $C = \sin(\omega_n T_e \sqrt{1-\zeta^2}),\ a_1 = -2AB,\ a_2 = A^2$, $b_1 = K[1 - A(B + C\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})]$, $b_0 = K[A^2 - A(B + C\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})]$.

Exemplul 31

Să se determine, pe baza ecuaţiilor cu diferenţe a metodelor numerice de integrare, Euler şi trapezului, funcţiile de transfer z pentru elementul integrator.
Ecuaţiile recurente cu diferenţe care modelează elementul integrator, respectiv operaţia de integrare numerică sunt:
– pentru metoda Euler a dreptunghiului (înapoi) cu latura din *spate* pe curbă (backward rectangular rule) MDS:

$$y[k]=y[k-1]+T_e u[k]\,, \tag{4.237}$$

– pentru metoda Euler a dreptunghiului (înainte) cu latura din *faţă* pe curbă (forward rectangular rule) MDF:

$$y[k]=y[k-1]+T_e u[k-1]\,, \tag{4.238}$$

– pentru metoda trapezului (trapezoid rule) MT:

$$y[k]=y[k-1]+\frac{T_e}{2}(u[k]+u[k-1])\,. \tag{4.239}$$

Aplicând în continuare definiţia transformatei *Z* şi teorema de deplasare în timp, relaţiilor (4.233)÷(4.235) se obţin următoarele expresii:

$$(1-z^{-1})Y(z)=T_e U(z)\,, \tag{4.240}$$

$$(1-z^{-1})Y(z)=T_e z^{-1} U(z)\,, \tag{4.241}$$

$$(1-z^{-1})Y(z)=\frac{T_e}{z}(1+z^{-1})U(z)\,, \tag{4.242}$$

de unde rezultă funcţiile de transfer *z*:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{T_e}{1-z^{-1}}=\frac{zT_e}{z-1}\,, \tag{4.243}$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{T_e z^{-1}}{1-z^{-1}}=\frac{T_e}{z-1}\,, \tag{4.244}$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{T_e}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}=\frac{T_e}{2}\frac{z+1}{z-1}\,. \tag{4.245}$$

4.6.3.2 Calculul analitic aproximativ al funcţiilor de transfer z

În literatură se prezintă diverse modalităţi de calcul analitic aproximativ al funcţiilor de transfer *z*. În cele ce urmează se vor prezenta două metode.

A) Calculul analitic aproximativ bazat pe substituţii algebrice de tipul *s* =*f* (*z*)

Prima metodă se bazează pe unele substituţii algebrice, prin care se înlocuieşte variabila complexă *s* cu o anumită funcţie de variabilă *z*. Relaţiile de schimbare a variabilei *s* se introduc pornind de la metodele de integrare prezentate în secţiunea 4.6.1 şi în exemplul anterior. Având în vedere că funcţia de transfer a unui integrator analogic este $1/s$ şi funcţiile de transfer z ale integratoarelor numerice prezentate mai înainte, rezultă următoarele relaţii de schimbare a variabilei *s*:

$$s\to\frac{z-1}{zT_e}=\frac{1-z^{-1}}{T_e}\,, \tag{4.246}$$

$$s\to\frac{z-1}{T_e}=\frac{1-z^{-1}}{z^{-1}T_e}\,, \tag{4.247}$$

$$s \to \frac{2}{T_e}\frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{T_e}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \tag{4.248}$$

Funcţiile de transfer *z* se calculează cu relaţiile:

$$G_{\text{MDS}}(z) = G(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{zT_e}}, \tag{4.249}$$

$$G_{\text{MDF}}(z) = G(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T_e}}, \tag{4.250}$$

$$G_{\text{MT}}(z) = G(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_e}\frac{z-1}{z+1}}. \tag{4.251}$$

Se remarcă faptul că substituţiile se fac în funcţia de transfer a elementului continuu de sistem $G(s)$, dar procesul discretizat care este astfel modelat conţine totuşi şi elementul de reţinere de ordin zero. Substituţia bazată pe metoda de integrare a trapezului este cunoscută în literatură sub denumirea de *transformată Z biliniară* sau *metoda Tustin*.
Precizia modelelor obţinute prin substituţii algebrice este puternic influenţată de valoarea adoptată a perioadei de eşantionare.

Exemplul 32

Pentru sistemul de ordinul doi cu funcţia de transfer standard

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

având $\omega_n = 10$ rads^{-1}şi $\zeta = 0{,}5$,
să se determine modelele discrete aproximative care rezultă cu metodele de integrare numerică a dreptunghiului înapoi (în spate), a dreptunghiului înainte (în faţă), şi a trapezului şi apoi să se analizeze comparativ în MATLAB precizia modelelor astfel obţinute.
Se adoptă $T_e = (1/\omega_n)/5 = 0{,}02s$.

Rezolvare

Se determină funcţiile de transfer z

a) $$G_{\text{MDS}}(s) = G(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{zT_e}} = \frac{\omega_n^2}{\left(\frac{z-1}{zT_e}\right)^2 + 2\zeta\omega_n\left(\frac{z-1}{zT_e}\right) + \omega_n^2} =$$

$$= \frac{\omega_n^2 T_e^2 z^2}{z^2(1+2\zeta\omega_n T_e + \omega_n^2 T_e^2) - z(2+2\zeta\omega_n T_e) + 1} = \frac{b_2 z^2}{z^2 + a_1 z + a_0},$$

unde

$$b_2 = \omega_n^2 T_e^2 / A,\ a_1 = -2(1+\zeta\omega_n T_e)/A,\ a_0 = 1/A,\ A = 1 + 2\zeta\omega_n T_e + \omega_n^2 T_e^2.$$

b) $$G_{\mathrm{MDF}}(s)=G(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T_e}}=\frac{\omega_n^2}{\left(\dfrac{z-1}{T_e}\right)^2+2\zeta\omega_n\left(\dfrac{z-1}{T_e}\right)+\omega_n^2}=$$

$$=\frac{\omega_n^2T_e^2}{z^2+2(\zeta\omega_nT_e-1)z+1-2\zeta\omega_nT_e+\omega_n^2T_e^2}=\frac{b_0}{z^2+a_1z+a_0},$$

unde

$$b_0=\omega_n^2T_e^2,\ a_1=2(\zeta\omega_nT_e-1),\ a_0=1-2\zeta\omega_nT_e+\omega_n^2T_e^2.$$

c) $$G_{\mathrm{MT}}(s)=G(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_e}\frac{z-1}{z+1}}=\frac{\omega_n^2}{\dfrac{(z-1)^2}{\frac{T_e^2}{4}(z+1)^2}+2\zeta\omega_n\dfrac{z-1}{\frac{T_e}{2}(z+1)}+\omega_n^2}=$$

$$=\frac{\omega_n^2\dfrac{T_e^2}{4}(z+1)^2}{(z-1)^2-2\zeta\omega_n(z-1)(z+1)\dfrac{T_e}{2}+\omega_n^2\dfrac{T_e^2}{4}(z+1)^2},$$

$$G_{\mathrm{MT}}(z)=\frac{\omega_n^2T_e^2(z^2+2z+1)/4}{z^2(1+\zeta\omega_nT_e+\omega_n^2T_e^2/4)+z(\omega_n^2T_e^2/2-2)+1-2\zeta\omega_nT_e+\omega_n^2T_e^2/4},$$

$$G_{\mathrm{MT}}(z)=\frac{b_2z^2+b_1z+b_0}{z^2+a_1z+a_0},$$

unde

$$b_2=\omega_n^2T_e^2/4A,\ b_1=\omega_n^2T_e^2/2A,\ b_0=\omega_n^2T_e^2/4A,$$

$$a_1=(\omega_n^2T_e^2/2-2)/A,\ a_0=(1-2\zeta\omega_nT_e+\omega_n^2T_e^2/4)/A,\ A=1+2\zeta\omega_nT_e+\omega_n^2T_e^2/4.$$

Modelele discretizate sunt evaluate comparativ din punctul de vedere al preciziei folosind programul MATLAB prezentat în continuare.

```
om=10;zita=0.5;
num=om^2;%se introduce numaratorul functiei de transfer G(s)
den=[1 2*zita*om om^2]; %se introduce numitorul functiei de transfer G(s)
Te=1/om/5;
sysc=tf(num,den); %se creaza obiectul cu functia de transfer G(s)
sysd0=c2d(sysc,Te,'zoh'); %se creaza obiectul cu functia de transfer GEx(z) exacta
A1=1+2*zita*om*Te+om^2*Te^2;
numd1=[om^2*Te^2/A1 0 0];
dend1=[1 -2*(1+zita*om*Te)/A1 1/A1];
sysd1=tf(numd1,dend1,Te); %se creaza obiectul cu functia de transfer GMDS(z) obtinuta
%cu metoda Euler a dreptunghiului inapoi
numd2=om^2*Te^2;
dend2=[1 2*(zita*om*Te-1) 1-2*zita*om*Te+om^2*Te^2];
```

```
sysd2=tf(numd2,dend2,Te); %se creaza obiectul cu functia de transfer GMDF(z) obtinuta
%cu metoda Euler a dreptunghiului inainte
A3=1+zita*om*Te+om^2*Te^2/4;
numd3=[om^2*Te^2/4/A3 om^2*Te^2/2/A3 om^2*Te^2/4/A3];
dend3=[1 (om^2*Te^2/2-2)/A3 (1-zita*om*Te+om^2*Te^2/4)/A3]
sysd3=tf(numd3,dend3,Te); %se creaza obiectul cu functia de transfer GMT(z) obtinuta
%cu metoda trapezului
step (sysc,sysd0,sysd1)% se traseaza raspunsul la treapta pentru sistemele continuu,
%discret cu functia de transfer GEx(z) si discret cu functia de transfer GMDS(z)
pause
step (sysc,sysd0,sysd2) )% se traseaza raspunsul la treapta pentru sistemele continuu,
%discret cu functia de transfer GEx(z) si discret cu functia de transfer GMDF(z)
pause
step (sysc,sysd0,sysd3) )% se traseaza raspunsul la treapta pentru sistemele continuu,
%discret cu functia de transfer GEx(z) si discret cu functia de transfer GMT(z)
```

După rularea programului se obţin următoarele funcţii de transfer:

$G(s)=\dfrac{100}{s^2+10s+100}$, pentru sistemul continuu,

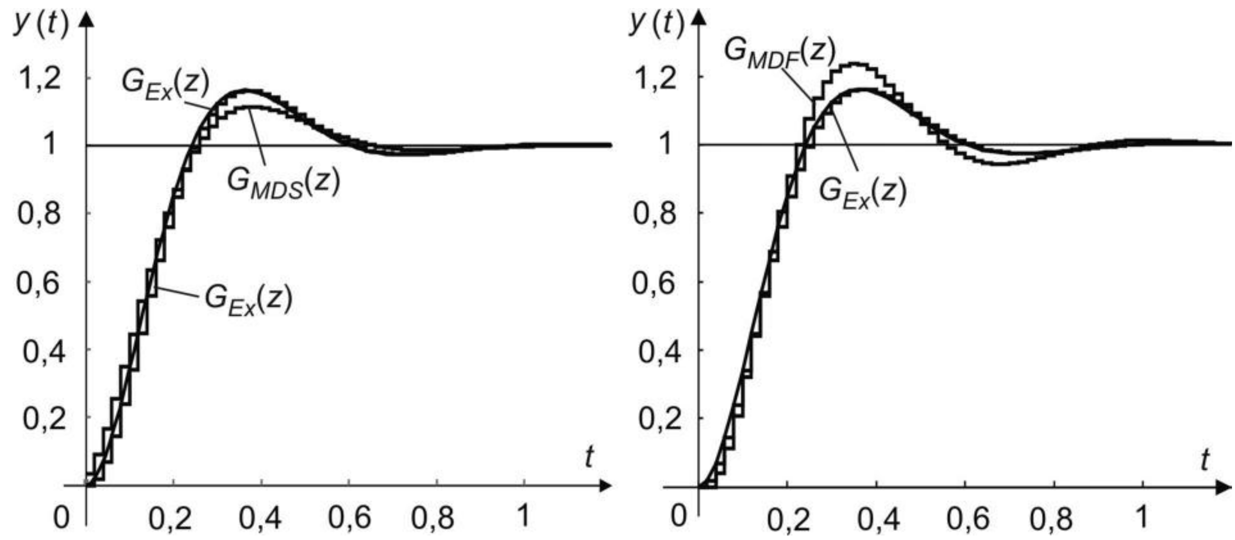
$G_{Ex}(z)=\dfrac{0{,}01867z+0{,}0176}{z^2-1{,}783z+0{,}8187}$, pentru sistemul discret modelat exact cu relaţiile prezentate în Tabelul 4.4 rândul 4,

$G_{\mathrm{MDS}}(z)=\dfrac{0{,}03226}{z^2-1{,}774z+0{,}8065}$, pentru sistemul discret modelat aproximativ cu metoda dreptunghiului înapoi,

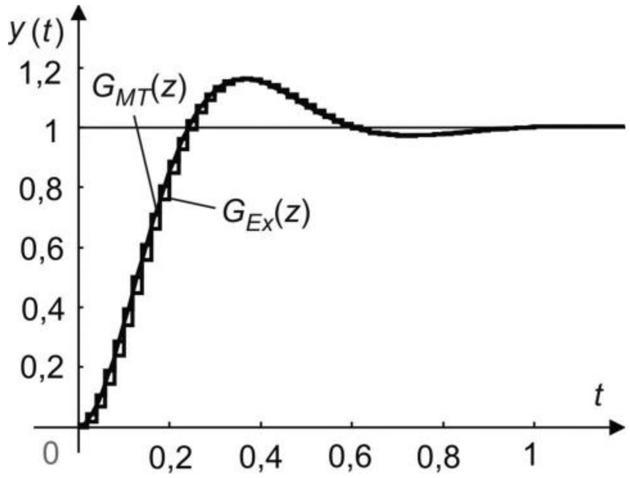
$G_{\mathrm{MDF}}(z)=\dfrac{0{,}04}{z^2-1{,}8z+0{,}84}$, pentru sistemul discret modelat aproximativ cu metoda dreptunghiului înainte,

$G_{\mathrm{MT}}(z)=\dfrac{0{,}009009z^2-0{,}01802z+0{,}009009}{z^2-1{,}78z+0{,}8198}$, pentru sistemul discret modelat aproximativ cu metoda trapezului.

Curbele răspunsurilor la intrare treaptă unitară sunt prezentate în fig. 4.32 a,b,c.



a) b)



c)

Fig. 4.32

B) Calculul analitic aproximativ cu metoda transformatei z care conservă repartiţia poli-zerouri a sistemului continuu

O altă modalitate de calcul aproximativ a transformatei *Z* este metoda transformatei *Z* care conservă repartiţia poli-zerouri a sistemului continuu (*Pole-zero Matched Z Transform*). La transformata *Z* exactă s-a remarcat faptul că polii p_d ai funcţiei de transfer $G(z)$ sunt corelaţi cu polii sistemului continuu, $-p_c$, conform relaţiei (4.232):

$$p_d = \mathrm{e}^{-p_c T_e} .$$

Transformata *Z* cu conservarea repartiţiei poli-zerouri a sistemului continuu presupune că o relaţie similară există şi pentru zerourile finite. Dacă $n > m$, unde n este gradul polinomului de la numitorul lui $G(s)$ iar m este gradul polinomului de la numărător, atunci funcţia de transfer $G(z)$ se completează cu $(n-m)$ factori $(z+1)$ la numărător. Factorul de amplificare K_d al funcţiei de transfer discrete se determină, folosind comportarea în regim staţionar a sistemului continuu respectiv discret, cu relaţia:

$$\lim_{s\to 0}\left\{(s)^{\alpha} G(s)\right\} = \lim_{z\to 1}\left\{\left(\frac{z-1}{zT_e}\right)^{\alpha} G(z)\right\}, \tag{4.252}$$

unde $\alpha = 0$ sau 1, este tipul sistemului determinat de $G(s)$, respectiv de ordinul integratorului care apare în funcţia de transfer a sistemului continuu.

Rezumând, paşii de calcul ai transformatei Z matched sunt:

Pasul 1 Se transformă polii şi zerourile finite conform relaţiei $p_d = \mathrm{e}^{-p_c T_e}$, $z_d = \mathrm{e}^{-z_c T_e}$;

Pasul 2 (opţional) Dacă numărătorul funcţiei de transfer $G(s)$ are gradul mai mic decât cel al numitorului, în funcţia de transfer $G(z)$ se adaugă la numărător factori de forma $(z+1)$;

Pasul 3 Se calculează factorul de amplificare K_d, cu relaţia (4.252).

Exemplul 33

Se dă sistemul continuu cu funcţia de transfer

$$G(s)=K_c\,\frac{s+a}{s+b}\ \text{, cu } a=1, b=10, K_c=10\,.$$

Să se determine transformata Z matched.
Rezolvare
Pasul 1 Având în vedere transformarea din *s* în *z* a polului şi zeroului într-o primî etapă vom avea

$$G(z)=K_d\,\frac{z-\mathrm{e}^{-aT_e}}{z-\mathrm{e}^{-bT_e}}\,.$$

Pasul 2 nu este necesar în acest caz.
Pasul 3 Se calculează factorul de amplificare al funcţiei de transfer $G(z)$ folosind relaţiile succesive ($\alpha=0$):

$$\lim_{s\to 0}\{G(s)\}=\lim_{z\to 1}\{G(z)\},\quad \lim_{s\to 0}\left\{K_c\,\frac{s+a}{s+b}\right\}=\lim_{z\to 1}\left\{K_d\,\frac{z-\mathrm{e}^{-aT_e}}{z-\mathrm{e}^{-bT_e}}\right\},$$

$$K_c\,\frac{a}{b}=K_d\,\frac{1-\mathrm{e}^{-aT_e}}{1-\mathrm{e}^{-bT_e}},K_d=K_c\,\frac{a}{b}\frac{1-\mathrm{e}^{-bT_e}}{1-\mathrm{e}^{-aT_e}}\,.$$

În final se obţine funcţia de transfer z matched cu expresia literală

$$G_{Ma}(z)=K_c\,\frac{a}{b}\frac{1-\mathrm{e}^{-bT_e}}{1-\mathrm{e}^{-aT_e}}\frac{z-\mathrm{e}^{-aT_e}}{z-\mathrm{e}^{-bT_e}}\,.$$

Un program MATLAB simplu care foloseşte datele numerice din enunţ şi perioada de eşantionare $T_e=(1/b)/2=T_{\min}/2=0{,}033\,\mathrm{s}$ furnizează funcţia de transfer z exactă

$$G_{Ex}(z)=10\,\frac{z-0{,}9607}{z-0{,}6065},$$

respectiv funcţia de transfer z matched

$$G_{Ma}(z)=8{,}068\,\frac{z-0{,}9524}{z-0{,}6065}\,.$$

Curbele răspunsurilor la mărime de intrare treaptă unitară a sistemelor discrete modelate cu funcţia de transfer exactă, $G_{Ex}(z)$ şi funcţia de transfer z matched, $G_{Ma}(z)$ sunt prezentate comparativ în fig. 4.33.

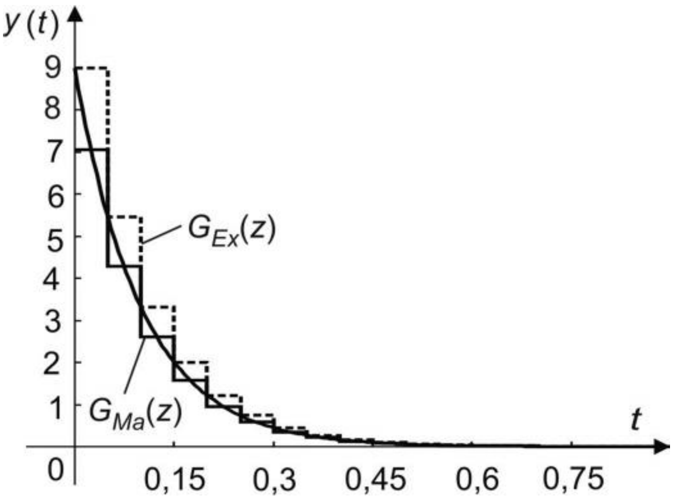


Fig. 4.33

Exemplul 34

Se dă sistemul continuu cu funcţia de transfer

$$G(s) = K_c \frac{s+a}{s(s+b)} \text{ , cu } a = 1, b = 10, K_c = 10 .$$

Să se determine transformata Z matched.

Rezolvare

Paşii 1 şi 2 furnizează funcţia de transfer z cu expresia

$$G(z) = K_d \frac{(z-\mathrm{e}^{-aT_e})(z+1)}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-bT_e})} .$$

Pasul 3 Se calculează factorul de amplificare al funcţiei de transfer $G(z)$ folosind relaţiile succesive ($\alpha = 1$):

$$\lim_{s\to 0}\{sG(s)\} = \lim_{z\to 1}\left\{\frac{z-1}{zT_e}G(z)\right\}, \lim_{s\to 0}\{K_c \frac{s+a}{s+b}\} = \lim_{z\to 1}\left\{\frac{z-1}{zT_e}K_d \frac{(z-\mathrm{e}^{-aT_e})(z+1)}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-bT_e})}\right\}$$

$$K_c \frac{a}{b} = K_d \frac{2}{T_e}\frac{1-\mathrm{e}^{-aT_e}}{1-\mathrm{e}^{-bT_e}},\ K_d = K_c \frac{T_e}{2}\frac{a}{b}\frac{1-\mathrm{e}^{-bT_e}}{1-\mathrm{e}^{-aT_e}} .$$

Funcţia de transfer z matched care se obţine are expresia literală

$$G_{Ma}(z) = K_c T_e \frac{a}{2b}\frac{1-\mathrm{e}^{-bT_e}}{1-\mathrm{e}^{-aT_e}}\frac{(z+1)(z-\mathrm{e}^{-aT_e})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-bT_e})} .$$

Curbele răspunsurilor la mărime de intrare treaptă unitară a sistemelor discrete modelate cu funcţia de transfer exactă, $G_{Ex}(z)$ şi funcţia de transfer z matched, $G_{Ma}(z)$ sunt prezentate comparativ în fig. 4.34.

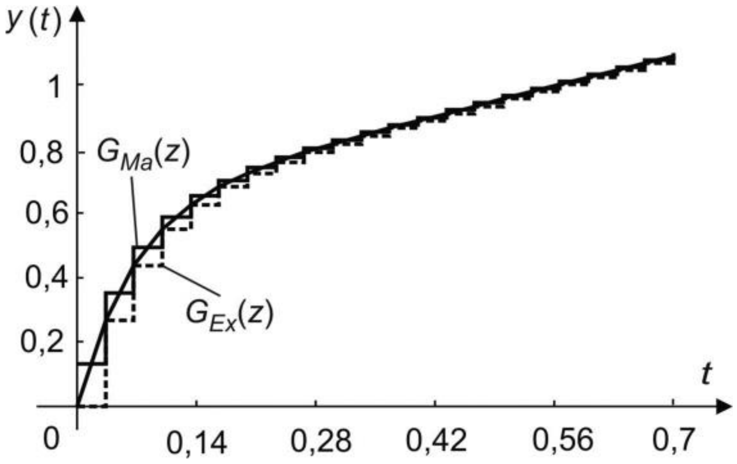


Fig. 4.34

4.6.3.3 Analiza stabilităţii şi a comportării în frecvenţă a sistemelor discretizate cu metodele aproximative ale dreptunghiului şi trapezului

Calculul funcţiilor de transfer z cu schimbările algebrice date de relaţiile 4.246 – 4.248 poate fi considerat ca fiind transformări conforme de la planul s la planul z. Pentru a înţelege mai exact efectul acestor transformări se consideră reprezentările grafice ale acestora.

De exemplu, deoarece axa imaginară a planului s ($s = j\omega$, $\omega \in (-\infty,+\infty)$) reprezintă în cazul sistemelor continue linia de separare a polilor stabili de cei instabili, este util să cunoaştem cum este transformată linia $s = j\omega$ de către cele trei metode şi unde apare semiplanul s stâng (cel stabil) în planul z.

În acest scop scriem cele 3 relaţii menţionate mai înainte ca funcţii $z = f(s)$. Astfel se obţine:

$z = 1 + sT_e$, pentru metoda dreptunghiului înainte, MDF; (4.253)

$z = \dfrac{1}{1 - sT_e}$, pentru metoda dreptunghiului înapoi, MDS; (4.254)

$z = \dfrac{1 + sT_e/2}{1 - sT_e/2}$, pentru metoda trapezului, Tustin (transformata z biliniară). (4.255)

Dacă înlocuim $s = j\omega$ în relaţiile de mai sus obţinem limitele regiunilor din planul z care corespund porţiunii stabile din planul s (semiplanul complex s-stâng). Astfel, în cazul metodei MDF, regiunea de stabilitate din planul z este la stânga dreptei verticale cu ecuaţia (vezi figura 4.35a):

$z = 1 + j\omega T_e$, $\omega = (-\infty, +\infty)$.

De aici se remarcă faptul că prin aplicarea metodei dreptunghiului înainte (cu substituţia $s = (z-1)/T_e$) un sistem stabil (cu poli cu parte reală negativă) poate fi transformat într-un sistem discret instabil (cu polii plasaţi în afara cercului de rază unitară).

Substituţia corespunzătoare metodei dreptunghiului înapoi transformă semiplanul complex s stâng în planul z în interiorul unui cerc cu centrul $(1/2, 0)$ şi rază $R = 1/2$

(vezi figura 4.35b). Pentru a demonstra acest lucru în relaţia 4.254 adunăm şi scădem $1/2$ în membrul drept şi astfel obţinem:

$$z = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{1 - sT_e} - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{2 - 1 + sT_e}{1 - sT_e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1 + sT_e}{1 - sT_e},$$

$$z - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{1 + sT_e}{1 - sT_e}.$$

Înlocuind acum $s = j\omega$ în relaţia de mai sus, se poate demonstra uşor că:

$$\left|\frac{1 + j\omega T_e}{1 - j\omega T_e}\right| = 1,$$

oricare ar fi $\omega \in (-\infty, +\infty)$ şi prin urmare vom avea relaţia:

$$\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2},$$

care corespunde în planul z unui cerc de rază $R = 1/2$ cu centrul în punctul $(1/2, 0)$.

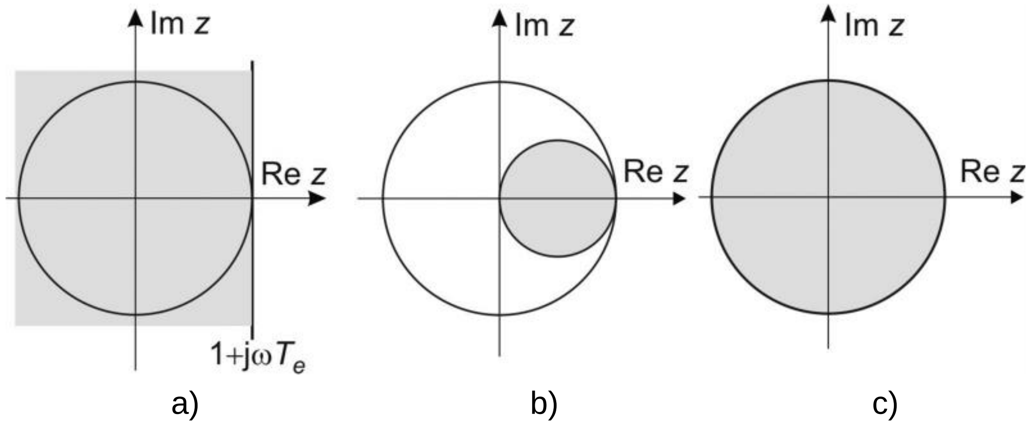


Fig. 4.35

În final remarcăm că transformata z biliniară (metoda trapezului) transformă regiunea stabilă din planul s exact în regiunea stabilă din planul z (interiorul cercului de rază unitară), aşa cum se prezintă în fig. 4.35c.

O altă cauză care produce modificări ale comportării în frecvenţă a sistemelor discrete faţă de cele continue este determinată de comprimarea spectrului de frecvenţă care se produce la sistemele discretizate cu metoda trapezului (transformatei Z biliniare). Pentru a clarifica acest aspect general considerăm cazul simplu al unui element continuu de ordinul unu, cu funcţia de transfer:

$$G_c(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}, \qquad (4.256)$$

care este practic folosit ca un filtru trece-jos cu pulsaţia de tăiere ω_c. Conform definiţiei folosite la filtre, pulsaţia de tăiere este pulsaţia pentru care pătratul modulului funcţiei de frecvenţă (direct proporţional cu puterea) este 1/2 , deci:

$\left| G_c(j\omega) \right| = \frac{1}{2}$.

Funcţia de transfer z a elementului T1, calculată cu metoda transformatei Z biliniare este:

$$G_{MT}(z) = G_c(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_e}\frac{z-1}{z+1}} = \frac{\omega_c}{\frac{2}{T_e}\frac{z-1}{z+1}+\omega_c} = \frac{\omega_c T_e(z+1)}{(2+\omega_c T_e)z+(\omega_c T_e-2)}. \tag{4.257}$$

Funcţia de frecvenţă a sistemului discretizat cu metoda trapezului este:

$$G_{MT}(e^{j\omega_d T_e}) = G_c\left(\frac{2}{T_e}\frac{e^{j\omega_d T_e}-1}{e^{j\omega_d T_e}+1}\right) = G_c\left(\frac{2}{T_e}\frac{e^{\frac{j\omega_d T_e}{2}}-e^{-\frac{j\omega_d T_e}{2}}}{e^{\frac{j\omega_d T_e}{2}}+e^{-\frac{j\omega_d T_e}{2}}}\right)$$

$$= G_c\left(j\frac{2}{T_e}\operatorname{tg}\frac{\omega_d T_e}{2}\right) = G_c(j\omega_c), \tag{4.258}$$

unde

$$\omega_c = \frac{2}{T_e}\operatorname{tg}\frac{\omega_d T_e}{2}. \tag{4.259}$$

Relaţia de mai sus furnizează în plus o legătură directă între funcţiile de frecvenţă ale sistemului continuu, $G_c(j\omega_c)$, şi a celui discretizat cu metoda transformatei Z biliniare, $G_{MT}(e^{j\omega_d T_e})$.
Din funcţiile de frecvenţă rezultă, de asemenea, că modulul răspunsului în frecvenţă al sistemului continuu la pulsaţia ω_c este egal cu cel al sistemului discretizat de la pulsaţia

$$\omega_d = \frac{2}{T_e}\operatorname{arctg}\frac{\omega_c T_e}{2}. \tag{4.260}$$

Fenomenul cunoscut în literatura de limbă engleză sub denumirea de „warping” este prezentat în fig. 4.36 a, b, c. Fig. 4.36a prezintă funcţia $\omega_d = f(\omega_c)$. De aici se poate vedea că pentru valori mici ale lui ω_c, practic $\omega_d \cong \omega_c$, dar la valori mari ale pulsaţiei sistemului continuu pulsaţia discretă este limitată la valoarea π/T_e. Din acest motiv caracteristica modulului sistemului discret se va anula la valoarea π/T_e, deci mult mai rapid decât caracteristica modulului sistemului continuu, care tinde asimptotic spre zero când $\omega_c \to \infty$ (vezi fig. 4.36 b şi c). În fig. 4.36 b şi c se prezintă caracteristicile modulului pentru sistemul continuu cu funcţia de transfer:

a) cu valoarea $\omega_c = 100$,
b) cu $T_e = \frac{\pi}{\omega_c}\frac{1}{10} = \frac{\pi}{1000}$.

În acest fel pulsaţia maximă a sistemului discretizat cu metoda trapezului va fi:

$$\omega_{d\,\max} = \frac{\pi}{T_e} = 10\omega_c = 1000\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Ca urmare a comprimării spectrului discret, deoarece $\pi/T_e = \omega_e/2$, rezultă că la sistemele discretizate cu metoda trapezului nu există pericolul de apariţie a fenomenului de aliasing.

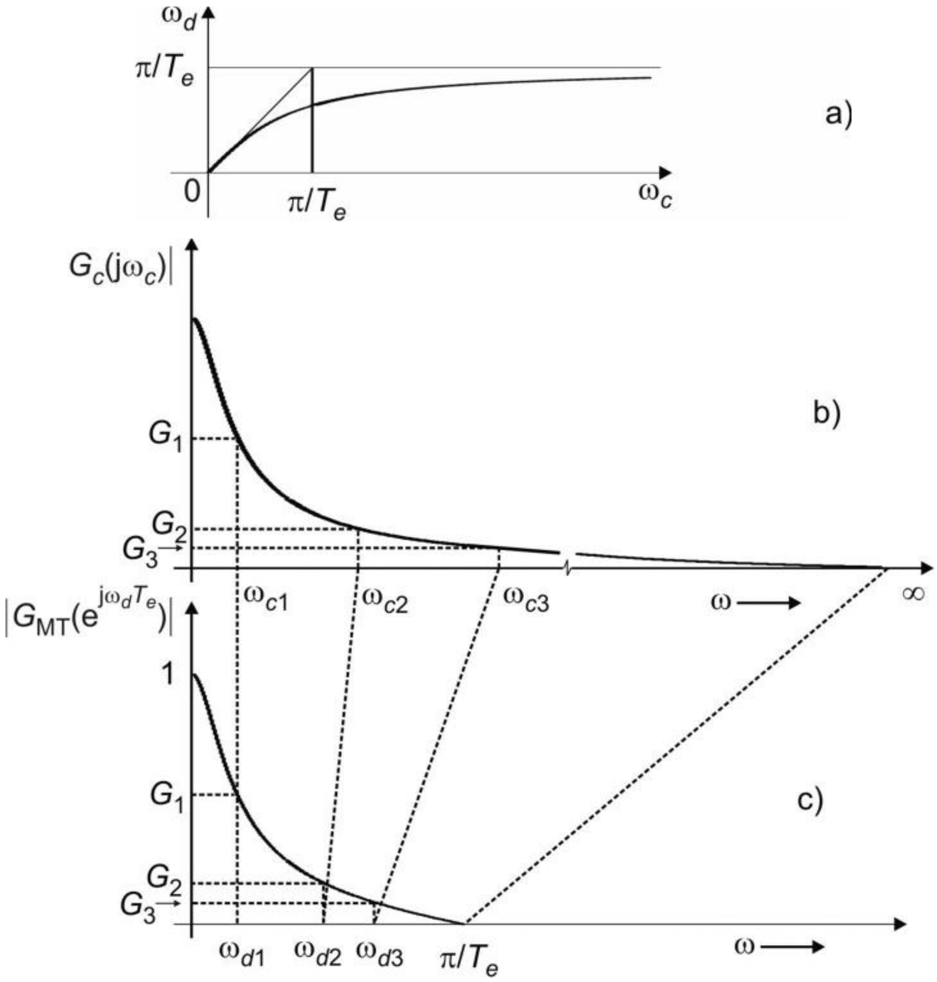


Fig. 4.36

Fenomenul „warping” are însă efecte defavorabile în cazul filtrelor numerice obţinute prin discretizare cu metoda TZB din filtrele continue, deoarece în urma discretizării se modifică caracteristicile modulului (aşa cum se vede din fig. 4.36 b şi c). Pentru a evita acest fenomen pentru anumite valori (critice) ale frecvenţei se utilizează procedeul numit de „prewarping” în care pulsaţia critică, de exemplu ω_i, este înlocuită cu pulsaţia:

$$\omega_i' = \frac{2}{T_e}\,\text{tg}\,\frac{\omega_i T_e}{2}.$$

Funcţia de transfer z modificată (prewarped) la pulsaţia critică ω_i se calculează cu relaţia:

$$G_p(z) = G_c(s)\Big|_{s=\frac{1}{\mathrm{tg}(\omega_i T_e/2)}\frac{T_e}{2}\frac{z-1}{z+1}} \cdot \tag{4.261}$$

4.6.4 Scheme pentru modelarea sistemelor discrete. Funcţii de transfer *z* echivalente

Ca şi la sistemele continue, analiza sistemelor de reglare compuse din mai multe subsisteme se face cu ajutorul unor scheme grafice care pun în evidenţă conexiunile existente între aceste elemente şi sensul de transmitere a semnalelor. Faţă de sistemele continue, în cazul sistemelor discrete apare suplimentar unul sau mai multe elemente de eşantionare ideală.
Abordările obţinute, utilizate în reprezentarea grafică a sistemelor discrete cu mai multe elemente sunt:
– schemele bloc-funcţionale;
– grafurile de semnal sau de fluenţă.

4.6.4.1 Funcţii de transfer z echivalente

Trebuie remarcat, de la început, că nu există reguli general valabile, ca la sistemele continue, care să permită reducerea rapidă a schemelor-bloc complexe cu funcţii de transfer *z*.
În mod obişnuit pentru reducerea schemelor-bloc complexe se apelează la algebra specifică acestor scheme, scriind relaţii care există între semnalele de ieşire şi intrare precum şi între diverse semnale intermediare. Se poate sublinia faptul că acest mod de abordare se aplică schemelor-bloc cu funcţii de transfer s, obţinându-se astfel relaţii în care apar simultan semnale continue şi eşantionate, fiind posibil ca acelaşi semnal să apară simultan în formele continuă şi eşantionată.
Modul concret de lucru folosit pentru deducerea unor funcţii de transfer *z* echivalente va fi ilustrat pentru conexiunile serie (cascadă) şi cu reacţie.

Conexiune în serie (cascadă)

Există două situaţii posibile de conectare a elementelor continue, cazuri evidenţiate de schemele – bloc din figurile 4.37a şi 4.37b.

a) Elementele continue conectate în serie cu eşantionor intercalat

Se menţionează că toate eşantionoarele au aceeaşi frecvenţă de comutare, $f_e = 1/T_e$.

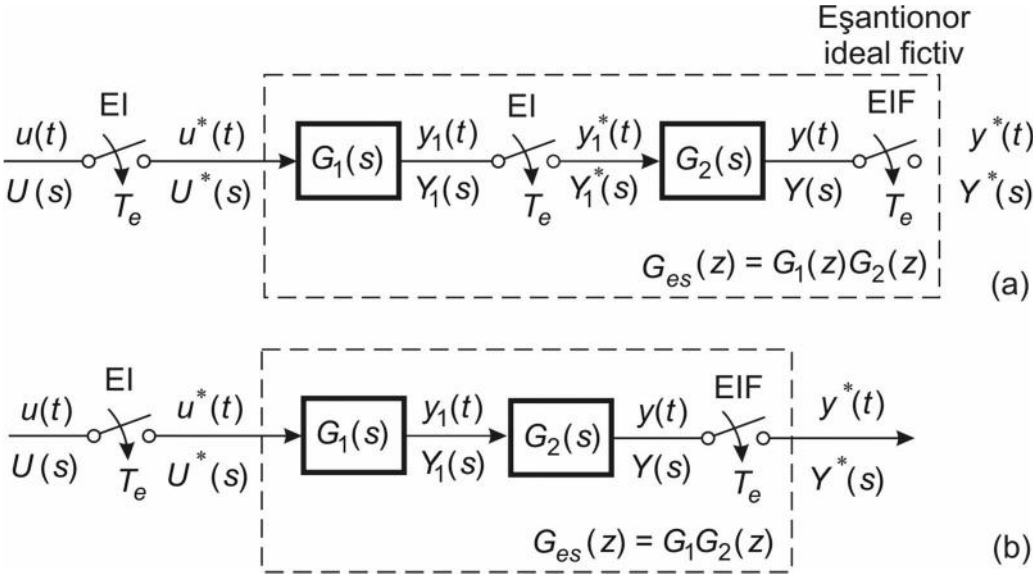


Fig. 4.37

Relaţiile algebrice dintre semnale sunt într-o primă etapă:

$$Y(s) = G_2(s)Y_1^*(s) \text{ şi } Y_1(s) = G_1(s)U^*(s). \tag{4.262}$$

Aplicând operatorul de eşantionare acestor relaţii se obţine în continuare:

$$Y^*(s) = G_2^*(s)Y_1^*(s) \text{ şi } Y_1^*(s) = G_1^*(s)U^*(s), \tag{4.263}$$

respectiv:

$$Y^*(s) = G_2^*(s)G_1^*(s)U^*(s), \tag{4.264}$$

de unde, având în vedere definiţia transformatei Z, rezultă:

$$G_{es}(z) = \left.\frac{Y^*(s)}{U^*(s)}\right|_{s=\frac{1}{T_e}\ln z} = \left.G_1^*(s)G_2^*(s)\right|_{s=\frac{1}{T_e}\ln z} = G_1(z)G_2(z).$$

În concluzie funcţia de transfer z echivalentă a două elemente continue conectate în serie cu eşantionor ideal între ele este:

$$G_{es}(z) = G_1(z)G_2(z), \tag{4.265}$$

unde:

$$G_1(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)\} \text{ şi } G_2(z) = \mathcal{Z}\{G_2(s)\}.$$

b) Elemente continue conectate direct în serie

Din schema bloc prezentată în figura 4.37b se poate scrie mai întâi relaţia:

$$Y(s) = G_1(s)G_2(s)U^*(s), \tag{4.266}$$

care, după aplicarea operatorului de eşantionare, devine:

$$Y^*(s) = [G_1(s)G_2(s)]^*U^*(s). \tag{4.267}$$

În final, având în vedere definiţia transformatei Z, rezultă:

$$G_{es}(z) = G_1G_2(z), \tag{4.268}$$

unde:

$$G_1G_2(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\}. \tag{4.269}$$

Se poate face următoarea remarcă importantă:

$$G_1(z)G_2(z) \neq G_1G_2(z), \tag{4.270}$$

respectiv:

$$\mathcal{Z}\{G_1(s)]\mathcal{Z}[G_2(s)\} \neq \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\}. \tag{4.271}$$

Proprietăţile de bază ale operatorului de eşantionare

1) $[U_1(s)+U_2(s)]^* = U_1^*(s)+U_2^*(s)$, (4.272)

2) $(U^*(s))^* = U^*(s)$, (4.273)

3) $[G(s)U^*(s)]^* = G^*(s)U^*(s)$, (4.274)

4) $[G(s)H(s)]^* \neq G^*(s)H^*(s)$. (4.275)

Exemplul 35

Se consideră funcţiile de transfer s $G_1(s) = \dfrac{1}{s}$ şi $G_2(s) = \dfrac{1}{s+1}$. Să cere să se calculeze $G_1(z)G_2(z)$ şi $G_1G_2(z)$.

Avem:

$$G_1(z) = \mathcal{Z}\{1/s\} = \frac{z}{z-1},$$

$$G_2(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = \frac{z}{z-e^{-T_e}},$$

deci:

$$G_1(z)G_2(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-T_e})}.$$

Pentru a se calcula funcţia de transfer $G_1G_2(z)$, se determină mai întâi dezvoltarea în fracţii simple:

$$G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1},$$

de unde se obţine:

$$\mathcal{Z}[G_1(s)G_2(s)] = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_e}} = \frac{z(1-e^{-T_e})}{(z-1)(z-e^{-T_e})}.$$

Rezultă că:

$$G_1(z)G_2(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-T_e})} \neq \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\} = \frac{z(1-e^{-T_e})}{(z-1)(z-e^{-T_e})}.$$

Conexiunea cu reacţie

Se consideră sistemul discret în circuit închis cu eşantionarea erorii, prezentat în figura 4.38a. Remarcăm faptul că schema cu eşantionare a erorii din figura 4.38a este echivalentă funcţional în zona sumatorului cu schema cu două eşantionoare ideale plasate ca în figura 4.38b.

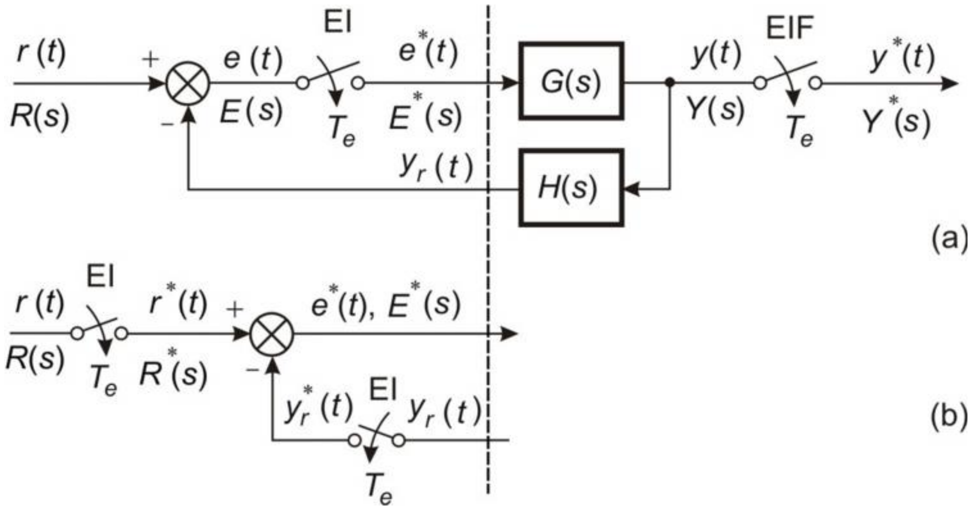


Fig. 4.38

Pentru deducerea funcţiei de transfer echivalente a conexiunii cu reacţie se scriu mai întâi relaţiile algebrice care corelează semnalele din schema bloc. Astfel avem:

$$Y(s) = G(s)E^*(s), \tag{4.276}$$

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s). \tag{4.277}$$

Substituind $Y(s)$ din relaţia (4.276) în expresia (4.277) se obţine relaţia:

$$E(s) = R(s) - G(s)H(s)E^*(s). \tag{4.278}$$

care după aplicarea operatorului de eşantionare devine:

$$E^*(s) = R^*(s) - [G(s)H(s)E^*(s)]^*, \tag{4.279}$$

respectiv:

$$E^*(s) = R^*(s) - [G(s)H(s)]^* E^*(s) = R^*(s) - GH^*(s)E^*(s), \tag{4.280}$$

de unde se obţine transformata Laplace eşantionată a erorii:

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1+GH^*(s)}. \tag{4.281}$$

Substituţia expresiei (4.281) în relaţia (4.276) furnizează transformata Laplace a semnalului de ieşire în raport cu semnalul eşantionat de intrare:

$$Y(s)=\frac{G(s)}{1+GH^*(s)}R^*(s)\,, \tag{4.282}$$

din care, după aplicarea operatorului de eşantionare, rezultă:

$$Y^*(s)=\frac{G^*(s)}{1+GH^*(s)}R^*(s)\,, \tag{4.283}$$

de unde, cu schimbarea de variabilă $s=\frac{1}{T_e}\ln z$, se obţine:

$$Y(z)=\frac{G(z)}{1+GH(z)}R(z)\,. \tag{4.284}$$

În final rezultă funcţia de transfer z a sistemului cu reacţie negativă neunitară, cu eşantionarea erorii, exprimată conform relaţiei:

$$G_{er}(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{G(z)}{1+GH(z)}\,. \tag{4.285}$$

Sistemele numerice de reglare au regulatorul realizat sub formă numerică (v. fig. 4.1). Schema bloc cu funcţii de transfer a unui astfel de sistem discret de de reglare, este prezentată în figura 4.39.

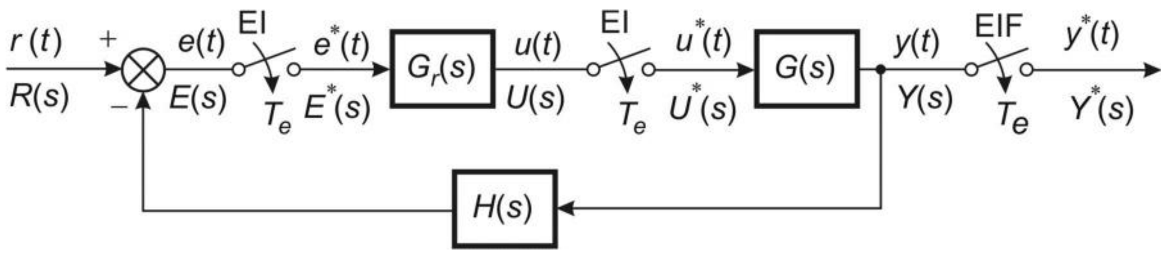


Fig. 4.39

Pentru a se deduce funcţia de transfer z echivalentă se scriu, într-o primă etapă, relaţiile pentru transformatele Laplace ale semnalelor continue şi eşantionate din schema bloc:

$$Y(s)=G(s)U^*(s)\,, \tag{4.286}$$

$$E(s)=R(s)-GH(s)U^*(s)\,, \tag{4.287}$$

$$U(s)=G_r(s)E^*(s)\,. \tag{4.288}$$

Se aplică apoi operatorul de eşantionare relaţiei (4.288):

$$U^*(s)=G_r^*(s)E^*(s)\,, \tag{4.289}$$

şi se înlocuieşte rezultat obţinut în relaţia (4.287). Astfel se obţine:

$$E(s)=R(s)-GH(s)\,G_r^*(s)E^*(s)\,. \tag{4.290}$$

În continuare se aplică operatorul de eşantionare relaţiei obţinute mai sus:

$$E^*(s) = R^*(s) - GH^*(s)G_r^*(s)E^*(s)\,, \tag{4.291}$$

şi se rezolvă ecuaţia în raport cu $E^*(s)$. Se obţine:

$$E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + G_r^*(s)\,GH^*(s)}\,. \tag{4.292}$$

Se înlocuieşte acum $E^*(s)$ din expresia (4.292) în ecuaţia (4.289) şi apoi se introduce $U^*(s)$ astfel obţinut în relaţia (4.286) rezultând astfel:

$$Y(s) = G(s)G_r^*(s)E^*(s) = \frac{G(s)G_r^*(s)}{1 + G_r^*(s)\,GH^*(s)}R^*(s)\,. \tag{4.293}$$

În final, aplicând operatorul de eşantionare relaţiei (4.293), rezultă:

$$Y^*(s) = \frac{G_r^*(s)G^*(s)}{1 + G_r^*(s)GH^*(s)}R^*(s)\,, \tag{4.294}$$

de unde, cu substituţia $s = \frac{1}{T_e}\ln z$, se obţine:

$$Y(z) = \frac{G_r(z)\,G(z)}{1 + G_r(z)GH(z)}R(z)\,. \tag{4.295}$$

Prin urmare, funcţia de transfer *z* echivalentă pentru sistemul discret cu schema-bloc din figura 4.39 va fi:

$$G_0(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{G_r(z)G(z)}{1 + G_r(z)GH(z)}\,. \tag{4.296}$$

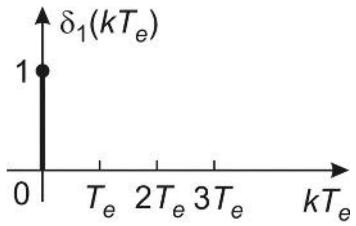
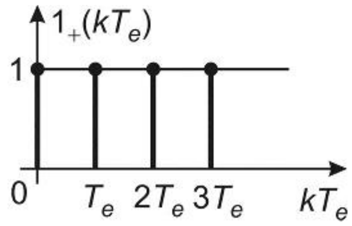
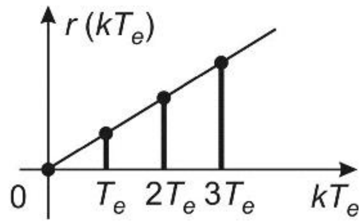
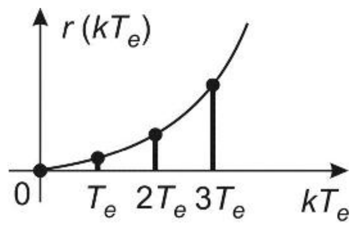
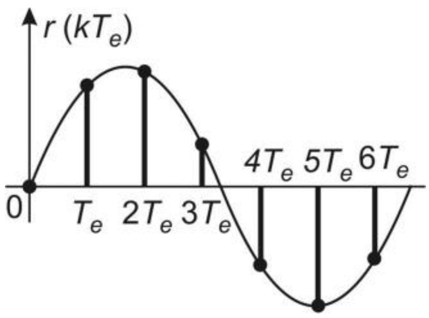
Din exemplul rezolvat mai înainte sunt evidente dificultăţile care apar la deducerea funcţiilor de transfer *z* echivalente pentru sistemele discrete cu mai multe eşantionoare ideale. O abordare sistematică a problemei de reducere a schemelor-bloc ale sistemelor discrete cu mai multe eşantionoare are la bază grafurile de fluenţă. Metoda este însă complicată şi laborioasă şi depăşeşte nivelul prezentării de faţă.

4.7 ANALIZA RĂSPUNSULUI ÎN TIMP AL SISTEMELOR DISCRETE

Analog analizei sistemelor continue, studiul răspunsului tranzitoriu al sistemelor cu eşantionare este foarte important atât din punctul de vedere al performanţelor staţionare, cât şi din cel al performanţelor tranzitorii. Semnalele tipice de test oferă o bază comună pentru comparaţia performanţelor realizate de sistemele de reglare în situaţii diverse.

Semnalele tipice de test utilizate în analiza sistemelor discrete de reglare sunt prezentate în tabelul 4.5.

Tabelul .4.5

Nr. crt.	Denumire semnal	Descrierea în timp a semnalului $r(t)$ Transformata Z a semnalului $r(t)$	Forma de variaţie în timp
1.	Impuls unitar	$r(kT_e)=\delta_1(kT_e)=\begin{cases}1, \text{pentru } k=0,\\ 0, \text{pentru } k\neq 0,\end{cases}$ $R(z)=1,$	
2.	Treaptă unitară	$r(kT_e)=1_+(kT_e)=\begin{cases}1, \text{pentru } k\geq 0,\\ 0, \text{pentru } k< 0,\end{cases}$ $R(z)=\dfrac{z}{z-1},$	
3.	Rampă unitară	$r(kT_e)=\begin{cases}kT_e, \text{pentru } k\geq 0,\\ 0, \quad \text{pentru } k< 0,\end{cases}$ $R(z)=\dfrac{zT_e}{(z-1)^2},$	
4.	Parabolă unitară	$r(kT_e)=\begin{cases}\dfrac{(kT_e)^2}{2}, \text{ pentru } k\geq 0,\\ 0, \quad \text{pentru } k< 0,\end{cases}$ $R(z)=\dfrac{T_e{}^2 z(z+1)}{2(z-1)^3},$	
5.	Funcţia sinus	$r(kT_e)=\begin{cases}\sin\omega kT_e, \text{ pentru } k\geq 0,\\ 0, \quad \text{pentru } k< 0,\end{cases}$ $R(z)=\dfrac{z\sin\omega T_e}{z^2-2z\cos\omega T_e+1}.$	

Observaţie. Notaţia cu $r(kT_e)$ este folosită frecvent în literatura de specialitate pentru semnalele de intrare (de referinţă) ale sistemelor cu reacţie (în circuit închis).
Prin utilizarea semnalelor tipice, care sunt funcţii simple de timp, se simplifică considerabil analiza teoretică şi experimentală a sistemelor de reglare.

4.7.1 Calculul analitic al răspunsului în timp pe baza funcţiei de transfer *z*

Se consideră sistemul de reglare discret cu funcţia de transfer $G(z)$, la intrarea căruia se aplică un semnal cu transformata *Z*, $R(z)$.
Răspunsul în timp al sistemului (mărimea de ieşire), în ipoteza unor condiţii iniţiale nule, se calculează cu transformata *Z* inversă:

$$y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)R(z)\} = y_p[k] + y_t[k], \tag{4.297}$$

unde $y_t[k]$ reprezintă răspunsul de regim tranzitoriu, iar $y_p[k]$ constituie răspunsul de regim permanent (staţionar) al sistemului. Componenta corespunzătoare răspunsului de regim tranzitoriu este determinată exclusiv de polii funcţiei de transfer *z*, iar răspunsul de regim permanent al sistemelor stabile depinde numai de semnalul de intrare.
Calculul analitic al transformatei *Z* inverse se poate realiza cu metoda formulei de inversiune (metoda reziduurilor) sau cu metoda descompunerii în fracţii simple (v. §4.4.6.1 şi §4.4.6.2). Se reaminteşte că dacă transformata *Z* a mărimii de ieşire este o funcţie raţională de forma:

$$Y(z) = G(z)R(z) = \frac{B(z)}{\prod_{i=1}^{L}(z - p_i)}, \tag{4.298}$$

răspunsul în timp, evaluat cu metoda reziduurilor, se calculează cu relaţia:

$$y[k] = y(kT_e) = \sum_{i=1}^{L} r_i[k], \tag{4.299}$$

unde r_i se calculează cu relaţia:

$$r_i[k] = \left[(z - p_i)\frac{B(z)z^{k-1}}{\prod_{i=1}^{L}(z - p_i)}\right]_{z=p_i}. \tag{4.300}$$

Ordinul maxim, L, al polinomului de la numitorul funcţiei $Y(z)$ este egal cu suma ordinelor maxime ale polinoamelor de la numitorul funcţiilor $G(z)$ şi $R(z)$.
Răspunsul sistemului discret cu funcţia de transfer $G(z)$ la o mărime de intrare impuls Dirac sau impuls unitar este funcţia pondere sau răspunsul la impuls:

$$g[k] = g(kT_e) = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\}. \tag{4.301}$$

Având în vedere produsul de convoluţie şi proprietăţile acestuia, răspunsul pondere poate fi utilizat pentru calculul ieşirii sistemului când la intrare se aplică o mărime de intrare oarecare $r(t)$, folosind relaţia:

$$y[k] = y_f[k] = \sum_{i=1}^{k} g[i]r[k-i], \tag{4.302}$$

unde, după cum se cunoaşte, $y_f[k]$ reprezintă răspunsul forţat al sistemului iar i este o variabilă auxiliară cu valori întregi pozitive.

4.7.2 Răspunsul sistemului discret de ordinul unu

Se consideră sistemul de ordinul unu continuu care are funcţia de transfer standard:

$$G(s) = \frac{1}{sT+1}.$$

Aşa cum s-a arătat (v. rel. (4.229)) funcţia de transfer z a ansamblului format dintr-un sistem de ordinul unu şi un element de reţinere de ordinul zero, este:

$$G(z) = \frac{b_0}{z - p_d},$$

unde:

$$p_d = e^{-T_e/T} \text{ şi } b_0 = 1 - p_d = 1 - e^{-T_e/T}.$$

4.7.2.1 Răspunsul la impuls unitar

Răspunsul la impuls unitar se calculează cu relaţia:

$$y[k] = g[k] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{b_0}{z - p_d}\right\} = r\ ,$$

unde reziduul r se determină cu expresia:

$$r = (z - p_d)\left.\frac{b_0 z^{k-1}}{z - p_d}\right|_{z = p_d} = b_0 p_d^{k-1}.$$

Astfel, se obţine:

$$g[k] = g(kT_e) = b_0 p_d^{k-1} = (1 - p_d)p_d^{k-1},\ k \geq 1, \tag{4.303}$$

Observaţie Dacă $\text{grad}\,B(z) < \text{grad}\,A(z)$, unde $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$, răspunsul sistemelor discrete este egal cu zero în decursul primei perioade de eşantionare (deci pentru $k = 0$).
Dacă însă $\text{grad}\,B(z) = \text{grad}\,A(z)$ atunci este posibil ca răspunsul în timp al sistemului discret, pentru $k = 0$, să fie diferit de zero.
Răspunsul pondere calculat cu relaţia (4.303), pentru $T = 1s$ şi $T_e = T/5$, este prezentat grafic în figura 4.40a.

4.7.2.2 Răspunsul la treaptă unitară

Având în vedere că transformata Z a semnalului treaptă este:

$$R(z) = \frac{z}{z-1},$$

rezultă că transformata Z a mărimii de ieşire va fi în acest caz:

$$Y(z) = G(z)R(z) = \frac{b_0 z}{(z-1)(z-p_d)}.$$

Răspunsul indicial se determină cu metoda reziduurilor, fiind:

$$y[k] = g_1[k] = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{b_0 z \cdot z^{k-1}}{(z-1)(z-p_d)}\right\} = r_1 + r_2,$$

unde:

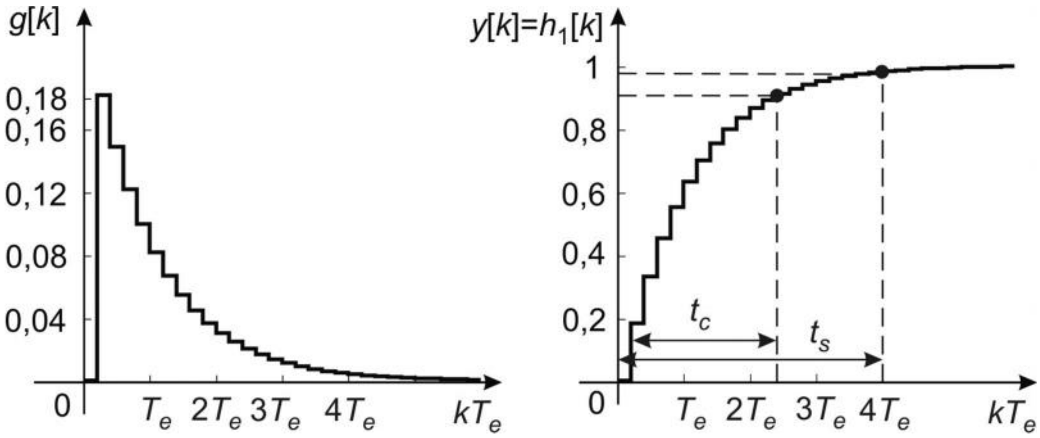
$$r_1 = (z-1)Y(z)\Big|_{z=1} = \frac{b_0 z^k}{z-p_d}\Bigg|_{z=1} = \frac{b_0 \cdot 1}{1-p_d} = \frac{1-p_d}{1-p_d} = 1,$$

$$r_2 = \frac{b_0 z^k}{z-1}\Bigg|_{z=p_d} = \frac{(1-p_d)p_d^k}{p_d-1} = -p_d^k,$$

deci:

$$y[k] = g_1[k] = 1 - p_d^k = 1 - e^{-kT_e/T}. \qquad (4.304)$$

În cadrul răspunsului (v. fig. 4.40b) se pot pune în evidenţă cele două componente, staţionară $y_p[k] = 1$, determinată de mărimea de intrare (treaptă unitară) şi tranzitorie $y_t[k] = -p_d^k = -\exp[kT_e/T]$, determinată de sistemul, respectiv de polul funcţiei de transfer *z*. Din relaţia răspunsului se constată că $y[0] = 0$ şi $y[k] = 1$, pentru $k \to \infty$.



a) b)

Fig. 4.40

4.7.2.3 Răspunsul la rampă unitară

Transformata Z a semnalului rampă unitară este:

$$R(z) = \frac{T_e z}{(z-1)^2},$$

deci transformata Z a ieşirii va fi în acest caz:

$$Y(z)=\frac{b_0T_ez}{(z-1)^2(z-p_d)}.$$

Pentru calculul răspunsului în timp se va utiliza, de această dată, dezvoltarea în fracţii simple a funcţiei complexe:

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{b_0T_e}{(z-1)^2(z-p_d)}=\frac{c_1}{(z-1)^2}+\frac{c_2}{z-1}+\frac{c_3}{z-p_d}.$$

Coeficienţii dezvoltării în fracţii simple vor fi:

$$c_1=(z-1)^2\left.\frac{b_0T_e}{(z-1)^2(z-p_d)}\right|_{z=1}=\frac{b_0T_e}{1-p_d}$$

$$c_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{b_0T_e}{z-p_d}\right]_{z=1}=b_0T_e\left.\frac{-1}{(z-p_d)^2}\right|_{z=1}=-\frac{b_0T_e}{(1-p_d)^2},$$

$$c_3=(z-p_d)\left.\frac{b_0T_e}{(z-1)^2(z-p_d)}\right|_{z=p_d}=\frac{b_0T_e}{(p_d-1)^2},$$

deci, dezvoltarea în fracţii simple va fi:

$$Y(z)=\frac{1-p_d}{1-p_d}\left[\frac{zT_e}{(z-1)^2}-\frac{1}{1-p_d}\frac{zT_e}{z-1}-\frac{1}{p_d-1}\frac{zT_e}{z-p_d}\right],$$

de unde, după aplicarea transformatei Z inverse, rezultă:

$$y[k]=y(kT_e)=kT_e-\frac{T_e}{1-p_d}+\frac{T_e}{1-p_d}p_d^k=kT_e-\frac{T_e}{1-p_d}(1-e^{-kT_e/T}).\qquad(4.305)$$

4.7.3 Răspunsul sistemului discret de ordinul doi

Pentru calculul analitic se va folosi funcţia de transfer z cu expresia:

$$G(z)=\frac{K(z-z_1)}{(z-p_1)(z-p_2)},\qquad(4.306)$$

unde $p_{1,2}$ sunt numere complex conjugate. Polii discreţi complex conjugaţi sunt corelaţi cu polii sistemului continuu de ordinul doi conform relaţiei:

$$p_{1,2}=\mathrm{e}^{-\zeta\omega_nT_e\pm\mathrm{j}\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T_e},\qquad(4.307)$$

unde ζ şi ω_n au semnificaţiile cunoscute, iar T_e este perioada de eşantionare.
Pentru a avea eroare staţionară nulă la referinţă treaptă unitară şi totodată pentru simplificarea relaţiilor, factorul de amplificare se adoptă astfel încât $G(1)=1$, de unde rezultă:

$$K=\frac{(1-p_1)(1-p_2)}{(1-z_1)}.$$

Această funcţie de transfer caracterizează un sistem de ordinul doi cu $0<\zeta<1$, cu element de reţinere de ordin zero, când $z_1 \neq 0$, respectiv fără element de reţinere de ordin zero când $z_1 = 0$.

Transformata *Z* a răspunsului pentru o mărime de intrare treaptă unitară este:

$$Y(z) = \frac{K(z-z_1)}{(z-p_1)(z-p_2)}\frac{z}{z-1}.$$

Răspunsul în timp se determină aplicând metoda reziduurilor conform relaţiilor:

$$y[k] = y(kT_e) = \sum_{i=1}^{3} z^{k-1}Y(z) = \sum_{i-1}^{3}\frac{Kz^k(z-z_1)}{(z-1)(z-p_1)(z-p_2)} = r_1 + r_2 + r_3\,,$$

unde r_i sunt reziduurile funcţiei $z^{k-1}Y(z)$ care au următoarele expresii:

$$r_1[k] = \left.\frac{K(z-z_1)z^k}{(z-p_1)(z-p_2)}\right|_{z=1} = \frac{K(1-z_1)}{(1-p_1)(1-p_2)} = 1,$$

$$r_2[k] = \left.\frac{K(z-z_1)z^k}{(z-1)(z-p_2)}\right|_{z=p_1} = \frac{K(p_1-z_1)}{(p_1-1)(p_1-p_2)}p_1^k\,,$$

$$r_3[k] = \left.\frac{K(z-z_1)z^k}{(z-1)(z-p_1)}\right|_{z=p_2} = \frac{K(p_2-z_1)}{(p_2-1)(p_2-p_1)}p_2^k\,.$$

Înlocuind în expresiile reziduurilor relaţia lui *K*, rezultă răspunsul în timp:

$$y[k] = 1 + \frac{(p_1-z_1)(p_2-1)}{(1-z_1)(p_1-p_2)}p_1^k + \frac{(p_2-z_1)(p_1-1)}{(1-z_1)(p_2-p_1)}p_2^k\,.$$

Pentru sistematizarea relaţiei răspunsului polii complecşi p_1 şi p_2 se scriu sub formă trigonometrică respectiv algebrică:

$$p_1 = |\,p_1|e^{\mathrm{j}\Phi} = \sigma + \mathrm{j}\omega \;\text{ şi }\; p_2 = |\,p_1|e^{-\mathrm{j}\Phi} = \sigma - \mathrm{j}\omega\,,$$

unde:

$$|\,p_1| = e^{-\zeta\,\omega_n T_e}\,, \tag{4.308}$$

$$\Phi = \arg p_1 = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,T_e = \mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{\sigma}\,. \tag{4.309}$$

Cu aceste notaţii se vor obţine relaţiile:

$$p_2 - p_1 = |p_2 - p_1|e^{-\mathrm{j}\pi/2} = 2\omega e^{-\mathrm{j}\pi/2}\,,$$

respectiv, deoarece avem:

$$p_1 - 1 = (\sigma - 1) + \mathrm{j}\omega \;\text{ şi }\; p_2 - 1 = (\sigma - 1) - \mathrm{j}\omega\,,$$

rezultă:

$$|\,p_1 - 1| = |\,p_2 - 1| = \sqrt{(\sigma-1)^2 + \omega^2}\,,$$

şi

$$\arg(p_1-1)=-\arg(p_2-1)=\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\sigma-1}=\lambda_1.$$

De asemenea, având în vedere că $z_1\in\boldsymbol{R}$, avem relaţiile:

$1-z_1\in\boldsymbol{R}$, $p_1-z_1=(\sigma-z_1)+\mathrm{j}\omega$ şi $p_2-z_1=(\sigma-z_1)-\mathrm{j}\omega$,

de unde rezultă $|p_1-z_1|=|p_2-z_1|=\sqrt{(\sigma-z_1)^2+\omega^2}$ şi:

$$\arg(p_1-z_1)=-\arg(p_2-z_1)=\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\sigma-z_1}=\lambda_2.$$

Notând:

$$\theta=\arg\frac{(p_1-z_1)(p_2-1)}{(1-z_1)(p_1-p_2)}=\arg(p_1-z_1)+\arg(p_2-1)-\frac{\pi}{2}=\lambda_2-\lambda_1-\frac{\pi}{2},\qquad(4.310)$$

în final rezultă:

$$y[k]=1+\left|\frac{(p_1-z_1)(p_1-1)}{(1-z_1)(p_1-p_2)}\right||p_1|^k[e^{\mathrm{j}(k\Phi+\theta)}+e^{-\mathrm{j}(k\Phi+\theta)}],$$

respectiv

$$y[k]=1+2\left|\frac{(p_1-z_1)(p_1-1)}{(1-z_1)(p_1-p_2)}\right||p_1|^k\cos(k\Phi+\theta),\qquad(4.311)$$

unde $\Phi=\arg p_1=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}T_e$ şi $\theta=\arg(p_1-z_1)-\arg(p_1-1)-\dfrac{\pi}{2}$.

4.7.3.1. Simplificarea expresiei răspunsului elementului discret de ordinul 2, T2

Relaţia răspunsului pentru elementul discret T2 oscilant amortizat se poate simplifica prin adoptarea unui parametru auxiliar introdus pe baza unor considerente geometrice. Pentru definirea acestui parametru, care este un unghi notat α, se foloseşte repartiţia poli-zero a elementului discret T2, reprezentată grafic, pentru două repartiţii tipice, în figurile 4.41a şi b.

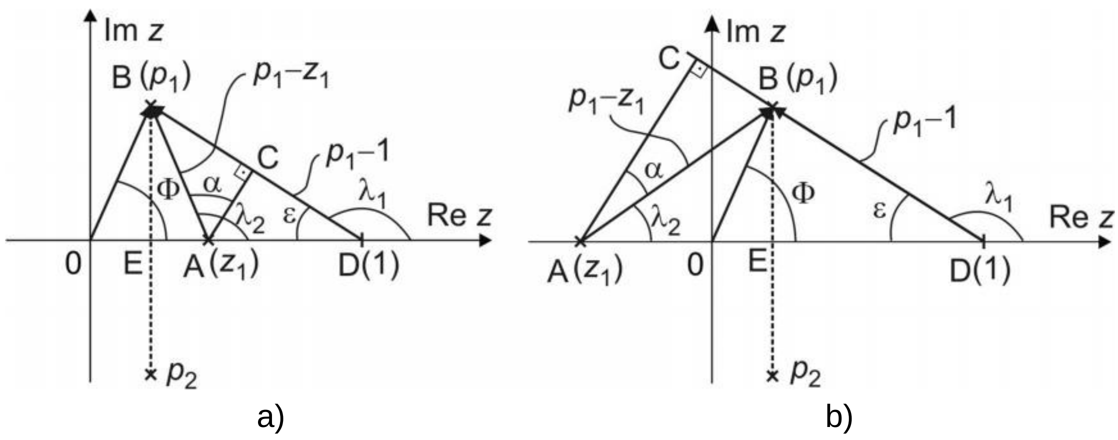


Fig. 4.41

Prin definiţie, α este unghiul dintre vectorul complex $(p_1 - z_1)$ şi perpendiculara din z_1 pe direcţia vectorului $(p_1 - 1)$. Din figura 4.41a rezultă relaţiile:

$$\alpha + \lambda_2 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon = \frac{\pi}{2} - (\pi - \lambda_1) = \lambda_1 - \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha = \lambda_1 - \lambda_2 - \frac{\pi}{2},$$

de unde, având în vedere (4.310), se obţine

$$\alpha = -\theta - \pi,$$

respectiv

$$\theta = -\alpha - \pi.$$

În mod asemănător din figura 4.41b rezultă

$$\theta = \alpha - \pi,$$

deci, în general, avem relaţia de legătură:

$$\theta = \pm\alpha - \pi. \tag{4.312}$$

De asemenea, referindu-ne la figura 4.41a, vom putea scrie relaţiile succesive:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{|p_1 - z_1|} = \frac{AD\sin\varepsilon}{|p_1 - z_1|} = \left|\frac{1 - z_1}{p_1 - z_1}\right|\sin\varepsilon,$$

respectiv

$$\sin\varepsilon = \frac{BE}{BD} = \frac{|p_1 - p_2|}{2|1 - p_1|},$$

de unde se obţine

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left|\frac{(1 - z_1)(p_1 - p_2)}{(p_1 - z_1)(1 - p_1)}\right|. \tag{4.313}$$

Cu aceste rezultate, răspunsul sistemului discret de ordinul doi poate fi exprimat conform relaţiei

$$y[k] = 1 + |\sec\alpha||p_1|^k \cos(k\Phi \pm \alpha - \pi), \tag{4.314}$$

unde $\sec\alpha = 1/\cos\alpha$.

În final, înlocuind modulul şi argumentul polului discret p_1 din relaţiile (4.308) şi (4.309) în (4.314) se obţine expresia:

$$y[kT_e] = 1 + e^{-\zeta\omega_n kT_e}|\sec\alpha|\cos(\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}\,kT_e + \alpha - \pi), \tag{4.315}$$

unde α poate fi pozitiv sau negativ.

4.7.3.2 Calculul suprareglajului pentru elementul de ordinul doi discret

Pentru evaluarea suprareglajului, în relaţia (4.315) trecem de la timpul discretizat la timpul continuu t. Se obţine astfel relaţia:

$$y^*(t) = 1 + e^{-\zeta\omega_n t}\left|\sec\alpha\right|\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\; t + \alpha - \pi), \tag{4.316}$$

unde cu $y^*(t)$ s-a notat semnalul continuu care are valorile $y(kT_e)$ în momentele de eşantionare. Derivând expresia (4.316) în raport cu timpul şi rezolvând ecuaţia obţinută se obţine timpul de vârf.

$$t_v^* = \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha + \varphi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}, \text{ cu } \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \tag{4.317}$$

Se înlocuieşte t_v^* în relaţia (4.306) şi obţinem:

$$y^*_{\max} = 1 + \left|\sec\alpha\right|\exp\left(-\zeta\omega_n\frac{\pi/2-\alpha+\varphi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{\pi/2-\alpha+\varphi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} + \alpha - \pi\right)$$

$$= 1 + \left|\sec\alpha\right|\exp\left[-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \varphi\right)\right]\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

de unde, având în vedere că $y^*_{st} = 1$ şi $\cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = \sin\varphi = \sqrt{1-\zeta^2}$, rezultă:

$$M_v^* = \sqrt{1-\zeta^2}\left|\sec\alpha\right|\exp\left[-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \varphi\right)\right]. \tag{4.318}$$

În figurile 4.42a şi b se prezintă curbele suprareglajului exprimat în procente funcţie de unghiul α pentru diverse valori ale factorului de amortizare.

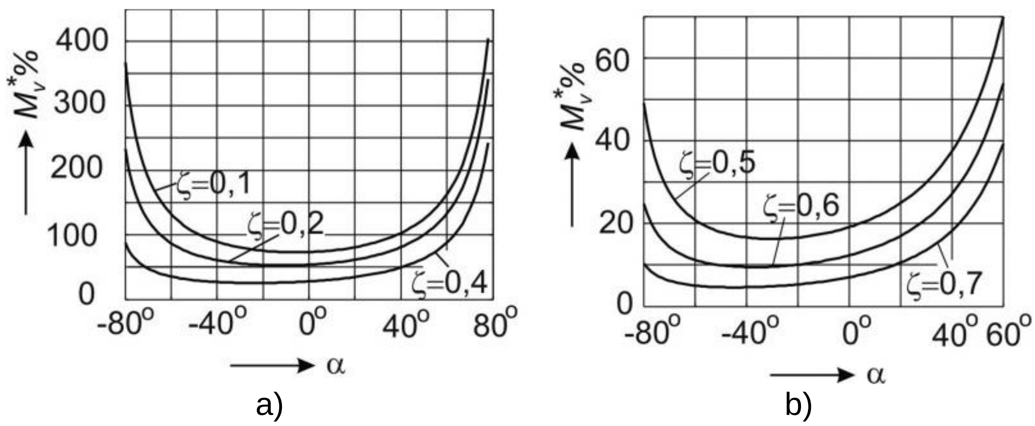


Fig. 4.42

4.7.3.3 Calculul timpului de stabilire pentru elementul discret de ordinul doi

Timpul de stabilire t_s^* pentru elementul de ordinul doi se determină analitic pornind de la relaţia de definiţie a acestuia:

$$\left|y^*(t_s^*) - y^*_{st}\right| \le 0{,}05 y^*_{st},$$

relaţie în care înlocuim $y_{st}^{*} = 1$ şi expresia răspunsului (4.316). În acest fel rezultă relaţiile:

$$\left|1 + \left|\sec\alpha\right| e^{-\zeta\omega_n t_s^*} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t_s^* + \alpha - \pi) - 1\right| \le 0{,}05 ,$$

$$\left|\sec\alpha\right| e^{-\zeta\omega_n t_s^*} \left|\cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t_s^* + \alpha - \pi)\right| \le 0{,}05 ,$$

respectiv după majorarea cosinusului cu valoarea 1 se obţine:

$$\left|\sec\alpha\right| e^{-\zeta\omega_n t_s^*} \le 0{,}05 .$$

În final rezultă expresia timpului de stabilire normalizat

$$\omega_n t_s^* = -\frac{\ln(0{,}05 \cdot \left|\cos\alpha\right|)}{\zeta} . \qquad (4.319)$$

Analiza grafo-analitică realizată pe baza curbelor trasate în MATLAB, curbe prezentate în fig. 4.43 evidenţiază faptul că pentru $\left|\alpha\right| < 70°$, timpul de stabilire poate fi aproximat acoperitor, în cazul unei benzi de toleranţă de 5%, cu o relaţie similară cu cea folosită la sistemul continuu de ordinul doi, adică:

$$\omega_n t_s^* \cong \frac{4}{\zeta} . \qquad (4.320)$$

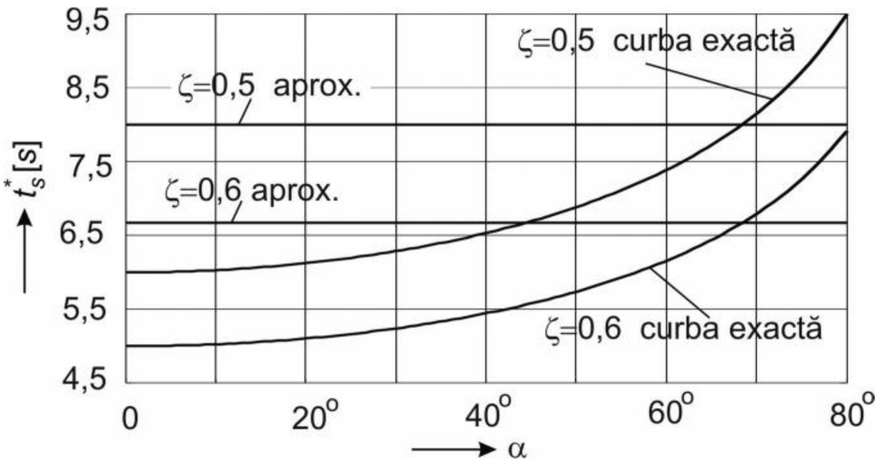


Fig. 4.43

4.7.3.4 Domenii de alocare a polilor pentru elementul discret de ordinul doi

Adoptarea polilor sistemului discret de ordinul doi pe baza valorii suprareglajului este practic imposibilă, deoarece expresia (4.308) este extrem de complicată, fiind dependentă de doi parametrii. Presupunând cunoscută perioada de eşantionare, polii se pot adopta relativ uşor dacă se utilizează curbele loc geometric ale polilor discreţi pentru $\zeta = \text{ct.}$, respectiv $\omega_n T_e = \text{ct.}$, curbe trasate în interiorul cercului de rază unitară.
Aceste curbe loc geometric desenate pe baza relaţiei 4.307 se obţin uşor folosind funcţia **zgrid** din mediul MATLAB.

Astfel, pentru $\zeta = \text{ct.}$ şi $\omega_n T_e$ variabil se obţin curbele (locurile geometrice) ale polului p_1 din figura 4.44, corespunzătoare valorilor $\zeta = 0; 0{,}1; 0{,}2; \ldots 1$. Evident din 4.307 pentru $\zeta = 0$ vom avea $|p_{1,2}| = 1$, deci polii $p_{1,2}$ se deplasează pe cercul unitar în funcţie de valorile $\omega_n T_e$. Sistemul discret este, în acest caz, ca şi sistemul continuu corespunzător, la limita de stabilitate.
Pentru $\zeta = 1$, din relaţia 4.307 rezultă $\arg p_{1,2} = 0$, deci polii se deplasează pe axa reală.
Pentru $\omega_n T_e = \text{ct.}$ şi ζ variabil se obţin curbele polului p_1 trasate în fig. 4.44 pentru valorile $\omega_n T_e = 0{,}05\pi; 0{,}1\pi; \ldots 0{,}95\pi; \pi$.

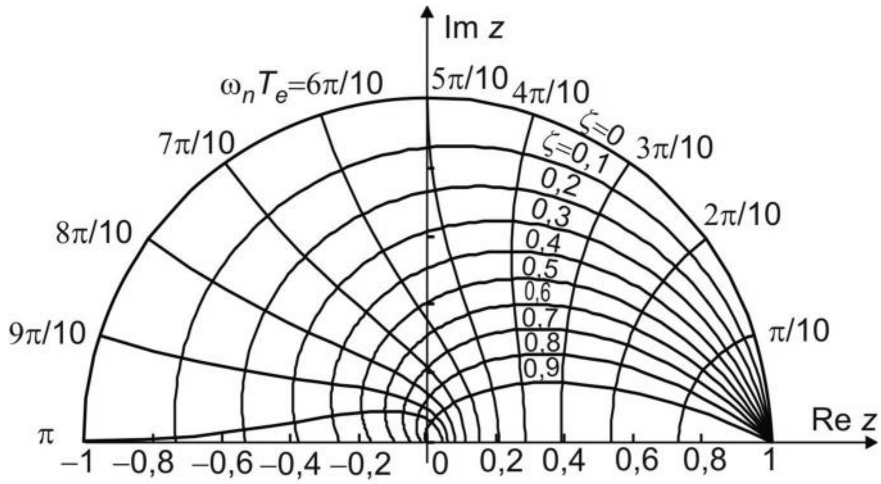


Fig. 4.44

Curbele loc geometric pentru polii elementului T2 discret care asigură timp de stabilire constant

Din relaţia 4.307 rezultă că modulul polului elementului T2 discret este

$$|p_1| = e^{-\zeta\omega_n T_e}.$$

Considerând $t_s^* = \text{ct.}$, din relaţia (4.320) vom avea

$$\zeta\omega_n = \frac{4}{t_s^*},$$

deci

$$|p_1| = e^{-4T_e / t_s^*}. \tag{4.321}$$

Prin urmare, pentru t_s^* şi T_e cu valori date, modulul polului este constant, deci locul geometric va fi un cerc cu raza egală cu $\exp(-4T_e / t_s^*)$. Evident raza cercurilor loc geometric este subunitară, fiind de regulă mai mare de 0,5 (deoarece în general t_s^* are mai mult de 5 perioade de eşantionare).

4.7.4 Analiza comparativă a răspunsurilor tranzitorii ale sistemelor continuu şi discret cu ER0 şi fără ER0

Considerăm pentru început sistemul continuu cu reacţie negativă unitară având schema bloc din figura 4.45.

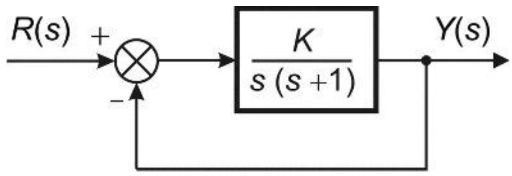


Fig. 4.45

Funcţia de transfer a sistemului închis este:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K}{s^2+s+K}.$$

Luând $K=1$, rezultă că sistemul continuu în circuit închis este un element de ordinul doi cu $\zeta=0{,}5$ şi $\omega_n=1$. Presupunând condiţii iniţiale nule, răspunsul la mărime de intrare treaptă unitară va fi:

$$y(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\varphi)\ ,$$

respectiv, după înlocuirea valorilor numerice:

$$y(t)=1-1{,}157e^{-0{,}5t}\sin(0{,}866t+\pi/3)$$

Răspunsul descris de expresia de mai sus, prezentat în figura 4.46, pune în evidenţă un suprareglaj aproximativ de 16,5% şi un timp de stabilire de ~8 secunde.

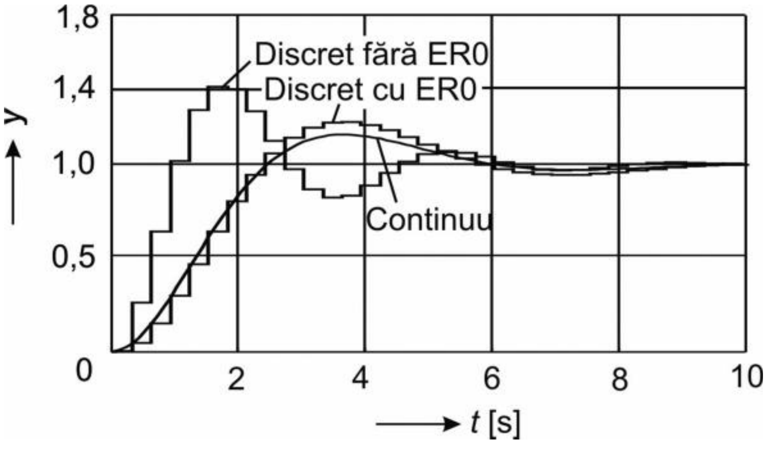


Fig. 4.46

În continuare considerăm un eşantionor pe mărimea de eroare, ca în figura 4.47.

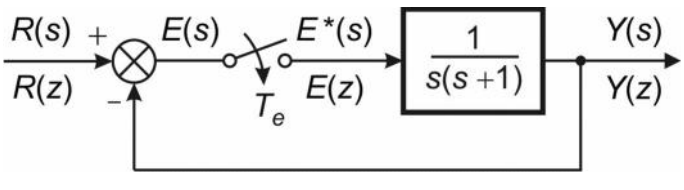


Fig. 4.47

Funcţia de transfer în z a sistemului deschis va fi acum

$$G(z)=Z\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}=\frac{z(1-e^{T_e})}{(z-1)(z-e^{T_e})},$$

unde T_e este perioada de eşantionare.

Avand în vedere că

$$G_0(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+G(z)},$$

în cazul considerat rezultă:

$$\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{z(1-e^{T_e})}{z^2-2ze^{T_e}+e^{T_e}}.$$

Pentru început alegem valoarea $T_e=0{,}3\,\text{s}$, care este suficient de mică faţă de constanta de timp dominantă a sistemului deschis ($T_f=1\text{s}$). Funcţia de transfer z a sistemului închis cu eşantionare a erorii, fără element de reţinere este:

$$\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{0{,}2592z}{z^2-1{,}482z+0{,}741}.$$

Răspunsul elementului discret obţinut în MATLAB pentru acest caz este prezentat comparativ cu cel al sistemului continuu în figura 4.46. Se constată că sistemul discret are un suprareglaj mai mare (~42%) şi un grad de oscilaţie mai accentuat decât al sistemului continuu. Durata regimului tranzitoriu (timpul de stabilire) este aproximativ egală în cele două cazuri (7,5 s la sistemul discret şi 8,08 s la sistemul continuu). Prin simulări repetate în MATLAB se obţine o valoare a factorului de amplificare $K\cong 13{,}43$ pentru care sistemul discret ajunge la limita de stabilitate.

În continuare analizăm răspunsul sistemului discret cu element de reţinere de ordin zero, cu schema bloc prezentată în figura 4.48.

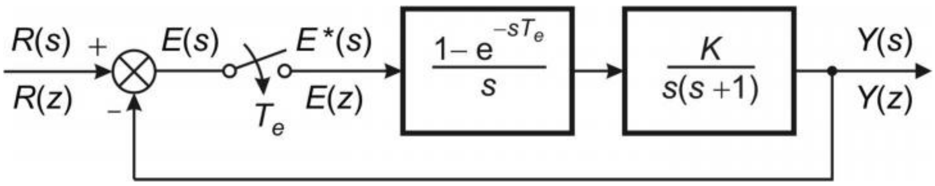


Fig. 4.48

Funcţia de transfer a elementului continuu cu ER se determină cu relaţiile succesive:

$$G_{ER}G(z)=Z\left\{\frac{1-e^{-sT_e}}{s}G(s)\right\}=(1-z^{-1})Z\left\{\frac{K}{s^2(s+1)}\right\}=K(1-z^{-1})Z\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\right\},$$

respectiv

$$G_{ER}G(z)=K(1-z^{-1})\left[\frac{T_ez}{(z-1)^2}-\frac{z}{z-1}+\frac{z}{z-e^{-T_e}}\right],$$

de unde după efectuarea calculelor se obţine:

$$G_{ER}G(z) = K\,\frac{z(e^{-T_e} + T_e - 1) + (1 - e^{-T_e} - T_e e^{-T_e})}{z^2 - (1 + e^{-T_e})z + e^{T_e}} .$$

Înlocuind $T_e = 0{,}3\,\text{s}$ şi $K = 1$ rezultă funcţiile de transfer z ale sistemului discret în circuit deschis:

$$G_{ER}G(z) = \frac{0{,}04082z + 0{,}03694}{z^2 - 1{,}741z + 0{,}7408} ,$$

respectiv a sistemului în circuit închis:

$$G_0(z) = \frac{0{,}04082z + 0{,}03694}{z^2 - 1{,}7z + 0{,}7778} .$$

Sistemul discret cu element de reţinere de ordinul zero a fost simulat în MATLAB şi răspunsul obţinut este prezentat grafic în figura 4.46.
Folosind meniul Characteristic în fereastra grafică MATLAB obţinută cu funcţia step se constată că în acest caz suprareglajul este de ~23%, deci mult mai mic decât la sistemul eşantionat fără ER0, fiind destul de aproape de valoarea suprareglajului sistemului continuu. Acest fapt rezultă ca urmare a valorii mici a perioadei de eşantionare.
Din grafic se observă, de asemenea, că timpul de stabilire (cu valoarea de 8,75) este mai mare decât la sistemul continuu şi la sistemul eşantionat fără ER0.
Cu toate că suprareglajul sistemului cu ER0 este sensibil mai mic decât la sistemul eşantionat fără ER0, totuşi rezerva de stabilitate a primului este mult mai mică. Astfel, valoarea factorului de amplificare K la limita de stabilitate este $K = 7$ la sistemul cu ER0, faţă de $K = 13{,}43$ cât este la sistemul eşantionat fără ER0.
În cele ce urmează vom analiza influenţa asupra performaţelor a perioadei de eşantionare. În acest scop vom utiliza simulările în MATLAB care sunt realizate folosind programul cu codul prezentat în continuare:

```
K=1; Te=0.1;
numc=K;
denc=[1 1 K];
sysc=tf(numc,denc);
% se determina functia de transfer z a sistemului esantionat fara ER0
denc1=[1 1];
sysc1=tf(numc,denc1);
sysda1=c2d(sysc1,Te,‘zoh’);
sysda2=tf([1 0], [1 -1], -1);
sysdcd=series(sysda1,sysda2);
sysd1=feedback(sysdcd,1);
% se determina functia de transfer z a sistemului esantionat cu ER0
denc2=[1 1 0];
sysc2=tf(numc,denc2);
sysda3=c2d(sysc2,Te,‘zoh’);
sysd2=feedback(sysda3,1);
step(sysc,sysd1,sysd2,10), grid;
```

Câteva explicaţii legate de program. Funcţia MATLAB **c2d** oferă posibilitatea de a calcula o funcţie de transfer z în următoarele situaţii:

- cu ER de ordinul zero cu opţiunea ‘zoh’;
- cu ER de ordinul unu cu opţiunea ‘foh’;
- cu ER0 folosind schimbarea de variabilă $s = \frac{2}{T_e}\frac{z-1}{z+1}$, cu opţiunea ‘tustin’.

Aşadar în MATLAB nu este posibil să determinăm direct o funcţie de transfer z pentru un sistem eşantionat fără ER0. Pentru rezolvarea problemei se foloseşte un artificiu care va fi prezentat în continuare.
Cunoaştem faptul că:

$$Z\{G_{ER0}G(s)\} = Z\left\{\frac{1-e^{-sT_e}}{s}G(s)\right\} = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\},$$

şi având în vedere că:

$$Z\{G(s)\} = \frac{Z\{G_{ER0}(s)[sG(s)]\}}{1-z^{-1}},$$

rezultă că funcţia de transfer z a sistemului eşantionat deschis fără ER0 se poate calcula aplicând funcţia c2d cu opţiunea ‘zoh’ funcţiei de transfer $sG(s)$ şi apoi înmulţind rezultatul cu $z/(z-1)$. Acest procedeu este folosit în liniile 4-8 din programul listat mai înainte. Funcţia de transfer a sistemului închis cu eşantionare a erorii dar fără ER0 se determină în linia 9 a programului cu funcţia MATLAB feedback.
Curbele răspunsurilor sistemelor continuu, discret fără ER0 şi discret cu ER0, obţinute cu programul MATLAB prezentat mai înainte pentru $K = 1$ şi $T_e = 0{,}1$ sunt prezentate în figura 4.49.

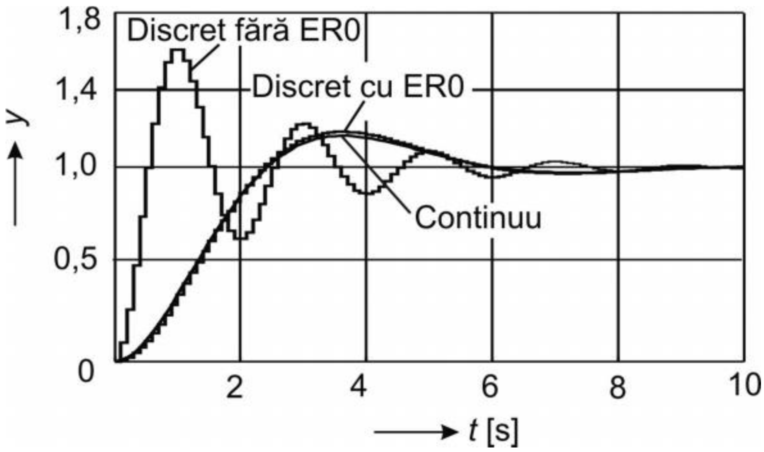


Fig. 4.49

Din examinarea curbelor prezentate se constată că, în cazul unei perioade de eşantionare mai mică ($T_e = 0{,}15$ în loc de 0,3 s) la sistemul eşantionat fără ER0 suprereglajul creşte în mod apreciabil (fiind acum de 60,7% faţă de 42%). De asemenea, craşte gradul de oscilaţie în intervalul corespunzător regimului tranzitoriu. Cu toate acestea durata timpului de stabilire se modifică puţin (de la 7,5 la 7,3 s) şi în mod aparent paradoxal rezerva de stabilitate creşte de aproximativ 3 ori (la limita de stabilitate avem $K = 40{,}35$ pentru sistemul cu $T_e = 0{,}1$, respectiv $K = 13{,}43$ la sistemul cu $T_e = 0{,}3$).

În ceea ce priveşte sistemul discret cu ER0 se constată că la reducerea perioadei de eşantionare se reduce şi suprareglajul (de la 23% la $T_e = 0{,}3$ la 18,4% pentru sistemul cu $T_e = 0{,}1$). De asemenea, se reduce timpul de stabilire, care la $T_e = 0{,}1$ este de 8,3 s şi în general răspunsul sistemului discret se apropie mult de cel al sistemului continuu. Cu toate acestea rezerva de stabilitate, care creşte de la 7 pentru $T_e = 0{,}3$ la 20,7 pentru $T_e = 0{,}1$, este cu mult mai mică decât cea a sistemului continuu.

Concluzionând, prin eşantionare se reduce rezerva de stabilitate şi creşte suprareglajul, respectiv gradul de oscilaţie (numai la sistemele fără ER0).

4.8 STABILITATEA SISTEMELOR DISCRETE

Stabilitatea sistemelor discrete cu reacţie negativă poate fi evaluată, ca şi la sistemele continue, pe baza poziţiei, în planul *z*, a polilor funcţiei de transfer a sistemului în circuit închis. Se reaminteşte că la sistemele continue stabilitatea absolută este asigurată, dacă toţi polii (rădăcinile polinomului de la numitor) funcţiei de transfer a sistemului în circuit închis sunt plasaţi în semiplanul complex *s*, stâng. Altfel spus, polii au partea reală negativă. Se cunoaşte de asemenea faptul că schimbarea de variabilă $z = e^{sT_e}$, prin care se obţine funcţia de transfer *z* din funcţia de transfer *s*, transformă semiplanul s complex stâng în interiorul cercului de rază unitară din planul complex *z*. Prin urmare sistemele discrete cu reacţie negativă sunt stabile dacă toţi polii funcţiei de transfer *z* sunt amplasaţi, în planul complex *z*, în interiorul cercului de rază unitară.

Pentru stabilirea unor notaţii se consideră sistemul discret în circuit închis cu eşantionarea erorii, cu schema bloc din figura 4.50.

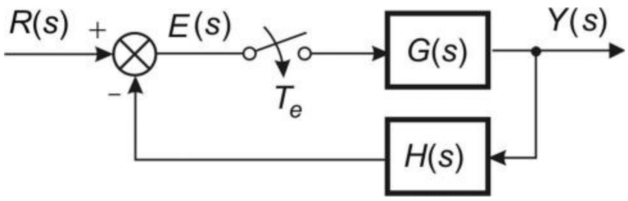


Fig. 4.50

Conform celor prezentate în secţiunea 4.6 funcţia de transfer *z* a sistemului în circuit închis este (v. rel. (4.285)):

$$G_0(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+GH(z)} = \frac{B(z)}{A(z)},$$

unde polinomul de la numitor are, într-un caz general, expresia:

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... a_k z^{n-k} + \ldots + a_{n-1} z + a_n . \qquad (4.322)$$

De regulă însă $a_0 = 1$.

Notând cu p_i rădăcinile polinomului $A(z)$, avem următoarea condiţie de stabilitate a sistemului discret:

dacă toţi polii p_i ai funcţiei de transfer $G_0(z)$ sunt amplasaţi în planul z în interiorul cercului de rază unitară, atunci toate componentele răspunsului tranzitoriu ajung la starea de echilibru şi prin urmare sistemul discret este stabil.

Matematic, condiţia de stabilitate se exprimă conform relaţiei următoare:

$$\left| p_i \right| < 1, \quad i = 1,\ldots,n , \tag{4.323}$$

unde p_i sunt polii funcţiei de transfer a sistemului în circuit închis.
Stabilitatea unui sistem liniar discret este o proprietate intrinsecă a sistemului care nu depinde de mărimea de intrare a sistemului. Polii transformatei Z a mărimii de intrare nu afectează proprietatea de stabilitate a sistemului, aceştia determinând numai răspunsul staţionar. Prin urmare, ca şi la sistemele continue, problema stabilităţii se poate rezolva alegând polii funcţiei de transfer a sistemului închis astfel încât aceştia să fie amplasaţi în planul z în interiorul cercului de rază unitară. Polii sistemului închis cu $\left| p_i \right| = 1$ vor produce, în cadrul răspunsului, oscilaţii întreţinute de amplitudine constantă.
Se remarcă totuşi şi faptul că amplasarea tuturor polilor în interiorul cercului de rază unitară nu garantează valori satisfăcătoare pentru performanţele răspunsului.
Dacă polii complex conjugaţi dominanţi ai sistemului închis au modul ≈ 1 (dar<1) răspunsul tranzitoriu poate să prezinte oscilaţii de amplitudine mari sau răspunsul este lent. În sistemele practice, pe lângă semnalele utile, există semnale parazite care pot face ca amplitudinea oscilaţiilor să crească cu o viteză determinată de puterea zgomotului, fiind posibilă apariţia pericolului ca sistemul să devină chiar instabil.
Cu sistemele actuale de calcul, folosind mediul MATLAB, nu este o problemă dificilă să se calculeze polii unui sistem de ordin oarecare. Uneori însă se doreşte să se testeze stabilitatea unei clase de sisteme, sau este necesară evaluarea stabilităţii în termenii unor coeficienţi literali.

4.8.1 Criteriul de stabilitate Schur-Cohn

Calculul analitic al rădăcinilor polinonului $A(z)$ este dificil pentru $n \geq 3$. Evaluarea stabilităţii în aceste situaţii se poate face cu anumite metode algebrice, care folosesc coeficienţii polinonului caracteristic.
Pentru introducerea formei generale a criteriului Schur-Cohn se consideră polinomul caracteristic al funcţiei de transfer a sistemului închis, scris conform expresiei (4.322) cu $a_k \in \boldsymbol{R}$.
Criteriul Schur-Cohn are următoarea formulare:
Un sistem cu eşantionare este stabil dacă şi numai dacă şirul determinanţilor Schur-Cohn, $-1, \Delta_1, \Delta_2,...,\Delta_n$ are n variaţii ale semnului.
Determinantul Schur-Cohn de ordinul k este definit conform expresiei:

$$\Delta_k = \left| \begin{array}{ccccc:cccc} a_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{k-1} \\ a_{n-1} & a_n & \ldots & 0 & 0 & 0 & a_0 & \ldots & a_{k-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & \ldots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \ldots & a_0 \\ \hdashline a_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & a_n & \ldots & a_{n-k+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & \ldots & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{array} \right| , \tag{4.324}$$

unde $k = 1, 2, ..., n$.
Criteriul Schur-Cohn prezintă dezavantajul important că nu indică explicit, ca la criteriul Hurwitz de la sistemele continue, câte rădăcini sunt în afara cercului de rază unitară sau pe cercul cu rază egală cu unu.

Exemplul 33

Se dă sistemul cu polinomul caracteristic:

$$A(z) = (2z - 1)(z + 2) = 2z^2 + 3z - 2 ,$$

şi se cere să se evalueze stabilitatea sistemului.
Se evaluează succesiv determinanţii Schur-Cohn:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_n & a_0 \\ a_0 & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_n & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & a_0 \\ a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 144.$$

Şirul determinanţilor Schur-Cohn, $-1, 0, 144$, are o singură variaţie de semn. Prin urmare sistemul este instabil, deoarece pentru a fi stabil erau necesare două variaţii de semn.
Din exemplul prezentat se poate vedea că aplicarea criteriului Schur-Cohn este laborioasă şi în plus că acesta are deficienţa că nu specifică numărul rădăcinilor instabile (amplasate în exteriorul cercului de rază unitară).

4.8.2 Criteriul de stabilitate Jury

Criteriul de stabilitate Jury este mai simplu de aplicat decât criteriul Schur-Cohn, fiind într-o oarecare măsură asemănător criteriului Hurwitz de la sistemele continue. Pentru introducerea criteriului se consideră polinomul caracteristic al funcţiei de transfer a sistemului închis, scris conform expresiei (4.322) cu $a_k \in \boldsymbol{R}$.
Cu ajutorul coeficienţilor se formează recurent tabloul Jury conform schemei:

$$\begin{array}{lll}
z^n & z^{n-1} & \ldots\ldots\ldots z^0 \\
a_0 & a_1 & \ldots\ldots\ldots a_n \\
a_n & a_{n-1} & \ldots\ldots\ldots a_0 \\
b_0 & b_1 & \ldots\ldots\ldots \\
b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots\ldots \\
c_0 & c_1 & \ldots\ldots \\
c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots
\end{array} \qquad (4.325)$$

unde

$$b_0 = a_0 - \frac{a_n}{a_0} a_n\,,\; b_1 = a_1 - \frac{a_n}{a_0} a_{n-1},\; \dots,\; b_k = a_k - \frac{a_n}{a_0} a_{n-k}\,,$$

$$c_0 = b_0 - \frac{b_{n-1}}{b_0} b_{n-1},\; \dots,\; c_k = b_k - \frac{b_{n-1}}{b_0} b_{n-1-k}\,. \qquad (4.326)$$

Sistemul cu polinomul caracteristic $A(z)$ este stabil dacă:

1) sunt verificate condiţiile preliminare

$A(1) > 0$ şi $A(-1) > 0$ pentru n par, respectiv $A(-1) < 0$ pentru n impar (4.327)

şi

2) toţi termenii din prima coloană, rândurile impare, sunt pozitivi adică dacă

$$a_0 > 0,\; b_0 > 0,\; c_0 > 0.... \qquad (4.328)$$

Această schemă de testare a stabilităţii este uşor de implementat într-un program de calcul.

Exemplul 34

Pentru a se ilustra modul de aplicare al criteriului Jury, se consideră sistemul de ordinul doi cu polinomul caracteristic:

$$A(z) = z^2 + a_1 z + a_2\,. \qquad (4.329)$$

Se cere să se determine condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească coeficienţii a_1 şi a_2 pentru ca sistemul să fie stabil.

Tabloul Jury al sistemului va avea următoarea structură:

$$\begin{array}{ccc}
z^2 & z^1 & z^0 \\
1 & a_1 & a_2 \\
a_2 & a_1 & 1 \\
1-a_2^2 & a_1 - a_1 a_2 & \\
a_1 - a_1 a_2 & 1-a_2^2 & \\
\dfrac{(1-a_2^2)^2 - a_1^2(1-a_2)^2}{1-a_2^2} & &
\end{array} \qquad (4.330)$$

Din rândul 3 avem condiţia ca $1-a_2^2 > 0$, de unde rezultă că:

$$-1 < a_2 < 1. \qquad (4.331)$$

Din rândul 5, având în vedere că numitorul este pozitiv de la condiţia anterioară, după ce se scrie $(1-a_2)^2$ ca factor comun, se obţine condiţia:

$$(1+a_2)^2 > a_1^2\,, \qquad (4.332)$$

de unde rezultă:

$a_2 + 1 > a_1$ şi $a_2 + 1 > -a_1$. (4.333)

Din cele 3 inegalităţi (4.331) şi (4.333) se poate desena triunghiul de stabilitate prezentat în figura 4.51.

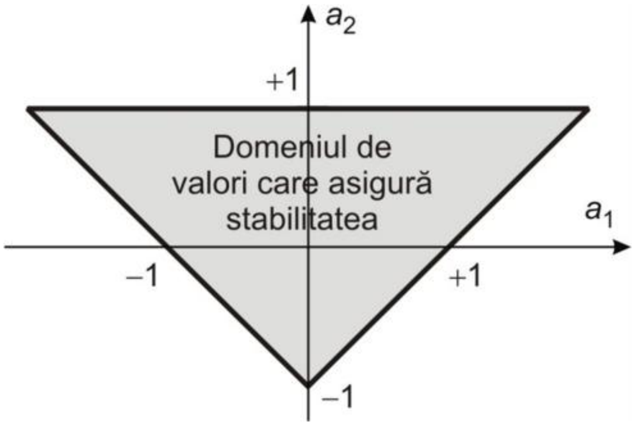


Fig. 4.51

Exemplul 35

Să se evalueze stabilitatea sistemului discret cu polinomul caracteristic:

$A(z) = z^3 - 2{,}1z^2 + 1{,}6z - 0{,}4$.

În prima etapă se calculează $A(1) = 0{,}1$ şi $A(-1) = -5{,}1$. Deoarece n=3 este impar sunt verificate condiţiile preliminare 4.304.
În continuare se formează tabloul Jury:

1	−2,1	1,6	−0,4
−0,4	1,6	−2,1	1
0,84	−1,46	0,76	
0,76	−1,46	0,84	
0,1524	−0,139		
−0,139	0,1524		

Coeficienţii din prima coloană, rândurile impare, sunt: $1;\ 0{,}84;\ 0{,}1524$. Se constată că aceşti termeni sunt pozitivi, prin urmare sistemul discret cu polinomul caracteristic dat este stabil. Acest lucru se verifică şi prin faptul că rădăcinile acestui polinom $z_1 = 0{,}5$ şi $z_{2,3} = 0{,}8 \pm 0{,}4j$ au modulul subunitar.

Exemplul 36

Să se aprecieze dacă sistemul discret cu polinomul caracteristic:

$A(z) = z^3 - 2{,}6z^2 + 2{,}4z - 0{,}8$,

este stabil, la limita de stabilitate sau instabil.

În prima etapă se calculează $A(1)=0$ şi $A(-1)=-6{,}8$. Prima condiţie preliminară nu este verificată, $A(1)$ fiind egal cu zero, ceea ce înseamnă că polinomul caracteristic are o rădăcină egală cu unu, deci sistemul discret este la limita de stabilitate.
Un rezultat similar rezultă din tabloul Jury:

1	$-2{,}6$	2,4	$-0{,}8$
0,36	$-0{,}68$	0,32	
0,0756	$-0{,}0756$		
0			

Examinând termenii din prima coloană se constată că nu toţi sunt strict pozitivi. Faptul că termenul din ultimul rând este egal cu zero indică o rădăcină plasată pe cercul de rază unitară.
Rezolvând efectiv ecuaţia $A(z)=0$, se obţine $z_1=1$ şi $z_{2,3}=0{,}8\pm 0{,}4\mathrm{j}$.

4.8.3 Criteriul de stabilitate Routh-Hurwitz

Aplicarea directă a criteriului Routh, în forma prezentată la sistemele continue, funcţiilor de transfer z nu este posibilă deoarece domeniul de stabilitate este, în cazul discret, interiorul cercului de rază unitară.
Criteriul se poate totuşi aplica, dacă se transformă, printr-o transformare conformă, interiorul cercului de rază unitară în semiplanul complex stâng. Există două tipuri de transformări conforme (omografice):
– transformarea *w*

$$z=\frac{1+w}{1-w}, \tag{4.334}$$

– transformarea *r*

$$z=\frac{r+1}{r-1}. \tag{4.335}$$

În figura 4.52 se prezintă modul în care cele două schimbări de variabile transformă interiorul cercului de rază unitară din planul *z* în semiplanul complex stâng *w*, respectiv *r*.

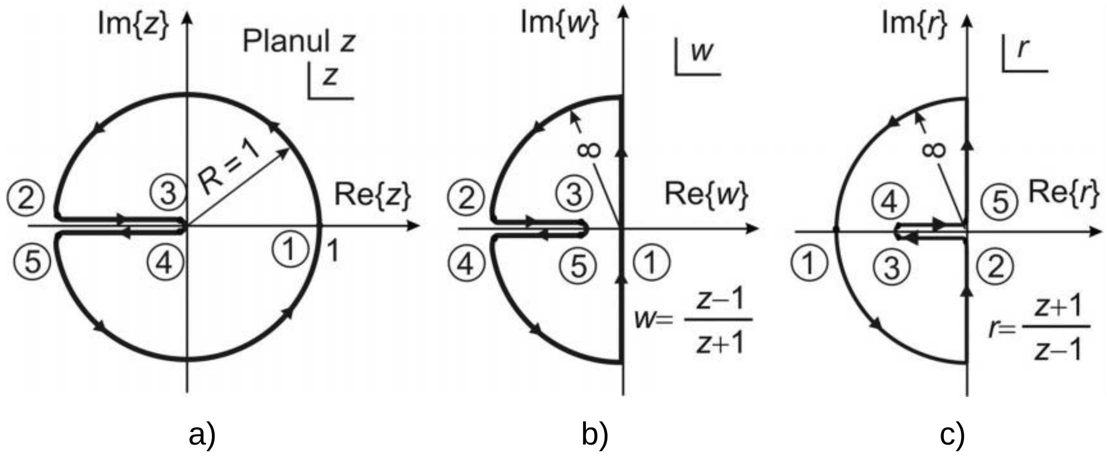


Fig. 4.52

Ambele transformări vor schimba ecuaţia caracteristică iniţială, care este o funcţie de *z*, într-un raport a două polinoame în r sau w de acelaşi ordin. Evident noua ecuaţie caracteristică este polinomul de la numărător. Niciuna dintre cele două transfomări nu are un avantaj respectiv dezavantaj faţă de cealaltă. În continuare vom ilustra cu câteva exemple modul de analiză a stabilităţii sistemelor discrete cu criteriul Routh care foloseşte transformata *r.*

Observaţie: Înainte de aplicarea efectivă a criteriului Routh se verifică dacă toţi coeficienţii ecuaţiei caracteristice în w sau r sunt pozitivi. După cum ştim de la sistemele continue în cazul în care această condiţie nu este îndeplinită sistemul nu este stabil şi nu mai este necesară verificarea cu criteriul Routh.

Exemplul 37

Considerăm sistemul cu ecuaţia caracteristică în z

$$A_z(z) = (z+1)(z+0.5)(z+2) = z^3 + 3.5z^2 + 3.5z + 1.$$

Folosind criteriul Routh să se evalueze stabilitatea sistemului discret.

Din expresia factorizată a ecuaţiei caracteristice se constată uşor că sistemul este instabil deoarece o rădăcină este egală cu 1 (aşadar plasată pe cercul de rază unitară), iar alta are valoarea -2, deci este în afara cercului de rază unitară.
Pentru a aplica criteriul Routh se aplică schimbarea de variabilă ecuaţiei caracteristice în z: Astfel se obţine:

$$P(r) = \left(\frac{r+1}{r-1}\right)^3 + 3.5\left(\frac{r+1}{r-1}\right)^2 + 3.5\left(\frac{r+1}{r-1}\right) + 1,$$

$$P(r) = \frac{(r+1)^3 + 3.5(r+1)(r-1)(r+1+r-1) + (r-1)^3}{(r-1)^3} = \frac{9r^3 - r}{(r-1)^3},$$

de unde se obţine ecuaţia caracteristică în r , $A_r(r) = 9r^3 - r$ cu tabloul Routh:

r^3	9	-1
r^2	0; 27	0; -1
r^1	$\frac{-27+9}{27} = -\frac{18}{27} = -\frac{2}{3}$	0
r^0	-1	0

Deoarece coeficienţii din rândul doi sunt toţi egali cu zero aceştia se înlocuiesc cu valorile obţinute după derivarea polinomului format cu coeficienţii din rândul anterior adică, $\frac{\mathrm{d}A_r(r)}{\mathrm{d}r} = 27r^2 - 1$. Examinând termenii din prima coloană se observă că există o schimbare de semn deci sistemul discret este instabil. Rezultatul obţinut (sistem instabil) era previzibil deoarece:

1) nu toţi coeficienţii polinomului caracteristic $A_r(r)$ sunt pozitivi şi diferiţi de zero;

2) rădăcinile ecuaţiei caracteristice $A_r(r) = 9r^3 - r$, care se pot calcula uşor, sunt $r_1 = 0,\ r_{2,3} = \pm 1/3$. Prin urmare avem o rărdăcină nulă şi una în semiplanul complex drept.

O aplicaţie interesantă a criteriului Routh este analiza stabilităţii sistemele discrete în funcţie de valorile perioadei de eşantionare.

Exemplul 38

Se dă sistemul discret în circuit închis cu funcţia de transfer z

$$G_0(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{Kz(1-a)}{z^2 + z[K(1-a) - (1+a)] + a},$$

unde $a = e^{-T_e/T}$, cu T având valoare dată (cunoscută). Folosind criteriul Routh cu transformarea de variabilă r, să se analizeze stabilitatea sistemului discret în funcţie de valorile perioadei de eşantionare, respectiv ale parametrului $b = T_e/T$.

Rezolvare

Se aplică schimbarea de variabilă

$$z = \frac{r+1}{r-1},$$

ecuaţiei caracteristice în z, $A_r(z) = z^2 + z[K(1-e^{-T_e/T}) - (1+e^{-T_e/T})] + e^{-T_e/T}$. După efectuarea calculelor se obţine ecuaţia caracteristică în r

$$A(r) = Kr^2 + 2r + \frac{2(1+e^{-T_e/T})}{1-e^{-T_e/T}} - K = Kr^2 + 2r + \frac{2(1+e^{-b})}{1-e^{-b}} - K$$, cu tabloul Routh

r^2	K	$\frac{2(1+e^{-b})}{1-e^{-b}} - K$
r^1	2	0
r^0	$\frac{2(1+e^{-b})}{1-e^{-b}} - K$	0

Pentru ca sistemul să fie stabil este necesar ca toţi termenii din prima coloană să fie pozitivi, adică este necesar să avem

$$f(b) = \frac{2(1+e^{-b})}{1-e^{-b}} = \frac{2(1+e^{-T_e/T})}{1-e^{-T_e/T}} > K > 0.$$

În figura 4.53 se prezintă curba $f(b)$ şi domeniile de valori pentru care sistemul este stabil respectiv instabil.

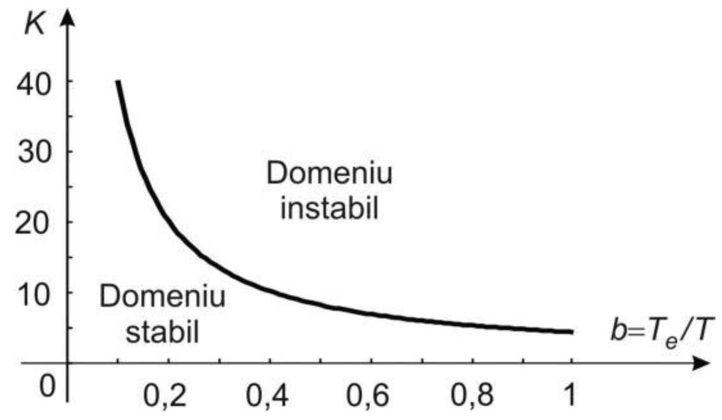


Fig. 4.53

Analiza exemplului anterior permite deducerea unor condiţii generale care pot fi utilizate pentru evaluare stabilităţii unui element discret de *ordinul doi*. Vom prezenta fără demonstraţie (pe care o propunem ca exerciţiu pentru cititor) condiţiile generale care pot fi utilizate pentru evaluarea stabilităţii elementului discret de *ordinul doi*; pornind de la ecuaţia caracteristică *z*, $A_z(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$ condiţiile se exprimă conform relaţiilor:

$$A_z(1) = a_0 + a_1 + a_2 > 0\,, \tag{4.336}$$

$$A_z(-1) = a_0 - a_1 + a_2 > 0\,, \tag{4.337}$$

$$\left| A_z(0) \right| = \left| a_2) \right| < 1. \tag{4.338}$$

Se observă că relaţiile (4.336-337) sunt similare cu condiţiile preliminare de la criteriul Jury, iar relaţia (4.338) exprimă condiţia ca rădăcinile să fie plasate în interiorul cercului de rază unitară.

Exemplul 39

Considerăm sistemul de reglare numeric, cu eşantionarea erorii şi element de reţinere de ordin zero, care are funcţia de transfer *s* în circuit deschis

$$G(s) = \frac{K}{s(sT+1)}\,.$$

a) Să se determine funcţia de transfer *z* sistemului în circuit închis;
b) Să se analizeze stabilitatea sistemului discret în funcţie de valorile perioadei de eşantionare respectiv în funcţie de valorile raportului $b = T_e / T$.

Se impune observaţia că sistemul discret din acest exemplu rezultă pornind de la acelaşi sistem continuu ca la exemplul anterior; diferenţa este dată de faptul că, acum, sistemul în circuit deschis *are element de reţinere de ordin zero*.

Rezolvare

Se calculează funcţia de transfer *z* a sistemului deschis cu element de reţinere de ordin zero:

$$G(z)=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{K}{s^2(sT+1)}\right\}.$$

În acest scop se determină mai întâi dezvoltarea în fracţii simple a funcţiei complexe din paranteza acoladă

$$\frac{1}{s^2(sT+1)}=\frac{1/T}{s^2(s+1/T)}=\frac{c_1}{s^2}+\frac{c_2}{s}+\frac{c_3}{s+1/T},$$

unde

$$c_1=[s^2Y(s)]_{s=0}=\left[\frac{1/T}{s+1/T}\right]_{s=0}=1,$$

$$c_2=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1/T}{s+1/T}\right]_{s=0}=\left[\frac{-1/T}{(s+1/T)^2}\right]=-T,$$

$$c_3=\left[(s+\frac{1}{\mathrm{T}})\frac{1/T}{s^2(s+1/T)}\right]_{s=-1/T}=\left[\frac{1/T}{s^2}\right]=T,$$

deci

$$\frac{1/T}{s^2(s+1/T)}=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T}{s+1/T}.$$

Aplicând transformata z termenilor din dezvoltare se obţine funcţia de transfer z a sistemului deschis:

$$G(z)=(1-z^{-1})K\left[\frac{zT_e}{(z-1)^2}-\frac{zT}{z-1}+\frac{zT}{z-\mathrm{e}^{-T_e/T}}\right]=KT\left[\frac{b}{z-1}-1+\frac{z-1}{z-\mathrm{e}^{-b}}\right],$$

$$G(z)=KT\,\frac{(z-1)^2-(z-1)(z-\mathrm{e}^{-b})+b(z-\mathrm{e}^{-b})}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-b})}=KT\,\frac{z(b+\mathrm{e}^{-b}-1)+1-\mathrm{e}^{-b}-b\mathrm{e}^{-b}}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-b})}.$$

Funcţia de transfer z a sistemuli închis va fi:

$$G(z)=\frac{z^2+z[KT(b+\mathrm{e}^{-b}-1)-(1+\mathrm{e}^{-b})]+KT(1-\mathrm{e}^{-b}-b\mathrm{e}^{-b})+\mathrm{e}^{-b}}{(z-1)(z-\mathrm{e}^{-b})},$$

cu ecuaţia caracteristică

$$A_z(z)=z^2+z[KT(b+\mathrm{e}^{-b}-1)-(1+\mathrm{e}^{-b})]+KT(1-\mathrm{e}^{-b}-b\mathrm{e}^{-b})+\mathrm{e}^{-b}.$$

Pentru evaluarea stabilităţii se aplică relaţiile (4.336-338):

$$A_z(1)=KTb(1-\mathrm{e}^{-b})>0, \qquad \text{(a)}$$

$$A_z(-1)=2(1+\mathrm{e}^{-b})-KT[b(1+\mathrm{e}^{-b})+2(\mathrm{e}^{-b}-1)]>0, \qquad \text{(b)}$$

$$[\,A_z(0)\,]=\left|KT(1-\mathrm{e}^{-b}-b\mathrm{e}^{-b})+\mathrm{e}^{-b}\right|<1. \qquad \text{(c)}$$

Deoarece K,T şi $b = T_e / T$ sunt pozitivi, condiţia (a) este îndeplinită oricare ar fi b mai mare ca zero. Condiţia (b) conduce la relaţia echivalentă:

$$KT < \frac{2(1+e^{-b})}{b(1+e^{-b}) + 2(e^{-b} - 1)} = f_1(b),$$

iar din (c) se obţine, având în vedere că termenii din modul sunt ambii pozitivi, relaţia:

$$KT < \frac{1-e^{-b}}{1-e^{-b} - be^{-b}} = f_2(b).$$

Cu un program MATLAB se veriffică uşor că pentru $b > 0$, $f_2(b) < f_1(b)$, deci condiţia finală, este conform relaţiei:

$$KT < \frac{1-e^{-b}}{1-e^{-b} - be^{-b}}.$$

În figura 4.54 se prezintă comparativ graficul funcţiei $KT = f_2(b)$, cu $T = 1$, şi curba factorului de amplificare K al sistemului discret din exemplul precedent. Presupunând $T = 1$ se constată că rezerva de stabilitate a sistemului cu element de reţinere de ordin zero este mai mică, deoarece factorul de amplificare care aduce sistemul cu ER0 la limita de stabilitate (de exemplu pentru $b = T_e / T = 0{,}1$) este mai mic ($K = 20$) decât în cazul sistemului fără ER0 la care avem $K = 40$.

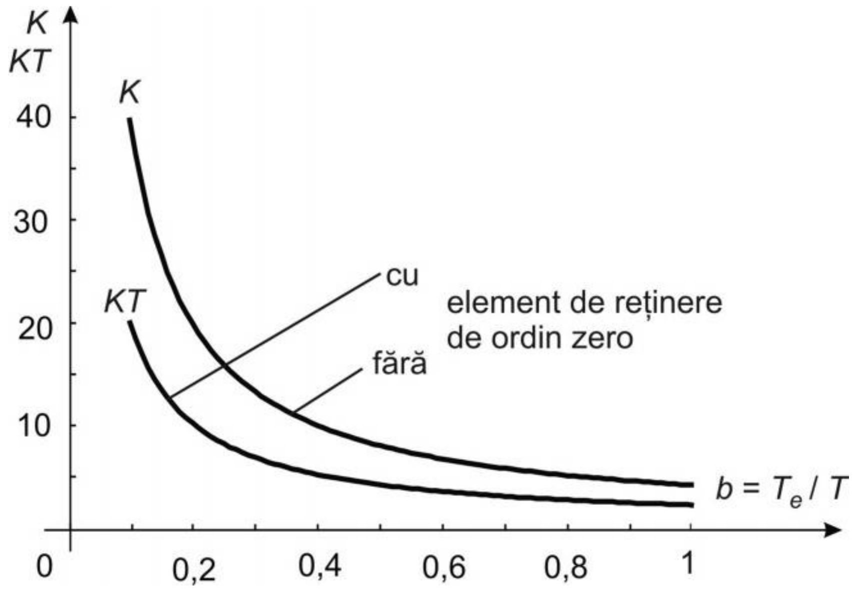


Fig. 4.54

4.9 ANALIZA ERORILOR STAŢIONARE LA SISTEMELE LINIARE DISCRETE

Se consideră sistemul discret de reglare cu reacţie unitară cu schema bloc prezentată în figura 4.55, unde $G(z)$ este funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis.

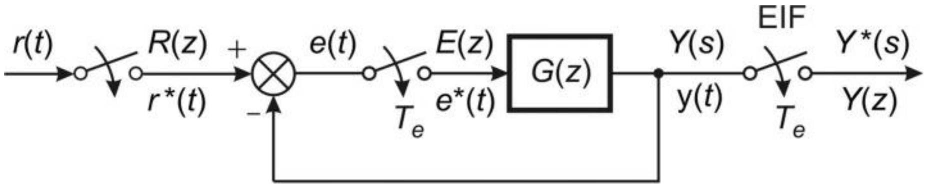


Fig. 4.55

Funcţia de transfer a sistemului închis este:

$$G_0(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+G(z)},$$

unde $R(z)=\mathcal{Z}\{r(t)\}$ este transformata z a mărimii de referinţă $r(t)$.

Mărimea de eroare sau abaterea de reglare a sistemului de reglare, notată $e(t)$, se consideră mărimea de ieşire a sumatorului din schema bloc a sistemului în circuit închis. Mărimea de eroare eşantionată este

$$e^*(t)=r^*(t)-y^*(t), \tag{4.339}$$

iar valoarea staţionară a acesteia va fi

$$e^*_{st}=\lim_{t\to\infty}e^*(t)=\lim_{k\to\infty}e(kT_e). \tag{4.340}$$

Calculul erorii staţionare se face presupunând cunoscute funcţiile de transfer ale sistemului deschis $G(z)$ sau închis $G_0(z)$) şi mărimea de intrare $r(t)$, respectiv transformata z a acesteia, $R(z)$.

Calculul în cazul general se realizează cu teorema valorii finale care se aplică transformatei z a semnalului eşantionat de eroare

$$e^*_{st}=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z). \tag{4.341}$$

Din schema bloc se vede că

$$E(z)=R(z)-Y(z)=R(z)-G(z)E(z),$$

de unde rezultă

$$E(z)=\frac{R(z)}{1+G(z)},$$

respectiv

$$e^*_{st}=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{R(z)}{1+G(z)}. \tag{4.342}$$

Rezultă astfel o relaţie generală de calcul a erorii staţionare care foloseşte funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis $G(z)$ şi transformata z a semnalului de intrare.

Eroarea staţionară se poate calcula de asemenea folosind funcţia de transfer a sistemului în circuit închis $G_0(z)$ care se corelează cu funcţia de transfer a sistemului deschis cu expresia

$$G_0(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)},$$

de unde rezultă

$$G(z) = \frac{G_0(z)}{1-G_0(z)}. \qquad (4.343)$$

Înlocuind (4.343) în (4.342) rezultă

$$e_{st}^* = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{R(z)}{1+\frac{G_0(z)}{1-G_0(z)}} = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})[1-G_0(z)]R(z). \qquad (4.344)$$

Acest rezultat se poate obţine direct observând că

$$E(z) = R(z) - Y(z) = R(z) - G_0(z)R(z) = R(z)[1-G_0(z)]. \qquad (4.345)$$

Recapitulând, rezultă următoarele expresii generale de calcul a erorii staţionare a unui sistem liniar discret (SLD) :

I) $$e_{st}^* = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{R(z)}{1+G(z)}, \qquad (4.346)$$

II) $$e_{st}^* = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})[1-G_0(z)]R(z). \qquad (4.347)$$

4.9.1 Calculul erorii staţionare a SLD pe baza funcţiei de transfer a sistemului deschis $G(z)$

Este indicat ca funcţia de transfer în circuit deschis să fie scrisă conform expresiei

$$G(z) = \frac{KB(z)}{(z-1)^{\alpha} A(z)}, \qquad (4.348)$$

cu $\alpha = 0, 1, \text{cel mult } 2$.

4.9.1.1 Eroarea staţionară la mărime de intrare (referinţă) treaptă

Avem în acest caz

$$r(t) = 1_+(t) \text{ şi } R(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}. \qquad (4.349)$$

Înlocuind (4.349) în (4.346) se obţine:

$$e_{st}^{*1} = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{1}{1-z^{-1}}\frac{1}{1+G(z)} = \frac{1}{1+\lim\limits_{z\to 1} G(z)}.$$

Se introduce notaţia $K_p^* = \lim\limits_{z\to 1} G(z)$, unde K_p^* se numeşte coeficient de eroare de poziţie a sitemului discret.

Rezultă astfel relaţia de calcul a erorii staţionare a unui SLD:

$$e_{st}^{*1} = \frac{1}{1+K_p^*}. \tag{4.350}$$

Valorile coeficientului de eroare de poziţie, K_p^*, depind de tipul sistemului, respectiv de valorile lui α din relaţia (4.348)

$$K_p^* = \lim_{z\to 1} G(z) = \lim_{z\to 1} \frac{KB(z)}{(z-1)^\alpha A(z)} = \begin{cases} K_d & \alpha = 0 \\ \infty & \alpha = 1,2 \end{cases}, \tag{4.351}$$

unde s-a notat $K_d = K\dfrac{B(1)}{A(1)}$.

Din (4.350) şi (4.351) rezultă în final

$$e_{st}^{*1} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+K_d} & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha = 1,2 \end{cases}, \tag{4.352}$$

unde cu e_{st}^{*1} s-a notat eroarea staţionară a sistemului discret la o mărime de intrare treaptă unitară.

Concluzie importantă: Un sistem liniar discret are eroarea staţionară nulă la o mărime de intrare treaptă dacă şi numai dacă funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis conţine cel puţin un pol egal cu 1.

4.9.1.2 Eroarea staţionară la mărime de intrare rampă unitară

În acest caz avem

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad R(z) = \frac{T_e z}{(z-1)^2} = \frac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}. \tag{4.353}$$

Înlocuind (4.353) în (4.346) rezultă

$$e_{st}^{*t} = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\frac{1}{1+G(z)},$$

$$e_{st}^{*t} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{\dfrac{z-1}{T_e} + \dfrac{z-1}{T_e}G(z)} = \frac{1}{\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z-1}{T_e}G(z)}. \tag{4.354}$$

Se introduce notaţia

$$K_v^* = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{T_e}G(z), \tag{4.355}$$

K_v^* fiind numit coeficient de eroare de viteză.
Cu această notaţie rezultă expresia

$$e_{st}^{*t} = \frac{1}{K_v^*}. \tag{4.356}$$

Valorile coeficientului de eroare de viteză depind de tipul sistemului, respectiv de valoarea lui α. Înlocuind (4.348)în relaţia de definiţie a coeficientului de eroare de viteză rezultă

$$K_v^* = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{T_e}\frac{KB(z)}{(z-1)^{\alpha}A(z)} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{T_e}\frac{KB(z)}{(z-1)^{\alpha-1}A(z)} = \begin{cases} 0 & \alpha=0 \\ K_d/T_e & \alpha=1 \\ \infty & \alpha=2 \end{cases}. \qquad (4.357)$$

În concluzie, eroarea staţionară la mărime de intrare rampă unitară va fi

$$e_{st}^{*t} = \begin{cases} \infty & \alpha=0 \\ T_e/K_d & \alpha=1 \\ 0 & \alpha=2 \end{cases}. \qquad (4.358)$$

Concluzii:

i. Un SLD are eroarea staţionară la mărime de intrare rampă cu valoare finită dacă şi numai dacă funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis conţine cel puţin un pol unitar (egal cu 1).

ii. Un SLD are eroare staţionară la mărime de intrare rampă finită numai dacă eroarea staţionară la treaptă este nulă.

4.9.2 Calculul erorii staţionare a SLD pe baza funcţiei de transfer a sistemului în circuit închis $G_0(z)$

Acum este indicat ca funcţia de transfer a sistemului în circuit închis să fie scrisă în formă factorizată conform expresiei:

$$G_0(z) = \frac{K_{d0}\prod_{i=1}^{m}(z-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(z-p_j)}\,, \qquad (4.359)$$

unde K_{d0} este factorul de amplificare a sistemului discret în circuit închis, z_i cu $i=\overline{1,m}$ sunt zerourile funcţiei de transfer, iar p_j cu $j=\overline{1,n}$ sunt polii funcţiei de transfer.

Eroarea staţionară se calculează cu relaţia generală

$$e_{st}^* = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})R(z)\left[1-G_0(z)\right].$$

4.9.2.1 Eroarea staţionară la treaptă

Deoarece în acest caz $r(t)=1_+(t)$, respectiv $R(z)=\dfrac{z}{z-1}$, rezultă

$$e_{st}^{*1} = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\frac{z}{z-1}\left[1-G_0(z)\right] = 1-\lim_{z\to 1}G_0(z) = 1-\frac{K_{d0}\prod_{i=1}^{m}(1-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(1-p_j)}. \qquad (4.360)$$

De aici se obţine că eroarea staţionară la treaptă este nulă, adică $e_{st}^{*1} = 0$ dacă $\lim\limits_{z \to 1} G_0(z) = 1$, deci dacă

$$K_{d0} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(1 - p_j)}{\prod\limits_{i=1}^{m}(1 - z_i)}. \tag{4.361}$$

4.9.2.2 Eroarea staţionară la rampă

Referinţa este $r(t) = t, t \geq 0$ cu transformata z, $R(z) = \dfrac{T_e z}{(z-1)^2}$, deci

$$e_{st}^{*t} = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1})\frac{T_e z}{(z-1)^2}\left[1 - G_0(z)\right] = \lim_{z \to 1}\frac{z-1}{z}\frac{T_e z}{(z-1)^2}\left[1 - G_0(z)\right] = T_e \lim_{z \to 1}\frac{1 - G_0(z)}{z-1}.$$

Se observă că $e_{st}^{*t} \to \infty$ dacă $1 - \lim\limits_{z \to 1} G_0(z) \neq 0$, deci dacă $\lim\limits_{z \to 1} G_0(z) \neq 1$. Prin urmare eroarea staţionară la rampă este finită numai în cazul în care $\lim\limits_{z \to 1} G_0(z) = 1$, deci când eroarea la treaptă este nulă, situaţie în care

$e_{st}^{*t} = \lim\limits_{z \to 1}\dfrac{1 - G_0(z)}{z-1} = \dfrac{0}{0}$, aşadar avem o nedeterminare.

Pentru eliminarea acestei nedeterminări se poate folosi teorema lui l’Hospital dar rezultatul care se obţine, în acest caz, nu este util din punct de vedere practic. Din acest motiv se va calcula eroarea la rampă apelând la coeficientul de eroare de viteză definit mai înainte

$$e_{st}^{*t} = \frac{1}{K_v^*}, \quad K_v^* = \lim_{z \to 1}\frac{z-1}{T_e}G(z). \tag{4.362}$$

Înlocuind $G(z)$ cu $\dfrac{G_0(z)}{1 - G_0(z)}$, în cazul, $\lim\limits_{z \to 1} G_0(z) = 1$, rezultă

$$K_v^* = \lim_{z \to 1}\frac{z-1}{T_e}\frac{G_0(z)}{1 - G_0(z)} = \frac{0}{0}.$$

Aplicând acum teorema lui l’Hospital avem

$$K_v^* = \frac{1}{T_e}\lim_{z \to 1}\frac{G_0(z) + (z-1)G_0'(z)}{-G_0'(z)} = \frac{1}{T_e}\lim_{z \to 1}\left[(1 - z) - \frac{G_0(z)}{G_0'(z)}\right],$$

$$K_v^* = -\frac{1}{T_e}\lim_{z \to 1}\frac{G_0(z)}{G_0'(z)}. \tag{4.363}$$

Dar

$$\frac{G_0'(z)}{G_0(z)} = \frac{d}{dz}\left[\ln G_0(z)\right] = \frac{d}{dz}\left[\ln \frac{K_{d0}\prod(z-z_i)}{\prod(z-p_j)}\right] =$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\ln K_{d0} + \sum_{i=1}^{m}\ln(z-z_i) - \sum_{j=1}^{n}\ln(z-p_j)\right] = \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{z-z_i} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z-p_j},$$

de unde obţinem în final

$$K_v^* = -\frac{1}{T_e}\lim_{z\to 1}\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{z-z_i} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{z-p_j}} = -\frac{1}{T_e}\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{1-z_i} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-p_j}},$$

respectiv

$$e_{st}^{*t} = \frac{1}{K_v^*} = T_e\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-p_j} - \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{1-z_i}\right]. \qquad (4.364)$$

4.10 ANALIZA SISTEMELOR DISCRETE CU METODA LOCULUI RĂDĂCINILOR

Metoda locului rădăcinilor poate fi aplicată cu uşurinţă şi în cazul sistemelor cu eşantionare. În aplicarea metodei pornim de la funcţia de transfer z a sistemului deschis. În acest scop considerăm sistemul cu eşantionare a erorii cu schema bloc prezentată în figura 4.56.

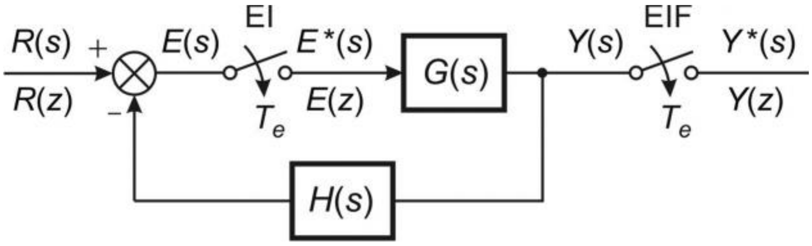


Fig. 4.56

După cum ştim, funcţia de transfer z a sistemului închis este

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+GH(z)},$$

unde $G(z)$ include de regulă şi funcţia de transfer a elementului de reţinere

$$GH(z) = \mathcal{Z}\{G(s)H(s)\}.$$

Rădăcinile sistemului închis, care oferă informaţia necesară pentru evaluarea stabilităţii sistemului discret de reglare, sunt determinate exclusiv de ecuaţia caracteristică a sistemului:

$$1+GH(z) = 0. \qquad (4.365)$$

Deoarece $GH(z)$ este o funcţie cu valori complexe, ecuaţia caracteristică poate fi scrisă sub forma echivalentă:

$$GH(z) = |GH(z)| e^{j\varphi} = 1 \cdot e^{j(2k+1)\pi}, \qquad (4.366)$$

de unde, din egalarea modulului şi argumentului din ambii membrii, rezultă condiţia modulului:

$$|GH(z)| = 1, \qquad (4.367)$$

şi condiţia argumentului:

$$\varphi = \angle GH(z) = \pm 180(2k+1), \; k = 0,1,... \qquad (4.368)$$

Valorile lui z care îndeplinesc condiţiile modulului şi argumentului sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice sau polii sistemului în circuit închis.
Pentru ca un punct să aparţină locului rădăcinilor, este însă suficientă îndeplinirea uneia dintre cele două condiţii. Prin urmare, reprezentarea grafică a punctelor din planul complex, care satisfac, de exemplu, numai condiţia fazei este de fapt locul rădăcinilor pentru sistemul în circuit închis. Valorile rădăcinilor ecuaţiei caracteristice (polii sistemului în circuit închis) care corespund unei valori date a factorului de amplificare se pot determina din condiţia modulului. În cele mai multe cazuri, factorul de amplificare K reprezintă un parametru al funcţiei de transfer a sistemului deschis, $GH(z)$, şi ecuaţia caracteristică se poate scrie conform expresiei:

$$1 + \frac{K(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)} = 0, \qquad (4.369)$$

prin urmare locul rădăcinilor este locul geometric al polilor sistemului închis când amplificarea K se modifică de la zero la infinit.
Remarcăm faptul că, pentru a începe desenarea locului rădăcinilor a unui sistem, trebuie să cunoaştem valorile polilor şi zerourilor funcţiei $GH(z)$.

Reguli generale de trasare a locului rădăcinilor

Pentru sisteme complexe, cu mai multe singularităţi (poli şi zerouri), trasarea locului rădăcinilor este aparent complicată, dar, dacă se aplică sistematic o serie de reguli, construcţia grafică a locului rădăcinilor se simplifică mult. Astfel, prin amplasarea punctelor particulare şi a asimptotelor, după evaluarea unghiurilor de plecare (sosire) a ramurilor locului din polii complexi (în zerourile complexe) se poate schiţa fără dificultate forma de variaţie a locului rădăcinilor pentru un caz dat. Avantajele cel mai însemnate ale metodei locului rădăcinilor apar, de fapt, în cazul sistemelor de ordin ridicat pentru care găsirea polilor funcţiei de transfer în circuit închis cu alte metode este extrem de laborioasă.
Având în vedere că trasarea locului rădăcinilor are acelaşi regim de construcţie ca în cazul sistemelor continue, în continuare se vor prezenta, în rezumat, fără prea multe justificări, regulile generale de trasare a locului rădăcinilor pentru un sistem cu eşantionare închis cu reacţie negativă neunitară.

Pasul 1. Se determină ecuaţia caracteristică

$$1 + GH(z) = 0,$$

care se aranjează astfel încât să se pună în evidenţă, parametrul care ne interesează, ca un factor multiplicativ, conform expresiei

$$1+\frac{K\,B(z)}{A(z)}=1+\frac{K(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}=0\,.$$

În discuţia de faţă, vom presupune că parametrul considerat este factorul de amplificare K, unde K>0. Dacă se acceptă valori negative ale factorului de amplificare (K<0), caz în care avem de fapt o reacţie pozitivă, va fi necesar să se modifice condiţia fazei (a argumentului).

Pasul 2. Se determină numărul ramurilor locului rădăcinilor care este egal cu n (numărul polilor funcţiei de transfer a sistemului deschis). Se plasează, în planul complex, polii şi zerourile funcţiei $GH(z)$. Polii se marchează cu un Ò iar zerourile cu un o. Locul rădăcinilor începe în polii sistemului deschis şi se termină în zerouri (cu valoare finită sau la infinit).

Pasul 3. La stânga unui număr impar de poli reali plus zerori reale, se desenează locul rădăcinilor de pe axa reală.

Pasul 4. Se desenează asimptotele ramurilor locului rădăcinilor.
– Numărul asimptotelor este egal cu $n–m$;
– Unghiurile asimptotelor,

$$\varphi_k=\frac{\pm 180^{o}(2k+1)}{n-m},\ (k=0{,}1{,}2,....)\,; \tag{4.370}$$

– Abscisa punctului de intersecţie a aimptotelor,

$$\sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_j}{n-m}\,. \tag{4.371}$$

Pasul 5. Se găsesc punctele de ramificaţie (de sosire şi de plecare). În acest scop scriem ecuaţia caracteristică conform expresiei

$$1+\frac{K\,B(z)}{A(z)}=0,\ \text{sau}\ K=-\frac{A(z)}{B(z)}\,. \tag{4.372}$$

Punctele de ramificaţie ale locului rădăcinilor se determină prin rezolvarea ecuaţiei

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}z}=\frac{B'(z)A(z)-B(z)A'(z)}{B^2(z)}=0\,, \tag{4.373}$$

unde caracterul prim indică operaţia de derivare în raport cu variabila z. Este important să remarcăm însă că punctele de ramificaţie vor fi numai acele rădăcini reale ale ecuaţiei (7) care se află pe porţiunea considerată a locului rădăcinilor de pe axa reală.

Pasul 6. Se determină unghiul de plecare (unghiul de sosire) al locului rădăcinilor dintr-un pol complex (într-un zero complex).

– Unghiul de plecare dintr-un pol complex $=\varphi_p = 180^\circ - \sum \theta_j + \sum \Phi_i$; (4.374)

– Unghiul de sosire într-un zero complex $=\varphi_s = 180^\circ - \sum \Phi_i + \sum \theta_j$; (4.375)

Φ sunt unghiurile vectorilor care încep în zerouri, iar θ sunt unghiurile vectorilor complexi care pleacă din poli.

Pasul 7. Se determină punctele în care locul rădăcinilor intersectează cercul de rază unitară.

Aceste puncte se determină folosindu-se criteriul de stabilitate Routh-Hurwitz modificat, sau rezolvând pentru ω şi K ecuaţia complexă,

$$1+\frac{K\,B(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e})}{A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e})} = 1+\frac{K(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}-z_1)(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}-z_2)\cdots(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}-z_m)}{(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}-p_1)(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}-p_2)\cdots(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T_e}-p_n)} = 0\,. \qquad (4.376)$$

Pasul 8. Se gradează, dacă este necesar, locul rădăcinilor. Valoarea lui K corespunzătoare fiecărui punct de pe locul rădăcinilor din planul z se determină cu relaţia:

$$K = \frac{1}{\left|GH(z_1)\right|} = \left|\frac{A(z_1)}{B(z_1)}\right|. \qquad (4.377)$$

Exemplul 1

Să se schiţeze locul rădăcinilor pentru sistemul discret de reglare cu reacţie negativă unitară ($H(s)=1$) prezentat în figura 4.1. Funcţia de transfer z a sistemului în circuit deschis este:

$$G(z) = \frac{K(1-e^{-T_e})z}{(z-1)(z-e^{-T_e})}.$$

Soluţie

Pasul 1. Deoarece sistemul are reacţie negativă unitară, $H(s)=1$, ecuaţia caracteristică este:

$$1+GH(z) = 1+\frac{Kz(1-e^{-T_e})}{(z-1)(z-e^{-T_e})}.$$

Factorul de amplificare K se presupune pozitiv şi variabil de la 0 la ∞.

Pasul 2. Deoarece gradul polinomului sistemului deschis este $n=2$, rezultă că locul rădăcinilor are două ramuri. Funcţia de transfer a sistemului deschis are doi poli:

$p_1 = 1,\ p_2 = e^{-T_e}$, cu $0 < p_2 < 1$,

şi un zero:

$z_1 = 0$.

Repartiţia poli-zerouri pentru funcţia de transfer considerată în exemplu poate fi vizualizată în figura 4.57 care prezintă şi schiţa locului rădăcinilor.

Pasul 3. Locul rădăcinilor pe axa reală are două porţiuni care respectă condiţia generală:
- între polii p_1 şi p_2;
- între zeroul $z_1 = 0$ şi ∞.

Pasul 4. Numărul asimptotelor este:
$n - m = 2 - 1 = 1$
Singura asimptotă este suprapusă axei reale (deoarece $\varphi_1 = 180°(2k+1) = 180°$) şi corespunde locului rădăcinilor cuprins între $z_1 = 0$ şi ∞.

Pasul 5. Deoarece avem porţiuni ale locului pe axa reală între doi poli, respectiv zerouri (unul finit, celălalt la infinit), există 2 puncte de ramificaţie. Scriind ecuaţia caracteristică conform expresiei:

$$K = \frac{(z-1)(z-e^{-T_e})}{z(1-e^{-T_e})} = \frac{z^2 - (1+e^{-T_e})z + e^{-T_e}}{z(1-e^{-T_e})} = \frac{A(z)}{B(z)},$$

punctele de ramificaţie sunt soluţiile ecuaţiei

$$\frac{dK}{dz} = \frac{z(1-e^{-T_e})(2z-1-e^{-T_e}) - (1-e^{-T_e})[z^2 - (1+e^{-T_e})z + e^{-T_e}]}{z^2(1-e^{-T_e})^2} = 0,$$

respectiv

$$z^2(1-e^{-T_e}) - e^{-T_e}(1-e^{-T_e}) = 0,$$

$$z_{r1,2} = \pm\sqrt{e^{-T_e}}.$$

Se verifică uşor că, deoarece $e^{-T_e} < 1$, $\sqrt{e^{-T_e}} > e^{-T_e}$, deci $z_{r1} \in (p_2, p_1) \equiv (e^{-T_e}, 1)$.

Pasul 6. Funcţia de transfer *z* a sistemului deschis nu are poli complecşi sau zerouri complexe.
Pentru o schiţare mai exactă vom arăta că forma locului rădăcinilor pentru cazul rădăcinilor complexe ale sistemului închis este un cerc. În acest scop se înlocuieşte $z = x + jy$ în funcţia de transfer *z* a sistemului deschis:

$$G(x+jy) = \frac{(1-e^{-T_e})(x+jy)}{[(x-1)+jy][(x-e^{-T_e})+jy]},$$

şi se scrie condiţia argumentului, de unde rezultă:

$$\angle G(z) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \operatorname{arctg}\frac{\mathrm{y(2x-1-}e^{-T_e})}{(x-1)(x-e^{-T_e}) - y^2} = (2k+1)180°$$

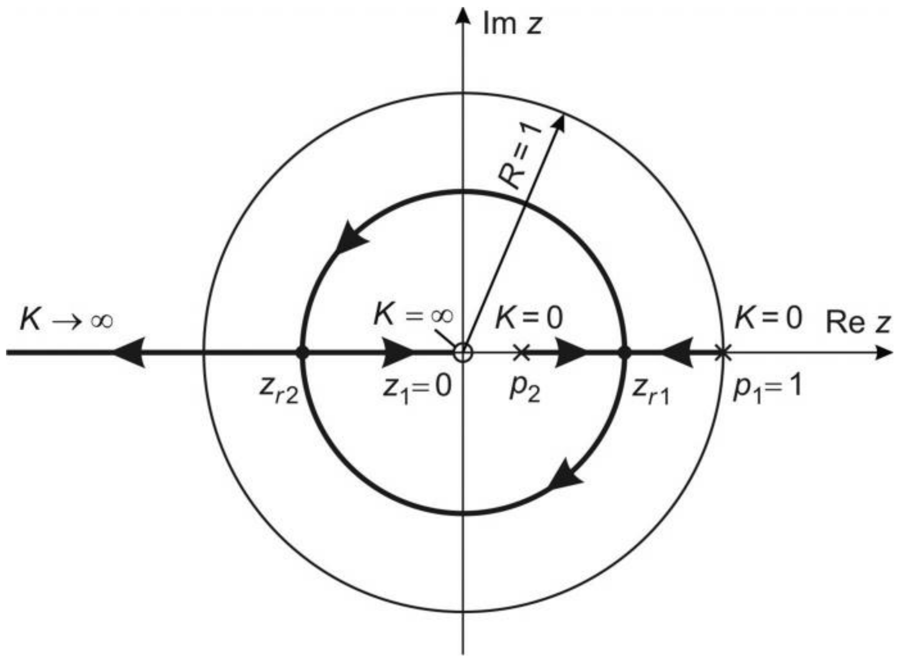


Fig 4.57

Se aplică apoi funcţia tangentă relaţiei de mai sus în ambii membrii şi se obţine:

$$\mathrm{tg}\angle G(z)=\frac{\dfrac{y}{x}-\dfrac{y(2x-1-e^{-T_e})}{(x-1)(x-e^{-T_e})-y^2}}{1+\dfrac{y}{x}\dfrac{y(2x-1-e^{-T_e})}{(x-1)(x-e^{-T_e})-y^2}}=\mathrm{tg}(2k+1)180^\circ=0\,.$$

De aici avem

$$\frac{y}{x}-\frac{y(2x-1-e^{-T_e})}{(x-1)(x-e^{-T_e})-y^2}=0\,,$$

de unde, după simplificare, rezultă:

$$x^2+y^2=e^{-T_e}\,,$$

deci locul geometric al rădăcinilor este un cerc cu centrul în origine şi raza $R=\sqrt{e^{-T_e}}$.

Pasul 7. Cercul de rază unitară este intersectat o singură dată de locul rădăcinilor. Acest punct se obţine pentru $z_i=-1$. Factorul de amplificare pentru care sistemul discret este la limita de stabilitate se determină cu relaţia:

$$K_1=\frac{1}{|GH(z_i)|}=\left|\frac{A(z_i)}{B(z_i)}\right|=\left|\frac{-2(-1-e^{-T_e})}{-1(1-e^{-T_e})}\right|=2\frac{1+e^{-T_e}}{1-e^{-T_e}}\,.$$

Pasul 8. Vom calcula factorul de amplificare pentru valorile variabilei z pentru care locul rădăcinilor intersectează axele reală şi imaginară:

$$K_2=\frac{1}{\left|G(\sqrt{e^{-T_e}})\right|}=\left|\frac{(\sqrt{e^{-T_e}}-1)(\sqrt{e^{-T_e}}-e^{-T_e})}{\sqrt{e^{-T_e}}(1-e^{-T_e})}\right|=\frac{(1-\sqrt{e^{-T_e}})^2}{1-e^{-T_e}}\,,$$

$$K_3 = \frac{1}{\left|G(-\sqrt{e^{-T_e}})\right|} = \left|\frac{(-\sqrt{e^{-T_e}}-1)(-\sqrt{e^{-T_e}}-e^{-T_e})}{-\sqrt{e^{-T_e}}(1-e^{-T_e})}\right| = \frac{(1+\sqrt{e^{-T_e}})^2}{1-e^{-T_e}},$$

$$K_4 = \frac{1}{\left|G(j\sqrt{e^{-T_e}})\right|} = \left|\frac{(j\sqrt{e^{-T_e}}-1)(j\sqrt{e^{-T_e}}-e^{-T_e})}{j\sqrt{e^{-T_e}}(1-e^{-T_e})}\right| = \frac{1+e^{-T_e}}{1-e^{-T_e}},$$

$$K_5 = \frac{1}{\left|G(-j\sqrt{e^{-T_e}})\right|} = \left|\frac{(-j\sqrt{e^{-T_e}}-1)(-j\sqrt{e^{-T_e}}-e^{-T_e})}{-j\sqrt{e^{-T_e}}(1-e^{-T_e})}\right| = \frac{1+e^{-T_e}}{1-e^{-T_e}}.$$

Particularizând pentru $T_e = 0.3$ s, vom avea următoarele valori pentru parametrii locului rădăcinilor:
- raza $R = 0{,}8607$
- factorul de amplificare la limita de stabilitate $K_1 = 13{,}4332$
- factorul de amplificare pentru $z = z_{1r}$, $K_2 = 0{,}0749$
- factorul de amplificare pentru $z = -z_{1r}$, $K_3 = 13{,}3583$
- factorul de amplificare pentru $z = \pm jz_{1r}$, $K_{4,5} = 6{,}7166$.

Interesantă este analiză valorilor obţinute şi a locului rădăcinilor când se modifică perioada de eşantionare. Astfel dacă T_e scade la valoarea $T_e = 0.1$, se constată că raza corespunzătoare locului pentru rădăcini complexe creşte la valoarea $R = 0{,}9512$, deci se apropie periculos de mult de limita de instabilitate, dar, aparent paradoxal, valoarea factorului de amplificare la limita de stabilitate creşte la $K_1 = 40{,}033$.

O explicaţie pentru aceste valori contradictorii este în faptul că, deşi sistemul este stabil chiar la valori mari ale factorului de amplificare, în cazul rădăcinilor complexe, gradul de oscilaţie este extrem de pronunţat, deoarece sistemul discret este foarte aproape de limita de stabilitate.

Exemplul 2

Se consideră sistemul din exemplul anterior care se completează cu un element de ordinul zero. Funcţia de transfer z a sistemului deschis va fi acum (avem în vedere că $H(s) = 1$):

$$G(z) = K\frac{(T_e + e^{-T_e} - 1)z + 1 - e^{-T_e} - T_e e^{-T_e}}{(z-1)(z-e^{-T_e})} = K\frac{zb_1 + b_0}{(z-1)(z-e^{-T_e})},$$

unde $b_1 = T_e + e^{-T_e} - 1$, $b_0 = 1 - e^{-T_e} - T_e e^{-T_e}$.

Soluţie.

Pasul 1. Ecuaţia caracteristică a sistemului de reglare este

$$1 + GH(z) = 1 + Kb_1\frac{z+b}{z^2 - (1+e^{-T_e})z + e^{-T_e}},$$

unde

$$b = \frac{b_0}{b_1} = \frac{1 - e^{-T_e} - T_e e^{-T_e}}{T_e + e^{-T_e} - 1}.$$

Cu un program simplu în MATLAB se poate vedea că pentru $T_e \in (0;2)$ sec, $b_1 \in (0;1{,}17)$ şi $b_1 \in (1;0{,}524)$. Factorul de amplificare K se presupune pozitiv şi variabil de la 0 la ∞.

Pasul 2. Deoarece gradul polinomului de la numitor este $n = 2$, locul rădăcinilor are 2 ramuri. Funcţia de transfer a sistemului deschis are 2 poli:

$p_1 = 1,\ p_2 = e^{-T_e}$, cu $0 < p_2 < 1$,

şi un zero:

$z_1 = -b$, cu $z_1 \in (-1; -0{,}524)$ când $T_e \in (0;2)$ sec.

În figura 4.58 se prezintă repartiţia poli-zero pentru sistemul cu funcţia de transfer dată în cazul $T_e = 0{,}3$ s. În această situaţie $p_2 = 0{,}7408$ şi $z_1 = -0{,}9049$.

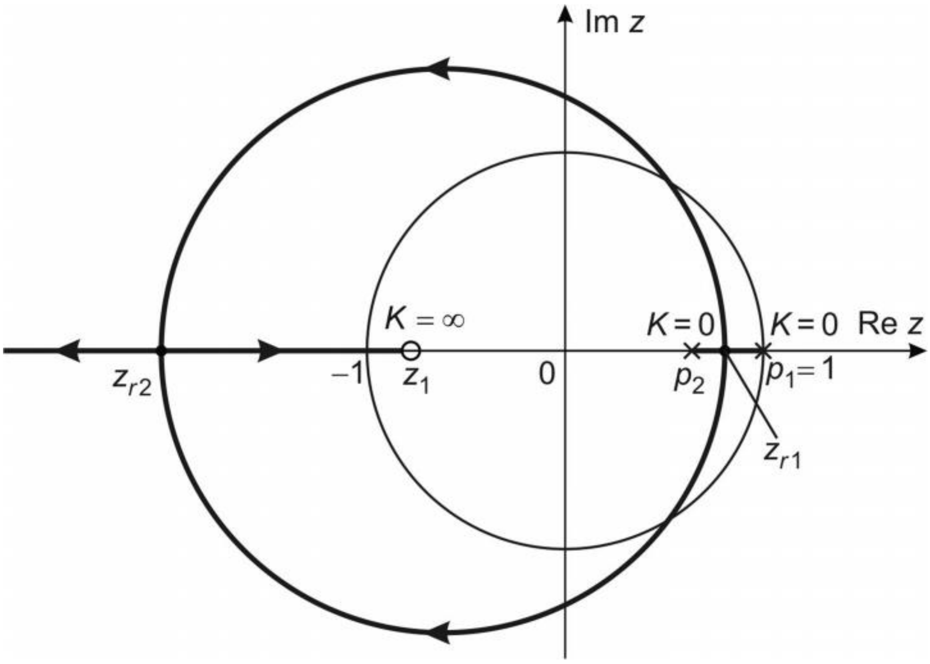


Fig. 4.58

Pasul 3. Locul rădăcinilor pe axa reală are două porţiuni şi anume:
- între polii p_1 şi p_2;
- între zeroul $z_1 = -b = -0{,}9049$ şi $-\infty$.

Pasul 4. Numărul asimptotelor este $n - m = 1$. Ca şi în exemplul precedent, singura asimptotă este pe axa reală şi corespunde locului rădăcinilor cuprins între z_1 şi $-\infty$.

Pasul 5. Deoarece există porţiuni ale locului pe axa reală între doi poli respectiv zerouri (unul finit, altul la infinit) vom avea puncte de ramificaţie. Aceste puncte se determină rezolvând ecuaţia

$$\frac{dK}{dz} = 0, \text{ unde } K = \frac{(z-1)(z-e^{-T_e})}{b_1(z+b)}.$$

Se obţine succesiv:

$$\frac{b_1(z+b)(2z-1-e^{-T_e})-b_1[z^2-(1+e^{-T_e})z+e^{-T_e}]}{[b_1(z+b)]^2}=0,$$

respectiv

$$z^2+2bz-(b+e^{-T_e}+be^{-T_e})=0,$$

cu soluţiile

$$z_{r1,2}=-b\pm\sqrt{b^2+b+(b+1)e^{-T_e}}\ .$$

Pentru $T_e=0{,}3$ sec, valorile celor două rădăcini sunt $z_{r1}=0{,}8657$ şi $z_{r2}=-2{,}6755$. Se poate vedea că aceste puncte de pe axa reală sunt într-adevăr puncte de ramificaţie fiind amplasate între cei doi poli (0,7405 şi 1), respectiv între zerouri (-0,9049 şi $-\infty$).
Ca şi în exemplul precedent, între cele două puncte de ramificaţie locul rădăcinilor are forma unui cerc. Procedând ca mai înainte se obţine ecuaţia:

$$(x+b)^2+y^2=b^2+b+(b+1)e^{-T_e},$$

deci cercul are centrul în punctul $(-b,0)$ şi raza $R=\sqrt{b^2+b+(b+1)e^{-T_e}}$. Pentru $T_e=0{,}3$, centrul cercului va fi în punctul $(-0{,}9049,\ 0)$ şi are raza $R=1{,}77$.

Pasul 6. Funcţia de transfer z a sistemului deschis nu are poli sau zerouri cu valori complexe.

Pasul 7. Locul rădăcinilor prezintă 3 puncte în care sistemul închis este la limita de stabilitate. Două din aceste puncte corespund unor rădăcini complex conjugate şi prin urmare în aceste puncte avem aceeaşi valoare a factorului de amplificare K_1. Pentru a datermina valoarea lui K_1 corespunzătoare rădăcinilor complexe, folosim criteriul Routh bazat pe transformarea omografică r. În acest scop se foloseşte relaţia:

$$1+GH(z)=1+K_1b_1\frac{z+b}{z^2-(1+e^{-T_e})z+e^{-T_e}}=\frac{z^2+(K_1b_1-1-e^{-T_e})z+K_1b_1b+e^{-T_e}}{z^2-(1+e^{-T_e})z+e^{-T_e}},$$

de unde rezultă ecuaţia caracteristică în z:

$$z^2+(K_1b_1-1-e^{-T_e})z+K_1b_1b+e^{-T_e}=z^2+a_1z+a_0=0,$$

în care $b_1b=b_0=1-e^{-T_e}-T_ee^{-T_e}$ şi $b_1=T_e+e^{-T_e}-1$.

În continuare, cu substituţia

$$z=\frac{r+1}{r-1},$$

se determină ecuaţia caracteristică în r:

$$\left(\frac{r+1}{r-1}\right)^2+a_1\left(\frac{r+1}{r-1}\right)+a_0=0,$$

respectiv:

$(1+a_1+a_0)r^2+2(1-a_0)r+1-a_1+a_0=0$.

Tabelul Routh asociat acestei ecuaţii este:

r^2	$1+a_1+a_0$	$1-a_1+a_0$
r^1	$2(1-a_0)$	0
r^0	$1-a_1+a_0$	0

La limita de stabilitate ecuaţia caracteristică în r are rădăcinile imaginare $\pm j\omega_r$, deci în tabloul Routh trebuie să avem un rând de zerouri. Acest lucru este realizat dacă termenul din rândul 2 (r^1) coloana 1 este egal cu zero, deci dacă:

$1-a_0=0$, respectiv $a_0=1$,

de unde, având în vedere că

$a_0=K_1b_0+e^{-T_e}$,

rezultă

$$K_1=\frac{1-e^{-T_e}}{b_0}=\frac{1-e^{-T_e}}{1-e^{-T_e}-T_ee^{-T_e}}.$$

Pentru $T_e=0{,}3\,\text{sec}$ rezultă că factorul de amplificare pentru care sistemul discret analizat este la limita de stabilitate are valoarea $K_1=7{,}02$.
Al treilea punct în care sistemul este la limita de stabilitate este $z=-1$, iar factorul de amplificare corespunzător K_2 se calculează cu relaţia:

$$K_2=\left|\frac{1}{GH(-1)}\right|=\left|\frac{z^2-(1+e^{-T_e})z+e^{-T_e}}{zb_1+b_0}\right|_{z=-1}=\left|\frac{2(1+e^{-T_e})}{b_0-b_1}\right|,$$

$$K_2=\left|\frac{2(1+e^{-T_e})}{2(1-e^{-T_e})-T_e(1+e^{-T_e})}\right|.$$

Pentru $T_e=0{,}3\,\text{sec}$ rezultă $K_2=448{,}44$, valoare care nu prezintă interes deoarece este mult mai mare decât $K_1=7{,}02$ obţinută la limita de stabilitate pentru rădăcinile complexe.
Locul rădăcinilor pentru o perioadă de eşantionare cu valoarea $T_e=0{,}1\text{sec}$ are următoarele date numerice:

- $p_1=1$, $p_2=0{,}9048$, $z_1=-0{,}9672$;
- $z_{r1}=0{,}9518$, $z_{r2}=-2{,}8863$;
- $R=1{,}919$, centrul $(-0{,}9672,\ 0)$;
- $K_1=20{,}34$.

4.11 MODELE ALE SISTEMEMLOR DISCRETE CU VARIABILE DE STARE

Considerăm sistemul continuu monovariabil la intrare şi la ieşire, $\sum(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$, descris la stare de ecuaţiile matriciale:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t), \tag{4.378a}$$

$$y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t), \tag{4.378b}$$

unde $\boldsymbol{x}$ este vectorul de stare.
Observaţie. În modelul matricial se presupune, aşa cum se întâmplă de obicei în practică, că matricea de transfer direct, $\boldsymbol{D}$ este nulă.
Sistemul discret cu variabile de stare poate fi reprezentat grafic ca în fig. 4.59, în care EI constituie eşantionorul ideal, EIF este un eşantionor ideal fictiv, iar ER0 este elementul de reţinere de ordinul zero.

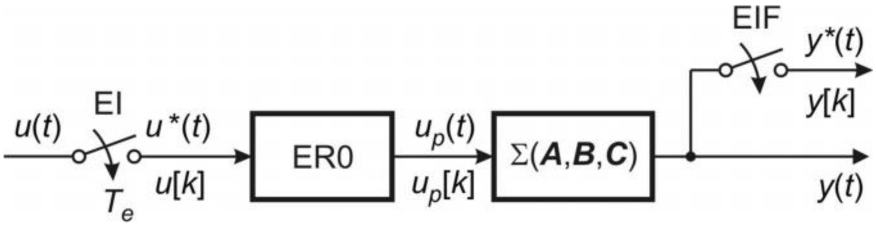


Fig. 4.59

Pentru deducerea relaţiilor care leagă matricele sistemului discret cu cele ale sistemului continuu se foloseşte răspunsul sistemului continuu modelat la stare exprimat conform relaţiei:

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}u(\tau)d\tau. \tag{4.379}$$

Pentru discretizare în ecuaţia răspunsului considerăm $t_0 = kT_e$ şi $t = (k+1)T_e$, deci $t - t_0 = T_e$ şi prin urmare expresia răspunsului la stare devine:

$$\boldsymbol{x}(kT_e + T_e) = e^{\boldsymbol{A}T_e}\boldsymbol{x}(kT_e) + \int_{kT_e}^{kT_e+T_e} e^{\boldsymbol{A}(kT_e+T_e-\tau)}\boldsymbol{B}u(\tau)d\tau. \tag{4.380}$$

Acest rezultat nu depinde de tipul elementului de reţinere deoarece u este specificat prin evoluţia sa în intervalul de eşantionare. Pentru obţinerea unui model discretizat cât mai simplu se consideră că mărimea de intrare se aplică, după eşantionare, prin intermediul unui element de reţinere de ordin zero, deci:

$$u(\tau) = u(kT_e),\ \text{pentru}\ \tau \in [kT_e, kT_e + T_e). \tag{4.381}$$

De asemenea, se face schimbarea de variabilă:

$$v = kT_e + T_e - \tau, \tag{4.382}$$

şi astfel se obţine:

$$\boldsymbol{x}(kT_e + T_e) = e^{\boldsymbol{A}T_e}\boldsymbol{x}(kT_e) + \left[\int_0^{T_e} e^{\boldsymbol{A}v} dv\right]\boldsymbol{B}u(kT_e)\,. \tag{4.383}$$

Dacă se definesc matricele

$$\mathrm{c} = e^{\boldsymbol{A}T_e} \text{ şi } \mathrm{d} = \left[\int_0^{T_e} e^{\mathbf{A}v} dv\right]\mathbf{B}\,, \tag{4.384}$$

şi se neglijează T_e în relaţia (4.383), se obţine ecuaţia discretizată de stare în forma unei ecuaţii cu diferenţe:

$$\boldsymbol{x}[k+1] = \mathrm{c}\,\boldsymbol{x}[k] + \mathrm{d}u[k]\,, \tag{4.385}$$

care împreună cu ecuaţia matriceală a ieşirii

$$y[k] = \boldsymbol{Cx}[k]\,, \tag{4.386}$$

formează modelul cu variabile de stare a sistemului discret.

Matricea de stare a sistemului discret egală cu exponenţiala matriceală $e^{\boldsymbol{A}T_e}$ se determină cu ajutorul dezvoltării în serie Taylor folosind relaţia:

$$\mathrm{c} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T_e + \frac{\boldsymbol{A}^2T_e^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3T_e^3}{3!} + \ldots\,, \tag{4.387}$$

care se poate scrie conform expresiei:

$$\mathrm{c} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T_e\,\mathrm{v}\,, \tag{4.388}$$

$$\text{unde } \mathrm{v} = \boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}T_e}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^2T_e^2}{3!} + \ldots\,. \tag{4.389}$$

Cu aceste notaţii, matricea integrală d poate fi evaluată termen cu termen, fiind:

$$\mathrm{d} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^kT_e^{k+1}}{(k+1)!}\boldsymbol{B} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^kT_e^k}{(k+1)!}T_e\boldsymbol{B} = \mathrm{v}\,T_e\boldsymbol{B}\,, \tag{4.390}$$

unde matricea v este calculată scriind dezvoltarea în serie conform expresiei:

$$\mathrm{v} = \boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}T_e}{2}\left(\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}T_e}{3}\left(\ldots\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}T_e}{N-1}\left(\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}T_e}{N}\right)\ldots\right)\right), \tag{4.391}$$

evaluare care oferă proprietăţi numerice mult mai bune decât evaluarea directă.

În continuare prezentăm un program simplu de calcul pentru matricele de stare c şi de intrare d:

1. Se introduc matricele sistemului continuu $\boldsymbol{A}$ şi $\boldsymbol{B}$ şi se adoptă valoarea perioadei de eşantionare T_e.
2. Se adoptă valoare iniţială a matricei v, $\mathrm{v} = \boldsymbol{I}$, unde $\boldsymbol{I}$ este matricea unitate a sistemului (cu dimensiunea egală cu dimensiunea matricei $\boldsymbol{A}$).
3. Se adoptă numărul de termeni ai dezvoltării în serie, N, şi se iniţializează contorul paşilor dezvoltării, $k \leftarrow N$.
4. Dacă $k = 1$, se trece la pasul 8.
5. Se actualizează valoarea matricei v:

$$\text{v} \leftarrow \boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}T_e}{k}\text{v} .$$

6. Se decrementează contorul: $k \leftarrow k-1$.
7. Se merge la pasul 4.
8. Se calculează matricea $\text{d} \leftarrow \text{v}\,T_e\boldsymbol{B}$.
9. Se evaluează matricea $\text{c} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T_e\,\text{v}$.

În practică de obicei se alege $N = 1$ sau 2.
Pentru $N = 1$, $\text{v} = \boldsymbol{I}$ şi matricele sistemului discret vor fi:

$$\text{c} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T_e\,\text{v} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T_e , \tag{4.392}$$

respectiv

$$\text{d} = \text{v}\,T_e\boldsymbol{B} = T_e\boldsymbol{B} , \tag{4.393}$$

iar dacă $N = 2$, $\text{v} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T_e$ şi matricele sistemului sunt:

$$\text{c} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T_e + \frac{\boldsymbol{A}^2T_e^2}{2} , \tag{4.394}$$

$$\text{d} = \boldsymbol{B}T_e + \frac{\boldsymbol{AB}}{2}T_e^2 . \tag{4.395}$$

Exemplul 1

Se dă sistemul cu funcţia de transfer

$$G(s) = \frac{1}{s^2} = \frac{\theta}{u} ,$$

care constituie modelul prezentat în literatură pentru procesul reglat al unui satelit orbital. Să se determine modelele cu variabile de stare pentru procesele continuu şi discret.

Rezolvare

Schema bloc din fig. 4.60 cu două integratoare înseriate oferă imediat modelul cu variabile de stare în cazul continuu.

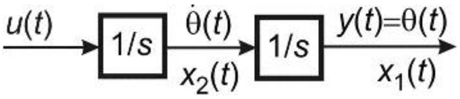


Fig. 4.60

De aici se pot scrie ecuaţiile

$$y = \theta = x_1 ,$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 ,$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = u ,$$

respectiv în formă matriceală

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \,,$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

deci matricele sistemului continuu modelat cu variabile de stare vor fi:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adoptând o dezvoltare în serie cu trei termeni pentru exponenţiala matricească $e^{\boldsymbol{A}T_e}$ rezultă modelul discret cu matricele

$$\mathrm{c} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T_e + \frac{\boldsymbol{A}^2 T_e^2}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_e + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T_e^2 = \begin{bmatrix} 1 & T_e \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{d} = \boldsymbol{B}T_e + \frac{\boldsymbol{AB}}{2} T_e^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} T_e + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{T_e^2}{2} = \begin{bmatrix} T_e^2/2 \\ T_e \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.11.1 Conversia modelului cu variabile de stare în funcţii de transfer *z*

Relaţia generală de conversie a unui model discret din spaţiul stărilor într-o funcţie de transfer se determină pornind de la ecuaţiile de stare şi ieşire scrise sub formă matriceală:

$$\boldsymbol{x}[k+1] = \mathrm{c}\,\boldsymbol{x}[k] + \mathrm{d}\,u[k]\,,$$

$$y[k] = \boldsymbol{Cx}[k]\,.$$

Prin aplicarea transformatei *z* în ipoteza condiţiilor iniţiale nule se obţine:

$$z\boldsymbol{X}(z) - \underbrace{\boldsymbol{x}(0)}_{0} = \mathrm{c}\,\boldsymbol{X}(z) + \mathrm{d}\,U(z)\,, \qquad (4.396)$$

$$Y(z) = \boldsymbol{CX}(z)\,, \qquad (4.397)$$

unde $U(z)$ şi $Y(z)$ sunt transformatele Z ale mărimilor de intrare şi ieşire, iar $\boldsymbol{X}(z)$ este vectorul transformatelor Z ale variabilelor de stare.
Rezolvând în raport cu $\boldsymbol{X}(z)$ prima ecuaţie se obţine

$$(z\mathbf{I} - \mathrm{c}\,)\boldsymbol{X}(z) = \mathrm{d}\,U(z)\,, \qquad (4.398)$$

respectiv

$$\boldsymbol{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathrm{c}\,)^{-1}\mathrm{d}\,U(z)\,, \qquad (4.399)$$

unde

$$(z\mathbf{I}-\mathrm{c})^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(z\mathbf{I}-\mathrm{c})}{\det(z\mathbf{I}-\mathrm{c})}, \tag{4.400}$$

este matricea fundamentală a sistemului discret.
În continuare se înlocuieşte $\boldsymbol{X}(z)$ din relaţia (4.399) în relaţia (4.397) şi astfel se obţine:

$$Y(z)=\boldsymbol{C}(z\mathbf{I}-\mathrm{c})^{-1}\mathrm{d}U(z), \tag{4.401}$$

de unde rezultă

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\boldsymbol{C}(z\mathbf{I}-\mathrm{c})^{-1}\mathrm{d}, \tag{4.402}$$

care este tocmai funcţia de transfer z exprimată în funcţie de matricele sistemului discret modelat la stare.

Exemplul 2

Să se determine funcţia de transfer z pentru sistemul discret care modelează procesul reglat al altitudinii unui satelit.

Rezolvare.

Din exemplul 1 cunoaştem modelul discret cu variabile de stare:

$$\mathrm{c}=\begin{bmatrix}1 & T_e\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathrm{d}=\begin{bmatrix}T_e^2/2\\ T_e\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}.$$

Calculăm mai întâi matricea fundamentală:

$$(z\mathbf{I}-\mathrm{c})^{-1}=\left(\begin{bmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & T_e\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}z-1 & -T_e\\ 0 & z-1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{\begin{vmatrix}z-1 & -T_e\\ 0 & z-1\end{vmatrix}}{(z-1)^2}.$$

Aplicând formula de definiţie obţinem succesiv:

$$G(z)=\boldsymbol{C}(z\mathbf{I}-\mathrm{c})^{-1}\mathrm{d}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\frac{\begin{vmatrix}z-1 & -T_e\\ 0 & z-1\end{vmatrix}}{(z-1)^2}\begin{bmatrix}T_e^2/2\\ T_e\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}\begin{bmatrix}z-1 & T_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_e^2/2\\ T_e\end{bmatrix}=\frac{(z-1)\dfrac{T_e^2}{2}+T_e^2}{(z-1)^2},$$

respectiv

$$G(z)=\frac{T_e^2}{2}\frac{z+1}{(z-1)^2}.$$

4.12 PROBLEME PROPUSE

1. Antena unui radar pentru controlul traficului aerian pe un aeroport se roteşte cu 6 rot/min. Datele care corespund poziţiei unui avion sunt afişate ca puncte pe ecranul din turnul de control, o dată la fiecare rotaţie a antenei. Se presupune că avionul urmărit prin radar se deplasează cu 600 km/h. Un sistem de control cu reacţie este realizat prin intermediul controlorului de zbor care transmite corecţiile de curs către pilot, comunicand cu pilotul la fiecare 6 km parcurşi.

a) Care este perioada de eşantionare, în secunde, a semnalului afişat pe ecran?

b) Care este perioada de eşantionare, în secunde, a instrucţiunilor transmise de controlorul de zbor?

c) Arataţi că este posibil ca avionul să zboare după un curs în formă de zig-zag care să apară pe ecranul controlorului de zbor ca un traseu în linie dreapta. Care este cea mai joasă frecvenţă a cursului în zig-zag care poate ascunde traseul real al avionului?

2. Considerăm un semnal continuu care are valori în domeniul 0-10V. Se cere ca semnalul să fie reprezentat într-un sistem de calcul astfel încât rezoluţia să fie de ~5mV. Determinaţi numărul necesar de biţi pe care trebuie să îl aibă convertorul A/N.

3. Folosind transformata Z exactă, să se calculeze functia de transfer G(z) pentru ansamblul ER0 + sistem continuu cu functia de transfer:

a) $G(s)=\dfrac{K}{s}$;

b) $G(s)=\dfrac{3}{s(s+3)}$;

c) $G(s)=\dfrac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$;

d) $G(s)=\dfrac{3}{(s+1)(s+3)}$;

e) $G(s)=\dfrac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s+4)}$;

f) $G(s)=\dfrac{1}{s(s^2+1)}$;

g) $G(s)=\dfrac{s+1}{s^2}$;

h) $G(s)=\dfrac{e^{-sT_e/2}}{s^2}$;

i) $G(s)=\dfrac{1-s}{s^2}$;

j) $G(s)=\dfrac{3e^{-1,5sT_e}}{(s+1)(s+3)}$.

4. Să se determine valoarea iniţială şi valoarea finală pentru semnalul discret $g[k]$ asociat următoarelor funcţii:

a) $G(z)=\dfrac{2}{(1-z^{-1})(1-0.2z^{-1})}$;

b) $G(z)=\dfrac{1}{(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$.

5. Să se determine, folosind metoda reziduurilor sau metoda descompunerii în fracţii simple, funcţia de timp $f[k]=f(kT_e)$ pentru următoarele transformate *z*:

a) $F(z)=\dfrac{z(z+1)(z+2)}{(z-0{,}5)(z-0{,}7)(z-0{,}9)}$;

b) $F(z)=\dfrac{(z+0{,}3)(z+0{,}5)}{(z-0{,}4)(z-0{,}6)(z-0{,}8)}$;

c) $F(z)=\dfrac{(z+1)(z+0{,}2)}{z(z-0{,}5)(z-0{,}6)}$.

6. Să se obţină transformata *Z* inversă a expresiei:

$$G(z)=\frac{0.5z}{(z-1)(z-0.5)}.$$

cu ajutorul următoarelor metode:

a) reziduurilor;
b) descompunerea în fracţii simple;
c) dezvoltarea în serie de puteri ale lui z^{-1}.

7. Să se calculeze transformata *Z* inversă a funcţiei complexe:

$$G(z)=\frac{z(z^2+2z+1)}{(z^2-z+1)(z^2+z+2)},$$

cu ajutorul următoarelor metode:

c) reziduurilor;
d) descompunerea în fracţii simple;
e) dezvoltarea în serie de puteri ale lui z^{-1}.

8. Să se găsească transformata *Z* modificată a următoarelor funcţii:

a) $\dfrac{1}{s^2}$;

b) $\dfrac{1}{s^2(s+a)}$;

c) $\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$.

Să se verifice dacă transformatele *Z* modificate ale acestor funcţii coincid, când $m=1$, cu transformatele *Z* ordinare.

9. Fie sistemul discret deschis fără ER0 cu funcţia de transfer a elementului continuu:

$$G(s)=\frac{s+4}{(s+1)(s+10)}.$$

a) Presupunând o mărime de intrare $u[k]=1_{+}[k]$ (treaptă unitară) şi $T_e=1$ să se determine transformata Z a mărimii de ieşire, $y[k]$;
b) Să se determine valoarea iniţială şi valoarea finală a mărimii de ieşire $y(t)$.

10. Fie sistemul discret deschis fără ER0 cu funcţia de transfer a elementului continuu:

$$G(s)=\frac{100}{s(s+100)}.$$

a) Presupunând o mărime de intrare $u[k]=1_{+}[k]$ (treaptă unitară) şi $T_e=1$ să se determine transformata Z a mărimii de ieşire, $y[k]$;
b) Să se determine valoarea iniţială şi valoarea finală a mărimii de ieşire $y(t)$.

11. Un filtru trece jos discret (FTJ) de tip Butterworth obţinut din filtrul continuu prin discretizare cu metoda transformatei Z biliniare (Tustin) prewarped are funcţia de transfer

$$G(z)=\frac{0{,}1036(z^2+2z+1)}{z^2-0{,}9045z+0{,}3201}.$$

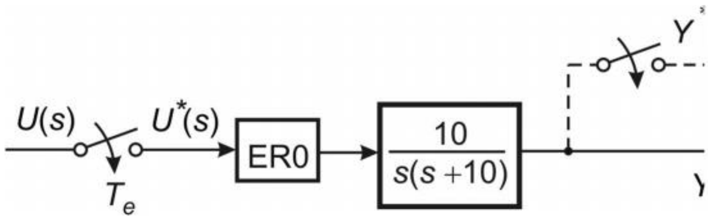
Să se determine ecuaţia cu diferenţe în forma recurentă care este utilizată pentru implementarea practică intrun sistem de calcul al acestui filtru.

12. Un filtru trece sus discret (FTJ) de tip Cebâşev obţinut din filtrul continuu prin discretizare cu metoda transformatei Z biliniare (Tustin) prewarped are funcţia de transfer

$$G(z)=\frac{0{,}6902(z^2-2z+1)}{z^2-1{,}4678z+0{,}6298}.$$

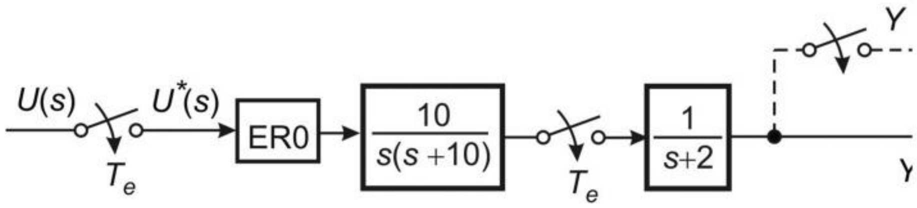
Să se determine ecuaţia cu diferenţe în forma recurentă care este utilizată pentru implementarea practică intrun sistem de calcul al acestui filtru.

13. Să se determine funcţia de transfer $G(z)=Y(z)/U(z)$ pentru sistemul deschis cu schema bloc din figură.



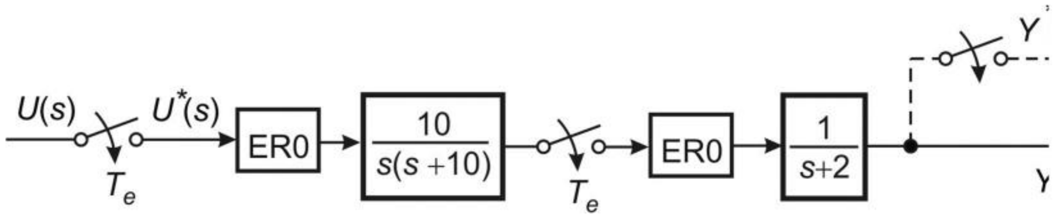
Se presupune că $T_e=0{,}1$ s.

14. Să se determine funcţia de transfer $G(z)=Y(z)/U(z)$ pentru sistemul deschis cu schema bloc din figură.



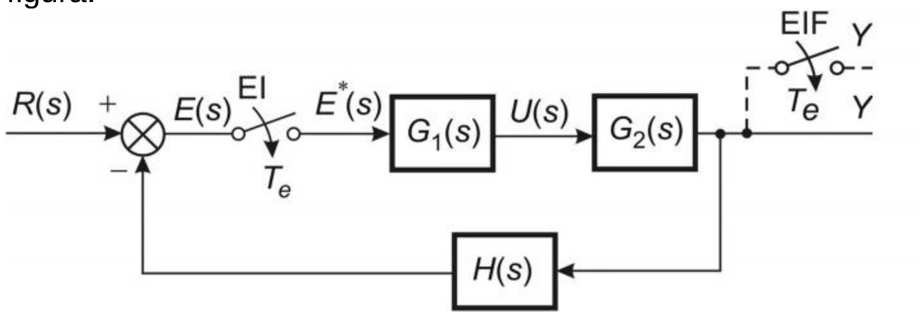
Se presupune că $T_e = 0{,}1$ s.

15. Să se determine funcţia de transfer $G(z) = Y(z)/R(z)$ pentru sistemul închis cu schema bloc din figură.

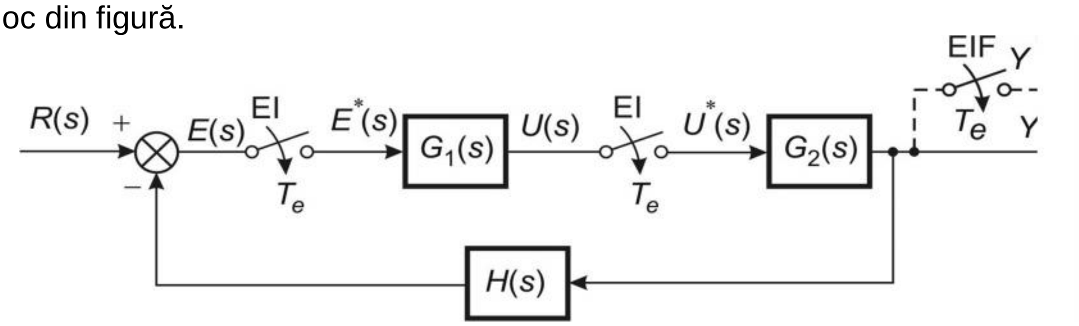


Se presupune că $T_e = 0{,}1$ s.

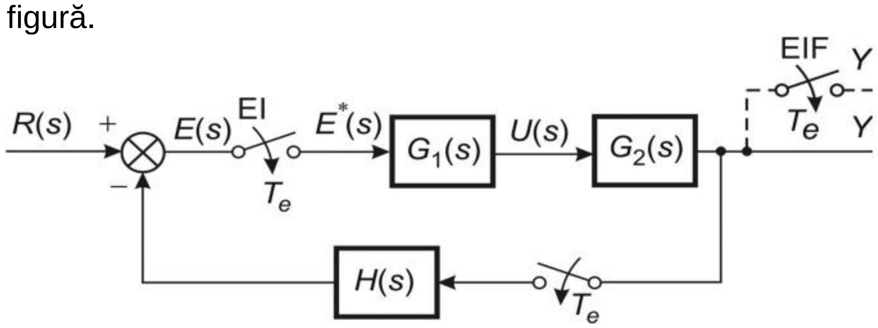
16. Să se determine funcţia de transfer $G(z) = Y(z)/R(z)$ pentru sistemul închis cu schema bloc din figură.



17. Să se determine funcţia de transfer $G(z) = Y(z)/U(z)$ pentru sistemul deschis cu schema bloc din figură.



18. Să se determine funcţia de transfer $G(z) = Y(z)/R(z)$ pentru sistemul închis cu schema bloc din figură.



19. Funcţia de transfer z a unui filtru este

$$G(z)=\frac{2z+1}{(2z-1)(z+1)}.$$

a) Să se evalueze stabilitatea filtrului;
b) Considerând că mărimile de intrare şi ieşire sunt $u[k]$ şi $y[k]$ să se determine ecuaţia cu diferenţe care implementează filtrul discret;
c) Presupunând $u[k]=1_{+}[k]$ şi $y[k]=0$ pentru $k<0$, să se determine valorile eşantioanelor $y[1]$, $y[2]$, $y[3]$ şi $y[4]$.

20. Fie sistemul de reglare cu eşantionarea erorii fără ER0 cu reacţie negativă unitară având funcţia de transfer a elementului continuu:

$$G(s)=\frac{1}{s^2(s+5)}.$$

a) Presupunând o mărime de intrare treaptă unitară şi $T_e=1$ să se determine transformata Z a mărimii de ieşire, $y[k]$;
b) Să se determine expresia mărimii de ieşire în momentele de eşantionare;
c) Să se determine valoarea finală a răspunsului de la ieşire.

21. Se dau mai jos ecuaţiile caracteristice ale câtorva sisteme de reglare cu eşantionare:

a) $z^3+5z^2+3z+2=0$;

b) $3z^5+4z^4+z^3+2z^2+5z+1=0$;

c) $z^4+9z^3+3z^2+9z+1=0$.

Să se analizeze stabilitate acestor sisteme.

22. Considerând $y[k]$ mărimea de ieşire şi $u[k]$ mărimea de intrare, să se verifice stabilitatea sistemului descris in domeniul timpului de ecuatie recurentă cu diferenţe:

a) $y[k]=0{,}5y[k-1]-0{,}3y[k-2]+u[k]$;

b) $y[k]=1{,}6y[k-1]-y[k-2]+u[k]$;

c) $y[k]=0{,}8y[k-1]+0{,}4y[k-2]+u[k]$.

23. Considerăm ecuaţia cu diferente $y[k+2]=0{,}25y[k]$.

a) Presupunând că soluţia ecuaţiei cu diferenţe este $y[k]=z^k$ să se gasească ecuaţia caracteristică in y;

b) Să se determine rădăcinile ecuaţiei caracteristice, z_1 şi z_2, şi, pe baza valorilor acestora să se stabilească dacă sistemul descris de această ecuatie cu diferenţe este stabil sau instabil;

c) Presupunand solutia generala de forma

$$y[k]=c_1z_1^k+c_2z_2^k$$

să se determine valorile constantelor c_1 şi c_2, astfel încât să fie indeplinite condiţiile iniţiale $y[0]=0$, $y[1]=1$.

24. Repetă problema 23 pentru ecuaţia cu diferenţe $y[k+2] = -0{,}25\,y[k]$.

25. Repetă problema 23 pentru ecuaţia cu diferenţe $y[k+2] = y[k+1] - 0{,}5\,y[k]$.

26. Să se analizeze, folosind criteriul Jury, stabilitatea sistemelor discrete cu ecuaţia caracteristică:

a) $z^2 + 0{,}25$;

b) $z^3 - 1{,}1z^2 + 0{,}01z + 0{,}405$;

c) $z^3 - 3{,}6z^2 + 4z - 1{,}6$.

27. Se dau funcţiile de transfer z pentru sistemul în circuit închis:

a) $\dfrac{Y(z)}{R(z)} = \dfrac{z+0{,}5}{3(z^2 - z + 0.5)}$;

b) $\dfrac{Y(z)}{R(z)} = \dfrac{0.5z}{(z^2 - z + 0.5)}$.

Să se determine suprareglajul şi timpul de vârf ale răspunsului indicial (la mărime de intrare treaptă unitară).

28. Fie sistemul de reglare cu eşantionare a erorii cu reacţie negativă unitară cu funcţia de transfer a elementului continuu de pe calea directă:

$$G(s) = \frac{K}{s(1+0.2s)}.$$

a) Să se schiţeze locurile rădăcinilor pentru sistemul fără element de extrapolare de ordinul zero pentru $T_e = 0.1\text{s}$ şi $T_e = 1\text{s}$. Să se determine, în fiecare caz, valoarea limită a lui K pentru care sistemul este stabil;
b) Să se reia punctul a) atunci când sistemul are un element de extrapolare de ordinul zero.

29. Fie sistemul de reglare cu eşantionare cu reacţie negativă unitară având funcţia de transfer z în circuit deschis

$$G(z) = K\,\frac{0{,}4(z+0{,}6)}{z(z-1)(z-0{,}36)}.$$

Să se schiţeze locul rădăcinilor şi să se determine valoarea factorului de amplificare K pentru care sistemul dat este la limita de stabilitate.

30. Următorul polinom în z reprezintă ecuaţia caracteristică a unui sistem de reglare cu eşantionare:

$$z^3 + Kz^2 + 1.5Kz - (K+1) = 0.$$

Să se schiţeze locul rădăcinilor şi să se determine valoarea lui K la limita de stabilitate a sistemului.