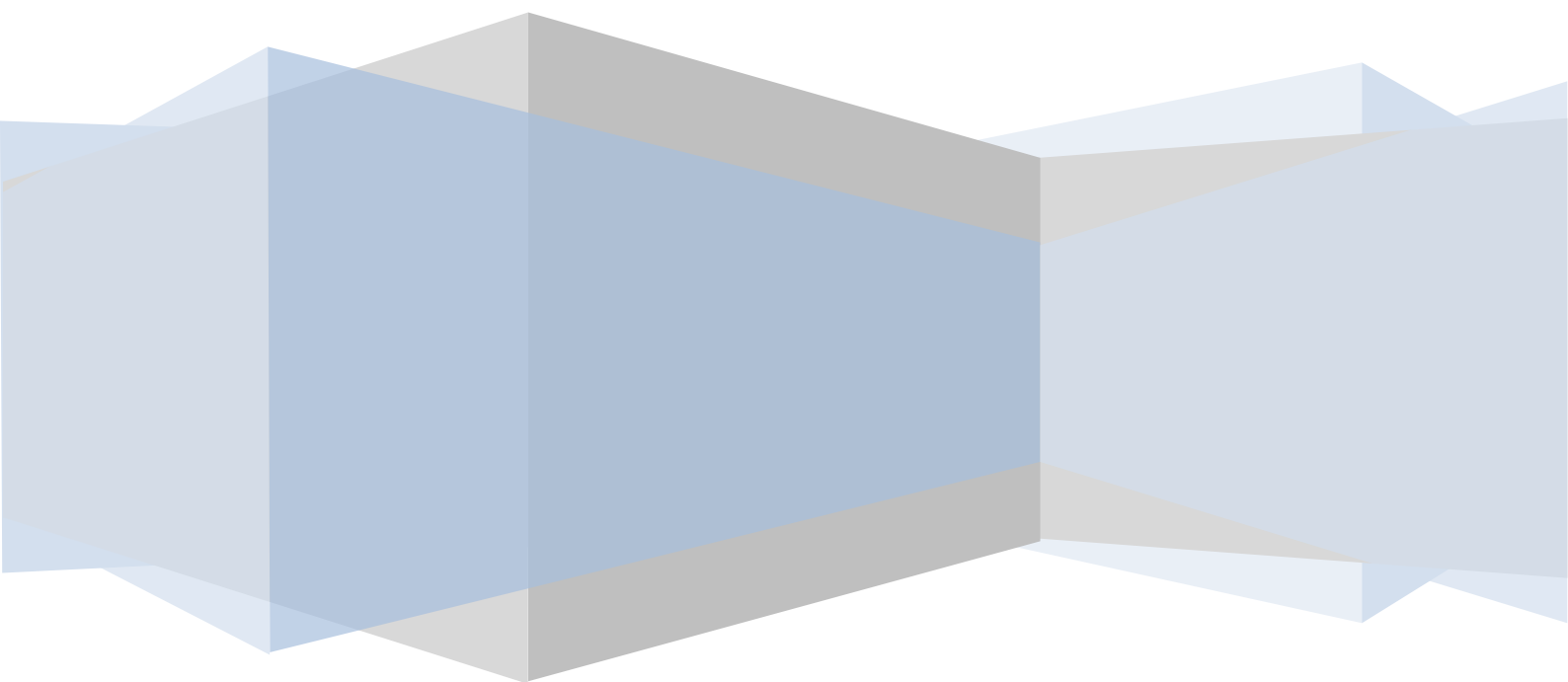


Universitatea Transilvania din Braşov  
Facultatea de Inginerie Electrică şi Ştiinţa Calculatoarelor  
Departamentul Automatică şi Tehnologia Informaţiei

# Programarea Calculatoarelor şi Limbaje de Programare III

Îndrumar de laborator

prof. dr. ing. Sorin-Aurel MORARU  
şef lucr. dr. ing. Dominic Mircea KRISTÁLY



BRAŞOV, 2012

## Cuprins

<b>INTRODUCERE ÎN PROGRAMAREA CALCULATOARELOR, ALGORITMI ȘI TEHNICI DE PROGRAMARE</b>	<b>3</b>
<b>1. LUCRUL CU FLUXURI DE TIP FIȘIER</b>	<b>5</b>
1.1. UTILIZAREA FLUXURILOR DE TIP FIȘIER ÎN LIMBAJUL C/C++	5
1.1.1. TESTAREA EXISTENȚEI UNUI FIȘIER	5
1.1.2. COPIEREA UNUI FIȘIER	6
1.2. UTILIZAREA FLUXURILOR ÎN LIMBAJUL JAVA	6
1.2.1. OBȚINEREA VERSIUNII ÎN TONALITĂȚI DE GRI (GRAYSCALE) A UNEI IMAGINI BMP	8
<b>2. LISTE</b>	<b>11</b>
2.1. TIPURI DE DATE	11
2.1.1. TIPURI DE DATE DEFINITE DE UTILIZATOR	11
2.1.1.1. Enumerări	11
2.1.1.2. Structuri	12
2.2. POINTERI	14
2.2.1. POINTERII ȘI TABLOURILE	16
2.2.2. POINTERII ȘI STRUCTURILE	16
2.2.3. GESTIUNEA DINAMICĂ A MEMORIEI CU OPERATORII NEW ȘI DELETE	17
2.2.3.1. Operatorul new	17
2.2.3.2. Operatorul delete	18
2.3. LISTE	18
2.3.1. REPREZENTAREA SECVENȚIALĂ	18
2.3.2. LISTE ÎNLĂNȚUITE	19
<b>3. ARBORI BINARI</b>	<b>23</b>
3.1. PARCURGerea ARBORILOR	23
<b>4. BACKTRACKING</b>	<b>27</b>
4.1. PROBLEMA SĂRITURII CALULUI PE TABLA DE ȘAH	28

<b>5. ALGORITMI DE CĂUTARE</b>	<b>33</b>
<b>5.1. CĂUTAREA BINARĂ</b>	<b>33</b>
<b>6. ALGORITMI DE SORTARE</b>	<b>35</b>
<b>6.1. METODA BULELOR (BUBBLESORT)</b>	<b>35</b>
<b>6.2. METODA RAPIDĂ (QUICKSORT)</b>	<b>36</b>
<b>7. GRAFURI</b>	<b>39</b>
<b>7.1. MODURI DE REPREZENTARE</b>	<b>39</b>
<b>7.2. ALGORITMI PENTRU MINIMIZARE CĂI</b>	<b>40</b>
7.2.1. DIJKSTRA	40
7.2.2. FLOYD	41
7.2.3. ARBORELE DE ACOPERIRE MINIM – ALGORITMUL KRUSKAL	42
7.2.4. ALGORITMUL PRIM PENTRU AFLAREA ARBORELUI PARȚIAL DE COST MINIM	45

## Introducere în programarea calculatoarelor, algoritmi și tehnici de programare

Majoritatea problemelor practice pe care le întâlnim în fiecare zi se pot rezolva efectuând un număr finit de operații într-o anumită ordine, tot timpul aceleași pentru aceeași problemă. Unele probleme (înrudite) acceptă aceleași tipuri de soluții, adică pot fi rezolvate urmând aceiași pași. Prin pas se înțelege o operație sau un raționament.

Suita de pași ce au ca scop rezolvarea unor probleme poartă numele de **algoritm**.

Noțiunea de algoritm este des întrebuințată atunci când vine vorba de scrierea programelor pentru calculator. Sistemele de calcul actuale sunt capabile doar să efectueze, foarte rapid, calcule matematice simple, fără a înțelege scopul sau sensul lor (sunt lipsite de inteligență); prin urmare nu sunt capabile să rezolve probleme prin raționamente proprii.

Pentru a putea rezolva o problemă, un program trebuie să implementeze, într-o formă înțeleasă de calculator, unul sau mai mulți algoritmi.

Scrierea de programe pentru calculator se realizează cu ajutorul *limbajelor de programare*. Acestea oferă programatorului o interfață de comunicație cu sistemul de calcul. Printre limbajele de programare utilizate pe scară largă la ora actuală pot fi menționate: C/C++, Java, C#, Visual Basic.

Scopul unui program de calculator este de a genera anumite rezultate pe baza unor date de intrare. Schematic, un program este asemenea unei cutii negre căreia i se dau niște date de intrare și generează la ieșire niște rezultate.



Fig. 1 – Schema de principiu a unui program

Pentru a ușura lucrul cu datele necesare unui program, toate limbajele de programare oferă mecanismul de *variabil*. O variabilă este, într-o definiție foarte simplă, o etichetă asociată unei adrese de memorie, deci, indirect, – unei locații de memorie.

Cea mai importantă caracteristică a unei variabile îl constituie *tipul de date* asociat.

Tipul de date specifică natura valorilor, modul de reprezentare a acestora și plaja de valori ce se poate memora în zona de memorie asociată variabilei. Majoritatea limbajelor de programare oferă

un set redus de tipuri de date, numite de bază. Pe lângă acest set, limbajele de programare moderne oferă și mecanisme pentru crearea de noi tipuri de date (tipuri de date *utilizator*), utilizând tipurile deja existente. Printre aceste mecanisme se remarcă enumerările, structurile și clasele.



Există și limbaje de programare (cum ar fi *Microsoft Visual Basic*) care nu au decât un singur tip de date, numit generic tipul *variant*. Practic, tipul variabilelor sunt extrapolate din contextul în care apar sau sunt convertite explicit în momentul utilizării. Astfel, o variabilă poate fi tratată atât ca număr, cât și ca șir de caractere.

Majoritatea algoritmilor necesită structuri de date specifice pentru a-și putea îndeplini scopul. Aceste structuri se obțin făcând apel la mecanismele de creare a tipurilor de date utilizator. Acest îndrumar va trata structurile de date în mod progresiv, pe măsură ce algoritmii prezentați o vor necesita.

Unii algoritmi fac apel la metode speciale de calcul/prelucrare, denumite **tehnici de programare**, majoritatea fiind împrumutate din matematică. Printre tehnicile ce vor fi utilizate în acest îndrumar se numără: *greedy*, *recursivitate*, *backtracking* și *divide et impera*.



Etimologia cuvântului *algorithm* provine de la denumirea cărții *Algoritmi de numero Indorum* (sec. XII), care este o traducere în latină după *Muhammad ibn Musa Khwarizmi* (محمد بن موسى خوارزمي – *Muhammad bin Mūsā Abū Ḡāʿfar al-Ḥawārizmī*), matematician, astronom și geograf persan din secolul VII. Cuvântul *algoritmi* este traducerea latină a numelui *Al-Khwārizmī* (*cel din Khwārizm*).

*Al-Khwārizmī* este recunoscut de mulți matematicieni ca fiind părintele algebrei. El a prezentat, pentru prima dată, un mod sistematic de rezolvare a ecuațiilor liniare și pătratic. În *Arithmetica* a explicat utilizarea cifrelor arabe și a fost printre primii matematicieni care au folosit cifra zero.



*Muhammad ibn  
Musa Khwarizmi*

## 1. Lucrul cu fluxuri de tip fișier

Datorită faptului că informațiile prelucrate de majoritatea programelor se stochează pe suporturi externe, este necesară existența unor metode de lucru cu aceste suporturi.

Un **fișier** reprezintă un grup de octeți înrudiți. Un sistem de fișiere este un produs software folosit pentru organizarea și păstrarea fișierelor pe un dispozitiv secundar de stocare.

Fiecare fișier are proprietăți care îl descriu. Sistemul de fișiere determină tipul proprietăților care descriu fișierul. În mod obișnuit, acesta înseamnă numele fișierului, permisiunile de acces, data și ora ultimei modificări a fișierului. În general, cele trei permisiuni de acces folosite sunt: citire / scriere (read / write), numai citire (read-only) și execuție.

Fișierele sunt organizate în directoare și subdirectoare. Directorul aflat pe poziția cea mai înaltă a ierarhiei se numește **director rădăcina**. De aici începe întreaga ierarhie de directoare și subdirectoare. Colectiv, directoarele și subdirectoarele formează **structura de directoare**.

### 1.1. Utilizarea fluxurilor de tip fișier în limbajul C/C++

Fișierele pot fi clasificate după conținutul lor în:

- fișiere text – conțin o secvență de caractere ASCII, structurate pe linii;
- fișiere binare – conțin o secvență de octeți, fără o structură predefinită.

#### 1.1.1. Testarea existenței unui fișier

```
1  #include <stdio.h>
2  void main()
3  {
4      FILE *fp;
5      if (!(fp=fopen("d:\\fisier.txt","r+b")))
6      {
7          puts("Nu pot deschide fisierul");
8          exit(1); //terminare fortata a executiei cu returnarea codului 1
9      }
10 }
```

Fișierul "d:\\fisier.txt" este deschis pentru citire și scriere ("r+"), în mod binar ("b"). Pentru modul "r", dacă fișierul nu există pe disc sau operația de deschidere nu reușește (de exemplu, dacă unitatea de disc nu este pregătită), `fopen()` întoarce valoarea `NULL`. În caz contrar deschide fișierul, creează o structură `FILE` și întoarce adresa sa.

### 1.1.2. Copierea unui fișier

```
1 #include <stdio.h>
2 void main()
3 {
4     FILE *fps, *fpd;
5     char c;
6     if (!(fps=fopen("d:\\fin.dat", "rb"))==NULL)
7     {
8         puts("Nu pot deschide fisierul sursa");
9         return;
10    }
11
12    if ((fpd=fopen("d:\\fout.dat", "wb"))==NULL)
13    {
14        puts("Nu pot crea fisierul destinatie");
15        return;
16    }
17
18    while (!feof(fps))
19    {
20        c=getc(fps);
21        if (!feof(fps))
22        {
23            putc(c, fpd);
24        }
25    }
26
27    fclose(fps);
28    fclose(fpd);
29 }
```

Deoarece fișierele conțin date oarecare, ciclul de copiere folosește funcția `feof( )` pentru a detecta sfârșitul de fișier. Această precauție nu era necesară în cazul unui fișier text (alcătuit din coduri ASCII), unde ar fi suficientă testarea valorii întoarse de `getc( )` pentru a detecta caracterul EOF. Trebuie remarcat că funcția `feof( )` semnalează sfârșitul fișierului abia după ce acesta a fost întâlnit la operația de intrare precedentă. Din acest motiv, dacă instrucțiunea `if` ar lipsi, în fișierul “d:\fout.dat” s-ar copia în plus valoarea EOF.

## 1.2. Utilizarea fluxurilor în limbajul Java

Un flux, în contextul limbajului Java, este un **canal de comunicație unidirecțional** între doi actori; unul este producător și reprezintă sursa de date, iar cel de-al doilea reprezintă consumatorul. Prin prisma acestui aspect, fluxurile se clasifică în:

- fluxuri de intrare (prin care se primesc date în program);
- fluxuri de ieșire (prin care se transmit date din program).

De asemenea, datorită faptului că limbajul Java utilizează sistemul Unicode pentru tipul caracter, ceea ce înseamnă că un caracter ocupă 16 biți, API-ul Java introduce două tipuri de fluxuri:

- fluxuri de caracter (pentru date de tip text);
- fluxuri de octeți (pentru date binare).

Fluxurile sunt implementate în clase aflate în pachetul `java.io`.

Clasele pentru lucrul cu fluxuri de caracter de intrare moștenesc clasa abstractă `Reader`, iar clasele pentru fluxuri de octeți de intrare moștenesc clasa abstractă `InputStream`.

Clasele pentru lucrul cu fluxuri de caracter de ieșire moștenesc clasa abstractă `Writer`, iar clasele pentru fluxuri de octeți de ieșire moștenesc clasa abstractă `OutputStream`.

Clasele de lucru cu fluxurile de intrare oferă metoda `read()` pentru a prelua date din flux, care returnează o valoare `int`. În cazul fluxurilor de caracter, această valoare reprezintă codul Unicode al caracterului citit, prin urmare doar cei mai puțin semnificativi 2 octeți sunt utilizați în mod real. Ceilalți 2 octeți au tot biții 0. Pentru fluxurile de octeți, doar un octet este utilizat (cel mai puțin semnificativ). Dacă fluxul de intrare nu mai are date, atunci metoda `read()` returnează valoarea -1.

Clasele de lucru cu fluxurile de ieșire oferă metoda `write()`.

De exemplu, lucrul cu fișiere poate fi realizat cu ajutorul claselor:

- `FileReader` – flux de caractere de intrare;
- `FileWriter` – flux de caractere de ieșire;
- `FileInputStream` – flux de octeți de intrare;
- `FileOutputStream` – flux de octeți de ieșire.

Aceste fluxuri sunt fluxuri primitive, deoarece sunt conectate direct de sursa sau destinația datelor. Există și fluxuri de procesare care se construiesc pe baza fluxurilor primitive și oferă facilități suplimentare. Un tip de flux de procesare este fluxul cu zona de memorie tampon ("buffered"); astfel se pot utiliza următoarele clase:

- `BufferedReader` – flux de caractere de intrare;
- `BufferedWriter` – flux de caractere de ieșire;
- `BufferedInputStream` – flux de octeți de intrare;
- `BufferedOutputStream` – flux de octeți de ieșire.

Un tip util de fluxuri de procesare sunt cele de conversie a fluxurilor:

- `InputStreamReader` – flux de caractere de intrare care convertește un flux de octeți în flux de caractere;



- `OutputStreamWriter` – flux de octeți de ieșire care convertește un flux de caractere în flux de octeți.

Pașii de urmat în lucrul cu fluxuri sunt:

1. Deschidere flux (prin instanțierea unei clase de lucru cu fluxuri)
2. Procesare date (folosind metodele specifice clasei alese pentru lucrul cu fluxuri)
3. Închidere flux (prin apelarea metodei `close()` a instanței clasei de lucru cu fluxuri)

Orice eroare în lucrul cu fișierele va rezulta în aruncarea unei excepții, care provine din clasa `IOException`. Din acest motiv este obligatoriu ca programele care utilizează fluxuri să trateze toate excepțiile de acest tip.

#### CitireaDinFisier.java

```
1  import java.util.*;
2  import java.io.*;
3
4  public class CitireaDinFisier
5  {
6      public static void main(String[] args)
7      {
8          String linie;
9          try {
10             BufferedReader in = new BufferedReader(new FileReader(
11                 "\\fis.txt"));
12             while ((linie = in.readLine()) != null)
13             {
14                 System.out.println(linie);
15             }
16         }
17         catch (IOException e)
18         {
19             System.out.println(e);
20         }
21     }
22 }
```

### **1.2.1. Obținerea versiunii în tonalități de gri (grayscale) a unei imagini BMP**

Formatul BMP (bitmap) este utilizat pentru stocarea informațiilor de tip grafic. Formatul definește o parte de header, care conține informații despre documentul de tip imagine și ocupă, în mod tipic, 54 de octeți, și o parte de date, care conține efectiv imaginea.

În mod tipic, pentru fiecare punct din imagine (pixel) sunt necesari 24 de biți (care definește și adâncimea de culoare), care stochează nivelele de intensitate pentru cele 3 componente ale culorii (R – roșu, G – verde și B – albastru), formatul BMP utilizând spațiul de culoare RGB. Fiecare

componentă este memorată pe un octet, astfel că intensitatea luminoasă poate varia între 0 (lipsa componentei de culoare) și 255 (intensitate maximă a culorii).

Pentru a obține versiunea în tonalități de gri a unei imagini este suficient a se calcula o medie între intensitățile culorilor componente ale fiecărui pixel. Deoarece ochiul uman este mai sensibil la culoarea verde, se preferă utilizarea unei medii ponderate, în care culoarea verde este predominantă. Această medie este folosită în calcularea luminanței (componenta Y a spațiului de culoare YUV). Formula de calcul poate fi regăsită pe linia 27 a programului.

**BmpClass.java**

```
1 package bmp;
2
3 import java.io.BufferedReader;
4 import java.io.BufferedOutputStream;
5 import java.io.FileInputStream;
6 import java.io.FileOutputStream;
7
8 public class BmpClass
9 {
10     public static void main(String[] args)
11     {
12         try
13         {
14             FileInputStream fis=new FileInputStream("C:\\qwerty.bmp");
15             BufferedInputStream dis=new BufferedInputStream(fis);
16             FileOutputStream sif=new FileOutputStream("C:\\qwerty1.bmp");
17             BufferedOutputStream bos = new BufferedOutputStream(sif);
18             byte[] sti=new byte[54];
19             dis.read(sti,0,54);
20             bos.write(sti);
21             while(dis.available()>0)
22             {
23                 int b,g,r;
24                 b=dis.read();
25                 g=dis.read();
26                 r=dis.read();
27                 int gri=(int) (0.114*b+0.587*g+0.299*r);
28                 bos.write(gri);
29                 bos.write(gri);
30                 bos.write(gri);
31             }
32             dis.close();
33             bos.close();
34         }
35         catch (Exception e)
36         {
37         }
38     }
39 }
```

Headerul fișierului de intrare se copiază fără modificări, deoarece doar culorile imaginii se schimbă, nu proprietățile acesteia.

Fișierul este parcurs apoi octet cu octet și grupuri de câte trei octeți sunt utilizate pentru a calcula luminanța. În fișierul de ieșire este înscrisă de trei ori luminanța, ceea ce înseamnă că se înlocuiește un pixel colorat cu unul de culoare gri la intensitatea dată de luminanță.



Să se scrie un program care să genereze, pe baza unui fișier bitmap de intrare, trei fișiere bitmap, care prezintă separat cele trei componente de culoare.

## 2. Liste

### 2.1. Tipuri de date

#### 2.1.1. Tipuri de date definite de utilizator

Acestea se obțin din tipurile de bază sau din combinații ale acestora sau chiar ale altor tipuri utilizator.

Limbajele C/C++ pun la dispoziție o serie de mecanisme și structuri ce permit definirea unor tipuri de date noi. Printre acestea putem menționa *structurile*, *uniunile*, *enumerările* și *clasele*.

Noilor tipuri de date li se pot asocia nume (identificatori) fie direct, fie prin utilizarea declarației `typedef`.

Declararea unor variabile de tip utilizator se face la fel cu cea a tipurilor predefinite. Sintaxa generală este:

<b>Sintaxa utilizată:</b>	<code>id_tip id_var1[, id_var2 [, ...]];</code>
---------------------------	---

Spre deosebire de declararea variabilelor de tip predefinit, declararea variabilelor de tip utilizator se poate face și în locul definirii tipului respectiv (în cazul în care nu se utilizează declarația `typedef`).

##### 2.1.1.1. Enumerări

Se folosesc la definirea unor mulțimi de constante. Cuvântul cheie care semnalează declarația unei enumerări este *enum*. Sintaxa este:

<b>Format general:</b>
------------------------

<code>enum [id_tip_nou] {nume_const_1 [=&lt;valoare&gt;], ...} [lista_variabile];</code>
--

unde:

- `id_tip_nou` – identificatorul tipului (poate lipsi);
- `nume_const_x` – identificatorul constantei *x* din enumerare;
- `valoare` – este valoarea atribuită constantei respective; poate lipsi, caz în care valoarea ei va fi egală cu valoarea constantei definite anterior incrementată cu 1;
- `lista_variabile` – lista variabilelor ce se doresc a fi utilizate; această listă poate lipsi, fiind posibilă o declarare ulterioară (în cazul în care a fost denumit noul tip).

Se pot utiliza și declarațiile de tip astfel:

```
typedef enum {<lista_constanta>} id_tip_nou;
```

Exemplu:

```
enum mVid {LASTMODE=-1, BW40=0, C40, BW80, C80, MONO=7};
```

Aceeași declarație se poate scrie și astfel:

```
typedef enum {LASTMODE=-1, BW40=0, C40, BW80, C80, MONO=7} mVid;
```

Exemplu de declarație de variabile:

```
mVid v1, v2;
```

### **2.1.1.2. Structuri**

Structurile reprezintă unul dintre cele mai puternice mijloace de definire a noi tipuri de date, permițând înglobarea mai multor variabile într-un ansamblu unitar. Definirea unei structuri se realizează cu ajutorul cuvântului cheie `struct`.

*Format general:*

```
struct [id_structura]
{
    [id_tip id_var[, id_var, ...]] ;
    ...
} [lista_variabile];
```

unde:

- `id_structura` – identificatorul (numele) structurii; el poate lipsi, caz în care structura va fi *anonimă*, nemaiputându-se declara alte variabile de acest tip în afara celor declarate imediat după definirea ei;
- `lista_variabile` – listă declarații de variabile (poate lipsi).



Operatorul `';` nu trebuie să lipsească după definirea unei structuri.

Trebuie menționat faptul că dacă lipsesc atât numele cât și lista de variabile, structura va fi inutilizabilă în program (nu va putea fi referită).

Declararea variabilelor de tip structură se poate realiza în două moduri:

- în locul definirii tipului structură (dacă nu a fost definită cu ajutorul declarației `typedef`);
- oriunde în program, utilizând numele dat structurii ca tip al variabilei.

În cazul utilizării declarației `typedef`, definirea unei structuri trebuie să respecte sintaxa:

**Format general:**

```
typedef struct
{
    [id_tip id_var[, id_var, ...]] ;
    ...
} [id_structura];
```

După cum a fost menționat anterior, o structură grupează mai multe variabile de diferite tipuri într-o așa-numită *înregistrare (record)*; aceste variabile poartă denumirea de membri ai structurii și ei pot fi accesați atât direct, cât și referiți prin adresele lor. Practic, o variabilă de tip structură va încorpora mai multe variabile de diferite tipuri sub un singur identificator.

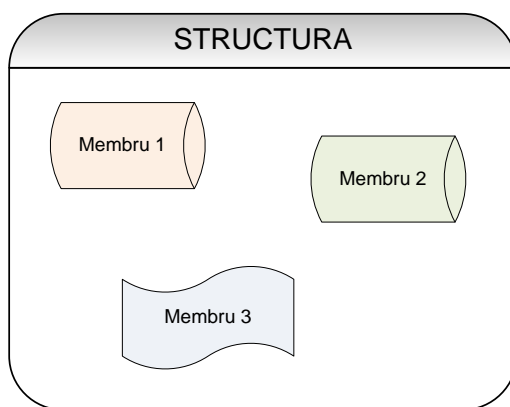


Fig. 2 – Structura grupează mai multe variabile sub un singur nume (identificator)

Accesul la oricare dintre membri unei variabile de tip structură se face cu ajutorul operatorului de selecție directă `'.'`.

Sintaxa utilizată pentru accesarea unui membru al unei structuri este:

**Sintaxa utilizată:** `nume_variabilă_structură.identificator_membru`

Operația de inițializare a unei structuri respectă sintaxa:

**Sintaxa utilizată:** `id_structura id_var={<valoare_membru_1>, ...};`

Atribuirea valorilor membrilor structurii se face *exact* în ordinea în care au fost așezați în definirea tipului structura (prima valoare va fi atribuită primului membru din definiția structurii, a doua – celui de-al doilea membru, ș.a.m.d.).

Pentru a ilustra modul de lucru cu structurile, vom defini o structură ce va conține numele unui student și media notelor acestuia; o vom inițializa, apoi, cu valorile „Popescu Andrei” pentru nume și 9,78 pentru medie; vom afișa numele și media pe ecran.

**Student.cpp**

```
#include <stdio.h>

// definim structura

struct Student
{
    char strNume[30];
    float fMedia;
};

// programul principal
void main()
{
    // declarăm o variabilă v1 de tip Student și o initializăm
    Student v1={"Popescu Andrei", 9.79};

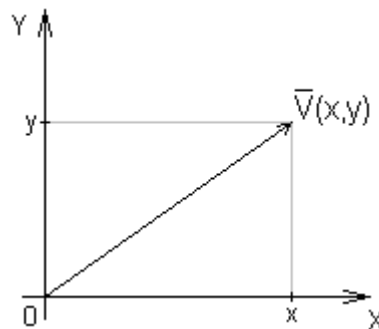
    // afișăm conținutul structurii v1
    printf("Studentul %s are media %g.\n",v1.strNume,v1.fMedia);
}
```



Să se scrie un program care să determine vectorul sumă obținut prin adunarea mai multor vectori bidimensionali a căror componente se vor citi de la tastatură, și să se reprezinte grafic obținerea acestuia (fiecare vector va fi reprezentat prin altă culoare).

**Indicații:**

Un vector bidimensional este definit de două componente (luând un sistem de referință ortogonal) așa cum este prezentat în figura de mai jos:



Problema se rezolvă ușor dacă se utilizează metoda triunghiului de însumare a vectorilor.

**2.2. Pointeri**

Pointerul este un tip de date ce permite declararea unor variabile capabile să memoreze adresa unei alte variabile sau a unei funcții.

Variabilele de tip pointer nu includ nici o informație despre tipul datelor stocate la acea adresă, de aceea, în momentul declarării unei variabile de tip pointer, trebuie să se specifice către ce tip de date va face referire.

Pointerul indică adresa primului byte din variabila la care face referire. Prin urmare, un pointer va ocupa același spațiu de memorie, indiferent de tipul de date către care face referire. Spațiul de memorie ocupat de o variabilă pointer poate varia între 16 biți și 64 de biți.

În limbajele C/C++, declararea unui pointer către o variabilă de tip `int` se face astfel:

```
int *pVal;
```

Caracterul `*` ne indică faptul că variabila `pVal` este un pointer și nu o variabilă de tip `int`.

Preluarea adresei de memorie a unei variabile se face cu ajutorul operatorului `&` (adresă).

Accesul la conținutul variabilei referite de un pointer (conținutul zonei de memorie referite) se realizează cu ajutorul operatorului `*` plasat înaintea numelui variabilei de tip pointer. Tipul variabilei pointer indică numărul de octeți ce vor fi citați din memorie și modul cum vor fi interpretați.

Pentru a exemplifica modul de lucru cu pointerii, vom comenta următorul exemplu:

```
#include <stdio.h>

void main()
{
1  int val=2, *pVal;
2  pVal=&val;
3  *pVal+=5;
4  printf("Noua valoare a variabilei val este: %d.\n", val);
5  printf("Variabila val este memorata la adresa %p, ocupa %d octeti si
   are valoarea %d.\n", pVal, sizeof(val), *pVal);
}
```

În linia 1 a funcției `main()` se declară două variabile: un `int` (`val`) și un pointer către `int` (`pVal`). Variabila `val` este inițializată cu valoarea 2.

Linia 2 determină inițializarea variabilei de tip pointer `pVal` cu adresa variabilei `val`.



O variabilă de tip pointer trebuie întotdeauna inițializată înainte de a o întrebuința. Pentru a specifica o non-valoare (adică variabila pointer nu conține nici o adresă) se utilizează constanta `NULL`.



Utilizând pointerul `pVal` se modifică valoarea variabilei `val` (conținutul de tip `int` aflat la adresa specificată de pointerul `pVal`) în linia 3.

În linia 4 se afișează valoarea variabilei `val`, care acum va fi 7.

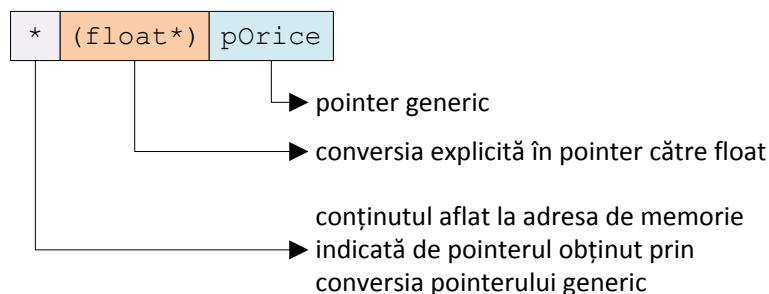
Linia 5 afișează adresa variabilei `val` (în format hexazecimal), dimensiunea în octeți și valoarea de tip `int` aflată la adresa dată de valoarea pointerului.

Se pot declara și pointeri generici (la care nu se specifică un tip bine definit), dar în momentul operării asupra lor trebuie convertiți în mod explicit, în concordanță cu tipul datelor referite. De exemplu, se poate scrie un program astfel:

```
#include <stdio.h>

void main()
{
1   float PI=3.14;
2   void *pOrice;
3   pOrice=&PI;
4   printf("Variabila PI se afla la adresa %p si are
      valoarea %g.\n",pOrice,*(float*)pOrice);
}
```

În momentul afișării a trebuit convertit pointerul generic `pOrice` într-un pointer către tipul `float` (tipul variabilei referite) și apoi afișat conținutul acestei locații de memorie.



### 2.2.1. Pointerii și tablourile

Pointerii și tablourile sunt corelate strâns în limbajele C/C++, o variabilă tablou nefiind altceva decât un pointer către primul element al tabloului.

Având o declarație `int Tab[10]`, egalitatea `Tab=&Tab[0]` va fi adevărată.

### 2.2.2. Pointerii și structurile

Ca și pentru orice alt tip de date, și pentru structuri se pot declara pointeri. Accesul la membrii structurii se va face, în acest caz, cu ajutorul operatorului de selecție indirectă “->” (așa cum arată exemplul „PStruct.cpp”).

**PStruct.cpp**

```
#include <stdio.h>

struct Coord
{
    int x,y;
};

void main()
{
    Coord varf, *pVarf;
    varf.x = 0;
    varf.y = 1;
    pVarf=&varf;
    printf("Varful are coordonatele x=%d, y=%d", pVarf->x, pVarf->y);
}
```

**2.2.3. Gestiunea dinamică a memoriei cu operatorii *new* și *delete***

Rolul esențial al pointerilor este reprezentat de gestiunea dinamică a memoriei. Cu ajutorul lor se poate eficientiza un program din punctul de vedere al utilizării memoriei.

În cazul în care nu se poate ști dinainte de câtă memorie va avea nevoie un program, sau cantitatea necesară depășește capacitatea alocării statice de memorie, se utilizează alocarea dinamică de memorie. Această metodă, aplicată corect, asigură utilizarea eficientă a memoriei.

Metoda presupune alocarea unor zone de memorie doar în momentul în care programul are nevoie de acestea și le eliberează imediat ce devin inutile.

Specific acestui mod de lucru este faptul că alocarea și eliberarea memoriei cade în grija programatorului. În acest sens, limbajul C++ pune la dispoziție doi operatori dedicați gestiunii memoriei: *new* și *delete*.

**2.2.3.1. Operatorul *new***

Cu ajutorul operatorului *new* programatorul poate alocă memorie în mod dinamic (în timpul rulării programului).

Sintaxa utilizată: `var_pointer = new tip_alocat;`

În urma unei atribuirii de acest fel se alocă o zonă de memorie (în memoria *heap* – memoria de acumulare, adică nu aparține stivei programului) corespunzătoare tipului declarat, care va putea fi referită prin intermediul variabilei pointer `var_pointer`. În cazul imposibilității alocării de memorie, operatorul *new* va returna valoarea `NULL`.

Operatorul *new* permite alocarea de memorie pentru orice tip de date.



Tipul variabilei pointer trebuie să coincidă cu tipul furnizat operatorului `new`.

### **2.2.3.2. Operatorul `delete`**

Orice zonă de memorie alocată în mod dinamic trebuie eliberată, sarcina revenind programatorului.

Limbajul C++ definește pentru această operație operatorul `delete` (complementar operatorului `new`).

Deși limbajele C/C++ pun la dispoziție mai multe funcții destinate lucrului dinamic cu memoria, este indicată utilizarea “în pereche” a acestora; astfel, dacă alocarea s-a făcut utilizând operatorul `new`, eliberarea memoriei se va face cu operatorul `delete`. Aceeași regulă este valabilă și pentru funcțiile `malloc()` și `free()`.

Sintaxa utilizată: `delete var_pointer;`

Acest apel va produce eliberarea zonei de memorie, alocată în prealabil cu operatorul `new` și referită de pointerul `var_pointer`.



Întotdeauna trebuie păstrată o referință către o zonă de memorie alocată dinamic. În caz contrar, ea nu va mai putea fi eliberată, lucru ce poate conduce la consumarea memoriei din sistem și, implicit, funcționări defectuoase ale programului ce pot bloca sistemul pe care rulează.

## **2.3. Liste**

*Definiție:* Listele ordonate liniar sunt structuri de date alcătuite dintr-o mulțime  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  de elemente (de obicei identice), între care există o relație determinată de poziția lor relativă. Astfel, fiecare element  $A_k$  are un predecesor  $A_{k-1}$  și un succesor  $A_{k+1}$  (mai puțin elementele prim și ultim).

Reprezentarea în memorie se poate realiza:

- secvențial;
- prin înlănțuirea elementelor.

### ***2.3.1. Reprezentarea secvențială***

În acest tip de reprezentare, elementele sunt dispuse succesiv, într-o zonă contiguă de memorie. Reprezentarea este similară cu cea a unui tablou (nu trebuie făcută identificarea listei cu obiectul

tablou în care sunt memorate elementele ei). (Un tablou este un caz particular de listă, acela în care elementul  $i$  al listei se află memorat în  $\text{tab}[i]$ ).

### 2.3.2. Liste înlănțuite

**Definiție:** O listă înlănțuită este alcătuită din noduri cu structura date și legături în care:

- câmpul DATE reprezintă informația propriu zisă (un element al listei);
- câmpul LEGĂTURĂ reprezintă informația de secvență, legătura spre elementele adiacente din listă.

**Observație:** Informația de secvență se adaugă explicit pentru fiecare element, sub forma adreselor elementelor adiacente, astfel încât ordinea listei devine independentă de ordinea plasării elementelor în memorie.

**Clasificare:**

- listă simplă înlănțuită;
- listă dublu înlănțuită.

**Listă simplu înlănțuită** - conține noduri în care este specificată legătura (adresa) spre elementul următor.

*Exemplu de structură nod pentru lista simplu înlănțuită:*

```
struct nlsi
{
    double data; /* informația din nodul listei */
    struct nlsi *urm; /* adresa nodului următor */
};
```

**Definiție:** O listă înlănțuită în care legătura ultimului element are valoarea NULL, care marchează sfârșitul listei, se numește lanț.

**Definiție:** Dacă legătura elementului final specifică primul element se obține o listă **circulară**.

**Observație:** În anumite aplicații algoritmi sunt simplificați de utilizarea unui nod distinct, numit nod **capăt**, la care este atașată lista propriu-zisă.

Pentru o listă simplu înlănțuită, atașarea unui element nou și extragerea unui element din listă sunt operații banale și rapide, cu condiția să fie cunoscută adresa elementului precedent.

*Exemplu de utilizare a listelor simplu înlănțuite:*

```
1 /*
2  cap = [inf|urm] -> [inf|urm] -> ... -> [inf|NULL]
3  */
4  #include <iostream.h>
5  #include <conio.h>
6  #include <stdio.h>
```

```

7 // structura de date
8 struct Nod
9 {
10     int inf; // informatia utila, pe care dorim sa o memoram
11     Nod* urm; // adresa urmatorului Nod (un pointer catre o variabila Nod)
12 };
13
14 // Functia returneaza numarul de elemente din lista
15 int nrElemente(Nod* lista)
16 {
17     int nr=0;
18     Nod *aux = lista;
19     while (aux!=NULL)
20     {
21         nr++;
22         aux = aux->urm;
23     }
24
25     return nr;
26 }
27
28 /*
29 Adaugare in pozitia N a unui element:
30 - daca N este 1, atunci adaugarea se face la inceputul listei;
31 - daca N este mai mare decat numarul de elemente, atunci se face adaugare
32   la sfarsit de lista.
33 Lista vida va fi simbolizata de valoarea NULL pentru capul acesteia.
34 */
35
36 void adauga(Nod *&lista, int val, int N)
37 {
38     if (N==1 || lista == NULL) // adaugare la inceputul listei => capul
        listei
39         // isi va schimba valoarea
40     {
41         Nod *aux = new Nod; // se alocă memoria necesară memorării
42                             // unei variabile de tip Nod
43         aux->inf = val; // se completează partea de informație utilă
44         aux->urm = lista; // următorul element va fi chiar vechiul cap al
        listei
45         lista = aux; // noul cap al listei este noul element creat
46     }
47     else
48     {
49         int nr = nrElemente(lista); // preiau numărul de elemente din lista
50         if (N>nr+1) // dacă poziția primită ca parametru este mai mare decât
51                 // numărul de elemente + 1, atunci îi modific valoarea în
52                 // număr de elemente în lista + 1
53             N=nr+1;
54
55         Nod *tmp = new Nod; // crearea noului nod - alocare memorie
56         tmp->inf = val; // completarea informației utile
57
58         // se parcurge lista până la al N-1 -lea element
59         Nod *aux = lista;
60         for (int i=1;i<N-1;i++)
61             aux = aux->urm;
62
63         // realizarea înlanțuirii
64         tmp->urm = aux->urm;
65         aux->urm = tmp;
66     }
67 }

```

```

68 // functie de afisare a elementelor din lista
69 void afisare(Nod *lista)
70 {
71     Nod *aux = lista; // afisarea incepe de la capul listei
72
73     cout<<"Lista este: ";
74
75     while(aux != NULL)
76     {
77         cout<<aux->inf<<" ";
78         aux = aux->urm;
79     }
80
81     if (lista == NULL)
82         cout<<"vida."<<endl;
83     else
84         cout<<endl;
85 }
86
87 // functie pentru eliberarea memoriei
88 void eliberaremem(Nod *&lista)
89 {
90     Nod* aux = lista;
91
92     while(aux != NULL)
93     {
94         lista = lista->urm; // mutam capul listei pe urmatorul element
95         delete aux; // stergem elementul curent
96         aux = lista; // primul element va deveni elementul curent
97     }
98 }
99
100 /*
101 Functia elimin elibereaza memoria alocata elementului de pe pozitia poz
102 - daca poz este 1, atunci se va elimina de la capul listei
103 - daca poz este egal sau mai mare decat nr. de elem., atunci se elimina
104   de la sfarsitul listei
105 */
106 void elimin(Nod *&lista, int poz)
107 {
108     Nod* aux = lista;
109     if (lista == NULL)
110         return;
111
112     if (poz>nrElemente(lista))
113         poz = nrElemente(lista); // daca poz este mai mare decat numarul de
114                                   // elemente din lista, atunci lui poz i se
115                                   // va da valoarea pozitiei ultimului elem.
116
117     if (poz == 1)
118     {
119         lista=lista->urm; // se muta capul listei pe elementul urmator
120         delete aux; //se sterge capul listei ce e tinut acum de variabila aux
121     }
122     else
123     {
124         // pozitionare pe elementul dinaintea pozitiei poz
125         for (int i=1;i<poz-1;i++)
126             aux = aux->urm;
127
128         Nod *tmp = aux->urm;
129         aux->urm = tmp->urm;
130         delete tmp;
131     }

```

```

131 }
132
133 void main()
134 {
135     clrscr(); // stergere ecran
136     Nod *L = NULL; // initial lista L este vida
137     int opt=0;
138
139     do
140     {
141         // se afiseaza "meniul" programului
142         cout<<"Operatii"<<endl<<"-----"<<endl<<"1 - Adaugare element"<<endl;
143         cout<<"2 - Eliminare element"<<endl<<"3 - Afisare lista"<<endl;
144         cout<<"0 - Iesire"<<endl<<"-----"<<endl;
145
146         // se citeste codul operatiei pe care utilizatorul vrea sa o execute
147         cout<<"?> ";
148         cin>>opt;
149
150         switch (opt)
151         {
152             case 1: // adaugare
153             {
154                 int v,p;
155                 cout<<endl<<"Introduceti valoarea: ";
156                 cin>>v;
157                 cout<<"Introduceti pozitia (lista are "<<nrElemente(L)<<" el): ";
158                 cin>>p;
159                 adauga(L,v,p);
160                 afisare(L);
161                 break;
162             }
163             case 2: // eliminare
164             {
165                 int p;
166                 cout<<endl<<"Pozitia (lista are "<<nrElemente(L)<<" el): ";
167                 cin>>p;
168                 elimin(L,p);
169                 afisare(L);
170                 break;
171             }
172             case 3: // afisare
173             {
174                 cout<<endl;
175                 afisare(L);
176                 break;
177             }
178         }
179
180         fflush(stdin); // pentru eliberarea bufferului tastaturii
181         getch();
182     }
183     while (opt!=0);
184
185     eliberaremem(L); // se elibereaza memoria alocate la crearea listei
186 }

```



Să se modifice programul de mai sus prin implementarea opțiunii de eliminare a elementelor negative din listă (opțiunea 4).

### 3. Arbori binari

Organizarea liniară de tip listă nu este întotdeauna cea mai adecvată pentru unele aplicații. Astfel, dacă trebuie să descriem structura unui produs, de cele mai multe ori nu prezentăm o listă a tuturor componentelor, ci utilizăm o descriere ierarhică. De exemplu, din punct de vedere constructiv, un calculator este compus din unitate centrală, terminal, claviatură, alte periferice. Unitatea centrală are o carcasă în care se află conectori și plăci, pe fiecare placă fiind montate diverse componente - circuite integrate, condensatori, etc.

De altfel, în vederea studierii unor proprietăți, aproape orice obiect poate fi descompus în alte obiecte, mai simple. Procesul de descompunere poate fi continuat pe mai multe niveluri, terminându-se însă după un număr finit de etape, dependent de natura aplicației. Fiecare obiect în parte este definit printr-un set de atribute și prin mulțimea obiectelor componente, care la rândul lor, sunt descrise în același mod. Se observă că această definiție este recursivă (un obiect este compus din mai multe obiecte) și pune în evidență o ierarhie a obiectelor.

Organizarea ierarhică este întâlnită în cele mai diverse domenii, de la organizarea administrativă a unei țări, la planificarea meciurilor în cadrul unui turneu sportiv, de la structurarea unei cărți, până la stabilirea ordinii de execuție a operațiilor efectuate pentru determinarea valorii unei expresii aritmetice.

Tot o structură ierarhică este și cea a cataloagelor în care sunt grupate fișierele de pe discurile fixe sau flexibile. Această organizare este impusă, în principal, de rațiuni de gestionare cât mai comodă a fișierelor de diverse tipuri, aparținând diverșilor utilizatori ai aceluiași sistem de calcul.

Dacă toate nodurile dintr-un arbore au cel mult doi descendenți direcți (fii), atunci arborele este denumit arbore *binar*, iar cei doi potențiali subarbori ai unui arbore nevid sunt denumiți *subarbore stâng* și *subarbore drept*.

#### 3.1. Parcurgerea arborilor

Prelucrarea informațiilor memorate într-o structură de arbore implică parcurgerea arborelui, adică inspectarea (vizitarea) fiecărui nod și prelucrarea informației specifice. Problema care se pune este cea a ordinii în care se prelucrează nodurile arborelui (rădăcina și, respectiv, nodurile din subarbori). De cele mai multe ori, aceasta este impusă de specificul aplicației.

De exemplu, dacă memorăm într-o structură de arbore multicăi informațiile despre organizarea unei societăți comerciale, acest arbore poate fi parcurs în mai multe moduri, în funcție de



prelucrarea dorită. În cazul în care este solicitată lista personalului cu funcții de conducere, aceasta poate fi tipărită în două variante:

1. grupând persoanele pe nivelurile ierarhice;
2. astfel încât să reflecte relațiile de subordonare.

În prima variantă, parcurgerea arborelui se efectuează în *lățime*, iar în cea de-a doua în *adâncime*.

Tot o parcurgere implică și calculul numărului de persoane angajate în fiecare compartiment (reprezentat printr-un subarbor). Cele două parcurgeri în adâncime menționate se deosebesc prin ordinea relativă de prelucrare a nodului rădăcină și, respectiv, a subarborilor. În primul caz, informația specifică nodului rădăcină este prelucrată (tipărită) înaintea informațiilor din celelalte noduri ale (sub)arborelui. Acest tip de parcurgere este denumit parcurgere în *preordine*. Deoarece numărul de persoane angajate într-un compartiment poate fi calculat (și eventual tipărit) numai atunci când se cunoaște numărul de angajați din toate compartimentele subordonate, rezultă că prelucrarea de la nivelul nodului rădăcină se face după prelucrarea restului arborelui respectiv, deci parcurgerea se realizează în *postordine*.

Implementarea de mai jos utilizează *recursivitatea* ca tehnică de programare.

#### Parcurgerea arborilor binari:

```

1  #include <iostream.h>
2  #include <conio.h>
3
4  struct ArboreBinar
5  {
6      int inf;
7      ArboreBinar *st;
8      ArboreBinar *dr;
9  };
10
11 ArboreBinar* createTree()
12 {
13     int are;
14     ArboreBinar *nod = new ArboreBinar;
15     cout<<"\nInformatia pentru nodul nou: ";
16     cin>>nod->inf;
17     cout<<"Nodul "<<nod->inf<<" are subarbori stang [0=NU;1=DA]? ";
18     cin>>are;
19     if (are!=0)
20         nod->st = createTree();
21     else
22         nod->st = NULL;
23     cout<<"Nodul "<<nod->inf<<" are subarbori drept [0=NU;1=DA]? ";
24     cin>>are;
25     if (are!=0)
26         nod->dr = createTree();
27     else
28         nod->dr = NULL;
29     cout<<endl;
30     return nod;
31 }
```

```
32
33 void inordine(ArboreBinar *root)
34 {
35     if (root->st!=NULL)
36         inordine(root->st);
37     cout<<root->inf<<" ";
38     if (root->dr!=NULL)
39         inordine(root->dr);
40 }
41
42 void preordine(ArboreBinar *root)
43 {
44     cout<<root->inf<<" ";
45     if (root->st!=NULL)
46         preordine(root->st);
47     if (root->dr!=NULL)
48         preordine(root->dr);
49 }
50
51 void postordine(ArboreBinar *root)
52 {
53     cout<<root->inf<<" (";
54     if (root->st!=NULL)
55         postordine(root->st);
56     cout<<",";
57     if (root->dr!=NULL)
58         postordine(root->dr);
59     cout<<") ";
60 }
61
62 void freeTree(ArboreBinar *root)
63 {
64     if (root->st!=NULL)
65         freeTree(root->st);
66     if (root->dr!=NULL)
67         freeTree(root->dr);
68     delete root;
69 }
70
71 void main()
72 {
73     // Pointer catre radacina arborelui
74     ArboreBinar *root=NULL;
75
76     // Crearea recursiva a arborelui
77     root = createTree();
78
79     cout<<"Apasati orice tasta pentru a continua!";
80     getch();
81     clrscr();
82
83     cout<<"Arborele este: ";
84     postordine(root);
85     cout<<endl<<endl;
86
87     cout<<"Parcursere in inordine: ";
88     inordine(root);
89     cout<<endl<<endl;
90
91     cout<<"Parcursere in preordine: ";
92     preordine(root);
93     cout<<endl;
94 }
```

```
95 // Eliberarea memoriei
96 freeTree(root);
97 root = NULL;
98 getch();
99 }
```



Să se scrie un program care parcurge un arbore binar în lăţime.

## 4. Backtracking

Tehnica *Backtracking* (a căutării cu revenire) se poate aplica doar pentru probleme ce admit conceptul de „candidat parțial de soluție” și oferă un test relativ rapid asupra posibilității ca un astfel de candidat să fie completat către o soluție validă. Când se poate aplica, însă, backtrackingul este adesea mult mai rapid decât căutarea prin metoda forței brute prin toți candidații, întrucât este capabilă să elimine dintr-un singur test un mare număr de candidați.

Metoda *Backtracking*, în general ineficientă, având complexitate exponențială, poate fi utilizată la optimizarea procesului de căutare, evitând căile care nu duc la o soluție.

În multe aplicații, găsirea soluțiilor este rezultatul unui proces de căutare sistematică, cu încercări repetate și reveniri în caz de nereușită. De exemplu, un întreprinzător care dispune de un capital  $C$ , pe care dorește să-l investească în vederea obținerii unui profit, va proceda în felul următor: va alege dintre  $n$  oferte la care trebuie avansate fondurile  $f(i)$  și care aduc beneficiile  $b(i)$ , pe acelea pe care le poate onora cu capitalul de care dispune și care-i aduc beneficiul maxim.

Dintre problemele ale căror soluții se găsesc prin căutare menționăm câteva exemple:

- găsirea unei căi de ieșire dintr-un labirint;
- plasarea pe o tablă de șah a opt dame care nu se atacă între ele;
- găsirea unui traseu care acoperă tabla de șah, generat adoptând săritura calului fără a trece de două ori prin aceeași poziție.

În general, aceste probleme pot avea mai multe soluții.

O metodă directă de găsire a soluțiilor este numită *metoda forței brute*, care va căuta să genereze toate submulțimile de oferte. Pentru fiecare din cele  $2^n$  la puterea  $n$  submulțimi distincte se calculează suma investită și profitul adus. Se rețin cele care nu depășesc oferta și aduc profitul maxim.

O soluție a problemei ar fi o selecție de oferte  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ , în care  $s_i=1$  sau  $s_i=0$  după cum oferta este sau nu onorată. Soluțiile acestei probleme au aceeași lungime  $n$ . Condiția  $s_i$  să aparțină lui 0 sau 1 este o restricție explicită. Condiția ca suma investită să nu depășească capitalul este o funcție de limitare, o restricție implicită, care restrânge numărul soluțiilor.

În metoda căutării cu revenire, soluția este constituită în mod progresiv, prin adăugarea unei componente  $s_{p+1}$  la o soluție parțială  $(s_1, s_2, \dots, s_p)$  care reprezintă o selecție din primele  $p$  oferte din totalul celor  $n$ , astfel încât  $(s_1, s_2, \dots, s_{p+1})$  să reprezinte de asemenea o soluție parțială. Soluția parțială mai poate fi întâlnită și sub numele de soluție  $p$ -realizabilă.

O soluție finală este obținută în momentul în care a fost făcută o selecție dintre cele  $n$  oferte. Aceasta este comparată cu soluția optimă determinată până acum, fiind reținută sau ignorată.

#### 4.1. Problema săriturii calului pe tabla de șah

Se presupune existența unei table de șah de dimensiune  $8 \times 8$ . Trebuie să se găsească toate modalitățile de a deplasa un cal pe această tablă, astfel încât calul să treacă prin toate căsuțele de pe tablă, fără a trece de mai multe ori prin același loc.

Pentru a parcurge fiecare căsuță de pe tabla de șah exact o dată, calul trebuie să facă exact  $8 \times 8 = 64$  de pași. La fiecare pas el poate alege oricare din cele 64 de căsuțe de pe tablă. Se codifică fiecare dintre căsuțele de pe tabla de șah în modul următor: căsuța de la linia  $i$  și coloana  $j$  se notează prin perechea  $(i, j)$ . Se notează mulțimea tuturor căsuțelor de pe tablă cu  $C$ :  $C = \{(0,0), (0,1), \dots, (0,7), (1,0), \dots, (7,7)\}$ .

O soluție a problemei se poate nota printr-un vector  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{63})$ , unde  $x \in S = C \times C \times \dots \times C$  (produs cartezian în care mulțimea  $C$  apare de 64 de ori), iar  $x_i \in C$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, 63\}$ .

##### *Problema săriturii calului pe tabla de șah*

```
1  #include <stdio.h>
2  #include <stdlib.h>
3
4  /* Dimensiunea tablei de sah este definita ca si constanta. */
5  #define N 8
6  #define INVALID -1
7
8  int main(void)
9  {
10     /* Pentru o tabla de dimensiune N solutiile sunt memorate intr-un
11        vector de dimensiune N*N. Fiecare element din vector va fi,
12        la randul lui, un vector cu doua elemente; primul element va
13        memora linia de pe tabla, iar al doilea element va memora
14        coloana de pe tabla. */
15     int c[N*N][2];
16
17     int k, i;
18     int pe_tabla, continuare;
19     int delta_l, delta_c;
20
21     /* Sunt numarate solutiile gasite. */
22     int count = 0;
23
24     /* Pentru inceput se marcheaza toate elementele vectorului "c" cu
25        INVALID, semn ca nu a fost ales nici un element din multimile
26        produsului cartezian. */
27
```

```
28     for (i=0; i<N*N; i++)
29     {
30         c[i][0] = INVALID;
31         c[i][1] = INVALID;
32     }
33
34     k = 0;
35     while (k >= 0)
36     {
37         /* Se incearca plasarea mutarii "k" a calului in fiecare
38            casuta, pe rand. Se evalueaza posibilitatea continuarii.
39            Procesul se opreste cand au fost incercate toate casutele
40            sau cand este identificata o casuta libera */
41         do
42         {
43             /* Se alege urmatorul element din multimea "C[k]".
44                Daca elementul "c[k]" este setat pe INVALID,
45                inseamna ca inca nu a fost ales nici un element din
46                multimea curenta, prin urmare se alege primul element
47                calul este plasat pe casuta (0,0) */
48             if (c[k][0] == INVALID)
49             {
50                 c[k][0] = 0;
51                 c[k][1] = 0;
52                 pe_tabla = 1;
53             }
54             /* Daca elementul "c[k]" nu este setat pe INVALID, inseamna
55                ca deja s-a ales o casuta din multimea "C[k]". Se alege
56                urmatoarea casuta de pe tabla. Daca este posibil
57                se ramane pe aceeaasi linie, deplasarea realizandu-se
58                pe coloana spre dreapta. */
59             else
60             if (c[k][1] < N-1)
61             {
62                 c[k][1]++;
63                 pe_tabla = 1;
64             }
65             /* Daca este ultima casuta din linie, atunci se trece la
66                linia urmatoare, cu verificarea sa nu fie ultima linie
67                caz in care au fost epuizate toate casutele. */
68             else
69             if (c[k][0] < N-1)
70             {
71                 c[k][1] = 0;
72                 c[k][0]++;
73                 pe_tabla = 1;
74             }
75         }
```

```
76      /* Daca este ultima linie a tablei, atunci se marcheaza
77      epuizarea casutelor, prin intermediul valorii zero
78      atribuita variabilei "pe_tabla". */
79      else
80      {
81          pe_tabla = 0;
82      }
83
84      /* Daca casuta "c[k]" aleasa este valida (se afla pe tabla
85      de joc),atunci se evaluează posibilitatea continuarii */
86      if (pe_tabla)
87      {
88          /* Daca este prima mutare, atunci este valida */
89          if (k == 0)
90              continuare = 1;
91          /* Daca nu e prima mutare, se fac o serie de
92          verificari. */
93          else
94          {
95              /* Se verificam daca de la pozitia precedenta a
96              calului pe tabla ("c[k-1]") se poate ajunge
97              in pozitia aleasa. */
98              delta_l = abs(c[k-1][0]-c[k][0]);
99              delta_c = abs(c[k-1][1]-c[k][1]);
100             continuare = (((delta_l == 1) &&
101                             (delta_c == 2)) ||
102                             ((delta_l == 2) &&
103                             (delta_c == 1)));
104
105             /* Se verifica daca a mai fost aleasa casuta */
106             for (i=0; continuare && (i<k); i++)
107             {
108                 if ((c[i][0] == c[k][0]) &&
109                     (c[i][1] == c[k][1]))
110                     continuare = 0;
111             }
112         }
113     }
114     /* Daca casuta "c[k]" aleasa este in afara tablei de sah,
115     atunci nu se poate continua */
116     else
117     {
118         continuare = 0;
119     }
120 }
121 while (!continuare && pe_tabla);
122
123 /* Daca rezultatul este pozitiv in urma verificarilor de
```

```
124         continuare, atunci se considera piesa asezata la pozitia
125         "c[k]" si continuam cautarea. */
126     if (continuare)
127     {
128         /* Daca s-a parcurs toata tabla de sah, atunci solutia
129         este afisata. */
130         if (k == N*N - 1)
131         {
132             for (i=0; i<N*N; i++)
133             {
134                 printf("(%d,%d) ", c[i][0], c[i][1]);
135             }
136             printf("\n");
137             count++;
138         }
139         /* Daca nu a fost parcursa inca toata tabla, atunci se
140         trece cu un pas inainte pe calea de cautare. */
141         else
142         {
143             k++;
144         }
145     }
146
147     /* Daca casuta aleasa nu este valida, atunci se marcheaza ele-
148     mentul "c[k]" cu INVALID si se revine la pasul anterior. */
149     else
150     {
151         c[k][0] = INVALID;
152         c[k][1] = INVALID;
153         k--;
154     }
155 }
156
157 printf("%d solutii\n", count);
158 return 0;
159 }
```



### Problema celor 8 regine

Considerându-se o tablă de șah de dimensiune 8x8, să se așeze pe această tablă de șah 8 regine astfel încât să nu existe două regine care se atace între ele.





## 5. Algoritmi de căutare

O mare gamă a cercetărilor în acest domeniu urmăresc obținerea minimului în strategii minimax. În problemele privind parcurgerea combinațională a arborilor de căutare, au fost dezvoltati un număr mare de algoritmi pentru o căutare cât mai eficientă.

Algoritmii se pot grupa după două aspecte:

- construcția unui arbore de căutare;
- izolarea și căutarea doar într-o parte a arborelui de căutare.

Cei mai mulți algoritmi de acest tip au caracter euristic. O regulă euristică oferă o metodă de rezolvare a problemelor, sau o metodă de căutare. Ea nu dă rezultate corecte la orice moment de timp și nu este garantată că găsește cea mai bună soluție, dar în același timp poate reduce timpul de căutare. Metodele de acest tip pot fi folosite pentru reducerea mărimii arborilor de căutare în cazurile arborilor foarte mari.

Metodele relaționale sunt metodele prin care cunoașterea este reprezentată pornind de la relațiile între obiecte sub formă de grafuri și rețele.

Pornind de la o structură de concepte care poate fi reprezentată arborescent, înaintarea spre frunză reprezintă o specializare, pe când apropierea de rădăcină este o generalizare a conceptului.

### 5.1. Căutarea binară

Căutarea binară se folosește la regăsirea unui element într-un tablou ordonat. Folosind tehnica *divide et impera*, ce presupune împărțirea unei probleme în subprobleme care acceptă același tip de rezolvare, căutarea binară împarte tabloul original în două. În funcție de valoarea elementului de căutat se selectează unul dintre cele două jumătăți ale tabloului (care conține valoarea căutată). Se repetă procedeul până se găsește elementul căutat sau dimensiunea subșirului este 1 (ceea ce înseamnă ca elementul nu a fost găsit).

În continuare este prezentată o implementare recursivă a căutării binare.

*Căutare binară – implementare în limbajul Java (MainPrg.java)*

```
1 package mainprg;  
2  
3 import java.util.Arrays;  
4 import java.util.Scanner;  
5  
6 public class MainPrg  
7 {  
8
```

```
9 public static int cautareBinara(int[] v, int x,
10                               int startPoz, int stopPoz)
11 {
12     if (startPoz<=stopPoz)
13     {
14         int k = (startPoz+stopPoz)/2;
15
16         if (v[k] == x)
17             return k;
18         else
19             if (x<v[k])
20                 return cautareBinara(v, x, startPoz, k-1);
21             else
22                 return cautareBinara(v, x, k+1, stopPoz);
23     }
24
25     return -1;
26 }
27
28 public static void main(String[] args)
29 {
30     System.out.println("...: CAUTAREA BINARA :...");
31
32     Scanner keyb = new Scanner(System.in);
33     int n;
34     int[] v = null;
35
36     System.out.print("Introduceti numarul de numere din tablou: ");
37     n = keyb.nextInt();
38     v = new int[n];
39
40     for (int i=0;i<n;i++)
41     {
42         System.out.print("Numarul [" + (i+1) + "]: ");
43         v[i] = keyb.nextInt();
44     }
45
46     Arrays.sort(v);
47
48     System.out.print("Introduceti numarul cautat: ");
49     int x = keyb.nextInt();
50
51     int poz = cautareBinara(v,x,0,v.length-1);
52
53     System.out.print("Numarul cautat se afla pe pozitia: " + poz);
54 }
55 }
```



Realizați varianta iterativă a căutării binare într-un program C/C++ sau Java.

## 6. Algoritmi de sortare

În practica de zi cu zi este des necesar ca un volum de date să fie aranjat într-o anumită ordine (să fie sortat).

În acest scop au fost creați algoritmi de sortare precum:

- BubbleSort (metoda bulelor);
- SelectionSort (sortare prin selecție);
- QuickSort (sortare rapidă), ș.a.

În continuare sunt prezentați doi algoritmi: bubblesort (algoritm de tip *greedy*) și quicksort (ce utilizează tehnica *divide et impera*).

### 6.1. Metoda bulelor (Bubblesort)

Ideea generală a acestui algoritm este de a se parcurge lista ce necesită a fi sortată și de a compara elementele două câte două, interschimbându-le dacă nu sunt în ordinea corectă.

Algoritmul funcționează în modul următor:

- se pleacă de la ipoteza că șirul de sortat este sortat;
- se parcurge șirul și se verifică dacă fiecare două elemente vecine sunt în ordinea corespunzătoare; dacă se găsește o neconcordanță cele două elemente în cauză sunt interschimbate și se memorează faptul că șirul nu era sortat;
- odată ajunși la sfârșitul șirului, dacă șirul s-a dovedit a nu fi sortat, se reia procedeul; dacă nu a fost semnalată nicio neconcordanță, atunci orice element  $a_k$  este în relație corectă cu vecinul său  $a_{k+1}$ , prin urmare șirul este sortat.

Acest algoritm, deși simplu, este foarte lent, necesitând multe iterații pentru obținerea soluției.

*Implementarea algoritmului de sortare Bubblesort într-un program C/C++*

```
1  #include <conio.h>
2  #include <iostream.h>
3
4  void main()
5  {
6      int TAB[100], // elementele ce vor fi sortate
7          n, // numarul de elemente: este citit de la tastatura
8          i=0, // variabila folosita pentru ciclari, pe post de contor
9          sortat; // varibila logica ce va semnaliza daca tabloul este sortat
10
11     // se citeste numarul de elemente
12     cout<<"Numarul de elemente ale vectorului: ";
13     cin>>n;
```

```

14
15 // se citesc elementele
16 for (;i<n;i++)
17 {
18     cout<<"Elementul "<<i+1<<" este: ";
19     cin>>TAB[i];
20 }
21
22 // SORTARE
23 sortat = 0; // initial vectorul nu este sortat
24 while (!sortat) // cat timp vectorul nu este sortat
25 {
26     sortat = 1; // presupunem ca vectorul este sortat
27     for (i=0;i<n-1;i++)
28         if (TAB[i]>TAB[i+1]) // ordinea elementelor nu este corecta
29         {
30             // se inverseaza elementele care nu au fost in ordine
31             int aux = TAB[i];
32             TAB[i] = TAB[i+1];
33             TAB[i+1] = aux;
34             // se semnaleaza faptul ca vectorul nu a fost ordonat, dupa cum
35             // s-a presupus, deci e posibil ca vectorul sa nu fie inca
36             // sortat, deci mai trebuie verificat inca o data
37             sortat = 0;
38         }
39     }
40
41 // se afiseaza vectorul sortat
42 cout<<"Vectorul sortat este: ";
43 for (i=0;i<n;i++)
44     cout<<TAB[i]<<" ";
45
46 getch();
47 }

```

## 6.2. Metoda rapidă (Quicksort)

Quicksort efectuează sortarea bazându-se pe o strategie divide et impera. Astfel, algoritmul împarte lista de sortat în două subliste, mai ușor de sortat. Pașii algoritmului sunt:

1. Se alege un element al listei, denumit *pivot*
2. Se reordonează lista astfel încât toate elementele mai mici decât pivotul să fie plasate înaintea pivotului și toate elementele mai mari să fie după pivot. După această partiționare, pivotul se află în poziția sa finală.
3. Se sortează recursiv sublista de elemente mai mici decât pivotul și sublista de elemente mai mari decât pivotul.

O listă de dimensiune 0 sau 1 este considerată sortată.

*Implementarea algoritmului de sortare Quicksort într-un program C/C++*

```

1 #include <conio.h>
2 #include <iostream.h>
3

```

```

4  int getFixedPos(int *T, int startpos, int stoppos)
5  {
6      int i=startpos, j=stoppos, mod=0; // mod=0 - de la dreapta la stanga
7                                          // mod=1 - de la stanga la dreapta
8      while (i<j)
9      {
10         if (T[i]>T[j])
11         {
12             // inversam elementul T[i] cu T[j]
13             int aux = T[i];
14             T[i] = T[j];
15             T[j] = aux;
16             // schimbam modul de lucru
17             mod = !mod;
18         }
19
20         if (mod)
21             i++;
22         else
23             j--;
24     }
25     return i;
26 }
27
28 void quicksort(int *T, int startpos, int stoppos)
29 {
30     if (startpos<stoppos)
31     {
32         int k = getFixedPos(T,startpos,stoppos);
33         quicksort(T,startpos,k-1); //se aplica acelasi algoritm pentru subsi-
34                                     // rul dinaintea pozitiei fixate, k
35         quicksort(T,k+1,stoppos); // se aplica acelasi algoritm pentru subsi-
36                                     // rul de dupa pozitia fixata, k
37     }
38 }
39
40 void main()
41 {
42     int TAB[100], // elementele ce vor fi sortate
43         n, // numarul de elemente: este citit de la tastatura
44         i=0, // variabila folosita pentru ciclari, pe post de contor
45         k; // pozitia elementului "fixat"
46
47     // se citeste numarul de elemente
48     cout<<"Numarul de elemente ale vectorului: ";
49     cin>>n;
50     // se citesc elementele
51     for (;i<n;i++)
52     {
53         cout<<"Elementul "<<i+1<<" este: ";
54         cin>>TAB[i];
55     }
56
57     // SORTARE
58     quicksort(TAB,0,n-1);
59
60     // se afiseaza vectorul sortat
61     cout<<"Vectorul sortat este: ";
62     for (i=0;i<n;i++)
63         cout<<TAB[i]<<" ";
64
65     getch();
66 }

```



1. Modificați programele de mai sus pentru a afișa numărul de interschimbări efectuate.
2. Realizați o comparație între numărul de interschimbări realizate de fiecare algoritm prezentat pentru un șir de numere sortat crescător.
3. Realizați o comparație între numărul de interschimbări realizate de fiecare algoritm prezentat pentru un șir de numere sortat descrescător.

## 7. Grafuri

În fața unui mare număr de situații, o veche obișnuință ne îndeamnă să trasăm pe hârtie puncte reprezentând indivizi, localități, corpuri chimice și altele, legate între ele prin linii sau prin săgeți care simbolizează o anumită relație. Aceste scheme se întâlnesc peste tot și fără îndoială D. König a fost primul care a propus ca astfel de scheme să se numească *grafuri* și care le-a studiat sistematic proprietățile.

Printr-un *graf* se înțelege o mulțime de noduri (numite și vârfuri) și o aplicație definită pe această mulțime cu valori în aceeași mulțime, care face legătura între aceste noduri, legături numite *arce*, care pot fi sau nu orientate.

O *cale* este o succesiune de noduri aleasă astfel încât să existe arce care să reunească nodurile respective. O cale este simplă dacă toate nodurile, cu excepția primului și ultimului, sunt distincte între ele.

În multe din problemele la a căror rezolvare se folosește calculatorul este necesară reprezentarea unor relații generale între obiecte. Un model potrivit în astfel de cazuri este graful orientat (dacă relația este nesimetrică) sau neorientat (dacă relația este simetrică)

Un *graf orientat* sau *digraf* (prescurtare de la directed graf)  $G=(V,E)$  constă deci într-o mulțime  $V$  de vârfuri (sau noduri) și o mulțime  $E$  de arce. Un arc poate fi privit ca o pereche ordonată de vârfuri  $(v,w)$  unde  $v$  este baza arcului iar  $w$  este vârful arcului. Se spune că  $w$  este adiacent lui  $v$ .

Un graf neorientat sau graf  $G=(N,R)$  este alcătuit dintr-o mulțime de noduri  $N$  și o mulțime  $R$  de muchii. O muchie este atunci o pereche ordonată de noduri  $(v,w)=(w,v)$ .

Un graf este echivalent cu un digraf în care pentru fiecare arc  $(v,w)$  există și perechea lui  $(w,v)$ .

Se spune că o cale (succesiune de vârfuri)  $v[1],v[2],\dots,v[k]$  conectează  $v[1]$  și  $v[k]$ .

### 7.1. Moduri de reprezentare

Pentru grafuri există două moduri de reprezentare mai des utilizate:

- matricea de adiacențe și
- listele de adiacențe.

Alegerea uneia dintre ele trebuie fi făcută în funcție de frecvența operațiilor de acces la nodurile și muchiile grafurilor.



Dat fiind  $G=(V,E)$  să considerăm mulțimea vârfurilor  $V=\{1,2,3,...n\}$  având elementele în ordinea naturală a numerelor prin care sunt reprezentate. Matricea de adiacențe  $A$  de dimensiune  $n \times n$  se poate defini prin:

$$A[i,j] = \begin{array}{ll} 1 & \text{dacă } [i,j] \text{ aparține lui } E \\ 0 & \text{dacă } [i,j] \text{ nu aparține lui } E \end{array}$$

Reprezentarea prin matrice de adiacențe permite un acces rapid la arcele (muchii) grafului fiind utilă în algoritmi în care se testează prezența sau absența unui arc oarecare. Ea este dezavantajoasă dacă numărul de arce este mai mic decât  $n \times n$ , caz în care memoria necesară pentru a păstra matricea este folosită ineficient.

Reprezentarea prin liste de adiacențe folosește mai bine memoria, dar determină o căutare mai anevoioasă a arcelor. În această reprezentare, pentru fiecare nod se păstrează lista arcelor către nodurile adiacente. Întregul arbore poate fi reprezentat ca un tablou *Cap*, indexat după noduri, fiecare element *Cap[i]* fiind un pointer spre lista nodurilor adiacente lui *i*. Memoria necesară reprezentării este proporțională cu suma dintre numărul de noduri și numărul de arce ale grafului.



Scrieți un program C/C++ sau Java care citește de la tastatură un graf și îl memorează folosind reprezentarea prin matricea de adiacență.

## 7.2. Algoritmi pentru minimizare căi

Dându-se un digraf  $G=(V,E)$ , în care fiecare arc are ca etichetă un număr ne-negativ (costul său), un vârf este considerat **sursă**, iar altul **destinatar**. Problema constă în determinarea căii de cost minim de la sursă la destinatar.

### 7.2.1. Dijkstra

Rezolvarea acestei probleme se bazează pe o tehnică “greedy” datorată lui E.W. Dijkstra. Ea constă în păstrarea unei mulțimi **Selectate** de vârfuri ale căror distanțe minime față de **sursă** sunt cunoscute. Inițial, **Selectate** conține doar vârful sursă; la fiecare pas, se adaugă la **Selectate** un vârf a cărui distanță față de un vârf din **Selectate** este minimă. În rezolvare se utilizează:

- un tablou **Distanță** al distanțelor minime de la sursă la fiecare vârf;
- matrice **Cost** de costuri, în care  $Cost[i,j]$  este costul asociat arcului  $(i,j)$ ; dacă nu există un arc  $(i,j)$ , atunci se consideră pentru  $Cost[i,j]$  o valoare *infinit* (practic, foarte mare).

**Algoritmul Dijkstra**

```

Algoritm GăseșteCăiMinime(sursă)
{
    Selectate ← {sursa}
    pentru toate vârfurile i de la 1 la n
        execută
        {
            Distanțe [ i ] ← Cost [ sursa, i ]
            pentru toate vârfurile i de la 1 la n-1
                execută
                {
                    găsește vârful K neselectat cu Distanțe [ K ] minim
                    adaugă K la Selectate
                    pentru fiecare vârf j neselectat
                        execută
                        Distanțe [ j ] ← min ( Distanțe [ j ],
                                                Distanțe [ K ] + Cost [ K, j ] )
                }
        }
}

```



Realizați implementarea algoritmului Dijkstra într-un program C/C++ sau Java.

**7.2.2. Floyd**

Algoritmul de aflare a căilor minime dintr-un punct poate fi repetat luând ca sursă fiecare din nodurile unui graf. Aceasta permite calculul unui tablou al drumurilor minime între toate perechile de noduri ale grafului. O astfel de tehnică este cea datorată lui R. W. Floyd.

**Implementarea algoritmului Floyd în C/C++:**

```

1  int floyd(int *A)
2  {
3      int k, i, j;
4
5      for (k = 1; k <= n; k++)
6          for (i = 1; i <= n; i++)
7              for (j = 1; j <= n; j++)
8                  if (A[i][j] > (A[i][k] + A[k][j]))
9                      A[i][j] = A[i][k] + A[k][j];
10 }

```

Această tehnică se bazează pe utilizarea unui tablou A al distanțelor minime, ale cărui valori sunt calculate în mai multe etape. Inițial,

```

A[i,j] =    Cost[i,j] pentru orice i<>j
           0 pentru i = j
           INFINIT (practic valoare foarte mare) dacă nu există arcul (i,j)

```

Calculul distanțelor minime se face în  $n$  iterații. La iterația  $k$ ,  $A[i,j]$  va avea ca valoare cea mai mică distanță între  $i$  și  $j$ , pe căi care nu conțin vârfuri numerotate peste  $k$  (exceptând capetele  $i$  și  $j$ ).

### 7.2.3. Arborele de acoperire minim – algoritmul Kruskal

O metodă utilizată în calcule este aceea a arborelui minim de acoperire (*Kruskal*). Algoritmul construiește treptat mulțimea  $T$  a muchilor arborelui minimal adăugând la fiecare pas muchia care nu formează cicluri cu muchiile aflate deja în  $T$ .

#### Algoritmul Kruskal

```
T ← { }
cât timp T nu este arbore de acoperire
    execută
    {
        selectează muchia (w,u) de cost minim din R
        șterge (w,u) din R
        dacă (w,u) nu creează un ciclu în T
            atunci adaugă (w,u) la T
    }
```

O posibilă implementare a algoritmului în limbajul de programare C/C++ este redată mai jos.

#### Implementarea algoritmului Kruskal în limbajul C/C++

```
1  #include<stdio.h>
2  #include<stdlib.h>
3
4  void printArray(int a[][100],int n)
5  {
6      int i,j;
7      for(i = 0; i < n;i++)
8      {
9          for(j = 0; j < n;j++)
10         {
11             printf("%d\t",a[i][j]);
12         }
13         printf("\n");
14     }
15 }
16
17 void GenereazaMatriceaDeAdiacenta(int a[][100], int n)
18 {
19     int i,j;
20
21     for(i = 0;i < n; i++)
22     {
23         for(j = 0;j < i; j++)
24         {
25             a[i][j] = a[j][i]= rand()%50;
26         }
```

```
27         if(a[i][j]>40)
28         {
29             a[i][j]=a[j][i]=999;
30         }
31     }
32     a[i][i] = 999;
33 }
34 printArray(a,n);
35 }
36
37 int root(int v,int p[])
38 {
39     while(p[v] != v)
40     {
41         v = p[v];
42     }
43     return v;
44 }
45
46 void union_ij(int i,int j,int p[])
47 {
48     if(j > i)
49         p[j] = i;
50     else
51         p[i] = j;
52 }
53
54 void kruskal(int a[][100],int n)
55 {
56     int count, i, p[100], min, j, u, v, k, t[100][100], sum;
57     count = k = sum = 0;
58     for(i = 0; i < n; i++)
59     {
60         p[i] = i;
61     }
62     while(count < n)
63     {
64         min = 999;
65         for(i = 0; i < n; i++)
66         {
67             for(j = 0; j < n; j++)
68             {
69                 if(a[i][j] < min)
70                 {
71                     min = a[i][j];
72                     u = i;
73                     v = j;
74                 }
75             }
76         }
```

```
77     if(min != 999)
78     {
79         i = root(u, p);
80         j = root(v, p);
81         if (i != j)
82         {
83             t[k][0] = u;
84             t[k][1] = v;
85
86             k++;
87
88             sum += min;
89             union_ij(i,j,p);
90         }
91         a[u][v] = a[v][u] = 999;
92     }
93     count++;
94 }
95
96 if(count != n)
97 {
98     printf("Arborele de acoperire minim nu exista!\n");
99 }
100 else
101 {
102     printf("Arborele de acoperire minim este:\n");
103     for(k = 0; k < n-1 ; k++)
104     {
105         printf(" %d -> %d ",t[k][0],t[k][1]);
106     }
107     printf("\nCost = %d \n",sum);
108 }
109 }
110
111 void main()
112 {
113     int a[100][100],n;
114     printf("Introduceti numarul de noduri: ");
115     scanf("%d",&n);
116     GenereazaMatriceaDeAdiacenta(a,n);
117     kruskal(a,n);
118 }
```



Introduceți mesaje de afișare în programul de mai sus pentru a evidenția pașii parcurși în obținerea arborelui de acoperire de cost minim.

### 7.2.4. Algoritmul Prim pentru aflarea arborelui parțial de cost minim

Un alt algoritm greedy pentru determinarea arborelui parțial de cost minim ale unui graf se datorează lui **Prim** (1957). Deosebirea constă în faptul că, la fiecare pas, mulțimea  $A$  de muchii alese împreună cu mulțimea  $U$  a vârfurilor pe care le conectează formează un subarbore de cost minim pentru subgraful  $(U, A)$  al lui  $G$  (și nu o pădure ca în algoritmul lui Kruskal). Inițial, mulțimea  $U$  a vârfurilor acestui arbore conține un singur vârf oarecare din  $V$ , care va fi rădăcina, iar mulțimea  $A$  a muchiilor este vidă. La fiecare pas se alege o muchie de cost minim, care se adaugă la arborele precedent dând naștere la un nou subarbore de cost minim (deci exact una din extremitățile ale acestei muchii este un vârf în arborele precedent). Arborele de cost minim crește “natural”, cu câte o ramură, până când va atinge toate vârfurile din  $V$ , adică până când  $U = V$ .

În algoritmul lui Prim, la fiecare pas,  $(U, A)$  formează un arbore parțial de cost minim pentru subgraful  $(U, A)$  al lui  $G$ . În final se obține arborele parțial de cost minim al grafului  $G$ .

Descrierea formală a algoritmului este redată mai jos.

#### Algoritmul Prim

```
Prim (G = (V, M))
{inițializare}
A ← ∅ {va conține muchiile arborelui parțial de cost minim}
U ← {un vârf oarecare din V}
{Bucclă greedy}
cât timp U ≠ V
    execută
        găsește {u, v} de cost minim astfel ca u ∈ V \ U și v ∈ U
        A ← A ∪ {{ u , v }}
        U ← U ∪ { u }
returnează A
```



Realizați implementarea algoritmului Prim într-un program C/C++ sau Java.