MODELAREA MATEMATICĂ A SISTEMELOR CONTINUE

OBIECTIVE

- Analiza sistemelor de ordinul doi folosind modele matematice.
- Calculul polilor şi zerourilor funcției de transfer.
- Reducerea schemelor bloc.

4.1. Introducere

Analiza şi sinteza sistemelor de control se bazează pe modelele matematice ale sistemelor fizice complexe, care se obțin pe baza legilor fizice ale proceselor şi sunt, în general, ecuații diferențiale neliniare. Pe de altă parte, multe sisteme fizice au proprietatea de liniaritate în jurul anumitor puncte de funcționare, astfel că este posibilă o aproximare liniară a sistemelor fizice. Dezvoltarea în serie Taylor este un exemplu pentru acest caz, utilizându-se la liniarizarea proceselor.

Aproximarea liniară a sistemelor fizice este descrisă de o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți. Transformata Laplace este un mod potrivit de a calcula soluția unei ecuații diferențiale şi poate fi folosită pentru a obține descrierea intrare-ieşire a sistemelor liniare, invariante în timp, sub forma funcției de transfer.

Matlab-ul poate fi utilizat pentru studiul sistemelor liniare invariante în timp descrise prin funcția de transfer sau sub forma intrare-stare-ieşire.

4.2. Sistem mecanic resort-masă-amortizare şi sistem electric RLC

Sistemul mecanic resort-masă-amortizare este prezentat în figura 4.2.1. Deplasarea masei, notată $y(t)$, este descrisă de ecuația diferențială (4.1):

$$M\ddot{y}(t)+B\dot{y}(t)+ky(t)=f(t) \tag{4.1}$$

Soluția $y(t)$ a ecuației diferențiale (4.1) descrie deplasarea masei în funcție de timp. Funcția de intrare (forța, în acest exemplu) este reprezentată de $f(t)$. Determinarea modelului matematic al acestui sistem mecanic se bazează pe utilizarea unui resort şi amortizare ideale, care aproximează elementele reale. Modelul sistemului mecanic resort-masă-amortizare, dat de ecuația (4.1) este aproximația liniară şi invariantă în timp a procesului fizic; el este valabil numai în regimurile unde forța resortului este o funcție liniară de deplasare a masei şi unde forța de frecare (amortizarea) este o funcție liniară de viteză. Modelul matematic dat de (4.1) reprezintă un vehicul care absoarbe energie.

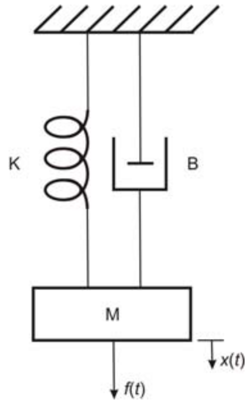


Fig. 4.2.1 Sistem mecanic resort-masă amortizat

Şi alte procese fizice sunt descrise de modelele matematice continue (analogice) de tipul (4.1).

Un exemplu de sistem electric tipic este circuitul RLC, redat în figura 4.2.2. În acest caz, modelul matematic este analogic, unde viteza $\dot{y}(t)$ şi tensiunea $u(t)$ sunt variabile analogice. Această noțiune de sistem analogic este importantă în modelarea sistemelor. Analiza sistemelor descrise de modelul (4.1) este importantă nu numai în cazul sistemelor mecanice şi electrice, dar şi a celor termice şi hidraulice.

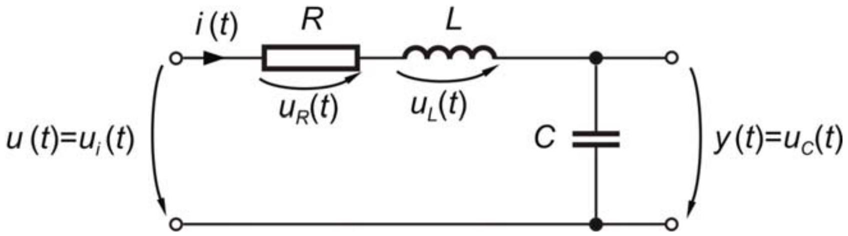


Fig. 4.2.2 Circuitul RLC

Revenind la primul exemplu, răspunsul neforțat ($f(t)=0$) $y(t)$ al sistemului mecanic (figura 4.2.1) este dat de:

$$y(t) = y(0)\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\varphi), \tag{4.2}$$

unde $\varphi = \arccos(\zeta)$, iar deplasarea inițială este $y(0)$.

Răspunsul tranzitoriu (4.2) este subamortizat dacă $\zeta < 1$, supraamortizat dacă $\zeta > 1$ şi amortizat critic dacă $\zeta = 1$.

Se poate utiliza Matlab-ul pentru a vizualiza răspunsul neforțat (tranzitoriu) dat de (4.2) cu condiția inițială $y(0)$. În cazul în care se doreşte o simulare a funcționării unui sistem cu reacție, atunci se pot varia intrările şi condițiile inițiale ale sistemului, putându-se calcula în Matlab soluțiile numerice şi apoi soluția grafică.

4.3. Funcții de transfer

Funcția de transfer reprezintă o descriere intrare-ieşire a sistemelor şi se obține aplicând transformata Laplace în condiții inițiale nule ecuației diferențiale (4.1).

În cazul sistemelor liniare continue în timp, funcția de transfer $G(s)$ este dată de un raport de două polinoame de variabilă complexă s, adică $G(s)$ este de forma:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n} \tag{4.3}$$

unde $m \le n$. Rădăcinile polinomului de la numărătorul funcției $G(s)$ se numesc zerourile sistemului, iar rădăcinile polinomului de la numitorul funcției $G(s)$ se numesc polii sistemului. În Matlab, pentru crearea unei funcții de transfer, se foloseşte funcția **tf** care are următoarea sintaxă:

```
sys=tf(num,den),
```

unde

`num`, `den` - reprezintă numărătorul, respectiv numitorul funcției de transfer, rezultând astfel un sistem continuu; dacă se specifică şi perioada de eşantionare atunci va rezulta un sistem discret.

Ecuația obținută prin egalarea cu zero a numitorului lui $G(s)$ se numeşte ecuația caracteristică a sistemului:

$$s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n=0 \tag{4.4}$$

Răspunsul tranzitoriu al sistemului este determinat de repartiția (localizarea) în planul `s` al polilor şi zerourilor. Se poate utiliza programul Matlab pentru analiza sistemelor descrise de funcții de transfer. Deoarece funcția de transfer este un raport de două polinoame, Matlab-ul poate fi folosit pentru rezolvarea polinoamelor. Polinoamele sunt reprezentate de vectori linie conținând coeficienții polinomului în ordinea descrescătoare puterilor variabilei. În exemplul 4.1 este prezentat modul de calcul al rădăcinilor pentru polinomul:

$$p(s)=s^3+3s^2+4 \tag{4.5}$$

```
Exemplul 4.1

>> p=[1 3 0 4];
>> r=roots(p)
r =
  -3.3553
   0.1777 + 1.0773i
   0.1777 - 1.0773i
```

Dacă `p` este un vector linie ce conține coeficienții lui $p(s)$ în ordine descrescătoare puterilor, atunci `r=roots(p)` este un vector coloană ce admite rădăcinile polinomului $p(s)$. Invers, dacă `r` este un vector coloană ce conține rădăcinile unui polinom, atunci `p=poly(r)` este un vector linie ce înglobează coeficienții polinomului în ordinea descrescătoare puterilor variabilei.

Pentru a înmulți două polinoame se utilizează funcția **conv**, iar pentru a evalua valoarea polinoamelor pentru o valoare dată a variabilei, se utilizează funcția **polyval**.

În exemplul 4.2 este exemplificată utilizarea funcțiilor **conv** şi **polyval** pentru calcularea valorii polinomului $h(s)=(3s^2+2s+1)(s+4)$ în punctul $s=-5$.

Reprezentarea grafică pentru localizarea pol-zero în planul complex se face folosind funcția **pzmap**, astfel: `pzmap(num,den)`. În operatorul pol-zero, zerourile sunt notate cu „o” şi polii cu „x”.

`Exemplul 4.2`

Utilizarea funcțiilor **conv** `şi` **polyval** pentru a multiplica şi evalua polinoamele $(3s^2+2s+1)(s+4)$

```
>> h1=[3 2 1];
>> h2=[1 4];
>> h=conv(h1,h2)
h = 3    14     9     4
>> v=polyval(h,-5)
v = -66
```

4.4. Modelele diagramei bloc

Presupunem că avem modelele matematice în forma funcțiilor de transfer pentru instalația tehnologică (proces) $G(s)$ şi pentru regulator $G_R(s)$. Putem avea şi alte componente ale sistemului, ca senzori şi rețele de corecție. Ne propunem să conectăm aceste elemente pentru a obține un sistem de control. Se vor utiliza funcțiile Matlab pentru transformarea digramelor bloc descrise în cursul de Teoria Sistemelor.

Procesul controlat este arătat în figura 4.4.1. Un sistem de control în buclă deschisă poate fi obținut prin conectarea în serie a procesului cu regulatorul, aşa cum se poate observa în figura 4.4.2.

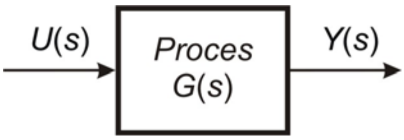


Fig. 4.4.1 Sistem deschis

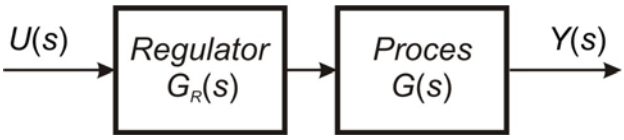


Fig. 4.4.2 Sistem de control deschis

Se poate utiliza Matlab-ul pentru calculul funcției de transfer $\frac{Y(s)}{U(s)}$ aşa cum se vede în exemplul 4.3.

4.4.1. Conexiunea serie

Se poate utiliza funcția **series** pentru a lega în cascadă două funcții de transfer $G_1(s)$ şi $G_2(s)$, ca în figura 4.4.3.

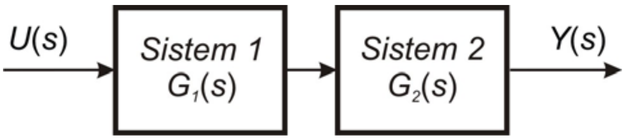


Fig. 4.4.3 Funcția series

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{num}{den} \qquad G_1(s)=\frac{num1}{den1} \qquad G_2(s)=\frac{num2}{den2}$$

```
[num,den]=series(num1,den1,num2,den2)
```

`Exemplul 4.3`

Fie procesul (instalația tehnologică) dat de funcția de transfer $G(s)$, cu $G(s)=\dfrac{1}{500\,s^2}$ şi fie regulatorul, reprezentat de funcția de transfer $G_R(s)$, cu $G_R(s)=\dfrac{s+1}{s+2}$. Funcția de transfer $G_R(s)G(s)$ este calculată utilizând funcția **series** şi este exemplificată în figura 4.4.4. Funcția de transfer echivalentă care rezultă este: $G_R(s)G(s)=\dfrac{num}{den}=\dfrac{s+1}{500\,s^3+1000\,s^2}$.

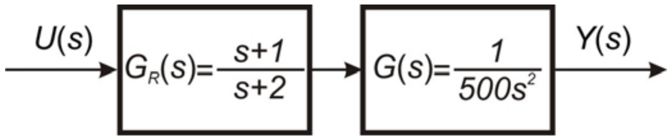


Fig. 4.4.4 Aplicație a funcției series.

```
numr=[1 1]; denr=[1 2];
num=[0 0 1]; den=[500 0 0];
[nums,dens]=series(numr,denr,num,den)
```

4.4.2. Conexiunea paralel

Diagrama bloc se obține şi pentru legarea în paralel folosind funcția **parallel**, descrisă în figura 4.4.5.

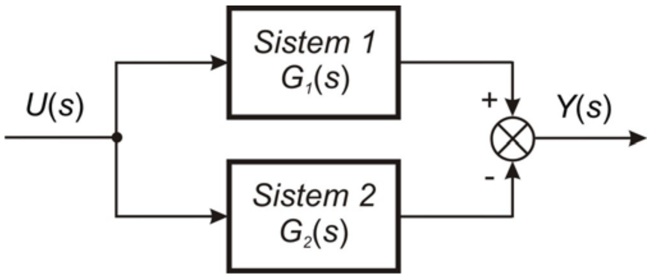


Fig. 4.4.5 Funcția paralel

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{num}{den}\qquad G_1(s)=\frac{num1}{den1}\qquad G_2(s)=\frac{num2}{den2}$$

```
[num,den]=parallel(num1,den1,num2,den2)
```

4.4.3. Conexiunea cu reacție

Introducerea unui semnal de reacție va genera un sistem în buclă închisă (cu reacție) unitară, aşa cum se vede în figura 4.4.6. Semnalul $E(s)$ este semnalul de eroare, iar $R(s)$ este semnalul de referință (de intrare). În acest sistem de control, regulatorul este pe calea directă şi funcția de transfer a sistemului închis este: $G_0(s)=\dfrac{G_R(s)G(s)}{1\pm G_R(s)G(s)}$. Există două funcții care pot utiliza procesul de reducere a diagramei bloc pentru calculul funcției de transfer a sistemului închis monobuclă şi multibuclă şi anume funcțiile **cloop** şi **feedback**.

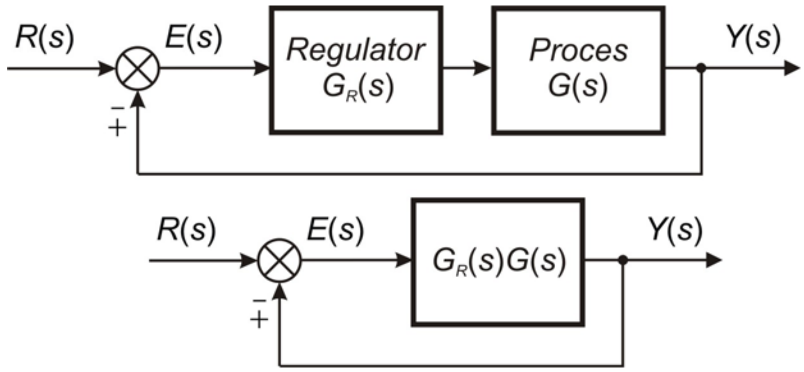


Fig. 4.4.6 Sistem de control cu reacție unitară, funcția cloop

$$G_0(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{num}{den} \quad G_R(s)G(s)=\frac{num1}{den1}$$

+1 - reacție pozitivă
-1 - reacție negativă

```
[num,den]=cloop(num1,den1,sign)
```

Funcția **cloop** calculează funcția de transfer a sistemului închis în care apare şi configurația sistemului cu reacție unitară. Funcția **feedback** este arătată în figura 4.4.7 în care apare şi configurația sistemului care include partea de reacție $G_2(s)$.

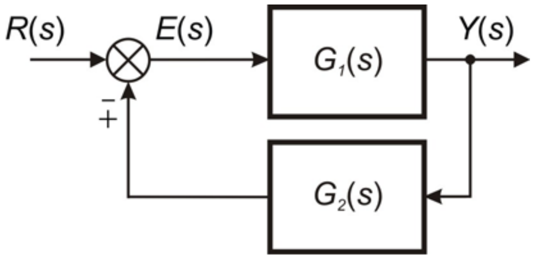


Fig. 4.4.7 Sistem de control cu reacție, funcția feedback

$$G_0(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{num}{den} \quad G_1(s)=\frac{num1}{den1},\ G_2(s)=\frac{num}{den2}$$

+1 - reacție pozitivă
-1 - reacție negativă

```
[num,den]=feedback(num1,den1,num2,den2, sign)
```

Pentru ambele funcții, **cloop** şi **feedback**, dacă semnul intrării „`sign`” este omis, atunci reacția negativă este presupusă că există. În exemplul 4.4 este prezentat modul de utilizare al funcției **cloop**, iar în exemplul 4.5, este arătat modul de utilizare al funcției **feedback**.

`Exemplul 4.4 Funcția cloop`

Fie procesul $G(s)$ şi regulatorul $G_R(s)$ din exemplul 4.3 (figura 4.4.8). Se aplică funcția **cloop** utilizând în primul rând funcția **series** pentru calculul lui $G(s)G_R(s)$, urmată de funcția **cloop** pentru bucla închisă.

Funcția de transfer a sistemului închis este:

$$G_0(s)=\frac{G_R(s)G(s)}{1+G_R(s)G(s)}=\frac{num}{den}=\frac{s+1}{500s^3+1000s^2+s+1}.$$

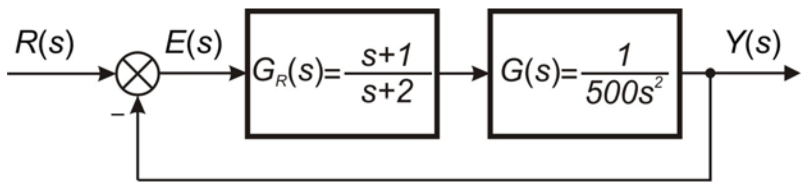


Fig. 4.4.8 Aplicație a funcției cloop

```
numr=[1 1]; denr=[1 2];
num=[0 0 1]; den=[500 0 0];
[nums,dens]=series(numr,denr,num,den);
[num,den]=cloop(nums,dens,-1)
```

Exemplul 4.5 Funcția feedback

Fie încă odată procesul $G(s)$ şi regulatorul $G_R(s)$ din exemplul 4.3. Se calculează funcția de transfer a sistemului închis cu regulatorul pe calea de reacție, utilizând funcția **feedback** (figura 4.4.9). Funcția de transfer a sistemului închis este:

$$G_0(s)=\frac{G(s)}{1+G_R(s)G(s)}=\frac{num}{den}=\frac{s+2}{500s^3+1000s^2+s+1}$$

Secvența de comandă:

```
numr=[1 1]; denr=[1 2];
num=[0 0 1]; den=[500 0 0];
[numf,denf]=feedback(numr,denr,num,den,-1)
```

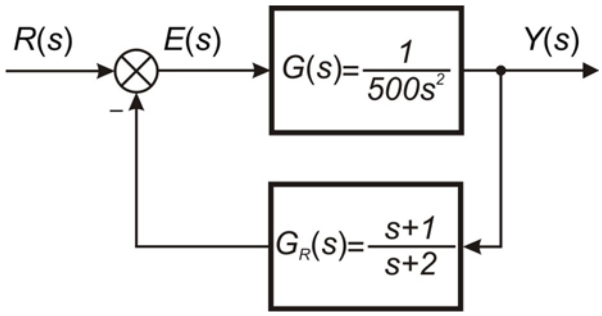


Fig. 4.4.9 Aplicație a funcției feedback

Funcțiile Matlab **series**, **cloop** şi **feedback** pot fi utilizate şi pentru diagramele multibuclă.

4.5. Exerciții propuse

Exercițiul 4.5.1

Să se reprezinte răspunsul neforțat al sistemului mecanic (t=[0:0.001:7], iar relația matematică este prezentată în relația 1.2), pentru:

- Cazul supraamortizat: $y(0)=0{,}15m\ \ \omega_n=\sqrt{2}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}};\ \zeta_1=\frac{3}{2\sqrt{2}}$.
- Cazul subamortizat: $y(0)=0{,}15m;\ \omega_n=\sqrt{2}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}};\ \zeta_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Exercițiul 4.5.2

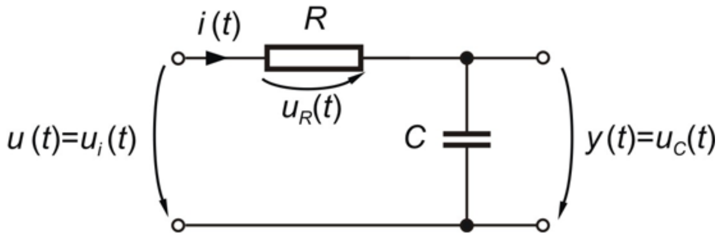
Considerând funcțiile de transfer:

$$G(s)=\frac{6s^2+1}{s^3+3s^2+3s+1} \quad \text{şi} \quad H(s)=\frac{(s+1)(s+2)}{(s+2i)(s-2i)(s+3)},$$

să se calculeze şi reprezinte polii şi zerourile funcțiilor de transfer $G(s)$ şi $H(s)$, precum şi rezultatul împărțirii lui $G(s)$ la $H(s)$ (numărul de poli este mai mare sau cel mult egal cu numărul de zerouri).

Exercițiul 4.5.3

Să se deseneze diagrama bloc şi să se determine funcția de transfer pentru circuitul RC (rezistor şi condensator) cu schema prezentată în figură:



unde: $u_i(t)$ reprezintă mărimea de intrare a sistemului, iar $u_c(t)$ mărimea de ieşire. Condițiile inițiale sunt nule.

Exercițiul 4.5.4

Să se realizeze programul pentru reducerea multibuclă. Rezultatul obținut cu programul scris în Matlab este:

$$G_0(s)=\frac{num}{den}=\frac{s^5+4s^4+6s^3+6s^2+5s+2}{12s^6+205s^5+1066s^4+2517s^3+3128s^2+2196s+712}$$

Sistemul multibuclă este dat în figura de mai jos şi se doreşte calcularea funcției de transfer echivalentă: $G(s)=\dfrac{Y(s)}{R(s)}$. În cadrul sistemului dat, există următoarele funcții de transfer:

$$G_1(s)=\frac{1}{s+10};\; G_2(s)=\frac{1}{s+1};$$

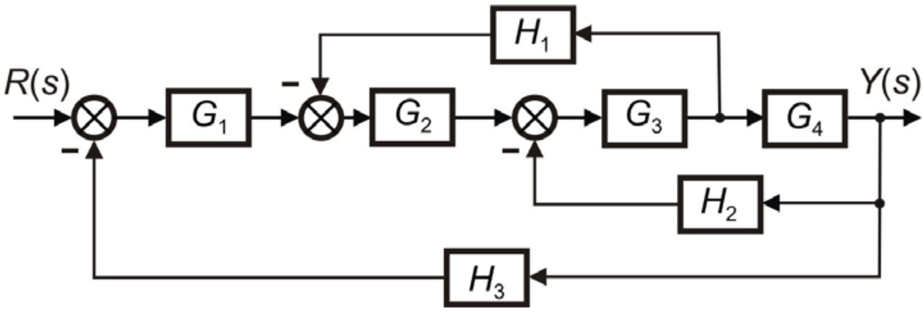
$$G_3(s)=\frac{s^2+1}{s^2+4s+4};\; G_4(s)=\frac{s+1}{s+6};$$

$$H_1(s)=2;\, H_2(s)=\frac{s+1}{s+2} \text{ şi } H_3(s)=1.$$

Pentru rezolvarea acestui exemplu trebuie parcurse următoarele etape:

- Etapa 1: Introducerea funcțiilor de transfer ale blocurilor componente în Matlab.
- Etapa 2: Se deplasează blocul $G_4(s)$ în interiorul buclei cu $H_1(s)$ pe reacție.
- Etapa 3: Se elimină bucla $G_3(s)G_4(s)H_2(s)$.

- Etapa 4: Se elimină bucla cu $H_1(s)/G_4(s)$ pe reacție.
- Etapa 5: Se elimină bucla rămasă şi se calculează $G(s)$.



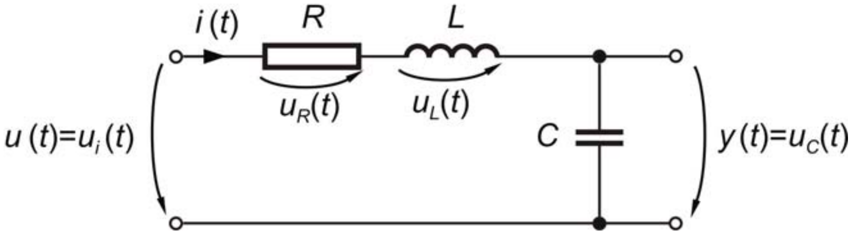
Sistem cu mai multe bucle de reacție.

Dacă se calculează polii şi zerourile lui $G(s)$, se constată că se poate da factor comun $(s+1)$ la numărător şi la numitor, deci funcția de transfer se simplifică. Această simplificare se poate face cu ajutorul funcției **minreal**:

```
[num1,den1]=minreal(num,den).
```

Exercițiul 4.5.5

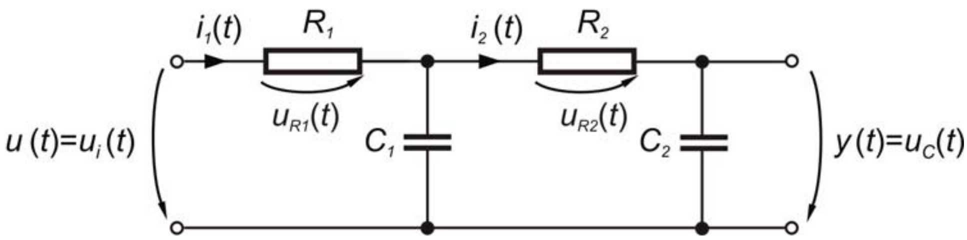
Să se deseneze diagrama bloc şi să se determine funcția de transfer pentru circuitul RLC cu schema prezentată în figură:



unde $u_i(t)$ reprezintă mărimea de intrare a sistemului, iar $u_c(t)$ mărimea de ieşire; condițiile inițiale sunt nule.

Exercițiul 4.5.6

Să se deseneze diagrama bloc şi să se determine funcția de transfer pentru circuitul cu schema prezentată în figură:



unde $u_i(t)$ reprezintă mărimea de intrare a sistemului, iar $u_c(t)$ mărimea de ieşire; condițiile inițiale sunt nule.