Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

1. Metoda de eliminare Gauss

Se dă sistemul de n ecuatii liniare cu n necunoscute scris sub formă matriceală $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unde:

- A este matricea coeficienților și are dimensiunea $n \times n$
- $\mathbf{x}$ este matricea coloană a necunoscutelor și are dimensiunea $n \times 1$
- $\mathbf{b}$ este matricea coloană a vectorilor liberi are dimensiunea $n \times 1$

Metoda de eliminare Gauss constă în modificarea formei sistemului de ecuații astfel încât matricea coeficienților $\mathbf{A}$ să fie o matrice triunghiulară (toate elementele de sub diagonala principală să fie zero). Aducerea sistemului de ecuații la o astfel de formă se face prin aplicarea succesivă unor operatii elementare, mai exact:

- Permutarea liniei i cu linia j a matricei
- Multiplicarea liniei i cu o constantă c diferită de zero
- Adunarea liniei i cu linia j amplificată cu o constantă c

Efectuarea unei astfel de operați asupra unei matrici constă în inmulțirea la stânga cu o matrice elementară $E_{ij}(c)$.

Algoritmul de eliminare Gauss constă în doi pași:

1. Aducerea sistemului de ecuații $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ la forma triunghiulară.
2. Calculul soluțiilor $\mathbf{x}$ prin înlocuire

Aducerea sistemului de ecuații la forma triunghiulară

Aducerea sistemului de ecuații la forma triunghiulară se face prin inmulțirea la stânga a sistemului cu o secvență de matrici elementare $E_1 E_2 \ldots E_n$. Presupunem că dorim să aplicăm o operație elementară matricii sistemului A astfel încât elementul de pe linia i și coloana j să devină zero, acest lucru se poate face adunând la linia i a matricei o altă linie $i' \neq i$ amplificată cu o constantă $c = -\frac{A_{ij}}{A_{i'j}}$. Cu alte cuvinte acest lucru se poate face înmulțind la stânga ambii membrii ai sistemului cu matricea elementară $E_{i'j}(-\frac{A_{ij}}{A_{i'j}})$. De obicei $i' = j$ dar acesta se poate alege diferit astfel încât $A_{i'j} \neq 0$ și să aibă o valoare absolută cât mai mare.

Fie sistemul de 2 ecuații și două necunoscute:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

Înmulțind ambii membrii la stânga cu matricea $E_{1,2}(-\frac{a_{21}}{a_{11}})$ se obține:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

De unde rezultă:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & -a_{22} + \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

Se observă că astfel s-a obținut zero sub diagonala principală, prin urmare din ecuatia a 2-a se poate calcula necunoscuta x_2. Apoi necunoscuta x_1 se poate calcula înlocuind x_2 în prima ecuație.

Pentru exemplul cu două ecuații și două necunoscute a fost suficientă premultiplicarea cu o singură matrice elementară, adică efecutarea unei singure operații elementare asupra sistemului. Pentru un sistem de n ecuații și necunoscute este nevoie să se efectueze mai multe astfel de operatii până să se ajungă la forma triunghiulară. Mai exact, pentru fiecare element de sub diagonala principală este nevoie de premultiplicarea cu o matrice elementară.

Exemplu

In [1]:
```
A = [1.3182606   0.8903206   0.5227336;
     0.6623476   1.5465000   0.0021365;
     0.8763162   0.5628361   1.6799823]

b = [0.41201;
    0.46483;
    0.67660]
A0 = A;
b0 = b;
```

```
A =

   1.3182606   0.8903206   0.5227336
   0.6623476   1.5465000   0.0021365
   0.8763162   0.5628361   1.6799823

b =

   0.41201
   0.46483
   0.67660
```

Se înmulțesc la stânga ambii membrii pentru a elimina cei trei termeni diferiți de zero de sub diagonala principală. Pentru fiecare termen este nevoie de o multiplicare.

1. Matricea elementara de eliminare pentru elementul de pe linia 2 și coloana 1

In [2]:
```
n = 3;
E1 = eye(n,n);
```

Se aduna la linia 2, linia 1 multiplicată cu constanta $c = -\frac{A_{21}}{A_{11}}$

In [3]:
```
E1(2,:) = E1(2,:) + E1(1,:)*(-A(2,1)/A(1,1))
```

```
E1 =

   1.00000   0.00000   0.00000
  -0.50244   1.00000   0.00000
   0.00000   0.00000   1.00000
```

Se înmulțesc la stânga ambii membrii ai sistemului de ecuației cu matricea E_1

In [4]:
```
A = E1*A
b = E1*b
```

```
A =

   1.31826   0.89032   0.52273
   0.00000   1.09917  -0.26051
   0.87632   0.56284   1.67998

b =

   0.41201
   0.25782
   0.67660
```

Se observă că după multiplicare, elementul de linia 2 și coloana 1 a devenit zero. Mai departe se repetă procesul și pentru celelalte două elemente de sub diagonala principală.

Pentru linia 3, coloana 1:

In [5]:
```
E2 = eye(n,n);
E2(3,:) = E2(3,:) + E2(1,:)*(-A(3,1)/A(1,1))
```

```
E2 =

   1.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   1.00000   0.00000
  -0.66475   0.00000   1.00000
```

In [6]:
```
A = E2*A
b = E2*b
```

```
A =

   1.31826   0.89032   0.52273
   0.00000   1.09917  -0.26051
   0.00000  -0.02901   1.33249

b =

   0.41201
   0.25782
   0.40272
```

Și pentru linia 3, coloana 2:

In [7]:
```
E3 = eye(n,n);
E3(3,:) = E3(3,:) + E3(2,:)*(-A(3,2)/A(2,2))
```

```
E3 =

   1.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   1.00000   0.00000
   0.00000   0.02639   1.00000
```

In [8]:
```
A = E3*A
b = E3*b
```

```
A =

   1.31826   0.89032   0.52273
   0.00000   1.09917  -0.26051
   0.00000   0.00000   1.32562

b =

   0.41201
   0.25782
   0.40952
```

Se observă că matricea A a noului sistem de ecuatii obtinut are zero sub diagonala principală iar noul sistem are aceleași soluții ca vechiul sistem:

In [9]:
```
x_vechi = inv(A0)*b0
x_nou = inv(A)*b
```

```
x_vechi =

  -0.017823
   0.307776
   0.308927

x_nou =

  -0.017823
   0.307776
   0.308927
```

Calculul soluțiilor prin înlocuire

Odată ce sistemul de ecuații a fost adus la forma triunghiulară, soluțiile pot fi calculate direct printr-un proces simplu de înlocuire. Mai exact, cum ultima linie maticei A are un singur element diferit de zero, atunci aceată linie corespunde unei ecuații cu o singură necunoscută, deci se poate calcula direct soluția x_n a sistemului ca $x_n = b_n/A_{nn}$. Odată ce se cunoaște soluția x_n, aceasta poate fi înlocuită în ecuatia $n-1$, care este o ecuație cu două necunoscute: x_{n-1} și x_n. Inlocuind x_n în această ecuație se poate calcula x_{n-1}. Acest proces se repetă până când au fost calculate toate soluțiile.

Pentru exemplul de mai sus:

In [10]:
```
x_3 = b(3)/A(3,3)
x_2 = (b(2) - A(2,3)*x_3)/A(2,2)
x_1 = (b(1) - A(1,2)*x_2 - A(1,3)*x_3)/A(1,1)
```

```
x_3 =  0.30893
x_2 =  0.30778
x_1 = -0.017823
```

Se observă că soluțiile obținute astfel sunt identice cu cele calculate mai sus prin inversiune.

Generalizarea pentru un sistem de n ecuații cu n necunoscute

In [11]:
```
function [A_, b_] = gauss_elim(A,b)
    # Variabilele de intrare sunt matricea coeficienților A și matricea coloană a termenilor liberi b
    # Variabilele de ieșire sunt noile matrici A_ și b_ unde A_ a fost adusă la forma triunghiulară
    n = size(A)(1);
    A_ = A;
    b_ = b;
    E = eye(n,n);
    # Se parcurg toate elementele de sub diagonala principală
    for col = 1:n
        for row = col+1:n
            # Se calculează matricea E pentru fiecare element de sub diagonala principală
            E = eye(n,n);
            factor = A_(row,col)/A_(col,col);
            E(row,:) = E(row,:) - E(col,:)*factor;

            # Se multiplică la stânga ambii membrii ai sistemului cu matricea E calculată mai sus
            A_ = E*A_;
            b_ = E*b_;
        end
    end
end
```

In [12]:
```
function [x] = back_subst(A,b)
    n = size(A)(1);
    x = zeros(n,1);
    # soluția x_n
    x(n) = b(n)/A(n,n);
    # soluțiile rămase în ordine inversă
    for i = n-1:-1:1
        x(i) = (b(i) - A(i,i+1:n)*x(i+1:n))/A(i,i);
    end
end
```

In [13]:
```
[A_, b_] = gauss_elim(A0,b0)
```

```
A_ =

   1.31826   0.89032   0.52273
   0.00000   1.09917  -0.26051
   0.00000   0.00000   1.32562

b_ =

   0.41201
   0.25782
   0.40952
```

In [14]:
```
x_ = back_subst(A_,b_)
```

```
x_ =

  -0.017823
   0.307776
   0.308927
```

2. Descompunerea LU

Ideea de bază a descompunerii LU este descompunerea matricii A a sistemului într-un produs de două matrici triunghiulare L și U, $A = LU$ unde L are toate elementele de deasupra diagonalei principale zero iar U are toate elementele de sub diagonala principală zero.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Înlocuind matricea descompusă în sistemul de ecuații, se obtine:

$$\left(\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Care, mutând parantezele, poate fi scris ca:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Notând produsul din interiorul parantezei $U\mathbf{x}$ cu $\mathbf{d}$ se obține un nou sistem de ecuații unde vectorul necunoscutelor este $\mathbf{d}$:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Cum matricea L este în forma triunghiulară, acest sistem de ecuații poate fi rezolvat direct prin înlocuire folosind metoda descrisă mai sus. După ce au fost obținute soluțiile $\mathbf{d}$, acestea se înlocuiesc în sistemul $U\mathbf{x} = \mathbf{d}$:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Cum și acest sistem de ecuații are matricea coeficienților în forma triunghiulară, soluțiile $\mathbf{x}$ pot fi obtinute prin înlocuire.

Principalul avantaj al metodei descompunerii LU față de metoda Gauss este că operatiile se fac doar asupra matricei A a sistemului, nu și asupra vectorului $\mathbf{b}$, prin urmare această metodă este eficientă atunci când este nevoie să se rezolve mai multe sisteme de ecuații liniare în care matricea coeficienților A este aceeași și doar vectorul termenilor liberi $\mathbf{b}$ se modifică. Practic se face descompunerea LU pentru matricea A o singură dată iar această descompunere este folosită pentru fiecare vector $\mathbf{b}$.

Calculul matricelor L și U

La baza descompunerii LU se află tot metoda eliminării Gauss. Fie $E_1 E_2 \ldots E_n$ secvența de matrici elementare care a fost necesară pentru aducerea sistemului $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ la forma triunghiulară, deci matricea $E_1 E_2 \ldots E_n A$ este o matrice triunghiulară superioară (toate elementele de sub diagonala principală sunt zero). Practic matricea U din descompunerea LU este matricea $E_1 E_2 \ldots E_n A$. Pentru calculul matricii L se pornește de la afirmația că $A = LU$. Deci:

$$A = LE_1 E_2 \ldots E_n A$$

De unde rezultă că:

$$LE_1 E_2 \ldots E_n = I$$

Deci:

$$L = E_n^{-1} E_{n-1}^{-1} \ldots E_1^{-1}$$

Cum matricile E sunt cunoscute, mai rămâne problema calculul inverselor acestora. Pentru aceasta ne folosim de proprietatea specifică matricelor elementare:

$$E_{ij}(c)^{-1} = E_{ij}(-c)$$

Adică:

$$E_{ij}(c)^{-1} = -E_{ij}(c) + 2I$$

In [15]:
```
function [L,U] = LU_decomp(A)
    n = size(A)(1);
    L = eye(n,n);
    U = A;
    # Se parcurge fiecare element de sub diagonala principală
    for col = 1:n
        for row = col+1:n
            # Se calculează matricea elementară pentru reducerea elementului curent de sub diagonala principală
            E_tmp = eye(n,n);
            factor = U(row,col)/U(col,col);
            E_tmp(row,:) = E_tmp(row,:) - E_tmp(col,:)*factor;
            # Se calculează matricile U și L
            U = E_tmp*U;
            L = L*(-E_tmp + 2*eye(n,n)); #(-E_tmp + 2*eye(n,n)) reprezintă inversa matricei E_tmp
        end
    end
end
```

Exemplu

Se efectuează descompunerea LU a matricei A:

```
In [16]: [L U] = LU_decomp(A0)
```

```
L =

   1.00000   0.00000   0.00000
   0.50244   1.00000   0.00000
   0.66475  -0.02639   1.00000

U =

   1.31826   0.89032   0.52273
   0.00000   1.09917  -0.26051
   0.00000   0.00000   1.32562
```

Se observă că $LU = A$:

```
In [17]: L*U-A
```

```
ans =

   0.00000   0.00000   0.00000
   0.66235   0.44733   0.26264
   0.87632   0.56284   0.35436
```

Se rezolvă sistemul de ecuații $L\mathbf{d} = \mathbf{b}$ prin înlocuire:

```
In [18]: d_1 = b0(1)/L(1,1)
         d_2 =(b0(2) - L(2,1)*d_1)/L(2,2)
         d_3 =(b0(3) - L(3,1)*d_1 - L(3,2)*d_2)/L(3,3)
```

```
d_1 =  0.41201
d_2 =  0.25782
d_3 =  0.40952
```

Se rezolvă sistemul de ecuații $U\mathbf{x} = \mathbf{d}$ prin înlocuire:

```
In [19]: x_3 = d_3/U(3,3)
         x_2 =(d_2 - U(2,3)*x_3)/U(2,2)
         x_1 =(d_1 - U(1,2)*x_2 - U(1,3)*x_3)/U(1,1)
```

```
x_3 =  0.30893
x_2 =  0.30778
x_1 = -0.017823
```

3. Calculul matricei inverse folosind descompunerea LU

Descompunerea LU este o metodă potrivită pentru a rezolva mai multe sisteme de ecuatii liniare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ce au aceeași matrice A și diferite matrici $\mathbf{b}$. De altfel această metodă este avantajoasă pentru calculul inversei unei matrici deoarece este necesară o singură descompunere LU. Definiția unei matrici inverse A^{-1} este o matrice pentru care $AA^{-1} = I$:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculul A^{-1} pentru o matrice A cu dimensiunea $n \times n$ poate fi scrisă ca rezolvarea a n sisteme de ecuații liniare. De exemplu pentru cazul $n = 3$, prima coloană a matricei inverse se poate calcula rezolvând următorul sistem de ecuații:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \\ a'_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A 2-a coloană se calculează schimbând matricea $\mathbf{b}$ în $[0, 1, 0]^T$ iar a 3-a coloană cu $\mathbf{b} = [0, 0, 1]^T$. Se observă că doar matricea $\mathbf{b}$ se modifcă iar matricea A rămâne neschimbată. Prin urmare, pentru a rezolva aceste sisteme de ecuații este nevoie de o singură descompunere LU.

Exemplu:

Calculul inversei matricei A de mai sus:

```
In [20]: A = A0
```

```
A =

   1.3182606   0.8903206   0.5227336
   0.6623476   1.5465000   0.0021365
   0.8763162   0.5628361   1.6799823
```

Se calculează descompunerea LU pentru matricea A

In [21]:
```
[L U] = LU_decomp(A)
```
```
L =

   1.00000   0.00000   0.00000
   0.50244   1.00000   0.00000
   0.66475  -0.02639   1.00000

U =

   1.31826   0.89032   0.52273
   0.00000   1.09917  -0.26051
   0.00000   0.00000   1.32562
```

Se rezolvă sistemele de ecuații:

$A\mathbf{a}_1 = [1, 0, 0]^T$

$A\mathbf{a}_2 = [0, 1, 0]^T$

$A\mathbf{a}_3 = [0, 0, 1]^T$

Unde $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ și $\mathbf{a}_3$ sunt coloanele matricei inverse.

In [22]:
```
A_inv = zeros(3,3);
```

Prima coloană:

In [23]:
```
d_1 = 1/L(1,1);
d_2 = (0 - L(2,1)*d_1)/L(2,2);
d_3 = (0 - L(3,1)*d_1 - L(3,2)*d_2)/L(3,3);
```

In [24]:
```
x_3 = d_3/U(3,3);
x_2 =(d_2 - U(2,3)*x_3)/U(2,2);
x_1 =(d_1 - U(1,2)*x_2 - U(1,3)*x_3)/U(1,1);
A_inv(:,1) = [x_1,x_2,x_3]';
```

A 2-a coloană:

In [25]:
```
d_1 = 0/L(1,1);
d_2 = (1 - L(2,1)*d_1)/L(2,2);
d_3 = (0 - L(3,1)*d_1 - L(3,2)*d_2)/L(3,3);
```

In [26]:
```
x_3 = d_3/U(3,3);
x_2 =(d_2 - U(2,3)*x_3)/U(2,2);
x_1 =(d_1 - U(1,2)*x_2 - U(1,3)*x_3)/U(1,1);
A_inv(:,2) = [x_1,x_2,x_3]';
```

A 3-a coloană:

In [27]:
```
d_1 = 0/L(1,1);
d_2 = (0 - L(2,1)*d_1)/L(2,2);
d_3 = (1 - L(3,1)*d_1 - L(3,2)*d_2)/L(3,3);
```

In [28]:
```
x_3 = d_3/U(3,3);
x_2 =(d_2 - U(2,3)*x_3)/U(2,2);
x_1 =(d_1 - U(1,2)*x_2 - U(1,3)*x_3)/U(1,1);
A_inv(:,3) = [x_1,x_2,x_3]';
```

Verificare:

In [29]:
```
A*A_inv
```
```
ans =

  1.0000e+000  -6.0491e-017  -7.1886e-017
  9.3203e-017  1.0000e+000  -3.6117e-017
  7.2935e-017  -1.2433e-016  1.0000e+000
```