II. Filtrarea semnalelor cu filtre analogice

Într-un sens larg un filtru poate fi considerat un sistem de prelucrare a semnalelor (sau un circuit electric, electronic) al cărui răspuns modifică semnalul de intrare într-un mod prestabilit. O definiție mai apropiată de funcționalitatea realizată de un filtru, este că acesta este un sistem selectiv în frecvență sau un circuit care transmite la ieşire, fără nici o modificare, un anumit spectru din semnalul aplicat la intrare. Aşadar un filtru atenuează sau elimină complet componentele cu frecvențe cuprinse într-o anumită gamă de valori şi lasă să treacă nemodificate componentele de frecvență dintr-o gamă complementară de valori. Spectrul semnalului de ieşire al unui filtru se numeşte o versiune filtrată a semnalului de intrare.

În general, noțiunea de sistem de prelucrare a semnalelor este similară cu noțiunea de sistem dinamic (definit în Teoria Sistemelor). Un sistem de prelucrare a semnalelor este complet definit dacă se cunosc: semnalul original (= mărimea de intrare), semnalul filtrat (= mărimea de ieşire) şi legile care îi descriu funcționarea. Acest ansamblu formează modelul sistemului.

Metodele convenționale utilizate pentru filtrelor (ca sisteme liniare deterministe) sunt:

- ecuațiile integro-difirențiale (modele în domeniul timpului);
- funcțiile de transfer (modele în domeniu complex);
- răspuns pondere, răspuns indicial;
- caracteristicile (funcțiile) de frecvență.

Astefl, considerăm sistemul sau circuitul din figură cu mărimea de intrare $u(t)$ şi mărimea de ieşire $y(t)$.

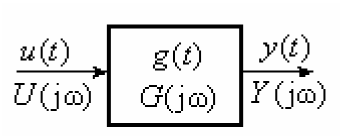

Fig. 1.

Funcția de transfer a sistemului este $G(s)$. Funcția de frecvență a sistemului este $G(\mathrm{j}\omega) = G(s)|_{s=\mathrm{j}\omega}$. Comportarea în domeniul timpului a sistemului poate fi descrisă de asemenea şi prin intermediul funcției (răspunsului) pondere

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = L^{-1}\{G(\mathrm{j}\omega)\}.$$

Cu notațiile standard pentru transformatele Fourier vom avea

$$U(\omega) = U(\mathrm{j}\omega) \leftrightarrow u(t)$$

$$Y(\omega) = Y(\mathrm{j}\omega) \leftrightarrow y(t)$$

Funcția de frecvență (de transfer frecvențială) a sistemului este

$G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{Y(\mathrm{j}\omega)}{U(\mathrm{j}\omega)}=\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Psi(\omega)}$ unde $\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|$ este modulul sau amplitudinea răspunsului iar $\Psi(\omega)$ este faza răspunsului.

Elementul de ordinul I şi elementul de ordinul II

Filtrele cele mai simple, de tip trece jos, numite în continuare filtre elementare, pot fi realizate cu elementele de sistem de ordinul 1 şi 2. Proprietățile de filtrare a acestor elemente de sistem sunt ilustrate în mod sugestiv de caracteristicile logaritmice modul-pulsație.

(Elementul de ordinul 1 are funcția de transfer $G(s)=\dfrac{k}{sT_f+1}$, respectiv funcția de frecvență $G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{k}{\mathrm{j}\omega T_f+1}$. Caracteristica logaritmică exactă modul-pulsație (fig. 1 cu linie întreruptă) se obține reprezentând funcția:

$$A^{\mathrm{dB}}=20\lg\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|=20\lg k-20\lg\sqrt{1+\omega^2T_f^2},$$

în coordonate logaritmice pentru pulsații respectiv în dB pentru modul. Caracteristica logaritmică asimptotică modul-pulsație (fig. 1 cu linie continuă) se obține aproximând caracteristica exactă conform relațiilor (se consideră $k=1$ şi $T_f=0{,}1\,\mathrm{s}$):

- $A^{\mathrm{dB}}\cong 20\lg k=0$, pentru $\omega<1/T_f$,

- $A^{\mathrm{dB}}\cong -20\lg \omega T_f$ pentru $\omega\geq 1/T_f$.

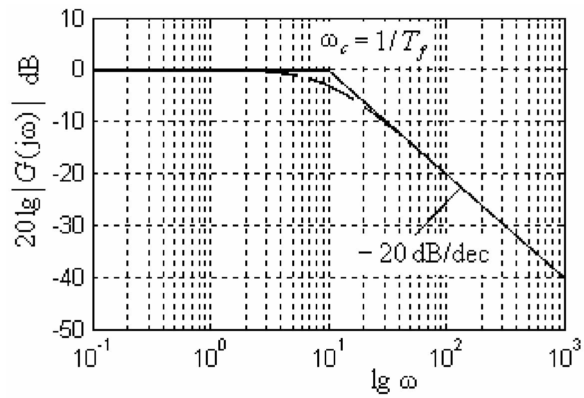

Fig. 2.

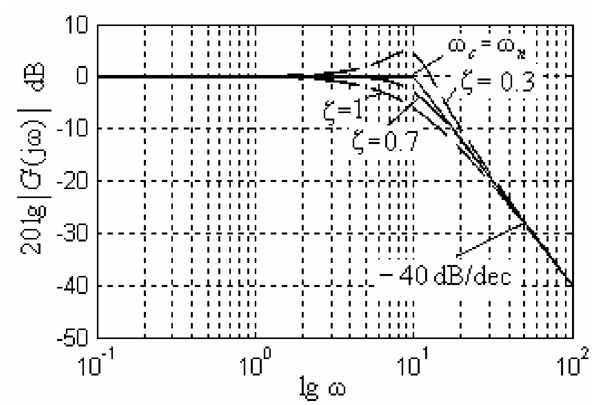

Fig.3

Elementul de ordinul 2 are funcția de transfer standard $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$, iar funcția de frecvență este: $G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2})+2\mathrm{j}\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}$.

Caracteristica logaritmică exactă modul-pulsație dedusă pe baza funcției:

$A^{\mathrm{dB}}(\omega)=20\lg\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|=20\lg 1-20\lg\sqrt{(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n})^2}$ este prezentată grafic în fig. 2 cu linie întreruptă pentru $\zeta=0{,}3;\ 0{,}7;\ 1$ şi $\omega_n=10$). Caracteristica logaritmică asimptotică modul-pulsație (fig. 2 cu linie continuă) se obține aproximând caracteristica exactă conform relațiilor:

- $A^{\mathrm{dB}} \cong 20\lg 1 = 0$, pentru $\omega < \omega_n$,

- $A^{\mathrm{dB}}(\omega) \cong -20\lg\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2} \cong -20\lg\,(\omega/\omega_n)^2 = -40\lg\,(\omega/\omega_n)$, pentru $\omega \geq \omega_n$.

Caracteristicile logaritmice oferă o imagine calitativă asupra proprietăților de filtrare, dar deformează aspectele cantitative ale răspunsului în frecvență. Din acest motiv în analiza şi proiectarea filtrelor performante se preferă utilizarea caracteristicile de frecvență în coordonate naturale pentru pulsație. Aceste caracteristici se obțin reprezentând grafic modulul funcției de frecvență $|G(\mathrm{j}\omega)|$ în funcție de pulsație, axa pulsației fiind gradată normal. Formele de variație a acestor caracteristici pentru elementele de ordinul 1 (T1) şi pentru cel de ordinul 2 (T2) sunt prezentate în fig. 3.

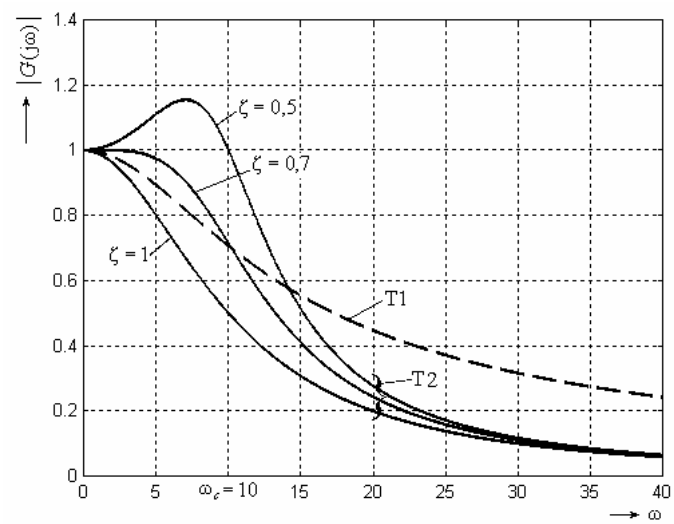

Fig. 4.

Elementul T1 are modulul egal cu 1 la pulsație $\omega = 0$, respectiv $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ la pulsația $\omega = \omega_c$. La elementul T2 caracteristica modul-pulsație depinde de ζ şi ω. În figura se prezintă caracteristica $|G(\mathrm{j}\omega)|$ pentru elementul T2 considerându-se 3 valori pentru ζ.

Filtre ideale

Sistemul se numeşte filtru ideal dacă amplitudinea răspunsului este constantă (pentru simplitate egală cu 1) într-o anumită bandă de frecvență (şi exact zero în afara acestei game de frecvențe) şi, de asemenea, pentru toate frecvențele din banda de amplitudine constantă nenulă faza $\Psi(\omega)$ are o variație liniară de forma $\Psi(\omega) = -\omega t_d$, unde $t_d \geq 0$ este o constantă cu dimensiune de timp.

Există patru tipuri de filtre ideale:

a) filtrul trece-jos;
b) filtrul trece-sus;
c) filtrul trece-bandă;
d) filtrul opreşte-bandă.

Răspunsul în amplitudine a acestor filtre ideale este prezentat în figura următoare:

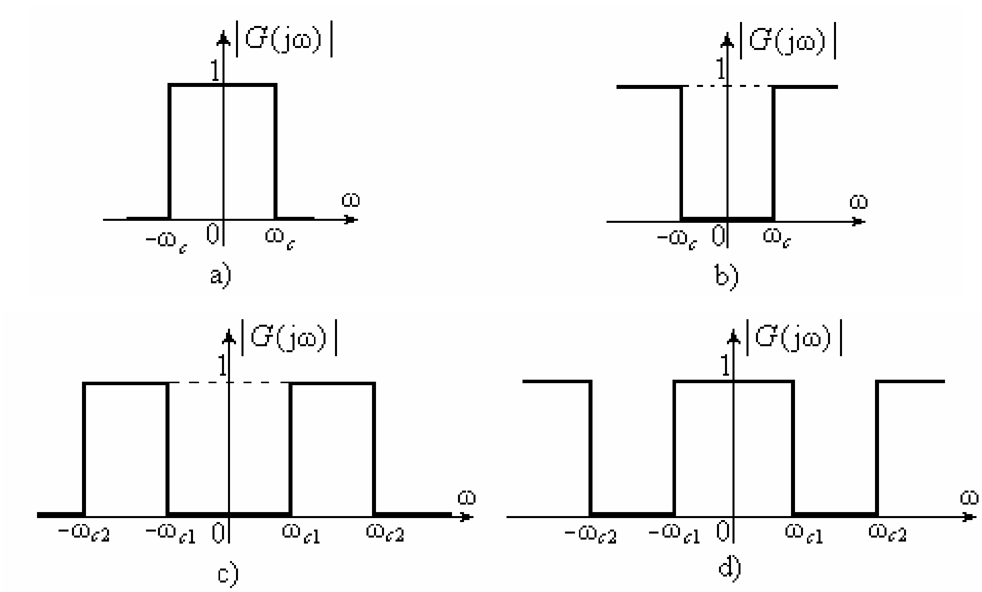

Fig. 5.

În aceste grafice cu ω_c, ω_{c1}, ω_{c2} s-au notat pulsațiile de frângere (tăiere) ale filtrelor.

Pentru a pune în evidență faptul că aceste elemente de sistem au un caracter ideal (deci nu pot fi realizabile fizic), să considerăm cazul filtrului trece-jos, care conform celor prezentate mai înainte are funcția de frecvență

$$G(\mathrm{j}\omega) = \begin{cases} 1 \cdot \mathrm{e}^{-j\omega t_d} \text{pentru} \left| \omega \right| \le \omega_c \\ 0 \text{ pentru} \left| \omega \right| \ge \omega_c \end{cases}.$$

Cu această funcție de transfer frecvențială ieşirea sistemului considerat este

$$Y(\mathrm{j}\omega) = G(\mathrm{j}\omega)U(\mathrm{j}\omega) = \begin{cases} U(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-j\omega t_d} \quad \text{pentru } \left| \omega \right| \le \omega_c \\ \qquad 0 \ \text{altfel} \end{cases}$$

Aplicând TFI expresiei de mai sus se obține, $y(t) = u(t)$, ceea ce înseamnă că ieşirea este o replică exactă a intrării, dar întârziată cu timpul constant t_d. Rezultă de aici că orice componentă din semnalul de intrare cu frecvența cuprinsă în banda de trecere a filtrului ideal va fi transmisă la ieşire fără atenuare şi fără distorsiuni de fază; semnalul va fi numai întârziat cu o anumită valoare constantă (t_d).

Trebuie să remarcăm faptul că aceste caracteristici ale filtrelor ideale nu pot fi obținute prin utilizarea unor funcții de transfer cauzale (practic realizabile). Acest aspect poate fi demonstrat dacă se consideră filtrul ideal trece-jos cu funcția de transfer $G(\mathrm{j}\omega) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_d}$. Răspunsul pondere al filtrului dedus prin aplicarea TFI va fi

$g(t) = F^{-1}\{G(\mathrm{j}\omega)\} = \dfrac{\sin \omega_c (t - t_d)}{\pi (t - t_d)}$, care are forma de variație prezentată în fig. 6.

(Demonstrație:

$$g(t) = F^{-1}\{G(\mathrm{j}\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{+\omega_c} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_d)}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{j}(t-t_d)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_d)}\Bigg|_{-\omega_c}^{\omega_c} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c(t-t_d)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c(t-t_d)}}{2\mathrm{j}(t-t_d)} = \frac{\sin \omega_c (t - t_d)}{\pi (t - t_d)})$$

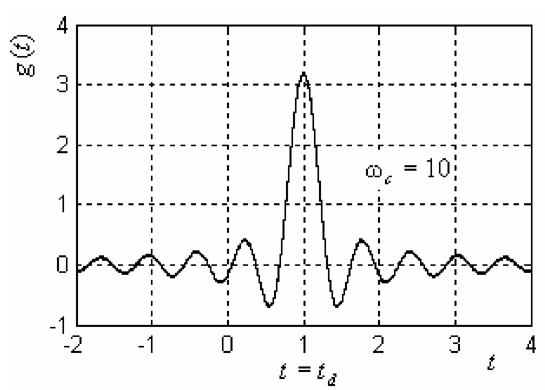

Fig. 6.

Deoarece răspunsul pondere este diferit de zero pentru $t < 0$ rezultă că sistemul necesar pentru a obține această variație pentru $g(t)$ este un sistem necauzal. Rezultate similare rezultă şi pentru celelalte tipuri de filtre ideale. Orice abatere de la caracteristica ideală de amplitudine se numeşte distorsiune de amplitudine sau de modul, iar abaterile de la caracteristica ideală (liniară) de fază se numesc distorsiuni de fază.

Deoarece caracteristicile filtrelor ideale nu pot fi obținute exact cu funcții de transfer realizabile fizic (cauzale), acestea (funcțiile de transfer) trebuie să fie aproximate astfel încât să fie respectată restricția de realizabilitate (cauzalitate) şi în plus să fie stabile. Aceasta înseamnă că funcțiile de transfer care se deduc, trebuie, pe de o parte să respecte specificațiile răspunsului filtrului (cu anumite toleranțe) şi pe de altă parte trebuie să îndeplinească condițiile de realizabilitate specifice sistemelor fizice.

Realizarea Practică a Filtrelor. Specificațiile Filtrelor Practice

Pentru filtrele ideale totul este alb sau negru; câştigul acestora este fie zero fie 1 pentru anumite zone (game) ale frecvenței. Ca şi în viața reală nu este posibil să realizăm o astfel de imagine a lumii, respectiv să obținem astfel de caracteristici ideale de frecvență. În practică se pot realiza o varietate de caracteristici de filtrare care constituie versiuni aproximate a celor ideale.

Un filtru ideal are o bandă de trecere (cu câştig unitar) şi o bandă de oprire (cu câştig zero) realizând o trecere (tranziție) bruscă din banda de trecere în cea de oprire şi invers. Deci nu există o bandă de tranziție. Pe de altă parte pentru filtrele practice (realizabile) tranziția de bandă din banda de trecere în cea de oprire (şi invers) este graduală producându-se într-o bandă finită ($\neq 0$) de frecvențe. De asemenea, studiile teoretice materializate în condiția Paley-Winner, au stabilit că la filtrele practic realizabile câştigul nu poate fi zero într-o bandă finită de frecvență. Prin urmare la filtrele practic realizabile nu există o bandă de oprire în sensul definit la filtrele ideale. De aceea vom defini banda de oprire a unui filtru real ca fiind banda în care câştigul este mai mic decât o anumită valoare notată în continuare G_s (vezi figura 13). În mod similar se defineşte banda de trecere ca fiind gama frecvențelor pentru care câştigul este cuprins între 1 şi un număr real prestabilit notat cu $G_p (G_p < 1)$ (vezi figura 13). S-a ales câştigul din banda de trecere ≈ 1 pentru comoditatea proiectării filtrului. Dacă valoarea acestui câştig diferă de 1 atunci se procedează la denormalizarea funcției de transfer (procedura va fi ulterior prezentată).

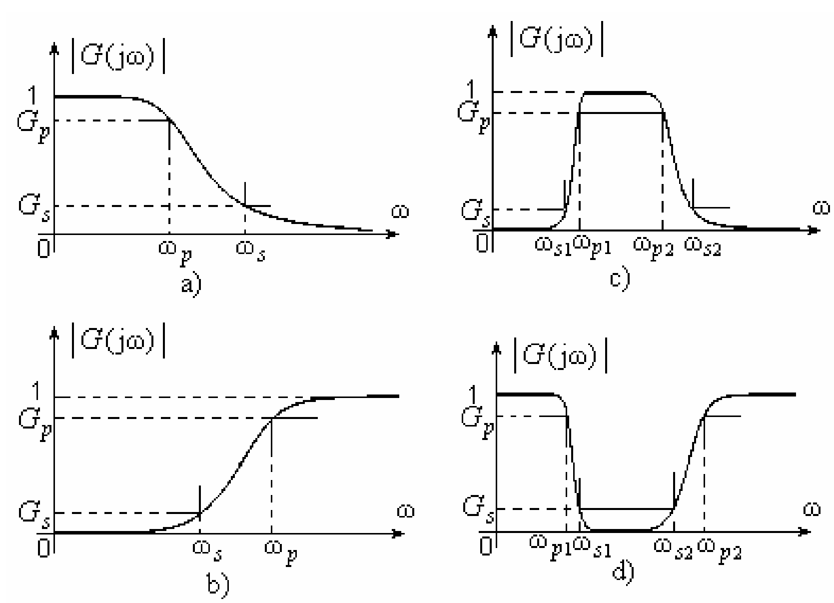

Fig. 13.

Uzual câştigul este specificat în decibeli. Vom nota în cele ce urmează câştigul în decibeli cu accent circumflex, $\hat{G}[\mathrm{dB}] = 20 \lg G$

Dacă $G = 1$, $\hat{G}[\text{dB}] = 0$ iar dacă $G = \sqrt{2}$, $\hat{G}[\text{dB}] = 3\,\text{dB}$. Uneori specificațiile filtrelor reale se dau în termenii unei atenuări, care se defineşte ca fiind inversul câştigului

$$\alpha = \frac{1}{G},\ \hat{\alpha}[\text{dB}] = -20\lg G = -\hat{G}.$$

În acest caz un câştig de $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$ este în dB de $\hat{G} = -3\text{dB}$, iar dacă se foloseşte termenul de atenuare aceasta este $\hat{\alpha} = -\hat{G} = 3\text{dB}$. În procedurile de proiectare care se vor prezenta în continuare se va presupune că G_p (câştigul minim din banda de trecere) şi G_s (câştigul maxim din banda de oprire) sunt specificate (cunoscute). În figura 13 se prezintă notațiile utilizate pentru specificațiile filtrelor trece-jos, trece-sus, respectiv trece-bandă şi opreşte-bandă. Procedurile de proiectare se vor dezvolta numai pentru filtrele trece jos. Celelalte tipuri de filtre (trece-sus, trece bandă şi opreşte bandă) se vor obține din filtrul trece jos prin simple transformări de frecvență.