LOCUL RĂDĂCINILOR.
UTILITARUL SISOTOOL

OBIECTIVE

- Trasarea locului rădăcinilor pentru o serie de sisteme.
- Prezentarea utilitarului Sisotool; folosirea acestuia în analiza şi simularea sistemelor.

7.1. Locul rădăcinilor

Metoda locului rădăcinilor elaborată de W. R. Evans[1] constă în trasarea locului rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului închis în funcție de variația unui parametru din această ecuație, parametru care, în majoritatea cazurilor, este factorul de amplificare al sistemului deschis (multe performanțe ale sistemului depind direct de factorul de amplificare). Această metodă este utilă în proiectarea sistemelor liniare de reglare.

7.1.1. Rezumatul paşilor algoritmului de trasare a locului rădăcinilor

1) Numărul ramurilor locului rădăcinilor este egal cu n (numărul polilor funcției de transfer a sistemului deschis). Se plasează, în planul complex, polii şi zerourile funcției $G(s)H(s)$. Ramurile locului rădăcinilor încep din polii sistemului deschis şi se termină în zerouri (cu valoarea finită) sau la infinit.
2) La stânga unui număr impar de poli reali plus zerouri reale, se desenează locul rădăcinilor pe axa reală.
3) Se trasează asimptotele ramurilor locului rădăcinilor:

- numărul asimptotelor este egal cu $n-m$;
- unghiurile asimptotelor $=\varphi_k=\dfrac{\pm 180^{\circ}(2k+1)}{n-m}$, $(k=0,1,2,....)$;
- abscisa punctului de intersecție a asimptotelor $\sigma_a=\dfrac{\sum p_i-\sum z_j}{n-m}$.

4) Se determină unghiul de plecare (unghiul de sosire) al locului rădăcinilor dintr-un pol complex (într-un zero complex).

---

[1] Walter R. Evans - recunoscut inginer, care, în anul 1948 a deschis drumul proiectării servo-mecanismelor prin metoda locului rădăcinilor.

– unghiul de plecare dintr-un pol complex $= \varphi_p = 180^\circ - \sum \theta_i + \sum \Phi_j$;

– unghiul de sosire într-un zero complex $= \varphi_s = 180^\circ - \sum \Phi_i + \sum \theta_j$,

în care, Φ sunt unghiurile ale vectorilor care încep în zerouri, iar θ reprezintă unghiurile vectorilor complecşi care pleacă din poli.
5) Se găsesc punctele de ramificaţii (de sosire şi de plecare).
6) Se determină punctele în care locul rădăcinilor intersectează axa imaginară. Aceste puncte pot fi găsite folosind criteriul de stabilitate Routh, sau rezolvând pentru ω şi K ecuaţia complexă:

$$1+\frac{KB(j\omega)}{A(j\omega)} = 1+\frac{K(j\omega+z_1)(j\omega+z_2)\ldots(j\omega+z_m)}{(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)\ldots(j\omega+p_n)} = 0$$

7) Luându-se o serie de puncte suficient de îndepărtate de originea planului complex, se schiţează locul rădăcinilor. Se localizează polii sistemului în circuit închis şi se determină, folosindu-se condiţia modulului, valorile corespunzătoare lui K, sau se determină poziţia polilor sistemului închis pentru o valoare dată a amplificării K.

Funcţiile de mai jos, permit trasarea locului rădăcinilor:

```
rlocus (num,den,K) sau
rlocus (num,den),
```

unde:
`num` = numărătorul funcţiei de transfer;
`den` = numitorul funcţiei de transfer;
K = factorul de amplificare al sistemului deschis din Control System Toolbox.

În primul caz, locul rădăcinilor este gradat după valorile lui K, iar în al doilea caz, este determinat automat. Aceste funcţii permit şi trasarea locului rădăcinilor după introducerea unor poli şi zerouri suplimentare, cu scopul de a corespunde unor performanţe impuse.

În cazul în care sistemul este reprezentat în spaţiul stărilor, funcţia **rlocus** poate fi apelată prin una din următoarele sintaxe:

```
rlocus (A,B,C,D,K),
rlocus (A,B,C,D),
```

unde: `A,B,C,D` reprezintă matricele ce definesc spaţiul stărilor.

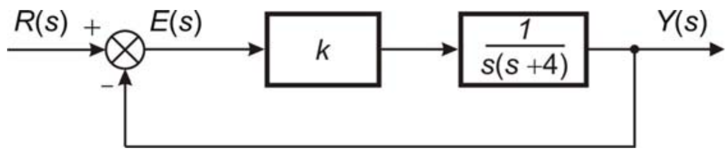
Apelând funcţia **rlocus** prin una din sintaxele:

```
[r,k]=rlocus(num,den,K),
[r,k]=rlocus(num,den),
[r,k]=rlocus(A,B,C,D,K),
[r,k]=rlocus(A,B,C,D),
```

se pot obţine matricea `r` şi vectorul `k`, ce conţin toate valorile corespunzătoare factorului de amplificare. Fiecare linie din matricea `r` corespunde unui factor de amplificare din vectorul `k`. Locul rădăcinilor în această situaţie se poate trasa cu ajutorul funcţiei `plot`, astfel:

```
plot(r).
Exemplu:
```

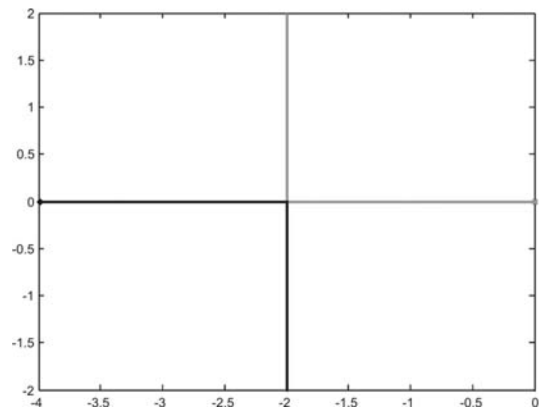
Fie sistemul din figură:



Pentru trasarea locului rădăcinilor sistemului deschis, în Matlab s-a realizat următorul program:

```
k=[0:0.5:12];num=[1];den=[1 4 0];
rlocus(num,den,k)
```

S-a obținut următorul grafic:



Se observă în figura de mai sus că locul rădăcinilor pe axa reală este segmentul $[-4{,}0]$; $n - m = 2$, deci două ramuri se termină la infinit; asimptotele au unghiurile cu axa reală $\theta = \pm 90^{o}$; intersecția asimptotelor pe axa reală se face în: $\sigma_a = (-4-0)/2 = -2$.

7.2. Utilitarul Sisotool

Sisotool este o interfață grafică, ce permite simularea unor sisteme cu o singură intrare şi o singură ieşire folosind diverse metode (diagrame Bode, locul rădăcinilor şi diagrame Nichols). În fereastra de comandă din Matlab se va tipări „sisotool" care va lansa în execuție interfața grafică (figura 7.2.1).

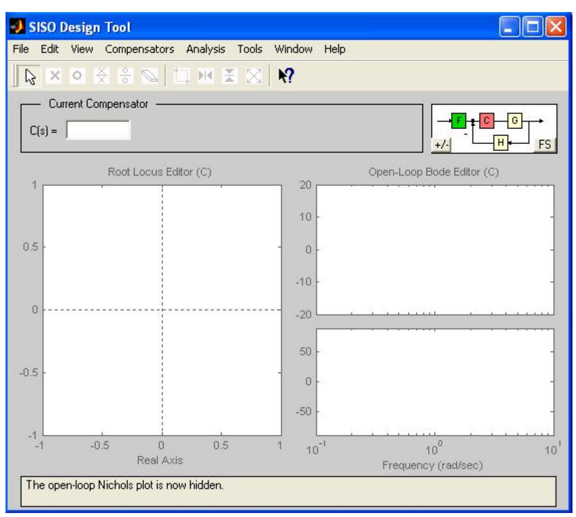


Fig. 7.2.1 Interfața Sisotool

Reprezentarea grafică din stânga corespunde locului rădăcinilor, iar celelalte două, din partea dreaptă, reprezintă amplitudinea şi faza caracteristicii Bode.

Pentru a analiza un sistem, mai întâi acesta trebuie lansat în execuție. Acest lucru se realizează alegând opțiunea **import** din meniul **File**, moment în care pe ecran va apărea o nouă interfață (figura 7.2.2). Inițial, toate blocurile G, H, F, C sunt setate la valoarea 1. Sistemul poate fi încărcat în mai multe moduri:

- din fereastra de comandă, unde sistemul este reprezentat sub forma unei funcții de transfer cu una din funcțiile: **tf**, **ss**, etc.;
- dintr-un fişier cu extensia .mat;
- din programul Simulink.

Se poate observa că în figura 7.2.2 s-a creat deja un sistem în fereastra de comandă cu funcția **tf** şi încărcat în blocul G. Cu ajutorul butoanelor cu săgeți din mijlocul interfeței, se încarcă sistemele dorite blocurilor de interes G, H, F, C. Ca şi exemplu, se consideră funcția de transfer a unui sistem de următoarea formă:

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+4}.$$

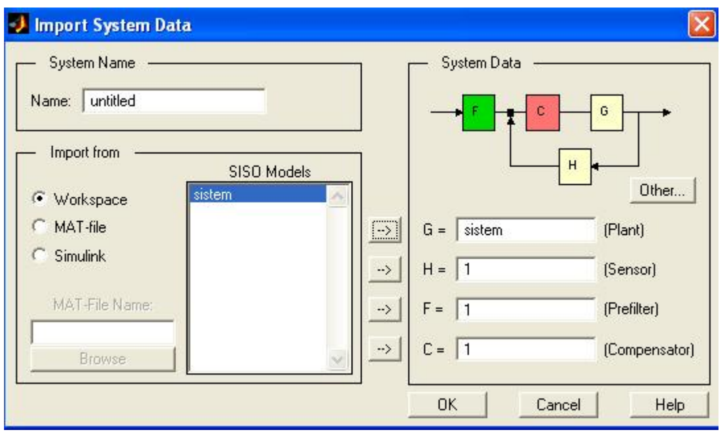


Fig. 7.2.2 Încărcarea sistemului

În fereastra de comandă din Matlab, funcția de transfer a fost creată cu funcția **tf**, astfel:

```
sistem=tf([1 2],[1 2 4])
```

şi asociată blocului G. După apăsarea butonului OK, se vor trasa caracteristicile Bode şi locul rădăcinilor (figura 7.2.3). Modificând factorul de amplificare pe graficul locului rădăcinilor (cu ajutorul pătratelor de culoare roşie), caracteristicile Bode se vor modifica în funcție de acesta. Grafic, se pot adăuga poli şi zerouri (reali sau complecşi); de asemenea, se pot şterge zerouri sau poli, dar numai aceia care nu au fost introduşi de către funcția de transfer din fereastra de comandă.

De obicei, funcția de transfer a sistemului, care se introduce din fereastra de comandă sau din Simulink, se asociază blocului G, iar factorul de amplicare şi polii sau zerourile adiționale, blocului C.

Cu ajutorul butonului **+/-** de pe interfața grafică se poate schimba semnul reacției (dacă reacția este unitară, atunci blocul $H = 1$), iar cu ajutorul butonului **FS** modul de interconectare al blocurilor.

Cu ajutorul utilitarului Sisotool se mai pot realiza:

- răspunsul sistemului închis la o intrare treaptă unitară (Response to Step Command - meniul Analysis);
- conversia sistem continuu - sistem discret (Continuous / Discret Conversions - meniul Tools);
- vizualizarea funcţiei de transfer a sistemului ce a fost importat şi a propietăţilor acestuia (System Data - meniul View);
- trasarea schemei bloc în Simulink (Draw Simulink Diagram).

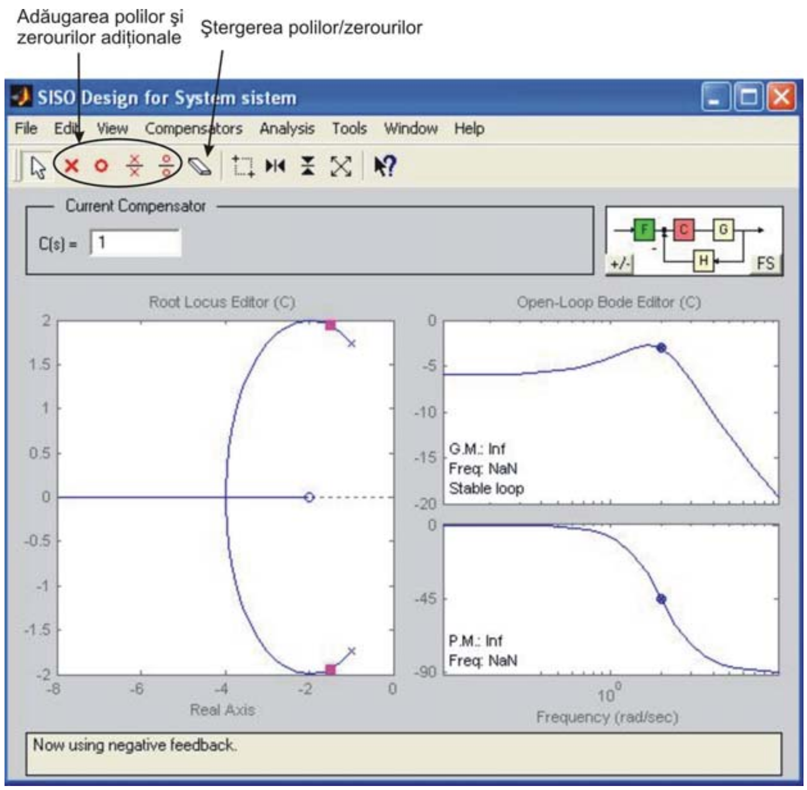


Fig. 7.2.3 Trasarea caracteristicilor Bode şi a locului rădăcinilor

7.3. Exerciţii propuse

Exerciţiul 7.3.1

Să se traseze locul rădăcinilor pentru sistemele reprezentate de următoarele funcţii de transfer ($k = [0:12]$ cu pasul 0,5).

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+5)}{s^2(s+3{,}6)};$$

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+2)(s+4)}{s^2(s+3{,}6)};$$

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s^3+8s^2+19s+12};$$

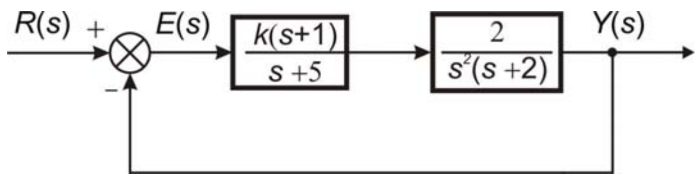
$$G(s)H(s) = \frac{k}{(s+1)(s+3-j)(s+3+j)}.$$

Să se specifice:

- Porțiunea de pe axa reală care aparține locului rădăcinilor.
- Câte ramuri există la infinit?
- Unghiul asimptotelor cu axa reală.
- Intersecția asimptotelor pe axa reală.

Exercițiul 7.3.2

Să se traseze locul rădăcinilor şi să se determine factorul de amplificare k



Exercițiul 7.3.3

Să se determine şi să se analizeze locul rădăcinilor şi caracteristicile Bode pentru sistemul cu următoarea funcție de transfer în circuit deschis:

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Odată cu introducerea unui pol adițional ($-p_3 = -4$), să se analizeze modul cum se modifică locul rădăcinilor şi caracteristicile Bode şi să se determine stabilitatea sistemului.

Exercițiul 7.3.4

Să se determine şi să se analizeze locul rădăcinilor, caracteristicile Bode şi curba polară, pentru sistemul din figură ($R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 2k\Omega$, $C = 2mF$):