CALCUL MATRICIAL

Prin matrice se înţelege un tablou cu n linii şi m coloane. Elementele unei matrici $a_{i,j}$ pot fi numere reale sau complexe.
Notaţie: $A_{n \times m}$

$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & . & . & . & a_{1,m} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ a_{n,1} & . & . & . & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

Cazuri particulare:

$n = m$	matrice *pătrată*
$n = 1$	matrice *linie* (vector linie)
$m = 1$	matrice *coloană* (vector coloană)
$a_{i,j} = 0,\ i > j$	matrice *triunghiulară inferior*
$a_{i,j} = 0,\ i < j$	matrice *triunghiulară superior*
$a_{i,j} = 0,\ i \neq j$ şi $a_{i,j} \neq 0,\ i = j$	matrice *diagonală*
$a_{i,j} = 0,\ i \neq j$ şi $a_{i,j} = 1,\ i = j$	matrice *unitate*
$a_{i,j} = a_{j,i}$,	matrice *simetrică*
$a_{i,j} = -a_{ji},\ i \neq j$ şi $a_{i,j} = 0,\ i = j$	matrice *antisimetrică*

Operaţii elementare cu matrici.

Transpunerea: Constă în schimbarea liniilor în coloane.

A^t transpusa matricei A.

Adunarea: Se pot aduna numai matrici având aceleaşi dimensiuni

$$A_{n\times m} + B_{n\times m} = C_{n\times m}; \qquad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \qquad i=1,n; \quad j=1,m.$$

Proprietăţi:

Comutativă

Asociativă

Distributivă

Scăderea: Se pot scădea numai matrici având aceleaşi dimensiuni

$$A_{n\times m} - B_{n\times m} = C_{n\times m}; \qquad c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j} \qquad i=1,n; \quad j=1,m.$$

Proprietăţi:

Asociativă

Distributivă

<u>*Înmulţirea*</u>*:* Se pot înmulţi numai matrici care îndeplinesc următoarea condiţie: *numărul de coloane a matricii deînmulţit este egal cu numărul de linii a matricii înmulţitor*:

$$A_{\mathrm{n} \times l} \text{ x } B_{l \times m} = C_{\mathrm{n} \times m}; \qquad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{l} a_{i,k} \cdot b_{k,j} \qquad i=1,n; \quad j=1,m.$$

Proprietăţi:

- Asociativă
- Distributivă

<u>*Ridicarea la putere*</u>*:* Se pot ridica la o putere întreagă *numai matrici pătrate*. Operaţia reprezintă o înmulţire repetată.

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

Proprietăţi:

- Asociativă
- Distributivă

Matrici elementare: Sunt matrici derivate dintr-o matricea unitate, după cum urmează:

$E_i(c)$→matrice unitate având linia i amplificată cu constanta c.

Exemplu

$$E_3(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$E_{i,j}$ → matrice unitate având linia i interschimbată cu linia j.

Exemplu

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_{i,j}(c)$ → matrice unitate având linia i înlocuită prin suma liniei i cu linia j amplificată cu constanta c.

Exemplu

$$E_{1,3}(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operaţii elementare cu linii şi coloane:

1. Multiplicarea unei linii cu o constantă nenulă ***c***.
2. Interschimbarea a două linii.
3. Înlocuirea liniei ***i*** prin suma liniei ***i*** cu linia ***j*** amplificată cu constanta ***c***.

Aceleaşi operaţii pot fi definite şi relativ la coloane.

Efectuarea acestor operaţii asupra unei matrici pătrate oarecare *A*, poare fi realizată prin <u>*premultiplicarea*</u> (înmulţirea la stânga a matricii *A*) cu o matrice elementară, după cum urmează:

Exemplu: Fie matricea

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 4\\ 1 & 3 & 0\\ 7 & 2 & 8\end{bmatrix}$$

- *Multiplicarea unei linii cu o constantă nenulă c:*

$$E_3(c)\cdot A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 5 & 4\\ 1 & 3 & 0\\ 7 & 2 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 4\\ 1 & 3 & 0\\ 7c & 2c & 8c\end{bmatrix}$$

•*Interschimbarea a două linii:*

$$E_{1,3} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

•*Înlocuirea liniei* ***i*** *prin suma liniei* ***i*** *cu linia* ***j*** *amplificată cu constanta* ***c****:*

$$E_{1,3}(c) \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+7c & 5+2c & 4+8c \\ 1 & 3 & 0 \\ 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

DETERMINANTUL UNEI MATRICI

Fiecărei matrici pătrate ***A*** i se poate asocia o cantitate scalară (un număr real) notat:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & . & . & . & a_{1,m} \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ a_{n,1} & . & . & . & a_{n,m} \end{vmatrix}$$

numit *determinant*.

Definirea determinantului utilizează noţiunile de ***minor*** şi ***cofactor***.

Un ***minor*** de ordin *n*-1 este un determinant obţinut prin eliminarea unei linii şi a unei coloane din determinantul dat. Minorul corespunzător termenului $a_{i,j}$ se obţine eliminând linia *i* şi coloana *j*.

Fiecărui element $a_{i,j}$ i se asociază un ***cofactor***, $|A_{i,j}|$, egal cu produsul dintre $(-1)^{i+j}$

şi *determinantul minorului* corespunzător elementului $a_{i,j}$.

Valoarea determinantului unei matrici pătrate va fi:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot |A_{i,j}| \qquad i = \overline{1,n} \qquad \text{sau} \qquad |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot |A_{i,j}| \qquad j = \overline{1,n}$$

Proprietăţile determinanţilor:

1. Dacă două linii sau două coloane ale unei matrici sunt ***identice***, valoarea determinantului este **zero**.
2. Determinantul produsului de matrici este egal cu produsul determinanţilor.
3. Determinantul unei matrici ***triunghiulare*** este egal cu produsul elementelor diagonalei principale.
4. Determinantul unei matrici ***diagonale*** este egal cu produsul elementelor diagonalei principale.
5. Dacă o linie i a matricei A este înlocuită cu linia $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ atunci, determinantul matricii care rezultă A_i, poate fi exprimat prin relaţia:

$$|A_i| = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot |A_{i,j}|$$

Reguli de transformare ale determinanţilor:

1. Dacă matricea B este formată prin multiplicarea cu constanta c, a elementelor unei linii din matricea A, atunci:

$$|B| = c \cdot |A|$$

2. Dacă matricea B este formată prin interschimbarea a două linii (sau coloane) din matricea A, atunci:

$$|B| = -|A|$$

3. Dacă matricea B este formată prin adunarea de c ori a unei linii la o altă linie din matricea A, atunci:

$$|B| = |A|$$

Aceste reguli corespund celor trei operaţii elementare cu matrici, descrise anterior.

INVERSA UNEI MATRICI

Pentru fiecare matrice pătrată nesingulară (având determinantul nenul) există o matrice inversă, notată A^{-1} care satisface relaţia:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = U$ în care U reprezintă matricea unitate.

Expresia matricii inverse este dată de relaţia: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{Adj}(A)$

în care Adj (A) este matrice **adjunctă** a matricii A. Matricea adjunctă a unei matrici se defineşte ca fiind ***transpusa matricii cofactorilor*** matricii date, adică:

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} |A_{1,1}| & . & . & . & |A_{n,1}| \\ . & . & & & \\ . & & . & & \\ . & & & . & \\ |A_{1,n}| & . & . & . & |A_{n,n}| \end{bmatrix}$$

Proprietăţi:

1. Numai o matrice pătrată poate avea o inversă;
2. Matricea inversă este o matrice pătrată;
3. Inversa unei matrici simetrice este tot o matrice simetrică;
4. Inversa unei matrici diagonale este tot o matrice diagonală;
5. Dacă determinantul unei matrici este nul această matrice nu admite o matrice inversă;
6. Inversa produsului de matrici este egală cu produsul inverselor;
7. Dacă: $A = k \cdot B$ atunci $A^{-1} = \frac{1}{k} \cdot B^{-1}$

Calculul matricii inverse prin eliminare

Dacă o matrice nesingulară A poate fi adusă la matricea unitate U prin premultiplicare cu o anumită secvenţă de matrici elementare E_k atunci premultiplicarea matricii unitate U cu aceeaşi secvenţă de matrici elementare va da matricea A^{-1}.

Presupunând că s-au găsit matricile elementare E_k astfel încât:

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = U$$

atunci prin postmultiplicare cu A^{-1} se obţine:

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot A^{-1} = U \cdot A^{-1}$$

adică:

$$E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 = A^{-1}$$

Aducerea unei matrici, la forma de matrice unitate U se poate realiza în n etape.

Fiecare etapă, i ($i = 1, n$), constă din **<u>două faze</u>**:

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & . & . & . & a_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i,1} & . & a_{i,i} & . & a_{i,n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & . & . & . & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Faza 1: *Normalizarea elementului* $a_{i,i}$.

Adică împărţirea liniei i la elementul de pe diagonala principală $a_{i,i}$. Dacă acesta este nul este necesară efectuarea, în prealabil, a unei permutări a liniilor.

După efectuarea acestei operaţii se obţine matricea:

$$A'_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & . & . & . & a_{1,n} \\ . & . & . & . & . \\ \dfrac{a_{i,1}}{a_{i,i}} & . & 1 & . & \dfrac{a_{i,n}}{a_{i,i}} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & . & . & . & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Acest rezultat se poate obţine prin premultiplicarea matricii A cu o matrice elementară de forma $E_i(c)$ unde: $c = \dfrac{1}{a_{i,i}}$

Faza 2:

Anularea elementelor care se află pe coloana *i*, mai puţin elementul de pe diagonala principală, prin înlocuirea liniei *k* cu o combinaţie liniară convenabilă a liniilor *i* şi *k*.

După efectuarea acestei operaţii se obţine matricea:

$$
\mathrm{A}_{n\times n}^{(i)} = \begin{bmatrix} a_{1,1}^{(i)} & . & 0 & . & a_{1,n}^{(i)} \\ . & . & 0 & . & . \\ a_{k,1}^{(i)} & . & 1 & . & a_{k,1}^{(i)} \\ . & . & 0 & . & . \\ a_{n,1}^{(i)} & . & 0 & . & a_{n,1}^{(i)} \end{bmatrix}
$$

Acest rezultat se poate obţine prin premultiplicări succesive ale matricii $A^{'}$ cu matrici elementare de forma $E_{k,i}(c)$ unde $c = -\, a_{k,i}$

Este evident că matricea care rezultă la **etapa *n*** va fi <u>matricea unitate</u>.

Aplicând aceeaşi secvenţă de operaţii care a fost aplicată matricilor:

$$A,\ \ A^{(1)},\ \ A^{(2)},\ \cdots\ ,\ A^{(n)} \ = \ U\,;$$

concomitent asupra matricilor:

$$U \ = \ B,\ \ B^{(1)},\ \ B^{(2)},\ \cdots B^{(n)}\,;$$

va rezulta în final:

$$B^{(n)} = A^{-1}.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Calculul concomitent al determinantului matricii:

Acest calcul poate fi efectuat pe baza <u>*regulilor de transformare ale determinanţilor*</u>, descrise anterior. Presupunând că matricea A este adusă la forma de matrice unitate, fără a efectua interschimbări de linii şi coloane, atunci relaţiile între determinanţii matricilor obţinute la etape succesive vor fi:

$$\left|A^{(1)}\right| = \frac{1}{a_{1,1}} \cdot |A| \qquad \left|A^{(2)}\right| = \frac{1}{a_{2,2}^{(1)}} \cdot \left|A^{(1)}\right| = \frac{1}{a_{2,2}^{(1)}} \cdot \frac{1}{a_{1,1}} \cdot |A| \qquad \left|A^{(3)}\right| = \frac{1}{a_{3,3}^{(2)}} \cdot \left|A^{(2)}\right| = \frac{1}{a_{3,3}^{(2)}} \cdot \frac{1}{a_{2,2}^{(1)}} \cdot \frac{1}{a_{1,1}} \cdot |A|$$

…………………...

$$\left|A^{(n)}\right| = |U| = 1 = \frac{1}{a_{n,n}^{(n-1)}} \cdot \left|A^{(n-1)}\right| = \frac{1}{a_{n,n}^{(n-1)}} \cdots \frac{1}{a_{3,3}^{(2)}} \cdot \frac{1}{a_{2,2}^{(1)}} \cdot \frac{1}{a_{1,1}} \cdot |A|$$

Rezultă relaţia de calcul a determinantului:

$$|A| = a_{1,1} \cdot a_{2,2}^{(1)} \cdot a_{3,3}^{(2)} \cdots a_{n,n}^{(n-1)}$$

Presupunând că au loc şi m <u>interschimbări de linii</u>, atunci relaţia de calcul a determinantului devine:

$$|A| = (-1)^m \cdot a_{1,1} \cdot a_{2,2}^{(1)} \cdot a_{3,3}^{(2)} \cdots a_{n,n}^{(n-1)}$$