

V. Filtre Cebâșev (Chebyshev)

Răspunsul în frecvență a unui filtru Cebâșev (FC) normalizat trece-jos este:

$$|G^N(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)}},$$

unde $C_n(\omega)$ polinomul Cebâșev de ordinul n calculat cu relația:

$$C_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1} \omega)$$

Polinoamele Cebâșev au proprietatea $C_n(\omega) = 2\omega C_{n-1}(\omega) - C_{n-2}(\omega)$, $n > 2$

Cunoscând $C_0(\omega) = 1$ și $C_1(\omega) = \omega$ se poate calcula $C_n(\omega)$ pentru orice valoare a lui n .

De exemplu $C_2 = 2\omega \cdot \omega - 1 = 2\omega^2 - 1$, $C_3 = 2\omega(2\omega^2 - 1) - \omega = 4\omega^3 - 3\omega$ ș.a.m.d.

Răspunsul în frecvență al FCN trece-jos este prezentat în figura 17 pentru $n = 6$ la 7 .

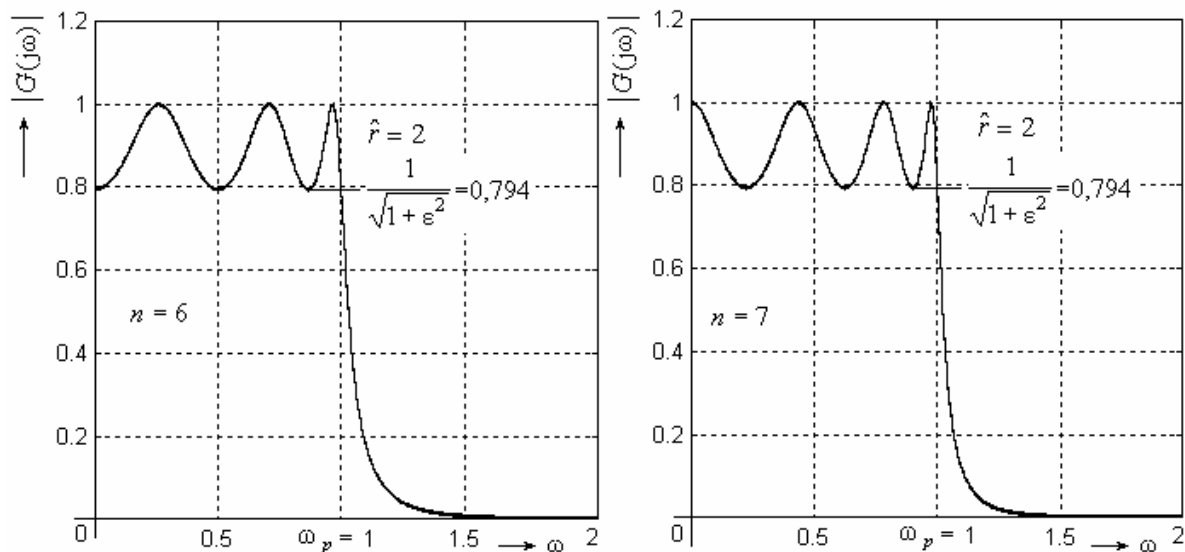


Figura 17

În legătură cu FCN se pot face următoarele observații cu caracter general:

1) Modulul funcției de frecvență a FCN reprezintă ondulații (ripluri) în banda de trecere fiind neted (monotonic) în banda de oprire. În banda de trecere $0 \leq \omega \leq 1$ există n maxime și minime (în sensul că nr. maximelor + nr. minimelor = n).

2) Din tabela 2 se observă că

$$C_n^2(0) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } n \text{ impar} \\ 1 & \text{pentru } n \text{ par} \end{cases}$$

deci câștigul la $\omega = 0$ va fi:

$$|G^N(j0)| = \begin{cases} 1 & \text{pentru } n \text{ impar} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} & \text{pentru } n \text{ par} \end{cases}$$

3) Parametrul ε controlează amplitudinea undulației (înălțimea riplurilor). În banda de trecere, r , raportul dintre câștigul maxim și câștigul minim este:

$$r = \sqrt{1+\varepsilon^2}.$$

Raportul r exprimat în decibeli este:

$$\hat{r} = 20 \lg \sqrt{1+\varepsilon^2} = 10 \lg(1+\varepsilon^2),$$

astfel că:

$$\varepsilon^2 = 10^{\hat{r}/10} - 1. \text{ În figură, } \hat{r} = 2\text{dB}, \text{ deci } \varepsilon = 0,7648 \text{ și } \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 0,7942 \approx 0,8.$$

Deoarece toate undulațiile din banda de trecere au aceeași amplitudine polinoamele Cebâșev se numesc funcții de undulație egală.

4) Ondulația este prezentă în toată banda de trecere $0 \leq \omega \leq 1$. La $\omega = 1$ modulul funcției de frecvență este $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1/5$. Pentru $\omega > 1$, câștigul descrește monoton.

5) La filtrele Cebâșev, riplul \hat{r} dB înlocuiește specificția \hat{G}_p de la filtrele Butterworth. De exemplu $\hat{r} \leq 2$ dB specifică faptul că variația maximă a câștigului în banda de trecere este de cel mult 2 dB. La filtrul Butterworth $\hat{G}_p = -2$ dB înseamnă același lucru.

6) Dacă se reduce riplul se îmbunătățește comportarea din banda de trecere, dar se înrăutățește comportarea din banda de oprire. Pe măsură ce r se reduce, câștigul din banda de oprire se mărește și invers. Remarcăm faptul că în cazul limită $\varepsilon = 0$, vom avea undulație nulă în banda de trecere, dar acum filtrul devine un filtru trece tot.

7) Filtrul Cebâșev are o bandă de tranziție mai mică decât cea care se obține la filtrul Butterworth de același ordin, dar această performanță rezultă cu o deteriorare a comportării în banda de trecere (apar ripluri).

Determinarea ordinului n al FC

Câștigul în dB al FCN la o frecvență arbitrară $\omega = \omega_x$ este:

$$\hat{G}_n = -10 \lg[1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega_x)]$$

Pentru banda de oprire (stopband) avem specificațiile \hat{G}_s la ω_s . Prin urmare

$$\hat{G}_s = -10 \lg[1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega_s)],$$

sau

$$\varepsilon^2 C_n^2(\omega_s) = 10^{-\hat{G}_s/10} - 10$$

Având în vedere că $\varepsilon^2 = 10^{\hat{r}/10} - 1$, unde \hat{r} este specificația pentru banda de trecere (passband), iar pe altă parte:

$$C_n(\omega_s) = \cosh[n \cosh^{-1}(\omega_s)],$$

rezultă într-o primă etapă

$$C_n(\omega_s) = \cosh[n \cosh^{-1}(\omega_s)] = \left[\frac{10^{-\hat{G}_s/10} - 1}{10^{\hat{r}/10} - 1} \right]^{\frac{1}{2}},$$

de unde se obține

$$n = \frac{1}{\cosh^{-1}(\omega_s)} \cdot \cosh^{-1} \left[\frac{10^{-\hat{G}_s/10} - 1}{10^{\hat{r}/10} - 1} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Remarcăm că aceste ecuații sunt valabile pentru filtrele Cebîșev normalizate la care $\omega_p = 1$. În cazul general se înlocuiește ω_s cu ω_s / ω_p și vom avea:

$$n = \frac{1}{\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} \cdot \cosh^{-1} \left[\frac{10^{-\hat{G}_s/10} - 1}{10^{\hat{r}/10} - 1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Localizarea (repartiția) polilor FC

Pentru a se obține funcția de transfer a FC este necesar mai întâi să determinăm polii acesteia. La FB am văzut că polii sunt plasați pe un semicerc de rază unitară având centrul în originea planului complex. Fără a mai face o demonstrație, vom afirma că polii unui FCN de ordin n sunt plasați pe o semielipsă cu axa verticală care trece prin originea planului complex de lungime $2 \cosh x$ și axa orizontală, care trece de asemenea prin originea planului complex, de lungime $2 \sinh x$, unde

$$x = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Polii FC se vor calcula cu relația

$$s_k = -\sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right] \sinh x + j \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right] \cosh x, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

Ca și în cazul FB toți polii vor fi plasați în SCS (pentru stabilitate). Construcția geometrică pentru determinarea poziției polilor FC este prezentată în figura 18 pentru $n = 3$, o procedură similară aplicându-se oricare ar fi n . Pentru obținerea poziției polilor FC se desenează în semiplanul complex stâng

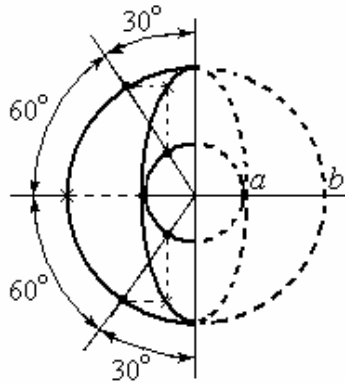


Fig. 18.

două semicercuri de raze $a = \sinh x$, respectiv $b = \cosh x$. Se desenează apoi razele care stabilesc direcțiile unghiulare ale polilor FB (la $n = 3$ avem 3 raze cu unghiurile $2\pi/3, \pi$ și $4\pi/3$). Poziția polului $k = 1, 2, 3$ al FC se obține la intersecția proiecției orizontale a punctului de întâlnire al dreptei radiale cu unghiul θ_k cu semicercul cu raza $\cosh x$ cu proiecția verticală a punctului care rezultă intersectând aceeași semidreaptă radială cu semicercul de rază $\sinh x$.

Funcția de transfer a unui FCN de ordin n este:

$$G^N(s) = \frac{K_n}{C'_n} = \frac{K_n}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Constanta K_n se adoptă astfel încât să avem o valoare adecvată pentru câștigul la $\omega = 0$ (vezi observațiile cu caracter general). De aici se obține:

$$K_n = \begin{cases} a_0 & \text{pentru } n \text{ impar} \\ \frac{a_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \frac{a_0}{10^{1/20}} & \text{pentru } n \text{ par} \end{cases}$$

Calculul practic al polinoamelor $C'_n(s)$ pe baza repartiției polilor este laborios. Din acest motiv se preferă utilizarea unor tabele din care obținem coeficienții polinomului Cebîșev, $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$, pentru diverse valori ale $n = 1, 7$, respectiv $\hat{r} = 0,5; 1; 2; 3$ dB. Se pot utiliza de asemenea tabelele care listează valorile polilor complecși pentru diverse valori ale lui n și \hat{r} .

Filtrul Cebîșev normalizat este complet caracterizat dacă se cunosc ordinul n al filtrului și ondulația din banda de trecere (exprimată uzual în dB). banda de trecere este implicit $(0,1)$, $\omega_p = 1$.

Exemplu:

Să se proiecteze un filtru Cebîșev trece-jos care satisface următoarele criterii:

Raportul $\hat{r} \leq 2$ dB în banda de trecere $0 \leq \omega \leq 10$ ($\omega_p = 10$).

Câștigul în banda de oprire $\hat{G}_s \leq -20$ dB pentru $\omega > 16,5$ ($\omega_s = 16,5$).

Se observă că aceste specificații sunt la fel ca la exemplul prezentat pentru FB, cu excepția benzii de tranziție. În acest exemplu banda de tranziție este de la 10 la 16,5 (față de 10 la 20 la FB) ordinul necesar pentru ca FC să fie mai mic decât al FB.

Pasul 1: Determinarea lui n

$$n = \frac{1}{\cosh^{-1}\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)} \cdot \cosh^{-1}\left[\frac{10^{-\hat{G}_s/10} - 1}{10^{\hat{r}/10} - 1}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cosh^{-1}(1,65)} \cdot \cosh^{-1}\left[\frac{10^2 - 1}{10^{0,2} - 1}\right]^{\frac{1}{2}} = 2,99$$

Se alege $n = 3$. Se observă că deși banda de tranziție este mai mică (10 la 16,5), ordinul FC este 2 față de $n = 4$ cât a rezultat la FB pentru o bandă de tranziție de la 10 la 20. Comportarea FB în banda de trecere este însă mai bună decât a FC, care prezintă o undulație.

Pasul 2: determinarea funcției de transfer normalizate. Date de proiectare necesare: n și \hat{r} .

Există mai multe căi în abordarea acestui pas. Dacă dispunem de o tabelă cu coeficienții sau rădăcinile polinomului Cebîșev de ordin 3 și $\hat{r} = 2$, atunci putem scrie ușor funcția de transfer. Din tabela 2 vom avea în cazul nostru $a_0 = 0,3269$, $a_1 = 1,0222$, $a_2 = 0,738$.

Deoarece $n = 3$, deci impar stabilim că valoarea lui $K_n = a_0 = 0,3269$. Rezultă așadar

$$\text{funcție de transfer: } G^N(s) = \frac{0,3269}{s^3 + 0,7378s^2 + 1,022s + 0,3269}$$

Există însă cazuri când datorită valorii lui \hat{r} (alta decât 0,5 ; 1 ; 2 sau 3) nu găsim polinomul Cebîșev care să îndeplinească condiția impusă de perechea (n, \hat{r}) .

În aceste situații se poate utiliza mediul MATLAB, folosind funcția `cheb1ap(n, \hat{r})` sau trecem la muncă calculând polii complecși cu relația

$$s_k = -\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] \sinh x + j \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] \cosh x$$

$$\text{cu } x = \frac{1}{n} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Pentru a face o mică aplicație vom recalcula $G^N(s)$ folosind această metodă. Mai întâi determinăm valoarea lui ε cu relația:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\hat{r}/10} - 1} = \sqrt{10^{0,2} - 1} = 0,7647$$

Apoi evaluăm pe $x = \frac{1}{3} \sinh^{-1}\left(\frac{1}{0,7647}\right) = 0,3610$, $\sinh x$ și $\cosh x$ și calculăm:

$$s_1 = -0,1844 + j0,9231, s_2 = -0,3689, s_3 = -0,1844 - j0,9231.$$

Deci

$$\begin{aligned} G^N(s) &= \frac{K_n}{(s + 0,3689)(s + 0,1844 - j0,9231)(s + 0,1844 + j0,9231)} = \\ &= \frac{K_n}{s^3 + 0,7378s^2 + 1,0222s + 0,3269} = \frac{0,3269}{s^3 + 0,7378s^2 + 1,0222s + 0,3269}. \end{aligned}$$

Pasul 3: Determinarea funcției de transfer nenormalizate $G(s)$. Reamintim că pentru funcția de transfer normalizată $G^N(s)$ dedusă mai înainte este valabilă pentru $\omega_p = 1$ (ω_p - lățimea benzii de trecere). Pentru $\omega_p = 10$, funcția de transfer $G(s)$ se obține înlocuind în $G^N(s)$ pe s cu $\frac{s}{\omega_p} = \frac{s}{10}$. Vom obține astfel:

$$G(s) = \frac{0,3269}{\left(\frac{s}{10}\right)^3 + 0,7378\left(\frac{s}{10}\right)^2 + 1,0222\left(\frac{s}{10}\right) + 0,3269} = \frac{326,9}{s^3 + 7,378s^2 + 102,22s + 326,9}$$

Pasul 4: Răspunsul în frecvență

Caracteristica modul – pulsație a FCN se determină cu relația

$$|G^N(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(x)}}; \text{ cu } \varepsilon^2 = (0,7647)^2 = 0,5849 \text{ și } C_3(x) = 4\omega^3 - 3\omega,$$

deci

$$|G^N(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,5849(4\omega^3 - 3\omega)^2}}$$

Caracteristica modul - pulsație a FC cu $\omega_p = 10$ este dată de relația

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,5849\left[4\left(\frac{\omega}{10}\right)^3 - 3\left(\frac{\omega}{10}\right)\right]^2}} = \frac{10^3}{\sqrt{9,3584\omega^6 - 1403,76\omega^4 + 52640\omega^2 + 10^6}}$$

În fig. 19 se prezintă graficul $|G(j\omega)| = f(\omega)$

Problema de proiectare prezentată în exemplu poate fi rezolvată direct în MATLAB folosind funcția *Signal Processing Toolbox* `cheb1ord` (scalată în frecvență pentru $\omega_p = 10$) este următorul:

$$\omega_p = 10 ; \omega_s = 16,5 ; r = 2 ; G_s = -20 ;$$

$$[n, W_p] = \text{cheb1ord}(W_p, W_s, r, -G_s, 's')$$

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{cheby1}(n, r, W_p, 's')$$

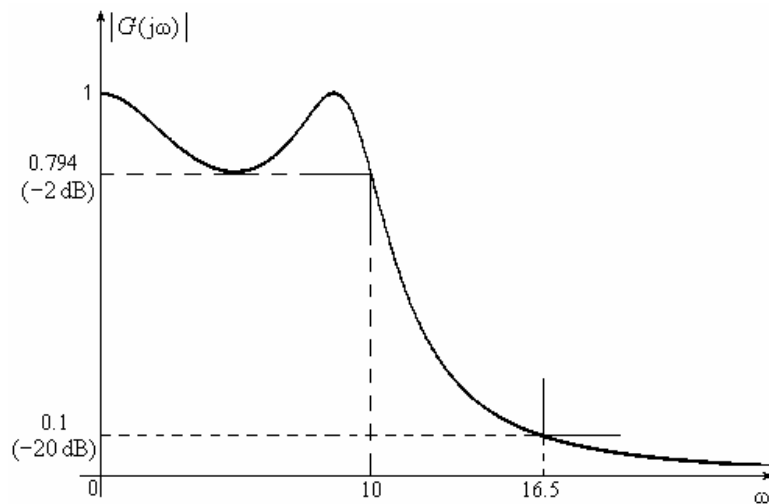


Fig. 19

Ca rezultat se obține:

$$n = 3, \text{num} = [0 \ 0 \ 0 \ 326.8901], \text{den} = [1 \ 7.3782 \ 102.219 \ 326.8901],$$

adică

$$G(s) = \frac{326,8901}{s^3 + 7,3782s^2 + 102,219s + 326,8901}$$

Filtre Cebâșev inverse

Principalul dezavantaj, al FCN este ondulația care există în banda de trecere. În general comportarea în banda de trecere este mai importantă fiind de preferat ca aici să avem un răspuns în frecvență neted (monotonic), chiar dacă apar ondulații în banda de oprire. O astfel de comportare în frecvență este specifică FCI. Spre deosebire de filtrele Butterworth și Cebîșev, filtrul Cebîșev invers are un număr finit de zerouri (uzual $m = n - 1$). Răspunsul FCI poate fi obținut din funcția de frecvență a FC normal, printr-o procedură care se realizează în doi pași. Fie $G_C^N(s)$ funcția de transfer normalizată a FC normal,

$$|G_C^N(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)}}.$$

În prima etapă se scade $|G_C^N(j\omega)|^2$ din 1 pentru a obține un filtru trece-sus care în banda de oprire; $\omega \in (0,1)$ are ondulații, iar în banda de trecere, $\omega \in (1, \infty)$ are un răspuns neted. În al doilea pas interschimbăm banda de oprire cu banda de trecere printr-o transformare de frecvență în care înlocuim ω cu $1/\omega$.

Acest pas face ca banda de trecere să fie schimbată de la $(1, \infty)$ la $(0,1)$ și banda de oprire este adusă în zona de frecvență de la 1 la ∞ .

Caracteristica modul pulsație a FCI normalizat va fi:

$$|G^N(j\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2(1/\omega)}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(1/\omega)},$$

în care C_n sunt polinoamele Cebâșev prezentate mai înainte. FCI au proprietăți de filtrare foarte bune. Astfel comportarea în banda de trecere, mai ales la valori mici ale lui ω a FCI este mai bună decât a FC normal și chiar decât a FB de același ordin. FCI are banda de tranziție cea mai mică (comparat cu FC normal și FB). Proiectarea FCI se face la nivel principal în mod asemănător cu cea a FC normal, fiind însă mult mai complicată. Pentru simplitatea expunerii vom prefera să prezentăm a soluție a acestei probleme bazată pe funcțiile din toolbox-ul Signal Processing al mediului de programare MATLAB.

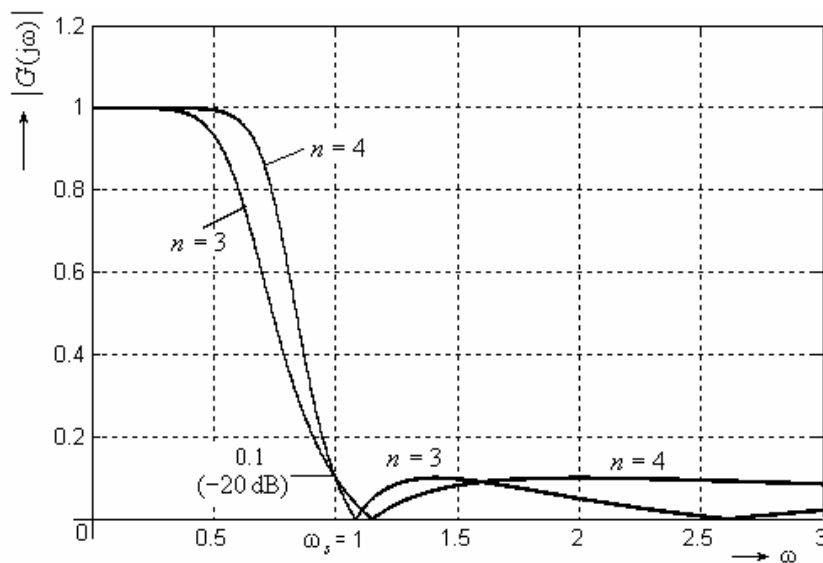


Fig. 20.

În figura 20 se prezintă răspunsul în frecvență pentru filtrele Chebîșev inverse cu $n = 3$, respectiv $n = 4$. Specificațiile FCI normalizat sunt ordinul n al acestuia și ondulația

maximă admisă din banda de oprire. Remarcăm faptul că pentru o ondulație de 0,1 valoare exprimată în dB este $\hat{G}_s = 20 \lg 0.1 = 20 \lg 10^{-1} = -20 \text{ dB}$.

Obs. La pulsația $\omega = 1$, FCI normalizat are întodeauna modulul egal cu ondulația maximă admisă (în fig). în banda de oprire. Această pulsație normalizată are așadar semnificația parametrului ω_s pentru FCI normalizat.

Repartiția poli-zeroouri a unui FCI se determină în MATLAB cu funcția **cheb2ap** cu sintaxa:

[z,p,k] = cheb2ap(n,- \hat{G}_s).

De exemplu, linia de program MATLAB

[z,p,k] = cheb2ap(3, - G_s)

furnizează vectorii

z = [1,1574i -1,1574i];

p = [-0,276 -0,6284i -0,8534 -0,8534 -0,276 +0,6284i];

k = 0,3015

Funcția de transfer a FCI normalizat de ordinul 3 cu ondulația maximă din banda de oprire de 0,1 (-20 dB) este

$$G^N(s) = \frac{0.31051s^2 + 0.40202}{s^3 + 1.4054s^2 + 0.9421s + 0.40202}.$$

Ca regulă generală un FCI de ordin impar va avea $(n-1)/2$ perechi de zerouri imaginare și 3 poli (2 complexi și unul real), iar un FCI de ordinul par are $n/2$ perechi de zerouri imaginare și 4 poli complexi. Deoarece zerourile imajenare determină minimele din banda de oprire, un FCI are $[n/2]$ minime (egale cu zero) în această zonă ($[n/2]$ partea întreagă).

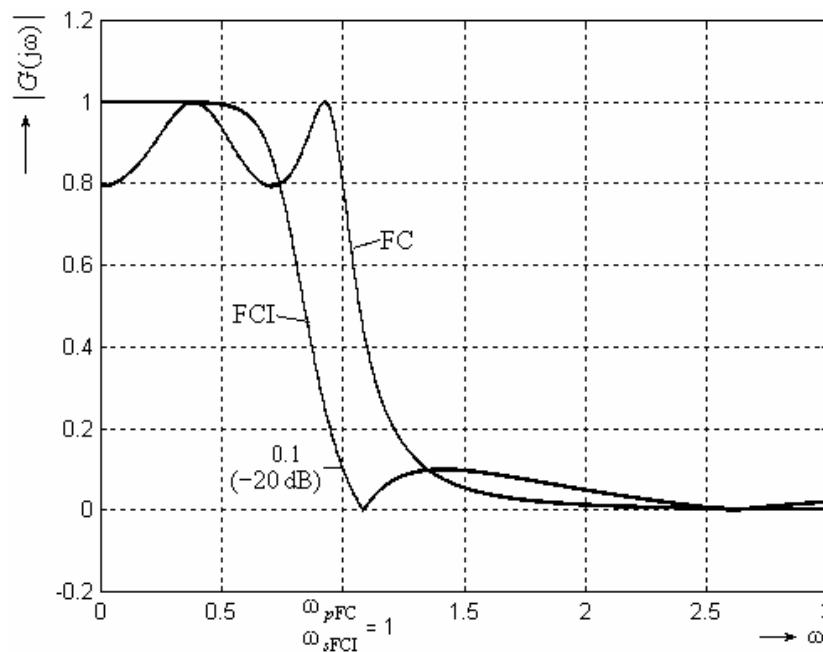


Fig. 21.

În figura 21 se prezintă comparativ răspunsurile în frecvență pentru FC și FCI de ordin 4 respectiv pentru FB și FCI de același ordin.

Exemplu de proiectare în MATLAB a unui FCI

Specificațiile filtrului sunt:

$$\omega_p = 10; \omega_s = 16.5; \hat{G}_p = -2\text{dB} \quad \hat{G}_s = -20\text{dB}.$$

Programul în cod MATLAB

$$\omega_p = 10; \omega_s = 16.5; G_p = -2; G_s = -20;$$

$$\omega = \text{linspace}(0, 20, 1000);$$

$$[n, \omega_s] = \text{cheb2ord}(\omega_p, \omega_s, -G_p, -G_s, 's');$$

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{cheby2}(n, -G_s, \omega_s, 's');$$

$$\text{printsys}(\text{num}, \text{den})$$

$$[\text{mag}, \text{phase}, \omega] = \text{bode}(\text{num}, \text{den});$$

$$\text{plot}(\omega, \text{mag}), \text{grid}$$

În figura 22 se prezintă caracteristica modul-pulsatie a filtrului proiectat mai înainte.

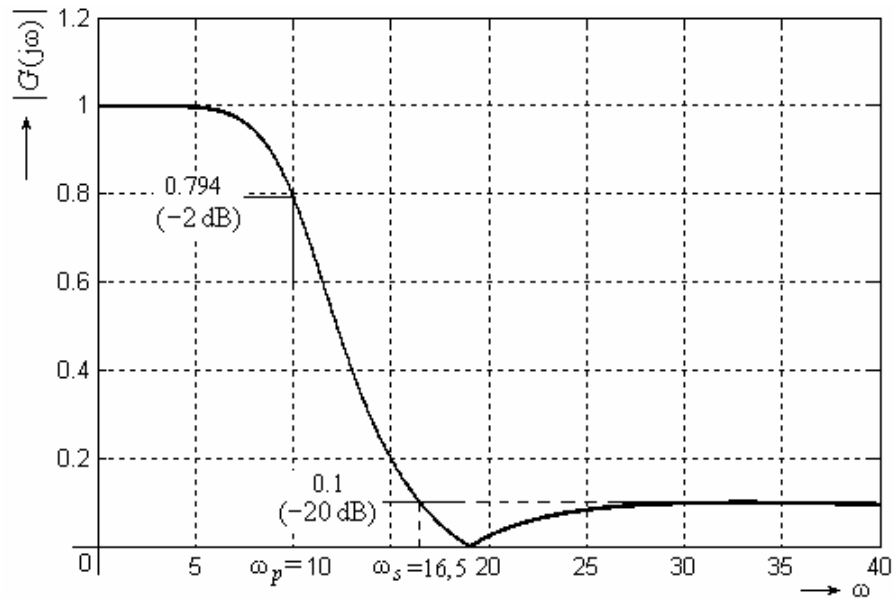


Fig. 22.