VI. Transformări de Frecvență

Mai devreme am văzut (atât pentru filtre Butterworth, cât şi pentru Cebâşev) cum funcția de transfer a unui filtru trece-jos, cu specificații arbitrar alese, poate fi obținută dintr-un filtru trece-jos normalizat, folosind scalarea frecvenței. Folosind anumite transformări de frecvență, putem obține funcțiile de transfer a filtrelor trece-sus, trece-bandă, şi bandă-stop din schema unui filtru trece-jos fundamental (filtru prototip). De exemplu, funcția de transfer a unui filtru trece-sus poate fi obținută din funcția de transfer a filtrului prototip trece-jos prin înlocuirea lui s cu ω_p/s . Transformări similare ne permit să proiectăm filtre trece-bandă şi bandă-stop din filtrele prototip trece-jos potrivite.

Filtrul prototip poate fi de orice fel, cum ar fi Butterworth, Chebyshev, eliptic, şi aşa mai departe. În primul rând proiectăm un filtru prototip trece-jos convenabil $H_p(s)$. În pasul următor, înlocuim s cu o transformare potrivită $T(s)$ pentru a obține filtrul trece-sus, trece-bandă, ori bandă-stop dorit.

Filtre Trece-Sus

Figura 7.27a ne arată un răspuns în amplitudine al unui filtru tipic trece-sus. Răspunsul potrivit al prototipului trece-jos necesar pentru proiectarea unui filtru trece-sus din Fig. 7.27a este prezentat în Fig. 7.27b. Trebuie mai întâi să determinăm funcția de transfer $\mathcal{H}_p(s)$ al acestui filtru prototip cu banda de trecere între $0 \le \omega \le 1$ şi banda de stop $\omega \ge \omega_p/\omega_s$ .Funcția de transfer dorită a filtrului trece-sus care să satisface specificațiile din Fig. 7.27a este astfel obținută prin înlocuirea lui s cu $T(s)$ în $\mathcal{H}_p(s)$, unde

$$T(s) = \frac{\omega_p}{s}$$

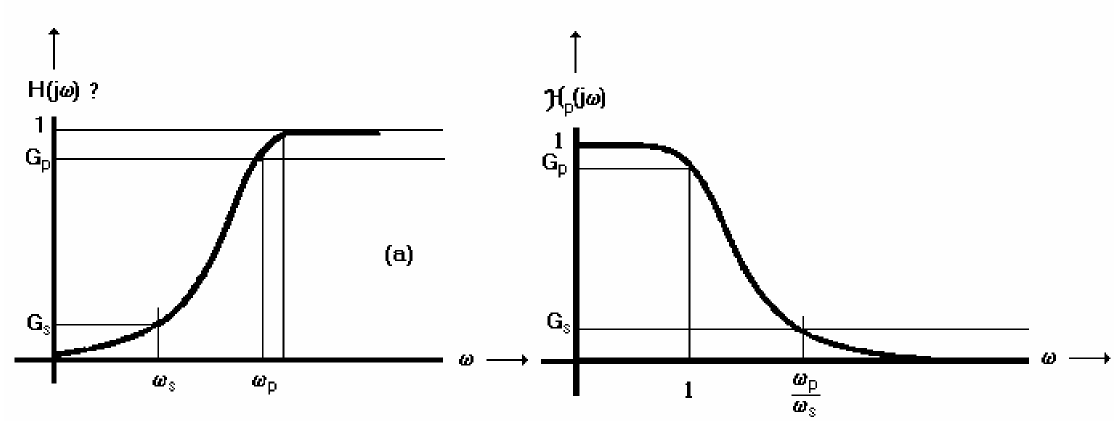

Fig. 7.27. Transformarea frecvenței pentru filtre trece-sus

Exempl

Să se proiecteze un filtru trece-sus de tipul Chebyshev cu răspunsul în amplitudine ilustrat în Fig.7.28a cu ω_s=100, ω_p=165, G_s=0.1 (-20 dB), şi G_p=0.794 (-2 dB).

Etapa 1: Se determină filtrul prototip trece-jos.

Filtrul prototip trece-jos are $\acute{\omega}_p = 1$ şi $\acute{\omega}_s = 165/100 = 1.65$. Aceasta înseamnă că filtrul prototip din Fig.7.28b are o bandă de trecere cuprinsă în intervalul $0 \le \omega \le 1$ şi o bandă de oprire $\omega \ge 1.65$, aşa cum e prezentat în Fig.7.28b. Deasemenea, $G_p=0.794$(-2 dB) şi $G_s=0.1$(-20 dB). Am proiectat deja un filtru Chebyshev cu aceste specificații (cursul 5). Funcția de transfer al acestui filtru este [Ecuația(7.54)]

$$\mathcal{H}_p(s) = \frac{0.3269}{s^3 + 0.7378s^2 + 1.0222s + 0.3269}.$$

Răspunsul în amplitudine al acestui filtru prototip este prezentat în Fig.7.28b.

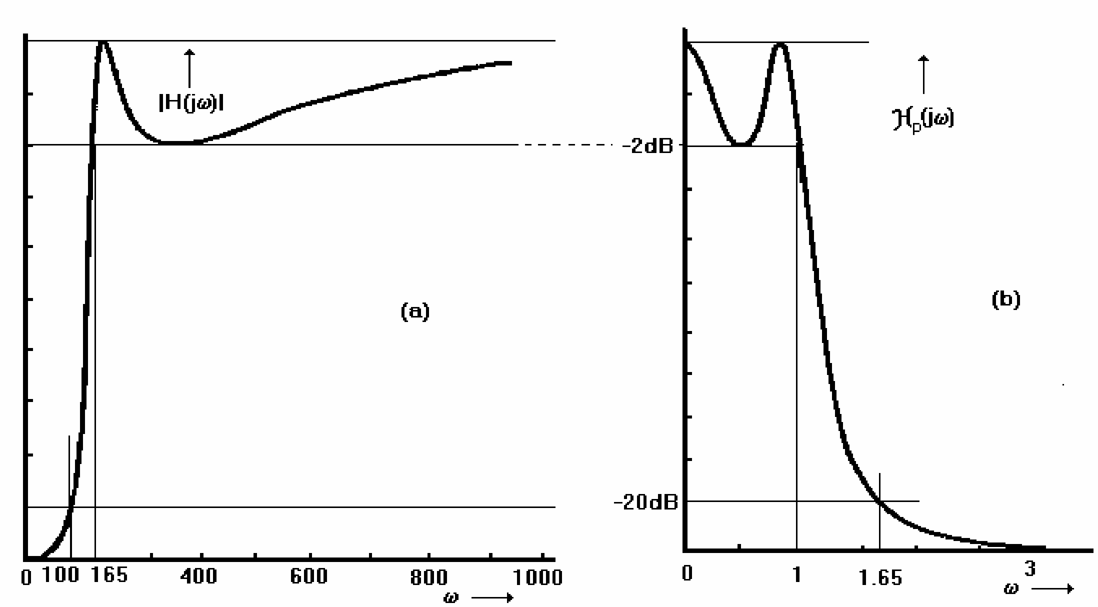

Fig.7.28 Schema filtrului trece-sus pentru Exemplul 7.8.

Etapa 2: Se inlocuieşte s cu $T(s)$ în $\mathcal{H}(s)$.

Funcția de transfer $H(s)$ dorită, a filtrului trece-sus, este obținută din $\mathcal{H}(s)$ prin înlocuirea lui s cu $T(s)=\omega/s=165/s$. Astfel ecuația devine:

$$H(s) = \frac{0.3269}{\left(\frac{165}{s}\right)^3 + 0.7378\left(\frac{165}{s}\right)^2 + 1.0222\left(\frac{165}{s}\right) + 0.3269} =$$

$$= \frac{s^3}{s^3 + 515.94s^2 + 61445.75s + 13742005}$$

Răspunsul în amplitudine $|H(\mathrm{j}\omega)|$ pentru acest filtru este prezentat în Fig.7.28a.

Exemplu pentru calculator C7.11

Să se proiecteze un filtru cu specificațiile date în Exemplul 7.8 folosind funcțiile din *Signal Processing Toolbox* în MATLAB. În MATLAB trebuie să dăm fiecărui tip de filtru o funcție proprie.

```
Ws=100;Wp=165;Gp=-2;Gs=-20;
%Butterworth
[n,Wn]=buttord(Wp,Ws,-Gp,-Gs,'s')
[num,den]=butter(n,Wn,'high','s')
%Chebyshev
[n,Wn]=cheb1ord(Wp,Ws-Gp,-Gs,'s')
[num,den]=cheby1(n,-Gp,Wn,'high','s')
%Inverse Chebyshev
[n,Wn]=cheb2ord(Wp,Ws,-Gp,-Gs,'s')
[num,den]=cheby2(n,-Gs,Wn,'high','s')
%Elliptic
[n,Wn]=ellipord(Wp,Ws,-Gp,-Gs,'s')
[num,den]=ellip(n,-Gp,-Gs,Wn,'high','s')
```

Pentru a face schema răspunsului în amplitudine, putem folosi ultimele trei funcții din Exemplul C7.5.

Filtre Trece-Bandă

Figura 7.29a ne arată răspunsul în amplitudine pentru un filtru tipic trece-bandă. Pentru a proiecta. Pentru a proiecta un astfel de filtru, trebuie să găsim în primul rând, funcția de transfer $\mathcal{H}_p(s)$, a unui filtru prototip trece-jos care să îndeplinească specificațiile din Fig. 7.29b, unde ω_s este dat ca fiind mai mic decât

$$\frac{\omega_{p1}\omega_{p2} - \omega_{s1}^2}{\omega_{s1}(\omega_{p2} - \omega_{p1})} \quad \text{sau} \quad \frac{\omega_{s2}^2 - \omega_{p1}\omega_{p2}}{\omega_{s2}(\omega_{p2} - \omega_{p1})} \tag{7.56}$$

Acum, funcția de transfer dorită a filtrului trece-bandă, care îndeplineşte specificațiile din Fig.7.29a, este obținută din $\mathcal{H}_p(s)$ prin înlocuirea lui s cu $T(s)$, unde

$$T(s) = \frac{s^2 + \omega_{p1}\omega_{p2}}{(\omega_{p2} - \omega_{p1})s} \tag{7.57}$$

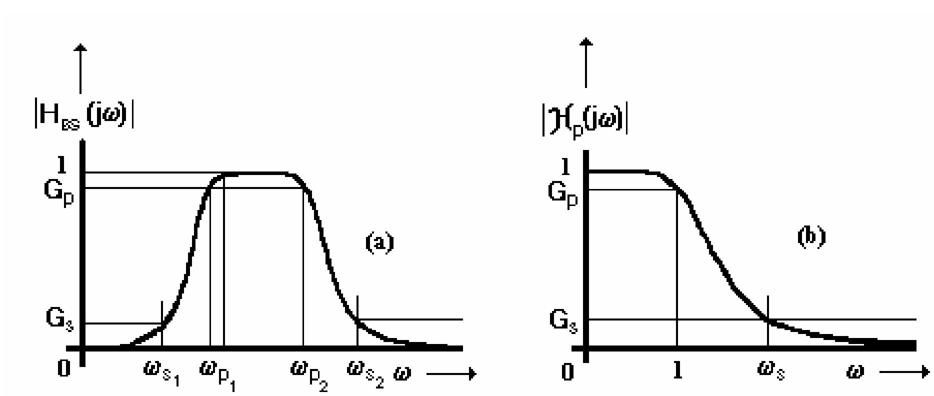

Fig 7.29 Transformarea frecvenței pentru filtrul trece-bandă.

Exemplul 7.9

Să se proiecteze un filtru Chebyshev cu specificațiile răspunsului în amplitudine prezentate în Fig.7.30a unde ω_{p1}=1000, ω_{p2}=2000, ω_{s1}=450, ω_{s2}=4000, G_s=0.1(-20 dB), şi G_p=0.891(-1 dB). Se observă că pentru filtrul Chebyshev G_p=-1 dB este echivalent cu f=1 dB.

Soluția este obținută în duoă etape: în prima etapă se determină funcția de transfer a filtrului prototip trece-jos. În cea de-a doua etapă, funcția de transfer dorită a filtrului trece-bandă este obținută din $\mathcal{H}_p(s)$ prin substituția lui s cu $T(s)$, transformarea din trece-jos în trece-bandă în ecuația (7.57)

Etapa 1. Se găseşte $\mathcal{H}_p(s)$ funcția de transfer a filtrului prototip trece-jos.

Acest lucru este realizat în 3 subetape :

Etapa 1.1. Se găseşte ω_s pentru filtrul prototip.

Frecvența ω_s se găseşte folosind ecuația (7.56) ca fiind mai mică de

$$\frac{(1000)(2000)-(450)^2}{450(2000-1000)}=3.99 \quad \text{şi} \quad \frac{(4000)^2-(1000)(2000)}{4000(2000-1000)}=3.5$$

ceea ce face să fie 3.5.

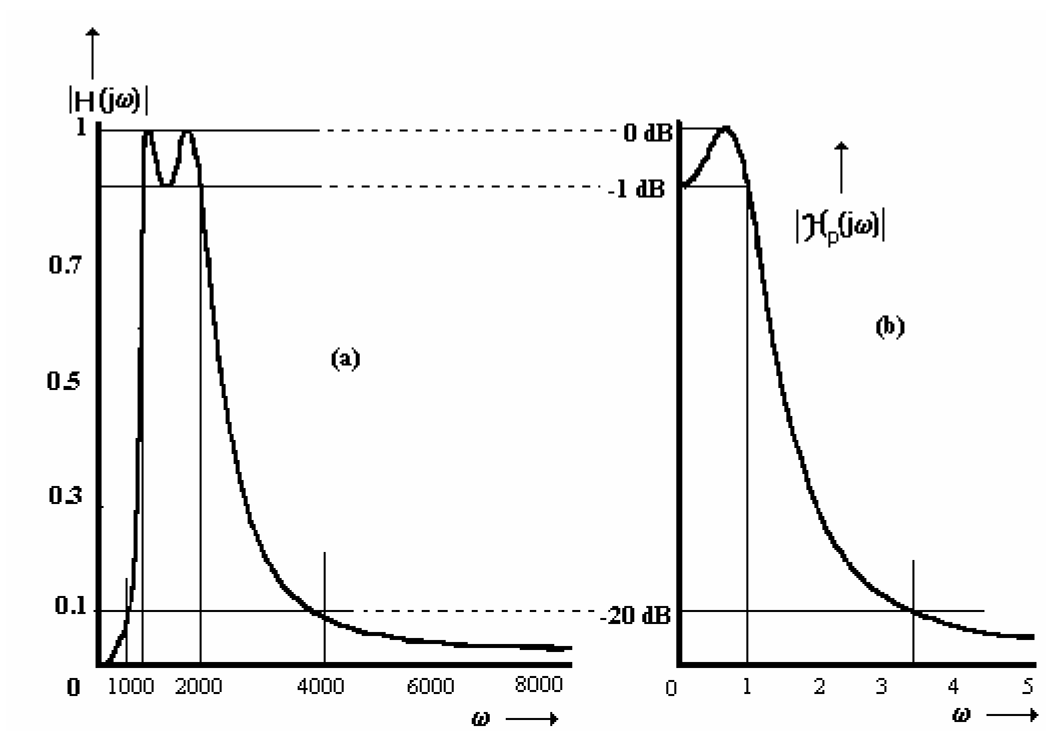

Fig.7.30 Schema filtrului trece-bandă Chebyshev pentru Exemplul 7.9.

Etapa 1.2. Se determină n

Trebuie acum să proiectăm un filtru prototip trece-jos, cel din Fig. 7.29b cu $\hat{G}_p$=-1dB, $\hat{G}_s$=-20dB, ω_p=1, şi ω_s= 3.5, aşa cum e prezentat şi în Fig. 7.30b. Ordinul n al filtrului

Chebyshev necesar pentru a întâlni aceste specificații este obținut din ecuația (7.49b) (sau ecuația 7.49a) pentru că în acest caz ω_p=1, iar

$$n = \frac{1}{\cosh^{-1}(3.5)}\cosh^{-1}\left[\frac{10^2-1}{10^{0.1}-1}\right]^{\frac{1}{2}} = 1.904$$ rezultat care se rotunjează la 2.

Eatapa 1.3. Se determină funcția de transfer $\mathcal{H}_p(s)$ a filtrului prototip.

Putem obține funcşia de transfer de ordinul II al filtrului Chebyshev calculând polii săi pentru n=2 şi $\acute{r}$=1 (ε=0.5088) folosind ecuația (7.51). Totuşi, devreme ce Tabelul 7.4 conține polinomul dominant pentru $\acute{r}$=1 şi n=2, nu este nevoie să facem calculele şi putem folosi funcția de transfer deja obținută ca fiind:

$$\mathcal{H}_p(s) = \frac{0.9826}{s^2+1.0977s+1.1025} \tag{7.58}$$

Pentru asta am folosit ecuația 7.53 pentru a găsi numărătorul $K_n = \frac{a_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = \frac{1.1025}{\sqrt{1.2589}} = 0.9826$ .Răspunsul ăn amplitudine al acestui filtru prototipeste prezentat în Fig. 7.30b.

Etapa 2. Se găseşte funcția de transfer $H(s)$ a filtrului trece-bandă folosind transformarea de trece-jos în trece-bandă.

În final, funcția de transfer dorită pentru filtrul trece-bandă este obținută din $\mathcal{H}_p(s)$ prin înlocuirea lui s cu $T(s)$ unde (vezi ec. 7.57):

$$T(s) = \frac{s^2+2(10)^6}{1000s}.$$

Înlocuind s cu $T(s)$ în memebrul drept al ecuatiei (7.58) ne dă ecuația finală a funcției de transfer pentru filtrul trece-bandă.

$$H(s) = \frac{9.826(10)^5 s^2}{s^4+1097.7s^3+5.1025(10)^6 s^2+2.195(10)^9 s+4(10)^{12}}.$$

Răspunsul în amplitudine $|H(\mathrm{j}\omega)|$ al acestui filtru este prezentat în Fig.7.30a.

Putem folosi o procedură similară pentru filtrul Butterworth. Comparat cu filtrul Chebyshev, problema proiectării filtrului Butterworth include doi paşi adiționali. În primul rând trebuie să calculăm frecvența limitată (frecvența maximă-3dB) ω_c a filtrului prototip. Pentru un filtru Chebyshev, frecvența critică se nimereşte cu frecvența unde amplificarea este G_p . Această frecvență este ω=1 pentru filtrul prototip. Pentru Butterworth, pe de altă parte, frecvența critică este jumătate din ω_c, ceea ce nu este neaparat frecvența unde amplificarea este G_p. Pentru a găsi funcția de transfer al fitrului prototip Butterwofth, este esențial să cunoaştem ω_c. Odată cunoscută ω_c , funcția de transfer se obține prin înlocuirea lui s cu s/ω_c în funcția de transfer normalizată $\mathcal{H}(s)$. Această etapă nu este necesară in proiectarea filtrului Chebyshev.

Se va demonstra procedeul pentru proiectarea filtrului Butterworth prin exemplul de mai jos.

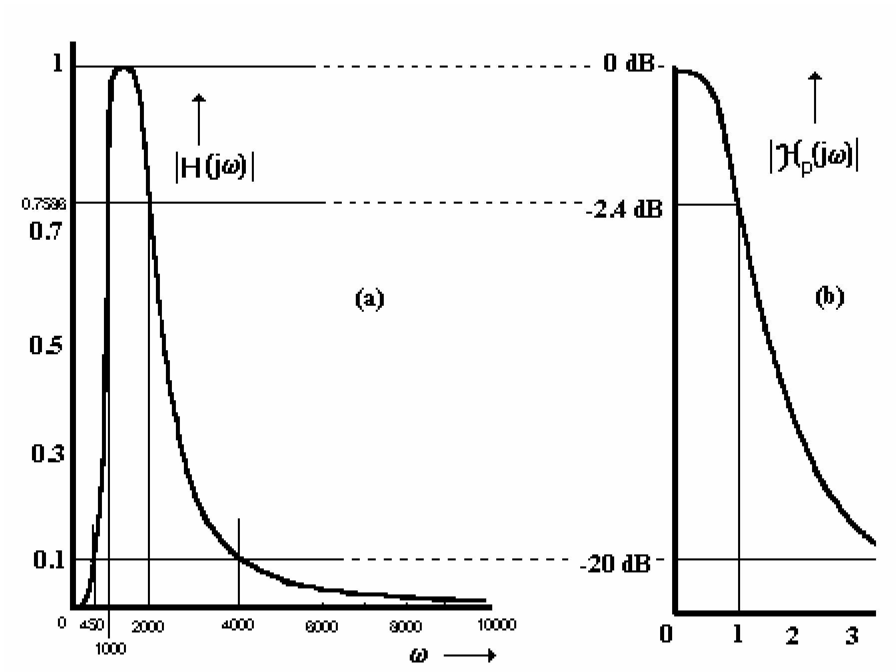

Fig. 7.31 Schema filtrului trece-bandă Butterworth pentru Exemplul 7.10.

Examplul 7.10 Să se proiecteze un filtru trece-bandă cu specificaţiile răspunsului în amplitudine ilustrat în Fig.7.31a cu ω_{p1}=1000, ω_{p2}=2000 , ω_{s1}=450, ω_{s2}=4000 , G_p=0.7586(-2.4dB), şi G_s=0.1 (-20 dB).

Ca şi în exemplul anterior, soluţia este obţinută în două etape: în prima etapă se determină funcţia de transfer $\mathcal{H}_p(s)$ a filtrului prototip trece-jos. În cea de-a doua etapă funcţia de transfer dorită, pentru filtrul trece-bandă, se obţine din $\mathcal{H}_p(s)$ prin înlocuirea lui s cu $T(s)$, şi apoi prin transformarea din trece-jos în trece-bandă din ecuaţia (7.57).

Etapa 1: Se găseşte $\mathcal{H}_p(s)$, funcţia de transfer a filtrului trece-jos prototip.

Acest lucru se realizează în 5 subetape şi se foloseşte exemplul filtrului trece-jos Butterworth (vezi ex.7.6).

Etapa1.1: Se găseşte ω_s pentru filtrul prototip.

Pentru filtrul trece-jos, funcţia de transfer $\mathcal{H}_p(s)$ cu răspunsul în amplitudine arătat în Fig.31b, frecvenţa ω_s este găsită ca fiind mai mică decât

$$\frac{(1000)(2000)-(450)^2}{450(2000-1000)}=3.99 \quad \text{şi} \quad \frac{(4000)^2-(1000)(2000)}{4000(2000-1000)}=3.5$$

ceea ce face să fie 3.5, aşa cum e prezentată în Fig.7.31b.

Etapa 1.2: Se determină n.

Pentru un filtru prototip trece-jos din Fig.7.29b, $\hat{G}_p$=-2.4 dB, $\hat{G}_s$=-20 dB, ω_p=1,ω_p=3.5. Deci, conform ecuației (7.39), ordinul n a filtrului Butterworth care trebuie să satisfacă aceste specificații este

$$n = \frac{1}{2\log 3.5}\log\left[\frac{10^2 - 1}{10^{0.24} - 1}\right] = 1.955$$ iar această valoare este rotunjită la 2.

Etapa 1.3: Se determină ω_c.

În această etapa (care nu este necesară in cazul filtrului Chebyshev),se determină frecvența optimă (limitată cu 3dB) ω_c pentru filtrul prototip. Se foloseşte ecuația (7.41) unde:

$$\omega_c = \frac{3.5}{(10^2 - 1)^{1/4}} = 1.10958$$

Etapa 1.4: Se determină funcția de transfer normalizată $\mathcal{H}(s)$.

Funcția de transfer normalizată de ordinul 2 a filtrului Butterworth din tabelul 7.1 este

$$\mathcal{H}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2s} + 1}$$

Aceasta este funcția de transfer a unui filtru (înseamnă că ω_c=1).

Etapa 1.5: Se determină funcția de transfer a filtrului prototip $\mathcal{H}_p(s)$.

Funcția de transfer a filtrului prototip $\mathcal{H}_p(s)$,se obține prin înlocuirea lui s cu s/ω_c=s/1.10958 în funcția normalizată $\mathcal{H}(s)$ găsită în etapa 1.4

$$\mathcal{H}_p(s) = \frac{(1.10958)^2}{s^2 + \sqrt{2}(1.10958)s + (1.10958)^2} = \frac{1.231}{s^2 + 1.5692s + 1.2312}$$

(7.59)

Răspunsul în amplitudine al acestui filtru prototip este ilustrat în Fig. 7.31b.

Etapa 2.Se găseşte funcția de transfer dorită $H(s)$ folosind transformarea din trece-jos în trece-bandă.

În final funcția de transfer dorită $H(s)$ este obținută din $\mathcal{H}_p(s)$ prin substituția lui s cu $T(s)$, unde (vezi ec.(7.57))

$$T(s) = \frac{s^2 + 2(10)^6}{1000s}$$

Înlocuind s cu $T(s)$ în membrul drept al ecuației (7.59) ne dă funcția de transfer finală a filtrului trece bandă

$$H(s) = \frac{1.2312(10)^6 s^2}{s^4 + 1569s^3 + 5.2312(10)^6 s^2 + 3.1384(10)^9 s + 4(10)^{12}}$$

Răspunsul în amplitudine $|H(j\omega)|$ al acestui filtru este prezentat în Fig. 7.31a.

Exemplu pentru calculator C7.12

Să se facă schema unui filtru trece-bandă pentru specificațiile din Exemplul 7.10 folosind funcții din *Signal Processing Toolbox* în MATLAB. Vom da aici funcții specifice fiecărui tip de filtru.

Pentru filtrele trece-bandă, vom folosi aceleaşi funcții ca şi pentru filtrul trece-jos în exemplele C7.6, C7.8-C7.10, cu o singură diferență: W_p şi W_s sunt doi vectori cu forma

W_p=[W_{p1} W_{p2}], W_s=[W_{s1} W_{s2}].
W_p=[1000 2000]; W_p=[450 4000]; G_p=-2.4; G_s=-20;
%Butterworth
[n,Wn]=buttord(W_p,W_s,-G_p,-G_s,'s');
[num,den]=butter(n,W_n,'s')
%Chebyshev
[n,W_n]=cheb1ord(W_p,W_s,-G_p,-G_s,'s');
[num,den]=cheby1(N,-G_p,W_n,'s')
%Inverse Chebyshev
[n,W_s]=cheb2ord(W_p, W_s,-G_p,-G_s,'s');
[num,den]=cheby2(n,-G_s,W_s,'s')
%Elliptic filter
[n,W_n]=ellipord(W_p,W_s,-G_p,-G_s,'s');
[num,den]=ellip(n, -G_p, -G_s, W_n,'s')

Pentru a desena răspunsul în amplitudine, putem folosi ultimele trei funcții din exemplul C7.5.

Filtre Bandă-Stop

Figura 7.32a ne arată un răspuns în amplitudine pentru un filtru tipic bandă-stop. Pentru a face schema unui astfel de filtru, trebuie mai întâi să găsim *$\mathcal{H}_p(s)$*, funcția de transfer pentru filtru prototip trece-jos, care să îndeplinească specificațiile din Fig.7.32, unde ω_s este dat a fiind mai mic de

$$\frac{(\omega_{p2}-\omega_{p1})\omega_{s1}}{\omega_{p1}\omega_{p2}-\omega_{s1}} \qquad \text{sau} \qquad \frac{(\omega_{p2}-\omega_{p1})\omega_{s2}}{\omega_{s2}^{\;2}-\omega_{p1}\omega_{p2}} \tag{7.60}$$

Funcția de transfer dorită pentru filtrul bandă-stop care să satisfacă specificațiile din

Fig. 7.32a este obținută din *$\mathcal{H}_p(s)$* prin înlocuirea lui *s* cu *T(s),* unde

$$T(s)=\frac{(\omega_{p2}-\omega_{p1})s}{s^2+\omega_{p1}\omega_{p2}} \tag{7.61}$$

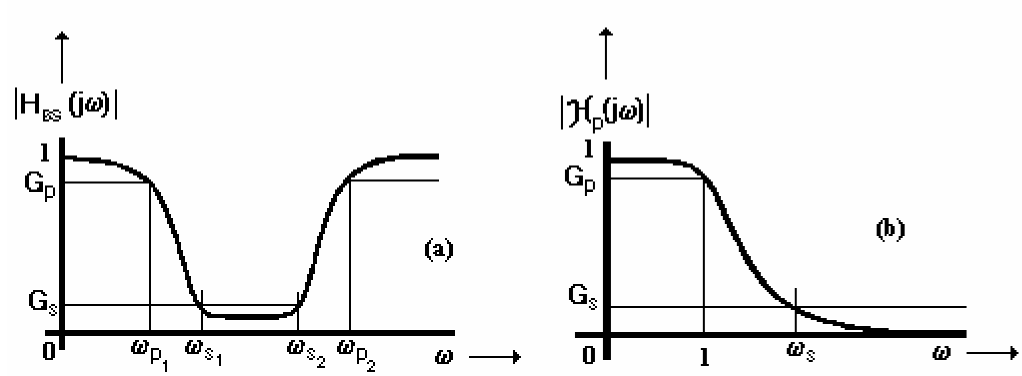

Fig.7.32 Transformarea frecvenței pentru filtrele bandă-stop.

Exemplul 7.11

Să se facă schema unui filtru bandă-stop de tip Butterworth cu specificațiile prezentate în Fig. 7.33a cu ω_{p1}=60, ω_{p2}=260, ω_{s1}=100, ω_{s2}=150, G_p=0.776(-2.2 dB), şi G_s=0.1(-20 dB)

În prima etapă se va determina funcția de transfer pentru filtrul prototip $\mathcal{H}_p(s)$, iar în a doua etapă vom folosi transformarea din trece-jos în bandă-stop din ecuația (7.61) pentru a obține funcția de transfer $H(s)$ dorită pentru filtrul bandă-stop.

Etapa 1: Se găseşte $\mathcal{H}_p(s)$, funcția de transfer pentru filtrul prototip trece-jos. Acest lucru este realizat în 5 subetape folosite în proiectarea filtrului trece-jos Butterworth (vezi Exemplul 7.6):

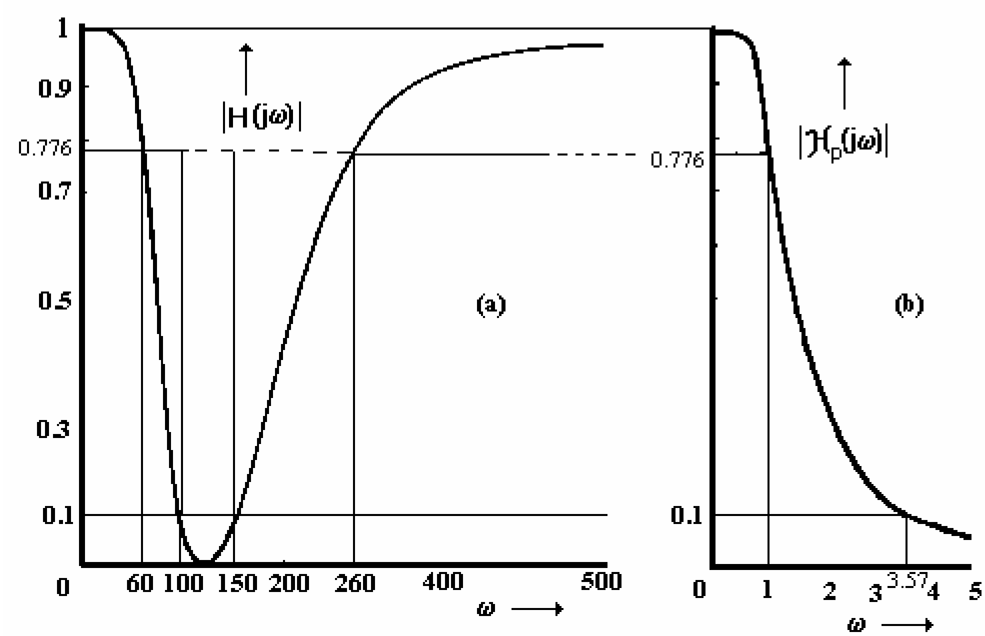

Fig.7.33 Schema filtrului bandă-stop pentru Exemplul 7.11

Etapa 1.1: Se găseşte ω_s pentru filtrul prototip.

Pentru funcția e transfer $\mathcal{H}_p(s)$ a fltrului trece-jos cu specificațiile ilustrate în Fig. 7.32b, frecvența ω_s este găsită ca fiind mai mică de

$$\frac{(100)(260-60)}{(260)(60)-100^2}=3.57 \qquad \text{şi} \qquad \frac{150(260-60)}{150^2-(260)(60)}=4.347$$

ceea ce face să fie egală cu 3.57, aşa cum e prezentat în Fig. 7.33b.

Etapa 1.2: Se determină n.

Pentru filtrul prototip trece-jos în Fig. 7.33b, $\hat{G}_p$=-2.2 dB, $\hat{G}_p$=-20 dB, ω_s=1, şi ω_s=3.57. Conform ecuației (7.39), ordinul n pentru filtrul Butterworth, necesar pentru a îndeplinii aceste specificații este

$$n=\frac{1}{2\log(3.57)}\left[\frac{10^2-1}{10^{0.22}-1}\right]=1.9689$$

Această valoare se rotunjeşte la 2.

Etapa 1.3: Se determină ω_c.

Frecvența pe jumătate ω_c pentru filtrul prototip Butterworth, folosind ecuația (7.40) cu ω_p=1, este

$$\omega_c=\frac{\omega_p}{(10^{-\mathrm{Gp}/10}-1)^{1/4}}=\frac{1}{(10^{0.22}-1)^{1/4}}=1.1096$$

Etapa 1.4: Se determină funcția de transfer normalizată.

Ecuația funcției de transfer normalizată, de ordinul 2, pentru filtrul Butterworth, luată din Tabelul 7.1 este

$$\mathcal{H}(s)=\frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$$

(7.62)

Etapa 1.5: Se determină funcția de transfer pentru filtrul prototip $\mathcal{H}_p(s)$.

Funcția de transfer pentru filtrul prototip $\mathcal{H}_p(s)$ este obținută prin substituția lui s cu $s/\omega_c=s/1.1096$ în ecuația normalizată $\mathcal{H}(s)$ obținută în Etapa 1.4. Astfel, avem

$$\mathcal{H}_p(s)=\frac{1}{(\frac{s}{\omega_c})^2+\sqrt{2}\,\frac{s}{\omega_c}+1}=\frac{1.2312}{s^2+1.5692s+1.2312}$$

(7.63)

Răspunsul în amplitudine al acestui filtru prototip este prezentat în Fig. 7.33b.

Etapa 2: Se găseşte funcția de transfer $H(s)$ dorită pentru filtrul bandă-stop folosind transformarea din trece-jos în bandă-stop.

În final, funcția de transfer *H(s)* dorită pentru filtrul bandă-stop cu specificațiile prezentate în Fig.7.33a este obținută din *Hp(s)* prin înlocuirea lui *s* cu *T(s)* unde [vezi ecuația(7.61)]

$$T(s) = \frac{200s}{s^2 + 15600}$$

Înlocuind *s* cu *T(s)* în membrul drept al ecuației(7.63) ne dă forma finală a funcției de transfer pentru filtrul bandă-stop

$$H(s) = \frac{1.2312}{\left(\frac{200s}{s^2+15600}\right)^2 + 1.5692\left(\frac{200s}{s^2+15600}\right) + 1.2312} =$$
$$= \frac{(s^2 + 15600)^2}{s^4 + 254.9s^3 + 63690.9s^2 + (3.977)10^6 s + (2.433)10^8}$$

Răspunsul în amplitudine $|H(j\omega)|$ este prezentat în Fig. 7.33a.

Exemplu pentru calculator C7.13

Să se proiecteze un filtru bandă-stop pentru specificațiile din Exemplul 7.11 folosind funcții din *Signal Processing Toolbox* în MATLAB. Vom da aici fncții diferite pentru fiecare tip de filtru.

```
Wp=[60 260]; Ws=[100 150]; Gp=-2.2; Gs=-20;
%Butterworth
[n,Wn]=buttord(Wp,Ws,-Gp,-Gs,'s')
[num,den]=butter(n,Wn,'stop','s')
%Chebyshev
[n,Wn]=cheb1ord(Wp,Ws,-Gp,-Gs,'s')
[num,den]=cheby1(n,-Gp,Wn,'stop','s')
%Inverse Chebyshev
[n,Wn]=cheb2ord(Wp,Ws,-Gp,-Gs,'s')
[num,den]=cheby2(n,-Gs,Wn,'stop','s')
%Elliptic
[n,Wn]=ellipord(Wp,Ws,-Gp,-Gs,'s')
[num,den]=ellip(n,-Gp,-Gs,Wn,'stop','s')
```