Semnale. Analiza semnalelor. Spectrul Fourier al semnalelor continue periodice oarecare

Scopul lucrării

Analiza spectrală a unui semnal înregistrat (în domeniul timpului) presupune o vizualizare a semnalului reprezentat în domeniul frecvențelor. Această reprezentare este spectrul Fourier, care, teoretic, se determină prin descompunerea în serie Fourier reală sau complexă a semnalului înregistrat.

În mod practic, sunt folosite metode numerice pentru realizarea transformatei Fourier (algoritmul FFT – Fast Fourier Transform în diverse forme şi implementări), care găsesc spectrul unui semnal înregistrat.

Mediul Matlab oferă funcții de calcul a transformatei Fourier directă şi inversă, laolaltă cu o serie de funcții utile în analiza semnalelor.

Considerații teoretice

Un *semnal* reprezintă o mărime fizică ce are proprietatea de a se propaga într-un anumit mediu. Ca exemplu, curentul electric, oscilațiile acustice, lumina sunt fenomene caracterizate de o serie de mărimi fizice care se propagă în mediu: tensiunea electrică, amplitudinea undelor, intensitatea luminoasă. Spre comparație, masa (ca mărime fizică) nu are această proprietate.

Un semnal are un conținut informațional despre fenomenul care a generat semnalul sau un mesaj transmis de o *sursă* şi destinat unui *receptor*. Semnalul este *înregistrat* de receptor şi prelucrat pentru a extrage informațiile utile.

Pe lângă componenta utilă (informațională) semnalele, din procesele fizice reale, conțin una sau mai multe componente perturbatoare, care apar în procesul de generare, transmitere şi recepție a acestora. Acestea alterează mesajele transmise şi informațiile reale despre fenomenele investigate.

Din punct de vedere matematic un semnal se descrie prin funcții de timp de forma:

$$x : T \to M \text{ cu } t \in T \text{ şi } x(t) \in M\ ,$$

sau prin funcții de frecvență:

$$X : \Omega \to N \text{ cu } \omega \in \Omega \text{ şi } \mathrm{X}(\Omega) \in \mathrm{N}\,.$$

În mod practic, înregistrarea unui semnal este o funcție de timp ce descrie semnalul. Pentru a obține informații suplimentare sau pentru a prelucra semnalul la o formă dorită este necesară o *analiză* a semnalului, care se realizează prin:

- spectrul Fourier;
- mediile temporale şi funcțiile de corelație;
- tehnici de analiză funcțională: transformatele Laplace, Z şi Fourier;
- funcțiile de densitate spectrală de putere.

Dintre acestea, spectrul Fourier este o descriere a semnalului în domeniul frecvenței, necesară în prelucrarea semnalelor ulterioară a semnalului înregistrat.

Spectrul Fourier se determină teoretic folosind descompunerea în serie Fourier reală sau complexă. Seria Fourier reală asociată acestui semnal este descrisă de relația:

$$x(t) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t)], \tag{1.1}$$

unde:

$$\omega_1 = 2\pi/T,$$

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{d}t \text{ sau } A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(y)\,\mathrm{d}y \text{ cu } y = \omega_1 t. \;,$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t \text{ sau } A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(y)\cos(ny)\,\mathrm{d}y, \;,$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t \text{ sau } \mathrm{B}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(y)\sin(ny)\,\mathrm{d}y \text{ cu } y = \omega_1 t.$$

O formă echivalentă se obține punându-se în evidență modulul şi faza pentru fiecare termen al sumei conform relației:

$$x(t) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n), \text{ cu } n \in \boldsymbol{N},\; t \in \boldsymbol{R}, \tag{1.2}$$

unde:

$$\omega_1 = 2\pi/T,\; M_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2},\; \varphi_n = \mathrm{arctg}(-B_n/A_n).$$

Termenul *armonică* reprezintă un termen al sumei din relația (1.1) sau o sinusoidă din relația (1.2). Astfel, orice semnal poate fi scris ca o sumă de armonici.

O armonică este caracterizată de frecvență şi de amplitudine. Vom spune că semnalul $x(t)$ conține armonica de pulsație $\omega_k = k\omega_1$ cu amplitudinea M_k, $k = \overline{1,n}$.

Dacă punem în evidență numai modulul fiecărei armonici atunci relația (1.2) se poate scrie:

$$X(\omega) = A_0\delta_0(\omega)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n\delta_0(\omega - \omega_n) \text{ cu } \omega_n = n\omega_1, \tag{1.3}$$

unde

$$\delta_0(\omega - \omega_n) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } \omega = \omega_n \\ 0 \text{ altfel} \end{cases}$$

este impulsul unitar în frecvență. Expresia (1.3) defineşte funcția spectrală de amplitudine sau funcția spectru Fourier în exprimare unilaterală (aceasta este definită numai pentru $n > 0$). Se observă ca această funcție este o funcție de frecvență, deci o descriere a semnalului în domeniul frecvenței.

Din relațiile prezentate se observă că spectrul unui semnal periodic oarecare este discret: conține numai armonici multiplu întreg al armonicii de bază $\omega_1 = 2\pi/T$. Un semnal aperiodic poate fi considerat ca fiind semnal periodic cu $T \to \infty$. Atunci frecvența armonicii de bază $\omega_1 = 2\pi/T \to 0$, ceea ce înseamnă că spectrul semnalului aperiodic (funcția spectru Fourier) este o funcție continuă.

Utilizarea mediului Matlab pentru analiza semnalelor

Mediul Matlab oferă un pachet de funcții (*toolbox*) dedicat prelucrării semnalelor. Acesta conține printre altele funcții pentru:

- transformata Fourier rapidă directă şi inversă,
- proiectarea şi analiza filtrelor FIR (finite impulse response – filtre cu răspuns finit la impuls) şi IIR (infinite impulse response – filtre cu răspuns infinit la impuls),
- generarea unor semnale tipice,
- filtrarea semnalelor,
- manipularea înregistrărilor audio (fişiere .wav).

Un semnal este „înregistrat” într-un vector, cu o perioadă de eşantionare stabilită. Prelucrarea ulterioară a semnalului trebuie să țină cont de această perioadă de eşantionare.

Exemple

1. Să se genereze un semnal armonic de frecvență 10Hz şi amplitudine 2, la o perioadă de eşantionare de 0.01.

În Matlab, generarea unui semnal înseamnă obținerea unui vector care păstrează valorile semnalului. Perioada la care aceste valori sunt calculate are aceeaşi importanță şi efect ca perioada de eşantionare / prelevare a unui semnal în procesul de înregistrare. Valoarea perioadei de eşantionare trebuie reținută pentru orice analiză şi prelucrare ulterioară a semnalului.

```
Te = 0.001;
%perioada de generare - similara cu perioada de esantionare
t = 0:Te:3;
%vectorul timpului - momentele de prelevare de semnal
f = 10;
%frecventa semnalului
w = 2*pi*f;
%pulsatia semnalului
a = 2;
%amplitudinea semnalului
x = a*sin(w*t);
%semnalul generat / inregistrat in vectorul x
plot(t,x)
%prezentarea grafica a semnalului x
```

(vezi programul `Lab1_ex01.m`)

2. Să se salveze într-un fişier de date semnalul generat / înregistrat.

Mediul Matlab oferă funcții pentru manipularea fişierelor: salvarea datelor în fişier (funcția `save`) şi încărcarea datelor din fişiere de date (funcția `load`). Sintaxa funcției `save` este:

```
save nume_fisier lista_variabile
```

Lista variabilelor salvate conține numele acestora, separate prin spațiu (fără virgulă).

```
save Lab1Ex02_semnal1.mat t x
%salveaza in fisierul semnal.mat valorile momentelor de timp la care se face
      esantionarea si valorile prelevate ale semnalului
save Lab1Ex02_semnal2.mat Te x
%salveaza in fisierul semnal.mat perioada de esantionare si valorile prelevate
      ale semnalului
```

(vezi programul `Lab1_ex02.m`)

3. Să se încarce valorile salvate ale semnalului din fişierele de date salvate anterior şi să se reprezinte grafic semnalul.

Sintaxa funcţiei `load` este:

```
load nume_fisier
```

La încărcarea datelor din fişier, sunt automat create şi iniţializate variabile cu aceleaşi nume folosite în programul cu care au fost salvate. De aceea, trebuie cunoscut în ce format au fost salvate datele şi numele variabilelor:

```
load Lab1Ex02_semnal1.mat
% incarca valorile pentru timp si valorile inregistrate ale semnalului la
      aceste momente: t si x; perioada de esantionare va fi egala cu diferenta
      dintre 2 valori consecutive din vectorul t
plot(t,x)
```

şi, pentru celălalt caz:

```
load Lab1Ex02_semnal2.mat
% incarca valorile pentru perioada de esantionare si valorile inregistrate ale
      semnalului
t = 0:Te:3;
% se obtin momentele de timp cunoscand perioada de esantionare
plot(t,x)
```

(vezi programul `Lab1_ex03.m`)

4. Să se prezinte spectrul Fourier al unui semnal periodic.

Spectrul Fourier al unui semnal se obţine folosind funcţia `fft`. Pentru a testa această funcţie, se generează un semnal alcătuit din mi multe armonici, cu diverse valori pentru frecvenţă şi amplitudine (vezi exemplul 1 pentru generarea de semnale).

```
x = 2*sin(2*pi*5*t)+3*sin(2*pi*10*t)+1*sin(2*pi*15*t);
```

În acest semnal avem: o armonică de frecvenţă 5 cu amplitudinea 2, o armonică de frecvenţă 10 cu amplitudinea 3 şi o armonică de frecventă 15 cu amplitudinea 1. Pentru aceste frecvenţe este suficientă o perioadă de eşantionare de 0.01.

Cu mici modificări (impuse de modificarea perioadei de eşantionare sau de modificarea frecvenţei armonicilor), următoarea secvenţă poate fi utilizată în programe pentru a prezenta spectrul Fourier al unui semnal:

```
N = length(x);
fe = 1/Te;
X = fft(x);
Xabs = abs(X)/(N/2);
magX = Xabs(1,1:N/2+1);
f = [0:N/2]*fe/N;
plot(t,magX) % sau stem(f,magX);
```

(vezi programul `Lab1_ex04.m`)

5. Să se construiască semnalul în domeniul timpului cunoscând spectrul acestuia.

Având spectrul unui semnal, se poate construi semnalul în domeniul timpului aplicând transformarea Fourier inversă:

```
xx = ifft(X);
% semnalul xx este construit cu functia ifft din spectrul obtinut la exemplul
      anterior
```

(vezi programul `Lab1_ex05.m`)

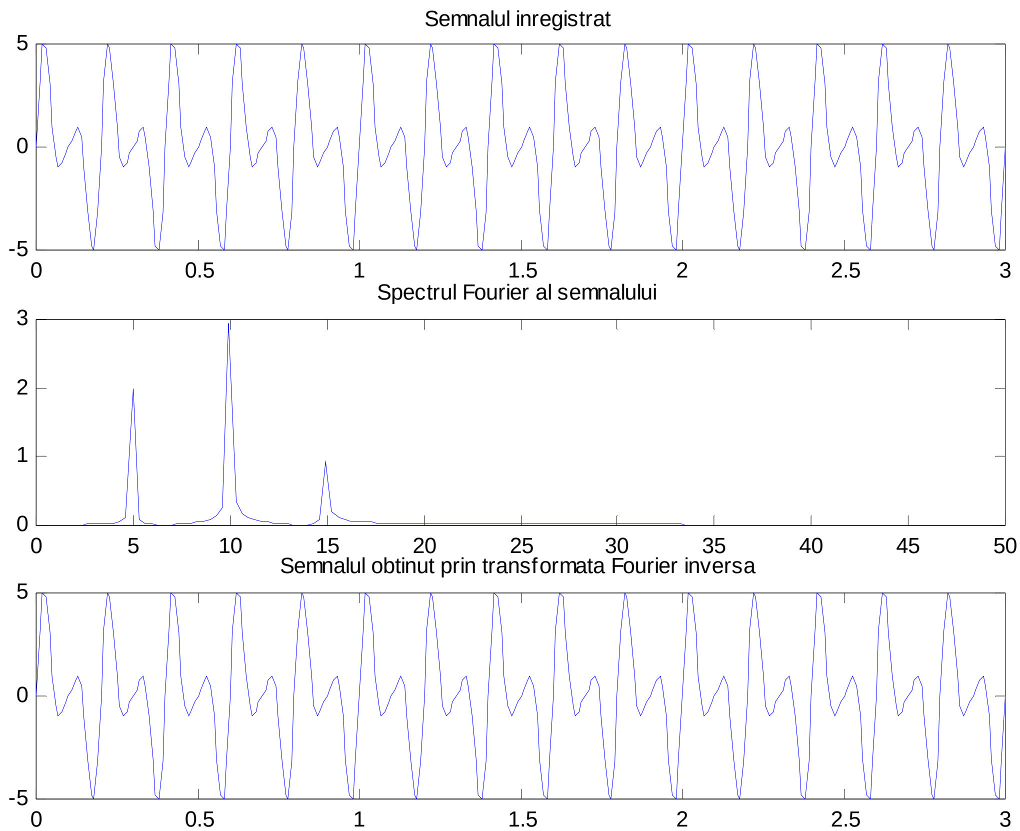

Fig. 1. Rezultatul programului Lab1_ex05.m.

Exerciții

1. Să se scrie un program Matlab care generează şi prezintă grafic, pe rând, semnalele:
- o sumă de 5 sinusoide cu diverse frecvențe;
- un semnal de forma tren de pulsuri dreptunghiulare de frecvență 30Hz (vezi funcția `square` şi altele);

2. Să se scrie un program care prezintă spectrul Fourier al unui semnal de forma tren de pulsuri dreptunghiulare de frecvență 30Hz.

3. Să se scrie un program care încarcă date din fişierul `semnal1.mat` şi trasează spectrul Fourier al semnalului înregistrat. Fişierul conține momentele de timp (t) şi valorile prelevate ale semnalului (vectorul x).

4. Folosind standul experimental şi aplicația CassyLab, să se genereze un semnal format din 5 sinusoide având frecvențele: 2Hz, 5Hz, 10Hz, 15Hz, 30Hz. Să se înregistreze semnalul generat şi să se salveze în fişier.

5. Având semnalul înregistrat de la exercițiul anterior, să se obțină spectrul Fourier al acestuia.