Reprezentarea posturii

- Definirea manipulatorului;
- Transformări de coordonate;
- Unghiurile lui Euler.

Un manipulator este un braț robotic care are ca sarcină schimbarea posturii obiectelor . Schimbarea posturii se face cu ajutorul unui program care permite precizarea unor sarcini variate de manipulare. Este vorba deci de un sistem controlat (în buclă închisă) care permite prinderea unor obiecte și mutarea lor dintr-o postură în alta sau deplasarea unei unelte pe anumite traiectorii. Din punct de vedere constructiv manipulatorul este un lanț cinematic compus din $(n+1)$ elemente, corpuri, interconectate cu ajutorul articulațiilor. Aceste articulații sunt cuple cinematice cu un grad de mobilitate de tip rotație sau translație (v.fig.1).

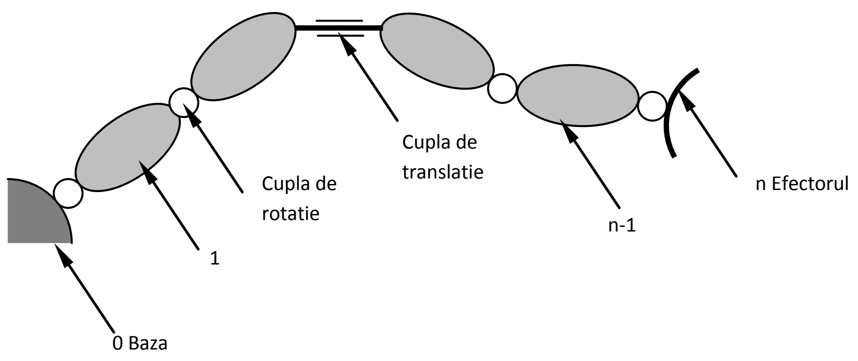

Fig. 1 Lanțul cinematic al manipulatorului

Pentru a descrie comportamentul (modelul) cinematic al manipulatorului se definește noțiunea de ”parametrii de configurație”. Parametrii de configurație sunt o mulțime de parametrii care descriu postura (poziție + orientare) întregului lanț cinematic.

Există mai multe modalități de a definii postura uni element (corp) al lanțului cinematic, într-o primă variantă se vor utiliza trei puncte (v. fig.2).

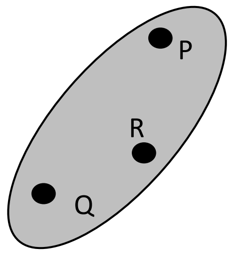

Fig. 2 Pentru a definii postura unui corp este suficient sa definim 3 puncte

Raportând cele trei puncte la un sistem de coordonate se obțin trei vectori ceea ce înseamnă nouă parametrii (v. fig. 3).

$$P = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix};\ R = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix};\ Q = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix};$$

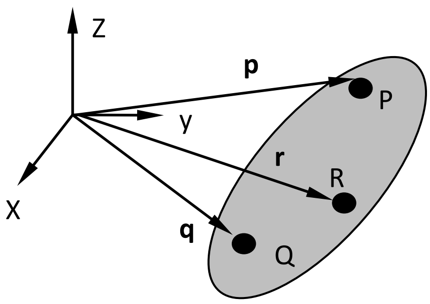

Fig. 3 Definirea vectoriala a celor trei puncte

Noțiunea de mobilitate se definește ca numărul de mișcări elementare independente pe care le poate executa un corp. In caz extrem, un corp liber – nesupus la legături, poate executa 6 mișcări elementare: trei translații (pe cele trei direcții x,y,z) și trei rotații (pe cele trei direcții x,y,z). Orice cuplă (legătură , constrângere) reduce din mobilitatea corpului. Numărul mișcărilor independente poartă denumirea de grad de mobilitate.

În consecință pentru un corp liber (cu un grad de mobilitate de 6) cei 9 parametrii nu sunt independenți. Acest lucru înseamnă că această alegere nu a condus la un număr minim de parametrii. Simplificarea calculelor care vor urma necesită însă determinarea unui număr minim de parametrii (6 parametrii), din acest motiv se definesc noțiunile:

- Coordonatele generalizate reprezintă o mulțime de parametrii de configurație independenți;

- Gradul de libertate reprezintă numărul coordonatelor generalizate.

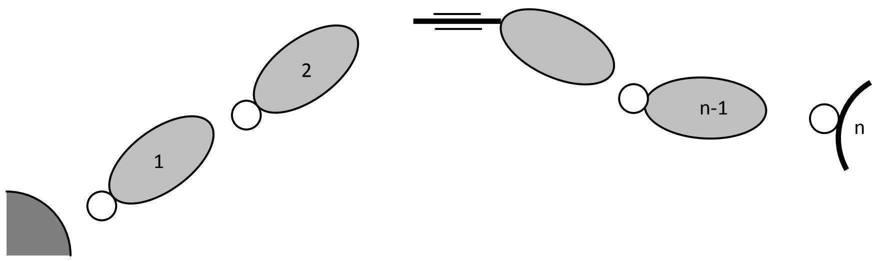

Fig. 4 Calculul numarului de parametrii independenți

În cazul robotului (v. fig. 4) se pot face următoarele calcule:

n elemente (corpuri) în mișcare ⇒ $6 \cdot n$ parametrii

n legături cu 1 grad de mobilitate ⇒ $5 \cdot n$ constrângeri

⇒ Numărul coordonatelor generalizate = $6 \cdot n - 5 \cdot n = n$.

În consecință, lanțul cinematic cu $(n+1)$ elemente (n mobile, 1 bază) care poate fi descris cu ajutorul a n coordonate generalizate, are n grade de libertate.

Coordonatele operaționale sunt mulțimea de parametrii de configurație ai punctului operațional, adică mobilitatea efectorului $(x_1, x_2, \dots\ x_{m_0})$.

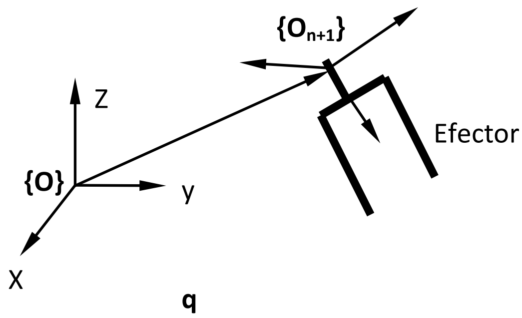

Fig. 5 Sistemul de referinta al efectorului

Redundanța lanțului cinematic constă din diferența dintre gradul de libertate al lanțului cinematic și numărul parametrilor operaționali (gradul de mobilitate al efectorului).

$$red = n - m_0 \tag{1}$$

Deoarece un corp liber are 6 grade de mobilitate configurația (postura) acestuia poate fi definită și cu ajutorul a 6 parametrii. Corpul este definit in propriul sistem de coordonate ceea ce face ca postura sa sa poată fie exprimată ca fiind rela ția dintre acest sistem de coordonate și sistemul din baza (fix) (v.fig.7).

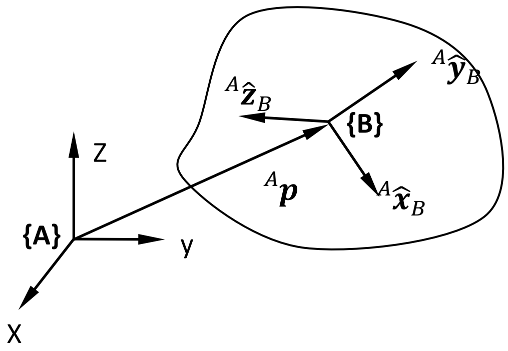

Fig. 7 Definirea posturii unui obiect

Cele două sisteme de coordonate sunt diferite printr: originea lor diferită exprimabilă printr-o translație de vector $\boldsymbol{p}$ și prin orientarea lor exprimabilă printr-o matrice de rotație.

$$\begin{matrix} poziție\ {}^{A}\boldsymbol{p} \\ orientare\left\{ {}^{A}\hat{\boldsymbol{x}}_{B};\ {}^{A}\hat{\boldsymbol{y}}_{B};\ {}^{A}\hat{\boldsymbol{z}}_{B} \right\} \end{matrix} postură$$

unde: ${}^{A}\boldsymbol{p}$ este notația vectorului $\boldsymbol{p}$ definit în sistemul A;

${}^{A}\hat{\boldsymbol{x}}_{B}$; ${}^{A}\hat{\boldsymbol{y}}_{B}$; ${}^{A}\hat{\boldsymbol{z}}_{B}$ sunt versorii (vectorii elementari, vectorii bazei) sistemului B defi ți in sistemul A

Orientarea lui $\{B\}$ față de $\{A\}$ se poate modela cu ajutorul unei matrice (operatorul) de rotație notată ${}_{B}^{A}\boldsymbol{R}$ adică rotația de la B la A.

Operatorul de rotație este o matrice 3x3 de tipul:

$${}_{B}^{A}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Operatorul poate fi utilizat în două scopuri. Primul este de a transforma un vector dintr-un sistem de coordonate în alt sistem de coordonate (aici din B in A), iar al doilea de a roti un vector în propriul sau sistem de coordonate.

Relația (3) reprezintă transformarea unui vector $\boldsymbol{x}$ din sistemul de coordonate B în sistemul de coordonate A.

$$ {}^{A}\boldsymbol{x}_B = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} \cdot {}^{B}\boldsymbol{x}_B $$

(3)

Se pune problema calculării elementelor operatorului de rotație ${}^{A}_{B}\boldsymbol{R}$. Pentru aceasta se procedează la transformarea vectorilor elementari ai reperului B în reperul A

$$ {}^{A}\widehat{\boldsymbol{x}}_B = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix};\ {}^{A}\widehat{\boldsymbol{y}}_B = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix};\ {}^{A}\widehat{\boldsymbol{z}}_B = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}. $$

$$ \Rightarrow\ {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} {}^{A}\widehat{\boldsymbol{x}}_B & {}^{A}\widehat{\boldsymbol{y}}_B & {}^{A}\widehat{\boldsymbol{z}}_B \end{bmatrix} $$

(4)

Relația (4) exprimă următorul fapt: coloanele operatorului de rotație sunt vectorii elementari ai reperului B, exprimați vizavi de reperul A. Acest fapt poate fi scris mai compact cu relația:

$$ \begin{bmatrix} {}^{A}\widehat{\boldsymbol{x}}_B & {}^{A}\widehat{\boldsymbol{y}}_B & {}^{A}\widehat{\boldsymbol{z}}_B \end{bmatrix} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} $$

(5)

Rezultatul poate fi aprofundat, putem obține fiecare element în parte, cu ajutorul relațiilor (6)

$$ {}^{A}\widehat{\boldsymbol{x}}_B = \begin{bmatrix} {\widehat{\boldsymbol{x}}_B}^T \cdot \widehat{\boldsymbol{x}}_A \\ {\widehat{\boldsymbol{x}}_B}^T \cdot \widehat{\boldsymbol{y}}_A \\ {\widehat{\boldsymbol{x}}_B}^T \cdot \widehat{\boldsymbol{z}}_A \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} {\widehat{\boldsymbol{x}}_B}^T \cdot \widehat{\boldsymbol{x}}_A & {\widehat{\boldsymbol{y}}_B}^T \cdot \widehat{\boldsymbol{x}}_A & {\widehat{\boldsymbol{z}}_B}^T \cdot \widehat{x}_A \\ {\widehat{\boldsymbol{x}}_B}^T \cdot \widehat{\boldsymbol{y}}_A & \dots & \dots \\ {\widehat{\boldsymbol{x}}_B}^T \cdot \widehat{\boldsymbol{z}}_A & \dots & \dots \end{bmatrix} $$

(6)

În continuare din (6) se poate determina transformarea inversă, a unui vector exprimat în reperul A într-un vector exprimat în B:

$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} {}^{A}\widehat{\boldsymbol{x}}_B & {}^{A}\widehat{\boldsymbol{y}}_B & {}^{A}\widehat{\boldsymbol{z}}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{B}\widehat{\boldsymbol{x}}_A & {}^{B}\widehat{\boldsymbol{y}}_A & {}^{B}\widehat{\boldsymbol{z}}_A \end{bmatrix}^T = {}^{B}_{A}\boldsymbol{R}^T $$

$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = {}^{B}_{A}\boldsymbol{R}^T $$

(7)

Ceea ce înseamnă că in cazul reperelor ortogonale există relațiile:

$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{-1} = {}^{B}_{A}\boldsymbol{R} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{T} \tag{8} $$

Exemplul 1. Fiind date cele două repere A și B să se scrie transformările de la A la B și de la B la A:

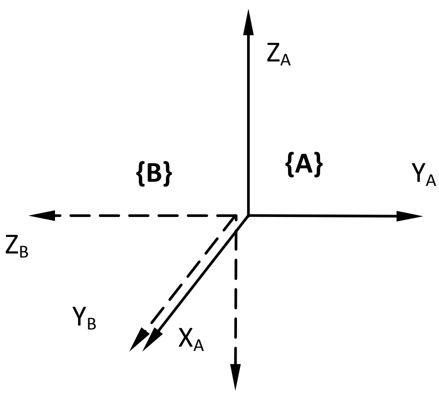

Fig. 8 Reperul {B} rotit față de {A}

$$ {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \; {}^{B}_{A}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} $$

În cele ce urmează acest rezultat va fi dezvoltat pentru exprimarea poziției unui punct al corpului definit în reperul B față de reperul A în condițiile în care reperul B este translatat și rotit față de A.

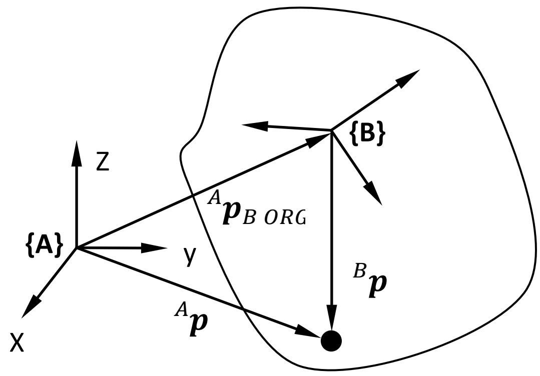

Fig. 9 Obținerea transformarilor omogene

Soluția este obținută prin suma a doi vectori (9). **Este deosebit de importantă precizarea faptului că suma poate fi efectuată doar în cazul în care cei doi vectori sunt exprimați în același sistem de coordonate**. Acesta este motivul pentru care vectorul definit inițial in B este transformat cu ajutorul matricei de rotație într-un vector exprimat în A.

$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{p}_{B\ ORG} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} \cdot {}^{B}\boldsymbol{p} \tag{9} $$

Relația (9) poate fi rescrisă intr-o formă mai compactă de tipul

$$ \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{p}_{B\ ORG} \\ \boldsymbol{O}_{(1\times 3)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{B}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10} $$

În general matricea care reunește cele două transformări se numește transformare omogenă în consecintă:

$$ {}^{A}\boldsymbol{p}_{(4\times 1)} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{T}_{(4\times 4)}\, {}^{B}\boldsymbol{p}_{(4\times 1)} \tag{10} $$

unde: ${}^{A}_{B}\boldsymbol{T}_{(4\times 4)} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} & {}^{A}\boldsymbol{p}_{B\ ORG} \\ \boldsymbol{O}_{(1\times 3)} & 1 \end{bmatrix}$

Se poate demonstra cu ușurință faptul că tranformarea omogenă inversă se obține cu relația:

$$ {}^{B}_{A}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{T} & -{}^{A}_{B}\boldsymbol{R}^{T} \cdot {}^{A}\boldsymbol{p}_{B\ ORG} \\ \boldsymbol{O}_{(1\times 3)} & 1 \end{bmatrix} \tag{12} $$

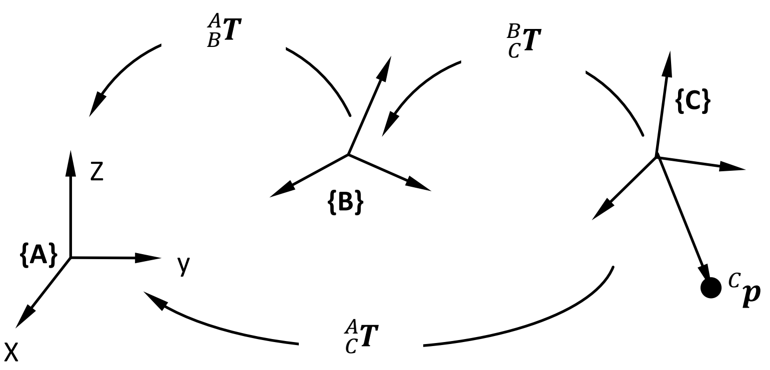

Fig. 10 Lanț de sisteme de coordonate

De cele mai multe ori în robotică apar o succesiune de sisteme de coordonate. Fiecare element (corp) este defint în propriul lui sistem de coordonate, apare în plusși un sistem de coordonate (privilegiat) al bazei care este fix în timpul procesului de manipulare. Acest fapt conduce la necesitatea exprimării posturilor reciproce. În figura 10 este prezentat un astfel de caz.

Pentruo astfel de succesiune (lanț) de sisteme de coordonate se pot scrie relațiile:

$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{T} \cdot {}^{B}_{C}\boldsymbol{T} \cdot {}^{C}\boldsymbol{p} \;\rightarrow\; {}^{A}_{C}\boldsymbol{T} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{T} \cdot {}^{B}_{C}\boldsymbol{T} \tag{13} $$

$$ {}^{A}_{C}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} \cdot {}^{B}_{C}\boldsymbol{R} & {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} \cdot {}^{B}\boldsymbol{p}_{C\ ORG} + {}^{A}\boldsymbol{p}_{B\ ORG} \\ \boldsymbol{O}_{(1\times3)} & 1 \end{bmatrix} \tag{14} $$

Lanțul sistemelor de coordonate poate fi închis astfel:

$$ \left.\begin{matrix} {}^{A}_{B}\boldsymbol{T} \cdot {}^{B}_{C}\boldsymbol{T} \cdot {}^{C}_{A}\boldsymbol{T} = \mathbf{1} \\ {}^{A}_{A}\boldsymbol{T} = \mathbf{1} \end{matrix}\right| \Rightarrow {}^{C}_{A}\boldsymbol{T}^{-1} = {}^{A}_{B}\boldsymbol{T} \cdot {}^{B}_{C}\boldsymbol{T} \tag{15} $$

Pentru efector se poate definii transformarea ${}^{O}_{E}\boldsymbol{T}$ (v.fig 11) care permite determinarea parametrilor de configurație ai acestuia. Acest lucru indică aparent faptul că aparent avem nevoie de $3 + 3 \times 3 = 12$ parametrii.

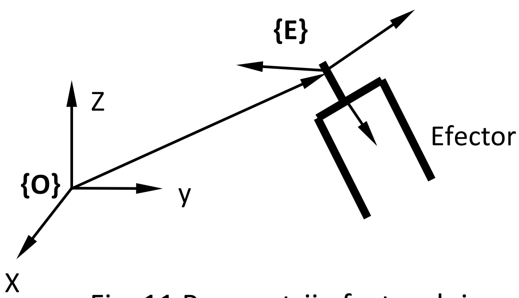

Fig. 11 Parametrii efectorului

${}^{O}_{E}\boldsymbol{T}\begin{cases} poziție\ 3\ parametrii \\ orientare\ 9\ parametrii \end{cases}$; adică

$$ \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_P \\ \boldsymbol{x}_R \end{bmatrix} \tag{16} $$

unde:

$$\boldsymbol{x}_R = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \boldsymbol{r}_3 \end{bmatrix} \qquad 9 \times 1 \text{ cosinuși directori ai matricei de rotație}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{r}_1 \quad \boldsymbol{r}_2 \quad \boldsymbol{r}_3]$$

În fapt între cosinușii directori, elementele versorilor vizavi de noul sistem de referință în care sunt descriși, există 6 relații de dependență. Astfel:

$$|\boldsymbol{r}_1|=|\boldsymbol{r}_2|=|\boldsymbol{r}_3|=1$$
$$|\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2|=|\boldsymbol{r}_2 \cdot \boldsymbol{r}_3|=|\boldsymbol{r}_3 \cdot \boldsymbol{r}_1|=0 \tag{17}$$

Înseamnă că in final exista 6 parametrii de configurație (3 parametrii pentru poziție, 3 orientare).

Relațiile anterioare au dovedit faptul că dificultatea exprimarii posturii constă în determinarea orientării. Orientarea depinde de trei parametrii independenți din această cauză s-a pus problema obținerii unei orientări oarecare prin trei rotații succesive.

Aceste trei rotații pot fi realizate în două moduri:

- Unghiuri fixe: adică cele 3 rotații se definesc vizavi de reperul inițial;
- Unghiurile lui Euler: adică cele 3 rotații se definesc vizavi de reperul curent.

În ambele situații pot apărea 12 variante de rotație de tipul:

- ABC cu 6 variante;
- ABA cu 6 variante.
    - unde: A,B,C sunt axele în jurul cărora se fac rotațiile (A=X sau Y sau Z, etc)

Unghiurile lui Euler în succesiunea *(ABC)* ZYX (în varianta ZYX) permit obținerea ori cărei orientări. Relația (18) modelează această transformare

$${}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_x(\alpha) \cdot \boldsymbol{R}_y(\beta) \cdot \boldsymbol{R}_z(\gamma) \tag{18}$$

$$\Rightarrow \; {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & \cdots & \cdots \\ s_\alpha c_\beta & \cdots & \cdots \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix}$$

Putem însă să utilizăm succesiunea ZYZ (ABA) a unghiurilor lui Euler și atunci:

$${}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_z(\alpha) \cdot \boldsymbol{R}_y(\beta) \cdot \boldsymbol{R}_z(\gamma) \tag{19}$$

$$\Rightarrow {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & c_\alpha c_\beta \\ \cdots & \cdots & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix}$$

unde:

$$\boldsymbol{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix}; \boldsymbol{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\gamma & -s_\gamma \\ 0 & s_\gamma & c_\gamma \end{bmatrix}$$

Atunci când α, β, γ sunt necunoscuteși $r_{11} \dots r_{13}$ sunt cunoscute (depind de parametrii configurației) putem scrie ecuațiile:

$${}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & \cdots & \cdots \\ s_\alpha c_\beta & \cdots & \cdots \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\left.\begin{matrix} r_{11} = c_\alpha c_\beta \\ r_{21} = s_\alpha c_\beta \end{matrix}\right| \Rightarrow c_\beta = \sqrt{{r_{11}}^2 + {r_{21}}^2}$$

$$\left.\begin{matrix} c_\beta = \sqrt{{r_{11}}^2 + {r_{21}}^2} \\ r_{31} = -s_\beta \end{matrix}\right| \Rightarrow \beta = Atan2(-r_{31}, \sqrt{{r_{11}}^2 + {r_{21}}^2}) \tag{21}$$

Relația (20) permite o observație foarte importantă:în cazul în care $c_\beta = 0 \Rightarrow \beta = \pm 90°$ nu putem determina pe α și pe γ ci doar pe $(\alpha + \gamma)$, respectiv pe $(\alpha - \gamma)$. Apare o singularitate.

În general singularitățile sunt determinate de faptul că am ales un numar min im de parametrii de configurație. Pentru a evita acest fapt se pot utiliza și alți parametrii de cosinuși directori, parametrii lui Euler etc.