# ANALIZA ŞI SIMULAREA ÎN TIMP PENTRU SISTEMELE CONTINUE

***OBIECTIVE***

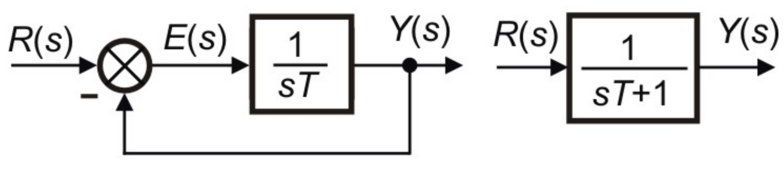
- Obținerea răspunsului sistemelor de ordinele întâi şi doi la intrările treaptă, rampă şi impuls.
- Determinarea stabilității sistemelor de reglare.
- Modul de obținere a indicatorilor de calitate în domeniul timpului.
- Calculul erorilor staționare pentru diverse semnale tipice de test aplicate la intrare.

## 5.1. Introducere

Pentru a defini performanțele unui sistem închis este necesară cunoaşterea răspunsului în timp al sistemului la diferite mărimi de intrare standard. O mărime de intrare standard, des folosită, este funcția treaptă. Dacă răspunsul unui sistem la mărimea treaptă este cunoscut, atunci este posibill calculul matematic al răspunsului sistemului la alte mărimi de intrare. În practică, semnalul de intrare al unui sistem de control nu este cunoscut în prealabil.

## 5.2. Răspunsul sistemului de ordinul întâi – T1

Schema bloc a sistemului de ordinul întâi şi funcția de transfer echivalentă sunt prezentate în figura 5.2.1.




a) b)

Fig. 5.2.1 Sistem de ordinul întâi

Fizic, un astfel de sistem poate să fie un circuit RC. Funcția de transfer standard a unui element de ordinul întâi este conform relației:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{sT+1} = \frac{1/T}{s+1/T} = \frac{\sigma}{s+\sigma}, \tag{5.1}$$

unde $\sigma = 1/T$ .

În continuare, se va analiza răspunsul acestui sistem la intrarea treaptă. Condițiile inițiale se presupun nule.

Răspunsul la treaptă unitară se mai numeşte răspuns indicial. Având în vedere că transformata Laplace a unei trepte unitare este $R(s) = 1/s$, rezultă că transformata Laplace a mărimii de ieşire va fi în acest caz:

$$Y(s) = \frac{1}{(sT+1)}\frac{1}{s} = \frac{1/T}{s(s+1/T)}, \tag{5.2}$$

cu dezvoltarea în fracții simple:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T} = Y_p(s) + Y_t(s). \tag{5.3}$$

Aplicând transformata Laplace inversă relației (5.3), rezultă răspunsul la treaptă unitară al sistemului de ordinul unu, conform expresiei:

$$y(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} = y_p(t) + y_t(t),\ t \geq 0, \tag{5.4}$$

**Răspunsul la rampă unitară al sistemului de ordinul unu** se obține conform expresiei:

$$y(t) = t - T + T\mathrm{e}^{-t/T},\ t \geq 0, \tag{5.5}$$

cu forma de variație prezentată în figura 5.2.2:

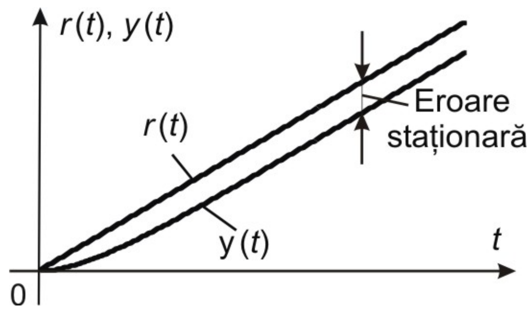



Fig. 5.2.2 Răspunsul la rampă unitară

Eroarea (abaterea) de reglare a sistemului de ordinul întâi pentru mărime de intrare rampă unitară este:

$$e(t) = r(t) - y(t) = t - (t - T + T\mathrm{e}^{-t/T}) = T(1 - \mathrm{e}^{-t/T}), \tag{5.6}$$

de unde se constată că eroarea staționară obținută când $t \to \infty$ are valoarea $e_{st} = e(\infty) = T$ .

**Răspunsul la impuls unitar al sistemului de ordinul unu** descris de relația:

$$y(t) = g(t) = \frac{1}{T} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}},\ t \geq 0, \tag{5.7}$$

are forma de variație prezentată în figura 5.2.3.

Tangenta la curbă, în momentul inițial ($t$=0), intersectează axa abscisei la valoarea $t$ =$T$.

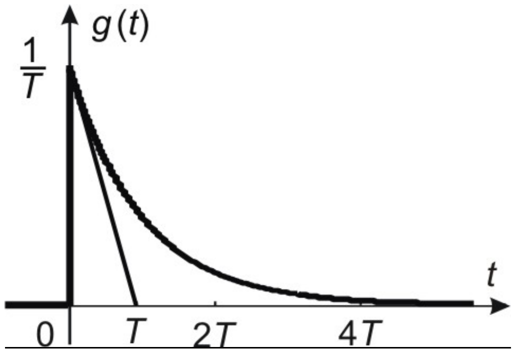



Fig. 5.2.3 Răspunsul la impuls unitar

## 5.3. Răspunsul sistemului de ordinul doi la intrarea treaptă – T2

Elementul de ordinul doi se poate obține considerând sistemul cu reacție negativă unitară, cu schema bloc din figura 5.3.1a. Calculând funcția de transfer în circuit închis rezultă sistemul din figura 5.3.1b.

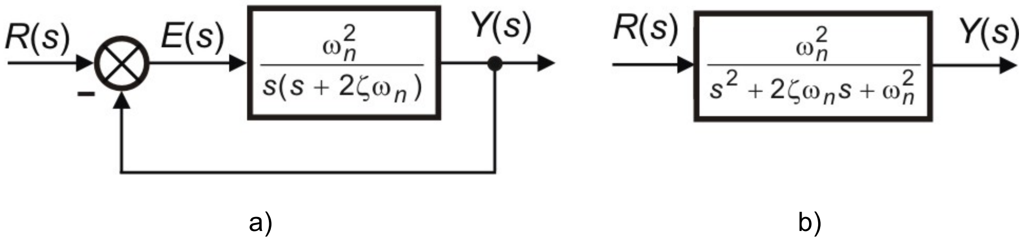



Fig. 5.3.1 Sistem de ordinul doi

Funcția de transfer standard a unui sistem de ordinul doi este:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{5.8}$$

unde $\zeta$ este factorul de amortizare, iar $\omega_n$ este pulsația naturală. Frecvența naturală este frecvența de oscilație dacă amortizările lipsesc, iar factorul de amortizare caracterizează natura răspunsului tranzitoriu al sistemului. Răspunsul sistemului de ordinul doi la o mărime treaptă pentru un factor de amortizare $0 < \zeta < 1$ (cazul subamortizat), în cazul condițiilor inițiale zero este dat de:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \varphi),\ \varphi = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta},\ \ t \ge 0$$

sau

$$y(t) = \mathbf{L}^{-1}\{Y(s)\} = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right],\ \ t \ge 0, \tag{5.9}$$

unde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

**În cazul particular când** $\zeta$ = 0, avem $\omega_d = \omega_n$, iar din ecuația (5.9) se obține răspunsul la treaptă al sistemului de ordinul doi, descris de ecuația:

$$y(t)=1-\cos\omega_n t,\ t\geq 0\,. \qquad (5.10)$$

Se observă că dacă $\zeta=0$, răspunsul devine neamortizat cu oscilații întreținute, care continuă pentru $t\to\infty$.

**Răspunsul la treaptă al sistemului de ordinul doi critic amortizat** ($\zeta$ = 1) este:

$$y(t)=1-\omega_n t\,\mathrm{e}^{-\omega_n t}-\mathrm{e}^{-\omega_n t}=1-\mathrm{e}^{-\omega_n t}(1+\omega_n t),\ t\geq 0\,. \qquad (5.11)$$

Acest rezultat se poate obține înlocuind $\zeta$ cu 1 în relația (5.9) şi folosind limitele:

$$\lim_{\zeta\to 1}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t=\zeta\omega_n t\lim_{\zeta\to 1}\frac{\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t}=\omega_n t\,,$$

respectiv faptul că: $\lim\limits_{\zeta\to 1}\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\ t=\cos 0=1$.

**Răspunsul la treaptă al sistemului de ordinul doi supraamortizat** (cu $\zeta$ > 1) este:

$$y(t)=1+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta-1}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}-\frac{\mathrm{e}^{-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}}{\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})}\right],\quad t\geq 0\,. \qquad (5.12)$$

Cei doi poli ai sistemului sunt reali, negativi şi distincți, iar elementul de ordinul doi poate fi considerat ca fiind format din două elemente de ordinul unu conectate în serie.

În figura 5.3.2 se prezintă o familie de curbe răspuns la treaptă al elementului de ordinul doi pentru diferite valori ale lui $\zeta$, unde abscisa este variabila adimensională $\omega_n t$. Se poate observa că sistemele de ordinul doi cu aceeaşi valoare pentru $\zeta$, dar diferită pentru $\omega_n$, vor prezenta aceeaşi valoare maximă pentru răspuns (acelaşi suprareglaj) şi acelaşi model de oscilație. Despre aceste sisteme se constată că stabilitatea relativă este identică.

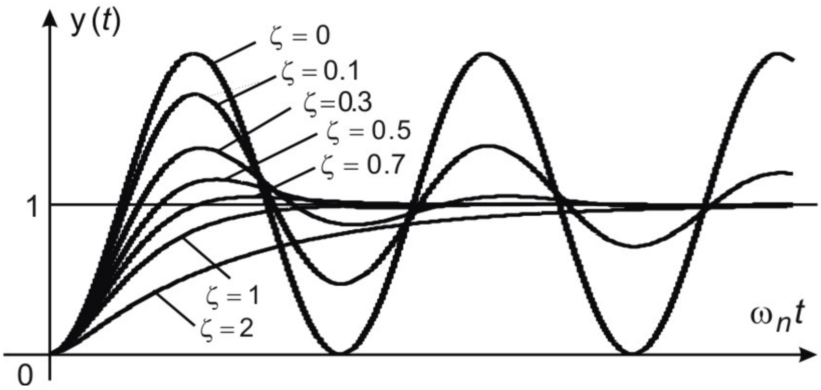



Fig. 5.3.2 Familie de curbe - răspunsul la traptă unitară

**Răspunsul la impuls al sistemului de ordinul doi** în cele trei cazuri:

- 0<$\zeta$<1 - cazul subamortizat:

$$y(t) = g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\ t,\ t \geq 0\,. \tag{5.13}$$

- $\zeta = 0$ - cazul neamortizat:

$$y(t) = g(t) = \omega_n \sin \omega_n t\ ,\ t \geq 0\,. \tag{5.14}$$

- $\zeta$ = 1 - cazul critic amortizat:

$$y(t) = \omega_n^2\, t\, e^{-\omega_n t},\ t \geq 0\,. \tag{5.15}$$

- $\zeta > 1$ - cazul supraamortizat:

$$y(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} [e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}],\ t \geq 0\,. \tag{5.16}$$

În figura 5.3.3 se prezintă familia de curbe răspuns la impuls pentru elementul de ordinul doi cu diferite valori ale lui $\zeta$.

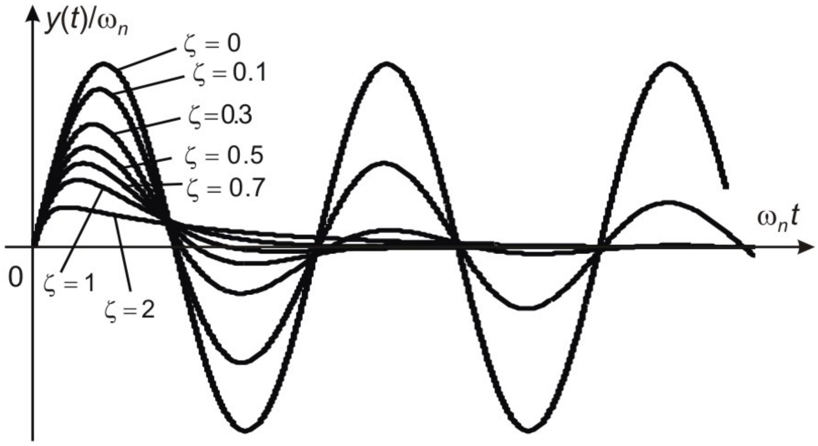



Fig. 5.3.3 Familie de curbe - răspunsul la impuls unitar

Curbele sunt scalate în amplitudine şi timp, fiind desenate funcțiile $y(t)/\omega_n$ în raport cu variabila adimensională $\omega_n t$, astfel încât aceste funcții nu vor depinde decât de $\zeta$. Din figură se constată că pentru $\zeta \geq 1$, răspunsul la impuls este tot timpul pozitiv ($y(t) \geq 0$). În cazul subamortizat $y(t)$ oscilează în jurul valorii zero.

### 5.3.1. Performanțele sistemului de ordinul doi

Criteriile de performanță care se utilizează pentru caracterizarea regimului tranzitoriu la o intrare treaptă unitară sunt:

- suprareglajul (abaterea dinamică maximă)

$$M_v\ \% = \frac{y_{\max} - y_{st}}{y_{st}} 100\ \%, \tag{5.17}$$

unde $y_{\max}$ - este valoarea maximă a răspunsului $y$, iar $y_{st}$ - valoarea de regim staționar a răspunsului ($y_{st} = 1$). Valoarea maximă se obține calculând timpul $t_v$ (timpul de vârf = criteriu de performanță) la care se atinge valoarea maximă:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ , adică } t_v = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{5.18}$$

Aşadar, valoarea maximă se obţine introducând (5.18) în (5.9):

$$M_v = y(t_v) - 1 = 1 - \mathrm{e}^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)}(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\pi) - 1,$$

$$M_v = \exp(-\pi\sigma/\omega_d) = \exp(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}). \tag{5.19}$$

Suprareglajul în procente:

$$M_v\% = \exp(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})100. \tag{5.20}$$

- timpul de stabilire (durata regimului tranzitoriu) este timpul necesar ca răspunsul sistemului să intre în zona $\pm\,0{,}05\,y_{st}$ sau $\pm\,0{,}2\,y_{st}$.

O relaţie acoperitoare de calcul al timpului tranzitoriu se obţine astfel:
$t_s \cong 5/\sigma = 4/\zeta\omega_n$ pentru bandă de 2%;

$$t_s \cong 4/\sigma = 3/\zeta\omega_n \text{ pentru bandă de 5\%.} \tag{5.21}$$

- timpul de creştere $t_c$ este timpul necesar evoluţiei răspunsului sistemului de la $(0{,}1\div 0{,}9)\,y_{st}$.

$$t_c = \frac{\pi-\varphi}{\omega_d} = \frac{\pi-\varphi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}},\ \varphi = \mathrm{arctg}\,(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta). \tag{5.22}$$

## 5.4. Efectele introducerii unor poli şi zerouri suplimentare

Introducerea unui zero în funcţia de transfer a sistemului de ordinul doi, în cazul în care este mai îndepărtat de origine comparativ cu polii dominanţi (polii cei mai apropiaţi de originea planului `s`), face ca sistemul să aibă un suprareglaj mai mare şi o durată a regimului tranzitoriu mai mică (viteza de răspuns mai mare).

Introducerea unui pol suplimentar are influenţă directă asupra regimului tranzitoriu, prin componenta tranzitorie introdusă de acest pol. Cu cât polul este situat la o distanţă mai mare faţă de origine în raport cu polii dominanţi, cu atât această componentă se poate neglija în timp. Aşadar, urmând aceste condiţii, sistemul poate fi aproximat cu un sistem de ordinul doi.

Funcţiile `C=impulse(num,den,t)` sau `C=impulse(num,den)` şii `C=step(num,den,t)` sau `C=step(num,den)` şi `C=lsim(num,den,u,t)` din Matlab „Control Toolbok" pot fi utilizate pentru simularea regimului tranzitoriu al sistemului.

## 5.5. Stabilitatea sistemelor

Stabilitatea unui sistem reprezintă proprietatea acestuia de a reveni în regim staţionar atunci când a fost scos dintr-un asemenea regim de către o mărime de intrare sau o perturbaţie. Conform criteriului general de stabilitate, un sistem este stabil dacă toţi polii sistemului închis se găsesc în semiplanul stâng al planului complex s. Deci, o condiție necesară şi suficientă pentru ca un sistem să fie stabil este ca toți polii funcției de transfer a sistemului să aibă partea reală negativă.

Stabilitatea unui sistem liniar invariant în timp poate fi realizată utilizând funcția **impulse** pentru a obține răspunsul la impuls al sistemului. Sistemul este stabil dacă răspunsul la impuls al sistemului tinde la zero atunci când timpul tinde la infinit. Un alt mod de a determina stabilitatea sistemului este prin simulare. Funcția **lsim** poate fi utilizată pentru a observa ieşirea pentru intrări tipice. Pentru sisteme neliniare, aceasta se aplică în cazuri particulare. O altă alternativă este funcția **roots**, ce poate fi utilizată pentru obținerea rădăcinilor ecuației caracteristice. În teoria controlului clasic există tehnici sigure pentru analiza stabilității sistemului. Una din aceste tehnici este criteriul Routh (pentru aplicare se va folosi funcția **routh**). Stabilitatea unui sistem liniar este o proprietate intrinsecă a sistemului care nu depinde de mărimea de intrare a sistemului.

### 5.5.1. Criteriul de stabilitate Routh

Criteriul Routh defineşte o metodă pentru determinarea stabilității ce poate fi aplicată la o ecuație caracteristică de ordinul $n$ de forma:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0 . \tag{5.23}$$

Dacă criteriul se aplică unui sistem de reglare, se pot obține informații despre stabilitate direct din coeficienții ecuației caracteristice.

Criteriul este aplicat folosind tabela Routh definită astfel:

$$\begin{array}{l||llll} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots , \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \end{array} \tag{5.24}$$

unde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ sunt coeficienții ecuației caracteristice, iar ceilalți coeficienți se determină în modul următor:

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \dots$$

$$c_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \dots \tag{5.25}$$

Calculele pentru fiecare linie sunt continuate până în momentul apariției unui rezultat egal cu zero. Condiția necesară şi suficientă este ca toate rădăcinile ecuației (5.23) să se găsească în semiplanul stâng al planului complex s, iar elementele din prima coloană a tabelei Routh să aibă acelaşi semn. În cazul schimbării semnelor elementelor din prima coloană, numărul acestor schimbări indică numărul de rădăcini cu parte reală pozitivă.

### 5.5.2. Cazuri speciale

Cazul I. Dacă primul element dintr-o linie este zero, el se înlocuieşte cu un număr pozitiv foarte mic $\varepsilon$ şi se aplică criteriul aşa cum a fost descris în procedura standard.

Cazul II. Dacă toate elementele dintr-o linie sunt zero, sistemul are poli pe axa imaginară, perechea de rădăcini complex conjugate fiind simetrică față de originea planului complex s. În acest caz, se formează un polinom auxiliar pornind de la coeficienții liniei anterioare. Ulterior, toate zerourile din linie se vor înlocui cu coeficienții estimați prin diferențierea polinomului auxiliar.

## 5.6. Eroarea staționară şi tipul sistemului

În regim staționar sistemul trebuie să îndeplinească performanța eroare staționară $e_{st}$. Pentru mărimea de intare treaptă, eroarea staționară trebuie să fie zero (în cazul în care tipul sistemului este 1 sau 2, acesta fiind dat de numărul de poli din origine pe care-i are sistemul), iar pentru mărimea de intrare rampă, eroarea staționară trebuie să fie mai mică decât o valoare impusă.

Se consideră sistemul:

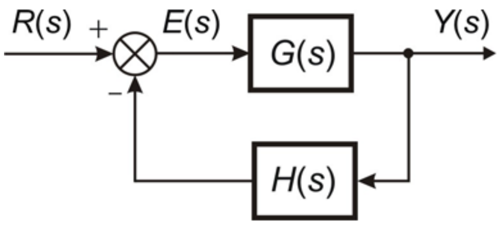



Fig. 5.6.1 Sistem cu reacție

Funcția de transfer este:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}. \tag{5.26}$$

Transformata Laplace a erorii este:

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s). \tag{5.27}$$

Utilizând teorema valorii finale a transformatei Laplace va rezulta:

$$e_{st} = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}. \tag{5.28}$$

Dacă intrarea este treaptă unitară, atunci:

$$e_{st}^{1} = \frac{sR(s)}{1+\lim\limits_{s\to 0}[G(s)H(s)]} = \frac{1}{1+k_p}. \tag{5.29}$$

Dacă intrarea este rampă unitară, se va obține:

$$e_{st}^{t} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}[sG(s)H(s)]} = \frac{1}{k_v}. \tag{5.30}$$

Dacă intrarea este parabolică, va rezulta:

$$e_{st}^{t^2} = \frac{1}{\lim\limits_{s \to 0} [s^2 G(s) H(s)]} = \frac{1}{k_a}. \qquad (5.31)$$

Funcțiile care calculează eroarea staționară la intrările treaptă unitară, rampă unitară şi parabolă unitară sunt:

```
errorzp(z,p,k),
errortf(num,den).
```

Funcția `errorzp(z,p,k)` calculează eroarea staționară atunci când sistemul este reprezentat prin poli, zerouri şi factor de amplificare (`z` este un vector care conține zerourile funcției de transfer, `p` este un vector care conține polii funcției de transfer şi `k` este factorul de amplificare). Dacă gradul numărătorului este mai mic decât gradul numitorului, atunci există `n-m` zerouri la infinit, iar vectorul `z` trebuie să conțină `(n-m)inf` zerouri.

Funcția `errortf(num,den)` calculează eroarea staționară atunci când sistemul este reprezentat ca un raport de două polinoame. În tabelul 5.6.1 se pot urmări relațiile dintre tipul sistemului şi mărimile de intrări:

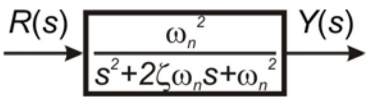
Tab 5.6.1 Erori staționare în funcție de tipul sistemului

| Tipul sistemului | Intrarea $R(s)$ | | |
|---|---|---|---|
| | $1/s$ | $1/s^2$ | $1/s^3$ |
| 0 | $1/(1+k_p)$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 1 | 0 | $1/k_v$ | $\infty$ |
| 2 | 0 | 0 | $1/k_a$ |

## 5.7. Exerciții propuse

*Exercițiul 5.7.1*

Fie sistemul din figură:




care are următorii parametri: $t = [0:2]$ cu pasul 0.02, $\omega_n = 5\ rad/s$, $\zeta = 0.6$. Să se reprezinte răspunsul la intrarea treaptă al sistemului de ordinul 2 şi să se determine valoarea suprareglajului.

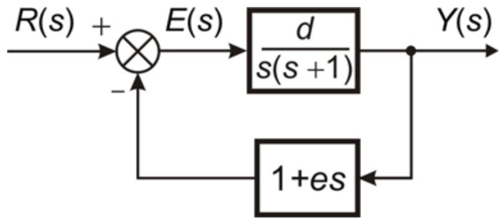
*Exercițiul 5.7.2*

Să se reprezinte răspunsul la intrarea treaptă pentru sistemul cu funcția de transfer în circuit închis ($t$ are aceleaşi valori ca în exercițiul anterior) şi să se determine valoarea suprareglajului:

$$G_0(s) = \frac{25(1+0.4s)}{(1+0.16s)(s^2+6s+25)}$$

*Exercițiul 5.7.3*

Se dă următorul sistem:



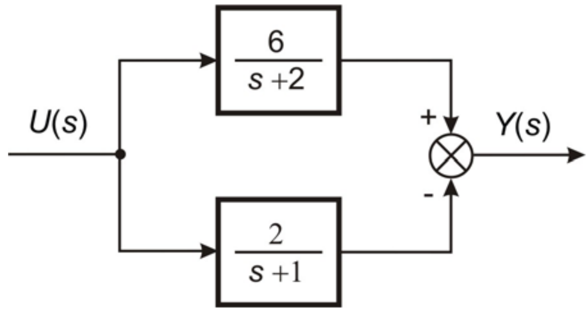

Să se reprezinte răspunsul la intrarea treaptă pentru sistemul anterior. Să se determine valorile lui $d$ şi $e$ pentru răspunsul treaptă ($t = [0:4]$, cu pasul 0.02), astfel ca $M_v = 40\%$ şi $t_v = 0.8\ s$ şi valoarea regimului tranzitoriu.

*Exercițiul 5.7.4*

Să se reprezinte grafic suprareglajul sistemului de ordinul doi, ştiind că $\zeta = [0.001:1]$ cu pasul 0.001.

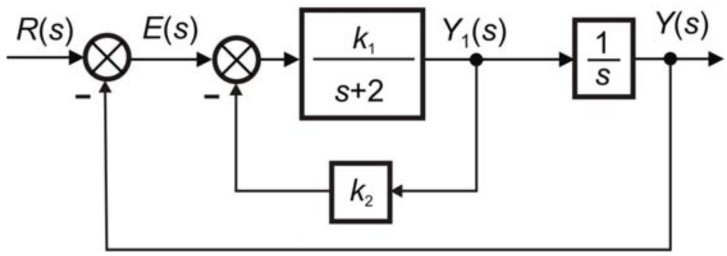
*Exercițiul 5.7.5*

Să se reprezinte răspunsul la intrarea treaptă pentru sistemul din figură ($t = [0:10]$, cu pasul 0.1):




*Exercițiul 5.7.6*

Să se reprezinte răspunsul sistemului din figură la intrările treaptă unitară, impuls unitar şi rampă unitară, ştiind că $\zeta = 0.7$ şi $\omega_n = 4\ rad/s$ ($t = [0:0.1:2]$):




*Exercițiul 5.7.7*

Să se aplice criteriul Routh pentru determinarea stabilității sistemului în cazul următoarelor ecuații caracteristice:

$$s^4 + 4s^3 + 7s^2 + 22s + 24 = 0,$$

$$s^4 + 4s^2 + 20s + 24 = 0,$$

$$s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24 = 0.$$

*Exercițiul 5.7.8*

Să se determine eroarea staționară la intrările treaptă, rampă şi parabolă pentru următoarele sisteme cu funcția de transfer în circuit deschis:

$$G(s) = \frac{10(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+5)},$$

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 14s + 50}.$$

*Exercițiul 5.7.9*

Să se determine eroarea staționară la intrările treaptă, rampă şi parabolă pentru sistemul prezentat în figura de mai jos ($R = 100k\Omega$, $C = 100\mu F$):