III.Proiectarea filtrelor pe baza repartiției poli-zerouri a funcției de transfer

În această secțiune se va examina dependența strânsă care există între răspunsul în frecvență şi amplasarea polilor şi zerourilor funcției de transfer $G(s)$ în planul complex. Această dependență oferă o procedură simplă şi intuitivă pentru proiectarea filtrelor.

Dependența Răspunsului în Frecvență de Polii şi Zerourile Funcției de Transfer *G*(*s*)

Răspunsul în frecvență al unui sistem reprezintă informația de bază despre capacitatea de filtrare a acestuia. Se va examina legătura strânsă care există între amplasarea în planul complex a polilor şi zerourilor funcției de transfer $G(s)$ şi răspunsul în frecvență al sistemului descris de această funcție de transfer.

Funcția de transfer a unui sistem poate fi exprimată prin:

$$G(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=b_n\,\frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_n)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)...(s-\lambda_n)}.$$

În relația de mai sus z_1, z_2, ..., z_n sunt zerorile (rădăcinile polinomului de la numărător $B(s)=0$), iar λ_1, λ_2, ..., λ_n reprezintă polii (rădăcinile polinomului de la numitor $A(s)=0$) funcției de transfer $G(s)$.

Obs. Se consideră cazul unei funcții de transfer la care gradele numărătorului şi numitorului sunt egale.

Valoarea funcției de transfer pentru o valoare dată $s=p$ este

$$G(s)\big|_{s=p}=b_n\,\frac{(p-z_1)...(p-z_n)}{(p-\lambda_1)...(p-\lambda_n)}.$$

Expresia de mai sus constă din factori de forma $(p-z_i)$ şi $(p-\lambda_i)$. În general un factor de forma $p-z$ $(z=z_i \text{ sau } \lambda_i)$ este un număr complex reprezentat de un vector care porneşte din punctul $+z$ şi ajunge în punctul p din planul complex. Lungimea acestui vector este egală cu modulul numărului complex $r=|p-z|$, iar unghiul vectorului complex măsurat în sens trigonometric de la axa reală este $\varphi=\angle(p-z)=\arg(p-z)$ (vezi fig. 7a).

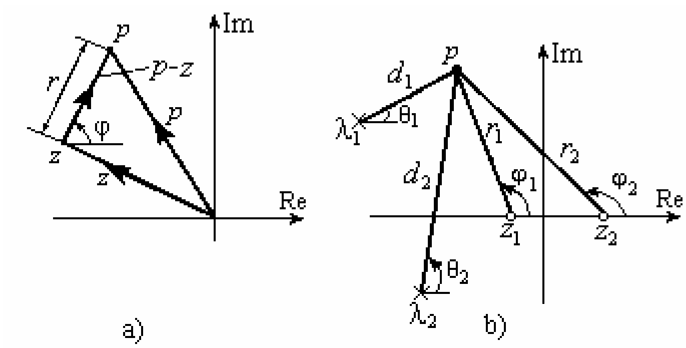

Fig. 1.

Pentru a determina valoarea funcţiei de variabilă complexă $G(s)$ în punctul $s = p$, se vor desena vectorii complecşi care pleacă din toţi polii şi din toate zerourile funcţiei $G(s)$ spre punctul p (aşa cum se vede în fig. 7b pentru cazul a doi poli şi două zerouri). Vom nota cu r_i lungimea vectorilor $p - z_i$, respectiv cu d_i lungimea vectorilor $p - \lambda_i$. Notăm cu φ_i unghiul făcut de vectorul $p - z_i$ şi cu θ_i unghiul de la axa reală la vectorul complex $p - \lambda_i$ (unghiurile se măsoară în sens trigonometric). Cu aceste notaţii vom avea:

$p - z_i = r_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}$ şi $p - \lambda_i = d_i \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_i}$,

deci $G(s)\big|_{s=p} = b_n \dfrac{(r_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1})(r_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2})...(r_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n})}{(d_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1})(d_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_2})...(d_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_n})} = b_n \dfrac{r_1 r_2 ... r_n}{d_1 d_2 ... d_n} \mathrm{e}^{\mathrm{j}[(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)-(\theta_1+\theta_2+...+\theta_n)]}$

De aici rezultă că $\left|G(s)\right|_{s=p} = b_n \dfrac{r_1 r_2 ... r_n}{d_1 d_2 ... d_n} = b_n \dfrac{\text{produsul distantelor de la zerouri la } p}{\text{produsul distantelor de la poli la } p}$

şi $\angle G(s)\big|_{s=p} = (\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n) - (\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n) =$

=suma unghiurilor zerourilor la p - suma unghiurilor zerourilor la p.

Utilizând această procedură se poate determina $G(s)$ pentru orice valoare a lui s. Pentru a calcula răspunsul în frecvenţă $G(\mathrm{j}\omega)$ vom considera $s = \mathrm{j}\omega$ (un punct pe axa imaginară) şi apoi vom determina $\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|$ şi $\angle G(\mathrm{j}\omega)$ cu relaţiile de mai sus pentru $\omega \in (0, \infty)$.

Mărirea Amplitudinii (Câştigului) Funcţiei de Frecvenţă de către un Pol

Pentru a înţelege efectul polilor şi zerourilor asupra răspunsului în frecvenţă considerăm cazul ipotetic al unui pol, $\lambda = -\alpha + \mathrm{j}\omega_0$, aşa cum se vede în fig. 8a.

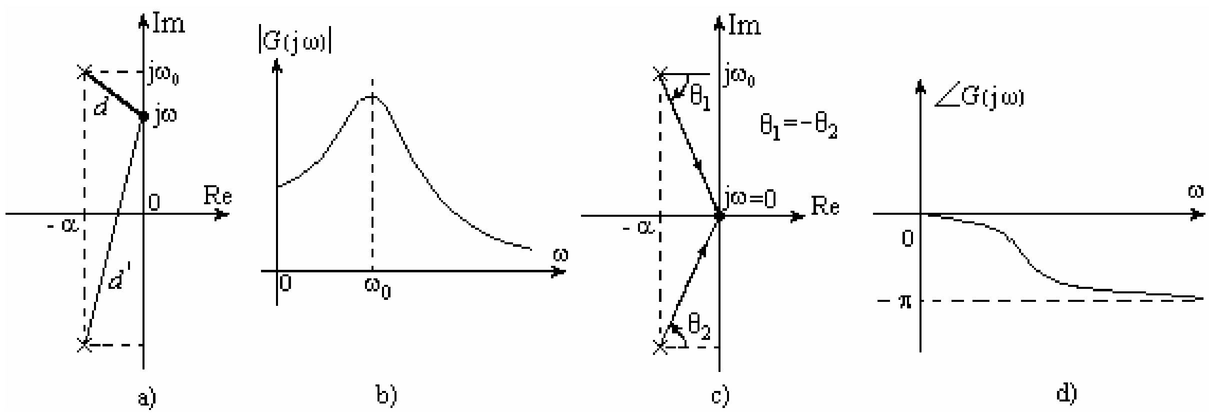

Fig. 2

Pentru a găsi amplitudinea (modulul) răspunsului în frecvenţă $|G(\mathrm{j}\omega)|$ pentru o anumită valoare a lui ω, desenăm vectorul care uneşte polul considerat cu punctul $\mathrm{j}\omega$ ca în figură. Dacă lungimea acestui vector (modulul său) este d atunci $|G(\mathrm{j}\omega)|$ este proporţional cu $\frac{1}{d}$, deci $|G(\mathrm{j}\omega)| = \frac{k}{d}$,

unde valoarea exactă a constantei k nu prezintă importanţă în această evaluare calitativă. Pe măsură ce ω creşte de la zero, d descreşte până când ω ajunge la valoarea ω_0 şi apoi d începe să crească progresiv pentru valori ale lui $\omega > \omega_0$. Din relaţia de mai înainte rezultă că modulul funcţiei de frecvenţă $|G(\mathrm{j}\omega)|$ creşte când ω se modifică crescător în gama $0 \div \omega_0$, respectiv descreşte pentru variaţii ale lui ω de la ω_0 la ∞. Aşadar un pol poziţionat la valoarea complexă $-\alpha + \mathrm{j}\omega_0$ produce o comportare selectivă în frecvenţă a funcţiei $G(\mathrm{j}\omega)$ care măreşte amplificarea acesteia la frecvenţa ω_0 (numită frecvenţă de rezonanţă). Cu cât polul este mai aproape de axa imaginară (α mai mic) cu atât este mai mare creşterea câştigului (a modulului) funcţiei de transfer. În cazul extrem, când $\alpha = 0$ (polul este pe axa imaginară) câştigul la pulsaţia ω_0 tinde la ∞. Existenţa unor poli complecşi multipli în apropierea punctului $\mathrm{j}\omega_0$ măreşte şi mai mult efectul de selectivitate în frecvenţă.

În considerentele anterioare s-a studiat efectul unui singur pol complex asupra câştigului unui sistem. În sistemele reale un pol complex $-\alpha + \mathrm{j}\omega_0$ este însoţit întotdeauna de conjugatul său (În sistemele fizice reale polii complecşi apar întotdeauna în perechi de forma $-\alpha \pm \mathrm{j}\omega_0$). Se poate arăta uşor că prezenţa polului conjugat nu schimbă în mod apreciabil comportarea selectivă în frecvenţă din apropierea pulsaţiei ω_0. În acest caz câştigul (modulul) funcţiei de transfer este $k/d \cdot d'$, unde d' este distanţa de la polul complex (...) $-\alpha - \mathrm{j}\omega_0$ la punctul $\mathrm{j}\omega$. Deoarece polul conjugat este relativ departe de $\mathrm{j}\omega_0$ când ω are valori în vecinătatea lui ω_0, distanţa d' se modifică relativ puţin (Notând d_0' distanţa de la polul complex $-\alpha - \mathrm{j}\omega_0$ la punctul $\mathrm{j}\omega_0$, când $\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega$

distanța $d' = d_0' + \Delta d$ cu $\Delta d << d_0'$, deci gama de variație a lui d' este mică şi în consecință $d' \cong d_0'$).

În continuare se vor discuta câteva aspecte referitoare la caracteristica fază-pulsație pentru o pereche de poli complecşi conjugați. Din figura 8c se poate observa că argumentul funcției de frecvență cu doi poli complecşi conjugați:

$\theta = \angle G(j\omega) = \angle \dfrac{k}{(j\omega + \alpha - j\omega_0)(j\omega + \alpha + j\omega_0)} = -(\theta_1 + \theta_2)$ se modifică de la $\theta = 0$ pentru $\omega = 0$ la $\theta = -\pi$ pentru $\omega \to \infty$.

Reducerea Câştigului Funcției de Frecvență de către un Zero

Utilizând o argumentație similară cu cea prezentată mai înainte se poate arăta că o pereche complexă de zerouri $-\alpha \pm j\omega_0$ va avea un efect opus față de o pereche de poli, reducând câştigul în vecinătatea pulsației ω_0 (fig. 9). Un zero plasat pe axa imaginară în punctul $j\omega_0$ va produce un câştig nul la pulsația ω_0. Existența unor zerouri multiple va accentua şi mai mult acest efect.

În cazul unei perechi de zerouri complexe conjugate faza rezultantă $\varphi = \angle G(j\omega) = \angle k(j\omega + \alpha - j\omega_0)(j\omega + \alpha + j\omega_0)$ se va modifica în gama $\varphi = 0$ (pentru $\omega = 0$), $\varphi = \pi$ (pentru $\omega \to \infty$).

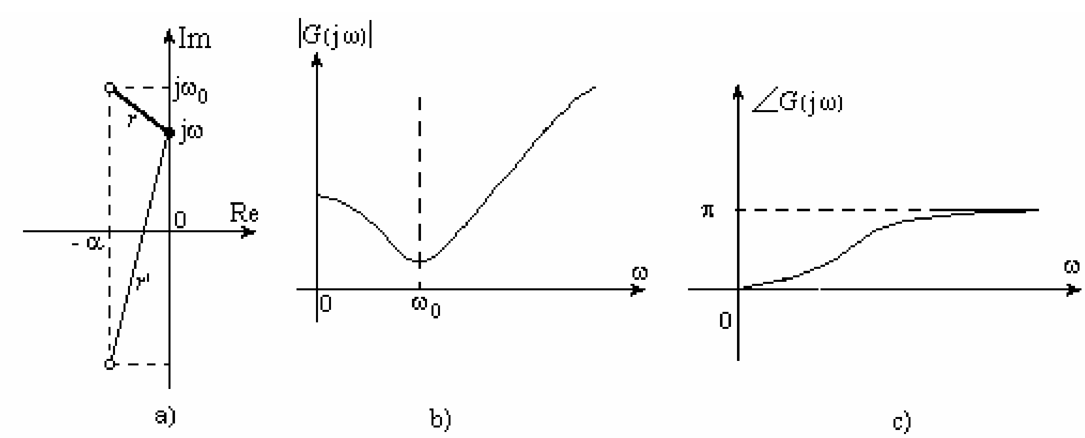

Fig. 3.

Filtre Trece Jos

Un filtru trece-jos tipic are câştigul maxim la $\omega = 0$. Din considerentele prezentate mai înainte rezultă că pentru a obține o astfel de comportare selectivă în frecvență este necesar să amplasăm un pol (sau mai mulți) în semiplanul complex stâng pe dreapta orizontală care trece prin punctul $j\omega$ cu $\omega_0 = 0$, adică prin originea planului complex.

Deci este necesar ca funcția de transfer să conțină un pol plasat pe semiaxa reală negativă. Rezultă astfel un filtru trece jos cu funcția de transfer $G(s)=\dfrac{\omega_c}{s+\omega_c}$.

La numărătorul funcției de transfer s-a introdus factorul ω_c pentru a normaliza amplitudinea funcției de transfer pentru $\omega=0$ la valoarea unu ($|G(j0)|=1$). Dacă notăm cu d distanța de la polul $-\omega_c$ la punctul curent $j\omega$ (fig. 10) atunci modulul (câștigul) funcției de transfer va fi: $|G(j\omega)|=\dfrac{\omega_c}{d}$, cu $|G(j0)|=1$. Distanța d crește monoton când ω se modifică în gama de la 0 la ∞, deci câștigul $|G(j\omega)|$ descrește monoton (curba cu eticheta $n=1$ din fig.10d).

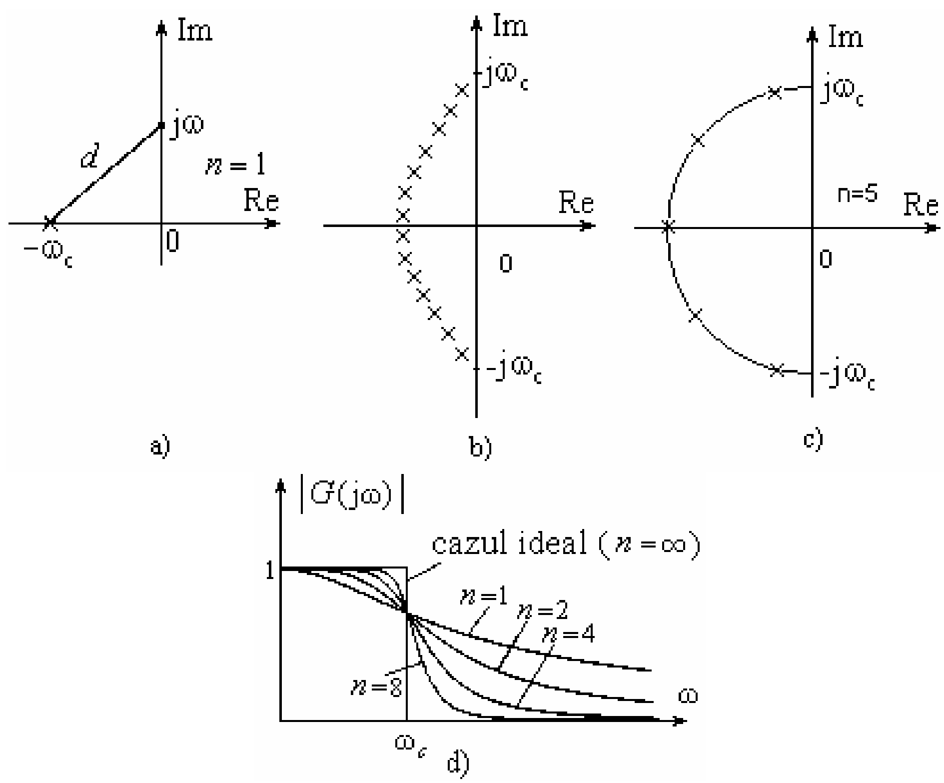

Fig. 4.

Rezultă în mod evident un filtru trece jos cu câștig ridicat în vecinătatea pulsației $\omega=0$.

Un filtru ideal trece jos trebuie să aibă un câștig constant egal cu 1 în gama pulsațiilor cuprinse între $\omega=0$ și $\omega=\omega_c$. Apoi câștigul trebuie să scadă brusc la zero pentru $\omega\geq\omega_c$. Pentru a obține aceste caracteristici ale filtrului trece-jos ideal este necesară o funcție de transfer cu mai mulți poli (teoretic cu o infinitate de poli). Așa cum am văzut, pentru a obține un câștig mare la o anumită frecvență, ω_0 trebuie să plasăm un pol opus în semiplanul complex stâng (SCS) care să aibă partea imaginară $j\omega_0$. Așadar pentru a obține un câștig mare pentru toate frecvențele din banda $(0\div\omega_c)$ este nevoie să amplasăm poli opuşi plasaţi în SCS în faţa axei imaginare ca în figură. Se observă că peretele continuu de poli conţine poli opuşi pentru toate frecvenţele din banda $0 \div \omega_c$, respectiv în banda 0 la $-\omega_c$ pentru polii conjugaţi.

Fără a argumenta vom afirma că pentru a obţine o caracteristică ideală de filtru trece-jos este nevoie de un perete semicircular cu un număr infinit de poli uniform distribuiţi pe acest perete. În practică se utilizează filtre cu un număr finit de poli, care realizează caracteristici modul-pulsaţie ce aproximează comportarea ideală în frecvenţă. În figura 10c se prezintă configuraţia polilor pentru un filtru de ordinul 5. Răspunsul în frecvenţă modul-pulsaţie pentru diverse valori ale lui *n* este prezentat în figura 10d. Această familie de filtre este cunoscută sub denumirea de filtre Butterworth. Există de asemenea şi alte familii de filtre (Cebâşev, eliptice). La filtrele Cebâşev peretele pe care se plasează polii are forma unei semielipse. Caracteristicile filtrelor Cebâşev sunt mai slabe în banda de trecere, dar mai bune în banda de tranziţie şi în banda de oprire.

Filtrele Trece Bandă

Caracteristica unui filtru ideal trece bandă este ca în figura 11b. În acest caz câştigul realizat de filtru este unitar într-o bandă centrată pe pulsaţia ω_0 şi egal cu zero în afara zonei considerate. Aşa cum s-a stabilit mai înainte această comportare în frecvenţă se poate obţine cu un perete de poli opuşi plasat în faţa axei imaginare în banda de valori a lui ω centrată pe valoarea lui ω_0. Există de asemenea un perete de poli conjugaţi opuşi în banda de trecere centrată pe pulsaţia $-\omega_0$ (vezi figura 11a).

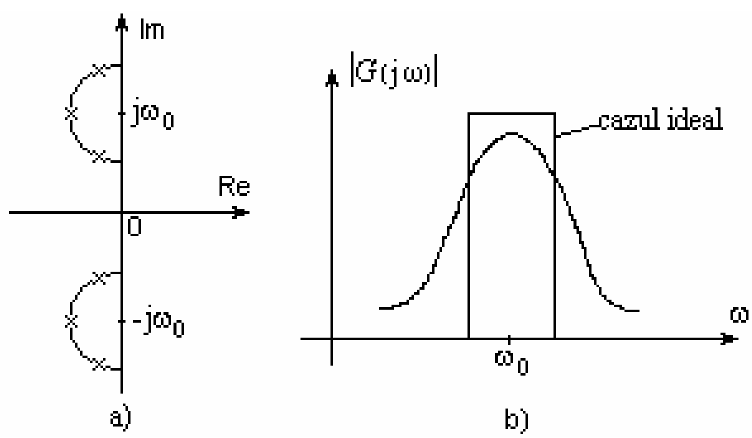

Fig. 5.

Utilizarea unui număr finit de poli va produce o caracteristică aproximativă de tip trece bandă.

Filtre Opreşte Bandă (Notch Filters)

Răspunsul în modul al unui filtru opreşte bandă (prezentat în fig. 12b) este complementar cu răspunsul în frecvenţă a filtrului ideal trece bandă. Câştigul filtrului notch este zero într-o bandă (...) în zona frecvenţelor exterioare benzii. Ca şi în celelalte cazuri, pentru implementarea acestui filtru ideal este necesar un număr infinit de poli.

Să considerăm un filtru trece bandă de ordinul doi care este realizabil din punct de vedere practic, cu frecvenţa centrală din banda de oprire ω_0.

Pentru implementarea acestui filtru trebuie să avem o pereche de zerouri plasate în punctele $\pm j\omega_0$. Cerinţa de a avea câştig unitar pentru $\omega \to \infty$ impune un număr egal de poli ($m = n = 2$). În acest fel vom fi siguri că la valori mari ale lui ω, distanţele de la poli la valoarea curentă ω sunt egale cu distanţele de la zerouri la ω. Câştigul unitar la $\omega = 0$ impune ca fiecare pol şi zeroul corespunzător să fie la aceeaşi distanţă de origine. Aceste cerinţe pot fi realizate dacă cei doi poli complecşi conjugaţi sunt plasaţi pe un semicerc de rază ω_0 (vezi figura). În principiu polii pot fi plasaţi oriunde pe acest semicerc. Să considerăm configuraţia polilor complecşi care face unghiul θ cu axa reală (θ se măsoară în sens orar).

Să ne reamintim acum că un pol şi un zero plasaţi foarte aproape unul de celălalt tind să-şi anuleze reciproc răspunsul în frecvenţă.

Aşadar, plasând cei doi poli complecşi conjugaţi foarte aproape de zerouri ($\theta \cong \frac{\pi}{2}$) rezultă o caracteristică modul-pulsaţie cu o variaţie rapidă a câştigului de la 0 la 1 când ne îndepărtăm foarte puţin de pulsaţia ω_0 în orice direcţie. În figura 12b se prezintă caracteristica modulului (câştigului) $|G(j\omega)|$ pentru trei valori diferite ale lui θ.

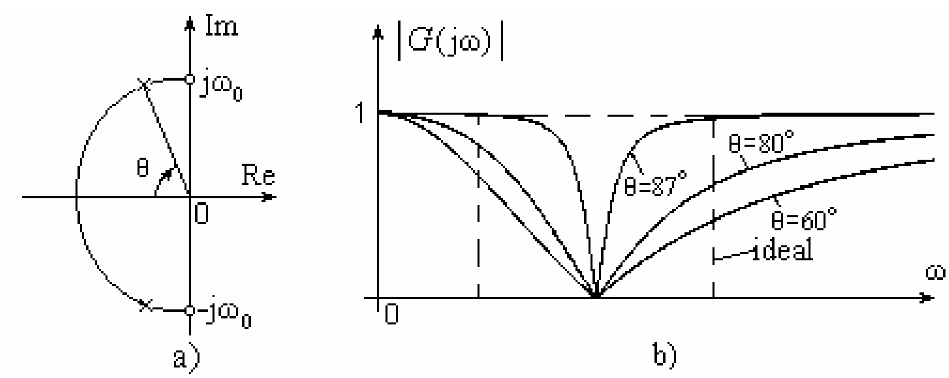

Fig. 6.

Exemplu

Să se proiecteze un filtru notch care rejectează frecvenţa reţelei (50 Hz) dintr-un semnal radio.

În acest caz $\omega_0 = 2\pi \cdot 50 = 100\pi$. Zerourile vor fi $z_{1,2} = \pm j\omega$ iar polii vor fi $\lambda_{1,2} = -\omega_0 e^{\pm j\theta} = -\omega_0 \cos\theta \pm j\omega_0 \sin\theta$.

Funcția de transfer a filtrului va fi aşadar $\dfrac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)}$.

$$G(s)=\frac{(s-\mathrm{j}\omega_0)(s+\mathrm{j}\omega_0)}{(s+\omega_0\cos\theta+\mathrm{j}\omega_0\sin\theta)(s+\omega_0\cos\theta-\mathrm{j}\omega_0\sin\theta)}$$

$$G(s)=\frac{s^2+\omega_0^2}{s^2+(2\omega_0\cos\theta)s+\omega_0^2}=\frac{s^2+\pi^2 10^4}{s^2+(200\pi\cos\theta)s+\pi^2 10^4}\,.$$

Răspunsul în frecvență al acestui filtru este prezentat în figura.

Problemă: Să se elaboreze un program în MATLAB pentru a obține răspunsul în frecvență al filtrului proiectat mai înainte.

Proprietatea de Complementaritate a Filtrelor

Din figurile prezentate mai înainte rezultă că răspunsul în frecvență al filtrului opreşte bandă este complementar cu cel al filtrelui trece bandă. Dacă $G_{BP}(s)$ şi $G_{BS}(s)$ sunt funcțiile de transfer ale filtrelor trece bandă (Band Pass) respectiv opreşte bandă (Band Stop) – ambele centrate pe aceeaşi frecvență ω_0, atunci

$$G_{BS}(s)=1-G_{BP}(s)\,.$$

Aşadar funcția de transfer a unui filtru opreşte bandă se poate obține din funcția de transfer corespunzătoare a filtrului trece bandă, şi invers prin simple transformări algebrice.

O situație similară avem în cazul filtrelor trece jos (Low Pass) şi respectiv trece sus (ambele cu aceeaşi frecvență de tăiere). Proprietatea de complementaritate va fi în acest caz conform relației

$$G_{LP}(s)=1-G_{HP}(s)\,.$$