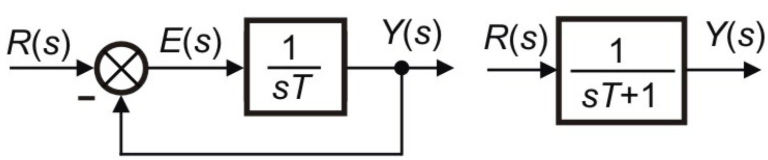
ANALIZA ŞI SIMULAREA ÎN TIMP A SISTEMELOR CONTINUE

Pentru a defini performanţele unui sistem închis este necesar să cunoaştem răspunsul în timp al sistemului la diferite mărimi de intrare standard. O mărime de intrare standard foarte comună este funcţia treaptă. Dacă răspunsul unui sistem la mărimea treaptă este cunoscut, este posibil a calcula matematic răspunsul sistemului la alte mărimi de intrare. O altă mărime de intrare de mare importanţă este mărimea sinusoidală. Dacă cunoaştem răspunsul unui sistem liniar invariant în timp la mărimi de intrare sinusoidale de frecvenţe de la 0 la ∞, atunci avem o descriere completă a funcţionării sistemului.

1.1. Răspunsul sistemului de ordinul întâi – T1

Schema bloc a sistemului de ordinul întâi şi funcţia de transfer echivalentă sunt prezentate în figura 1.1.



a) b)

Fig. 1.1.

Fizic, un astfel de sistem poate să fie, de exemplu, un circuit RC sau un sistem termic. Funcţia de transfer standard a unui element de ordinul întâi este conform relaţiei:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{sT+1} = \frac{1/T}{s+1/T} = \frac{\sigma}{s+\sigma}, \tag{1.1}$$

unde $\sigma = 1/T$. În continuare se va analiza răspunsul acestui sistem la intrarea treaptă. Condiţiile iniţiale se presupun nule.

Răspunsul la treaptă unitară se mai numeşte răspuns indicial. Având în vedere că transformata Laplace a unei trepte unitare este $R(s) = 1/s$, rezultă că transformata Laplace a mărimii de ieşire va fi în acest caz:

$$Y(s) = \frac{1}{(sT+1)}\frac{1}{s} = \frac{1/T}{s(s+1/T)}. \tag{1.2}$$

cu dezvoltarea în fracţii simple:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T} = Y_p(s) + Y_t(s). \tag{1.3}$$

Aplicând transformata Laplace inversă relaţiei (1.3) rezultă răspunsul la treaptă unitară al sistemului de ordinul unu, conform expresiei:

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} = y_p(t) + y_t(t),\ t \geq 0, \tag{1.4}$$

Răspunsul la rampă unitară al sistemului de ordinul unu se obţine conform expresiei:

$$y(t) = t - T + Te^{-t/T},\ t \geq 0, \tag{1.5}$$

cu forma de variaţie prezentată în figura 1.2.

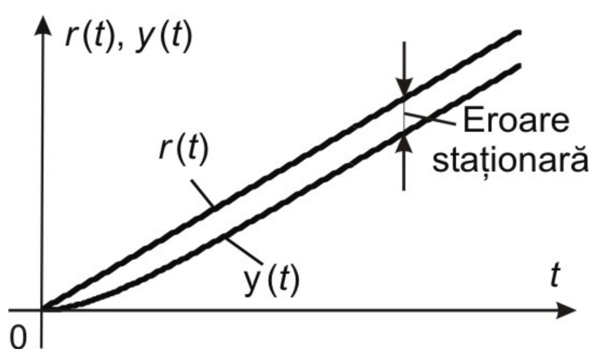


Fig. 1.2

Eroarea (abaterea) de reglare a sistemului de ordinul întâi pentru mărime de intrare rampă unitară este:

$$e(t) = r(t) - y(t) = t - (t - T + Te^{-t/T}) = T(1 - e^{-t/T}), \tag{1.6}$$

de unde se constată că eroarea staţionară obţinută când $t \to \infty$ are valoarea $e_{st} = e(\infty) = T$.

Răspunsul la impuls unitar al sistemului de ordinul unu descris de relaţia:

$$y(t) = g(t) = \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}},\ t \geq 0 . \qquad (1.7)$$

care are forma de variaţie prezentată în figura 1.3.

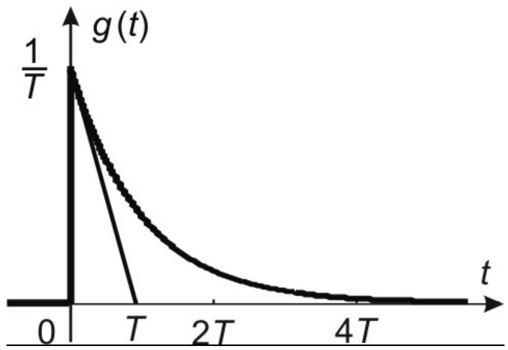
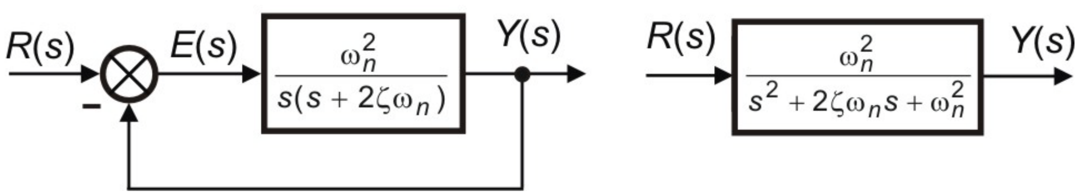


Fig. 1.3.

Tangenta la curba în momentul iniţial (t=0) intersectează axa abscisei la valoarea $t = T$.

1.2. Răspunsul sistemului de ordinul doi la intrarea treptă – T2

Elementul de ordinul doi se poate obţine considerând sistemul cu reacţie negativă unitară, cu schema bloc din figura 1.4 a. Calculând funcţia de transfer în circuit închis rezultă sistemul din figura 1.4 b.



a) b)

Fig. 1.4.

Funcţia de transfer standard a unui sistem de ordinul doi este :

$$G(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + {\omega_n}^2} \qquad (1.8)$$

unde ζ este factorul de amortizare iar ω_n este pulsaţia naturală. Frecvenţa naturală este frecvenţa de oscilaţie dacă amortizările lipsesc iar factorul de amortizare caracterizează natura răspunsului tranzitoriu al sistemului. **Răspunsul sistemului de ordinul doi la o mărime treaptă pentru un factor de amortizare** $0 < \zeta < 1$ **(răspunsul sistemului subamortizat)** în cazul condiţiilor iniaţiale zero este dat de :

$$y(t) = 1 \quad \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \ ) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t) \qquad (1.9)$$

unde $\quad = arctg \dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$.

În cazul particular când ζ = 0, avem $\omega_d = \omega_n$, şi din ecuaţia (1.9) se obţine răspunsul la treaptă al sistemului de ordinul doi descris de ecuaţia:

$$y(t) = 1 - \cos\omega_n t,\ t \geq 0 . \qquad (1.10)$$

Se observă că dacă $\zeta = 0$ răspunsul devine neamortizat cu oscilaţii întreţinute care continuă pentru $t \to \infty$.

Răspunsul la treaptă al sistemului de ordinul doi critic amortizat (ζ = 1) este:

$$y(t) = 1 - \omega_n t\, e^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t} = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t),\ t \geq 0 . \qquad (1.11)$$

Acest rezultat se poate obţine înlocuind ζ cu 1 în relaţia (1.9) şi folosind limitele:

$$\lim_{\zeta \to 1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t = \zeta\omega_n t \lim_{\zeta \to 1} \frac{\sin\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t} = \omega_n t ,$$

respectiv faptul că:

$$\lim_{\zeta \to 1} \cos\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\ t = \cos 0 = 1.$$

În cazul supraamortizat (ζ>1), cei doi poli ai sistemului sunt reali, negativi şi distincţi. **Răspunsul la treaptă al sistemului de ordinul doi supraamortizat (cu ζ > 1)** este:

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} [\frac{e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}],\ t \geq 0 . \qquad (1.12)$$

Se constată că în cazul supraamortizat răspunsul la treaptă conţine doi termeni cu variaţie exponenţială care se atenuează (micşorează) pe măsură ce creşte timpul. În cazul ζ>1 elementul de ordinul doi poate fi considerat ca fiind format din două elemente de ordinul unu conectate în serie.

În figura 1.5 se prezintă o familie de curbe răspuns la treaptă ale elementului de ordinul doi pentru diferite valori ale lui ζ, unde abscisa este variabila adimensională $\omega_n t$.

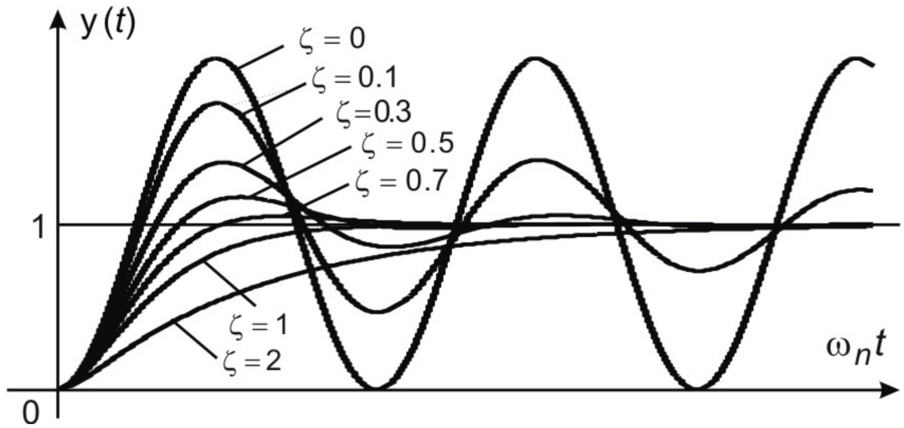


Fig. 1.5.

Răspunsul la impuls al sistemului de ordinul doi în cele trei cazuri este:

- 0<ζ<1 – cazul subamortizat:

$$y(t) = g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\; t,\; t \geq 0 . \qquad (1.13)$$

În cazul în care $\zeta = 0$, $y(t) = g(t) = \omega_n \sin \omega_n t$, $t \geq 0$.

- $\zeta = 1$:

$$y(t) = \omega_n^2 t\, e^{-\omega_n t}, t \geq 0 . \qquad (1.14)$$

- $\zeta > 1$:

$$y(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} [e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}], t \geq 0 . \qquad (1.15)$$

În figura 1.6 se prezintă familia de curbe răspuns la impuls pentru elementul de ordinul doi cu diferite valori ale lui ζ. Curbele sunt scalate în amplitudine şi timp, fiind desenate funcţiile $y(t)/\omega_n$ în raport cu variabila adimensională $\omega_n t$, astfel încât aceste funcţii nu vor depinde decât de ζ. Din figură se constată că pentru $\zeta \geq 1$, răspunsul la impuls este tot timpul pozitiv, $y(t) \geq 0$. În cazul subamortizat $y(t)$ oscilează în jurul valorii zero.

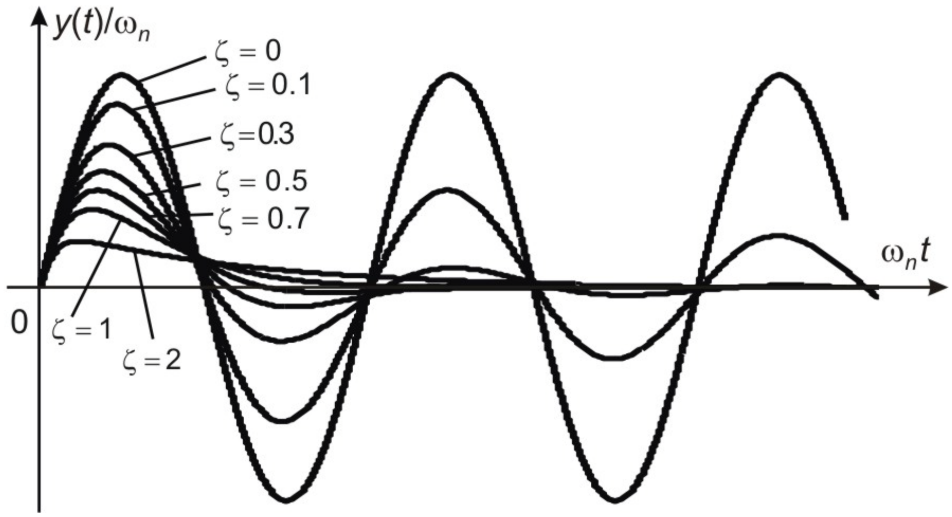


Fig. 1.6

1.2.1. Performanţele sistemului de ordinul doi

Criteriile de performanţă care se utilizează pentru caracterizarea regimului tranzitoriu la o intrare treaptă unitara sunt :

- supraregiajul (abaterea dinamică maximă)

$$M_v\% = \frac{y_m - y_{st}}{y_{st}} 100\% \tag{1.16}$$

unde y_m - este valoarea maximă a răspunsului y iar y_{st} - valoarea de regim staţionar a răspunsului. Valoarea maximă se obţine calculând timpul t_v (timpul de vârf) la care se atinge valoarea maximă, adică cel ce rezultă din ecuaţia :

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ adică } t_v = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1.17}$$

Deci valoarea maximă se obţine introducând (1.17) în (1.9):

$$y(t_v) = 1 + e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{1.18}$$

Se poate calcula suprareglajul introducând (1.18) şi $y_{st} = 1$ în relaţia (1.16) şi obţinem :

$$M_v = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = y(t_v) - 1$$
$$M_v\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}100 \qquad (1.19)$$

- timpul de stabilire (durata regimului tranzitoriu) este timpul necesar ca răspunsul sistemului să intre în zona $\pm 0{,}05\,y_{st}$ sau $\pm 0{,}2\,y_{st}$.

O relaţie acoperitoare de calcul a timpului tranzitoriu se obţine astfel:

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \text{ pentru bandă de 2\%}$$
$$t_s = \zeta\frac{3}{\xi\omega_n} \text{ pentru bandă de 5\%} \qquad (1.20)$$

- timpul de creştere t_c este timpul necesar evoluţiei răspunsului sistemului de la $(0{,}1 \div 0{,}9)\,y_{st}$. O funcţie ce există în unele variante de MATLAB `timespec(num,den)` determină performanţele $M_v\%, t_s, t_c, t_v$, unde num şi den reprezintă numărătorul şi numitorul funcţiei de transfer a sistemului închis.

1.3. Efectele introducerii unor poli şi zerouri suplimentare

Introducerea unui zero în funcţia de transfer a sistemului de ordinul doi, în cazul în care este depărtat de origine la fel cu polii dominanţi, face ca sistemul să aibă un suprareglaj mai mare şi o durată a regimului tranzitoriu mai mică (viteza de răspuns mai mare).

Introducerea unui pol suplimentar are influenţă directă asupra regimului tranzitoriu, prin componenta tranzitorie introdusă de acest pol, componentă care se stinge în timp cu cât polul este mai depărtat de origine în raport cu polii dominanţi. Deci dacă polul suplimentar este mult mai depărtat de origine în raport cu polii dominanţi, atunci sistemul poate fi aproximat cu un sistem de ordinul doi.

Funcţiile `C = impulse(num, den, t)`, sau `C = impulse(num, den)`, `C = step(num, den, t)` sau `C = step(num, den)` şi `C=lsim(num, den, u, t)`din MATLAB "Control Toolbok" pot fi utilizate pentru simularea regimului tranzitoriu al sistemului.

1.4. Stabilitatea sistemelor

Stabilitatea unui sistem reprezintă proprietatea acestuia de a reveni în regim staţionar atunci când a fost scos dintr-un asemenea regim de către o mărime de intrare sau o perturbaţie. Un sistem liniar invariant în timp este stabil dacă orice mărime de intrare mărginită determină o mărime de ieşire mărginită. Criteriu general de stabilitate stabileşte că un sistem este stabil dacă toti polii sistemului închis se găsesc în semiplanul stâng al planului complex s. Deci o condiţie necesară şi suficientă pentru ca un sistem să fie stabil este ca toţi polii funcţiei de transfer ai sistemului să aibă partea reală negativă.

Stabilitatea unui sistem liniar invariant în timp poate fi stabilită utilizând din Control System Toolbox funcţia **impulse** pentru a obţine răspunsul la impuls al sistemului. Sistemul este stabil dacă răspunsul la impuls al sistemului tinde la zero când timpul tinde la infinit. Un mod de a determina stabilitatea sistemului este prin simulare. Funcţia **lsim** din MATLAB poate fi utilizată pentru a observa ieşirea pentru intrări tipice. Pentru sisteme neliniare aceasta se aplică în cazuri particulare.

Altă alternativă este funcţia MATLAB **roots** ce poate fi utilizată pentru obţinerea rădăcinilor ecuaţiei caracteristice. În teoria controlului clasic există tehnici sigure pentru analiza stabilităţii sistemului.

Una din aceste tehnici este criteriul Routh-Hurwitz (în MATLAB pentru aplicarea criteriului Routh-Hurwitz se va folosi funcţia **routh**). În această lucrare problema stabilităţii absolute este demonstrată utilizând un program simplu bazat pe criteriul Routh-Hurwitz. Alte tehnici frecvente pentru studierea stabilităţii sunt diagramele Bode, locul rădăcinilor şi criteriul de stabilitate Liapunov.

1.4.1. Criteriul de stabilitate Routh

Criteriul Routh-Hurwitz stabileşte o metodă pentru determinarea stabilităţii ce poate fi aplicată la o ecuaţie caracteristică de ordinul n de forma:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \qquad (1.21)$$

Criteriul este aplicat folosind tabela Routh definită astfel:

$$\begin{array}{l|l} s^n & a_0 \quad a_2 \quad a_4 \cdots \\ s^{n-1} & a_1 \quad a_3 \quad a_5 \cdots \\ s^{n-2} & b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \cdots \\ s^{n-3} & c_1 \quad c_2 \quad c_3 \cdots \\ \vdots & \vdots \end{array} \qquad (1.22)$$

$a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ sunt coeficienţii ecuaţiei caracteristice iar ceilalţi coeficienţi se determină astfel :

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{-a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1},$$
$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{-a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1},....$$
$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1} = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1},$$
$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1} = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1},.... \tag{1.23}$$

Calculele în fiecare linie sunt continuate numai până când avem elemente zero. Condiţia necesară şi suficientă este ca toate rădăcinile ecuaţiei (1.21) să se găsească în semiplanul stâng al planului complex s şi elementele din prima coloană a tabelei Routh să aibă acelaşi semn. Dacă avem schimbări de semn ale elementolor din prima coloană, numărul de schimbări de semn indică numărul de rădăcini cu parte reală pozitivă. În Matlab funcţia care determină stabilitatea unui sistem este **routh**.

1.4.2. Cazuri speciale

Cazul I. Dacă primul element dintr-o linie este zero, el se înlocuieşte cu un număr pozitiv foarte mic e şi se aplică criteriul ca şi înainte.

Cazul II. Dacă toate elementele dintr-o linie sunt zero, sistemul are poli pe axa imaginară, perechea de rădăcini complex conjugate fiind simetrică faţă de originea planului s, sau dacă valorile sunt reale avem semne opuse. În acest caz se formează o ecuaţie auxiliaă de la linia respectivă. Toate zerourile din linie sunt înlocuite cu coeficienţii estimaţi prin diferenţierea ecuaţiei auxiliare.

1.5. Eroarea staţionară şi tipul sistemului

În regim staţionar sistemul trebuie să îndeplinească performanţa eroare staţionară e_{st}. Pentru mărimea de intare treaptă, eroarea staţionară trebuie să fie zero (în cazul în care tipul sitemului este 1 sau 2; tipul sistemului este dat de numărul de poli din origine pe care-i are sistemul) iar pentru mărimea de intrare rampă eroarea staţionară trebuie să fie mai mică decât o valoare impusă.

Considerăm sistemul:

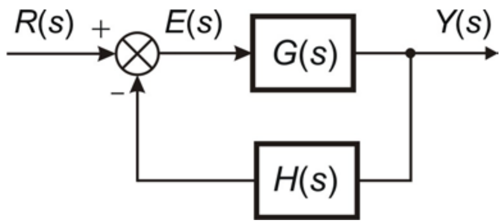


Fig.1.7. Sistem cu reacţie

Funcţia de transfer este:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{1.24}$$

Transformata Laplace a erorii este:

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}R(s) \tag{1.25}$$

unde $G(s)H(s) = \dfrac{Q(s)}{s^{\alpha}P(s)}$, unde α este ordinul (tipul) sistemului.

Utilizând teorema valorii finale a transformatei Laplace avem:

$$e_{st} = \lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)} \tag{1.26}$$

Dacă intrarea este treaptă unitară:

$$e_{st}^{1} = \frac{sR(s)}{1+\lim\limits_{s\to 0}[G(s)H(s)]} = \frac{1}{1+k_p} \tag{1.27}$$

Dacă intrarea este rampă unitară:

$$e_{st}^{t} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}[sG(s)H(s)]} = \frac{1}{k_v} \tag{1.28}$$

Dacă intrarea este parabolică:

$$e_{st}^{t^2} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}[s^2G(s)H(s)]} = \frac{1}{k_a} \tag{1.29}$$

Avem următorul tabel:

Tipul sistemului	Intrarea $R(s)$		
	$1/s$	$1/s^2$	$1/s^3$
0	$1/(1+k_p)$	∞	∞
1	0	$1/k_v$	∞
2	0	0	$1/k_a$

Funcţiile care calculează eroarea staţionară la intrarea treaptă unitară, rampă unitară şi parabolă unitară sunt :

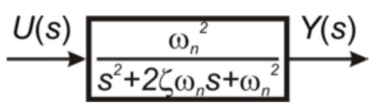
`errorzp(z,p,k)` şi `errortf(num,den)`.

Funcţia `errorzp(z,p,k)` calculează eroarea staţionară când sistemul este reprezentat prin poli, zerouri, factor de amplificare, `z` este un vector care conţine zerourile funcţiei de transfer, `p` este un vector care conţine polii funcţiei de transfer şi `k` este factorul de amplificare. Dacă gradul numărătorului este mai mic decât gradul numitorului, atunci există `n-m` zerouri la infinit şi vectorul `z` trebuie să conţină `(n-m)inf`. Funcţia `errortf(num,den)` calculează eroarea staţionară când sistemul este reprezentat ca un raport de două polinoame.

1.6. Exerciţii propuse

Exerciţiul 1.

Fie sistemul din figură:



care are următorii parametrii $t=[0:2]$ cu pasul 0.02, $\omega_n=5$, $\zeta=0.6$.
Reprezentaţi răspunsul la intrarea treaptă a sistemului de ordinul 2 şi determinaţi valoarea suprareglajului.

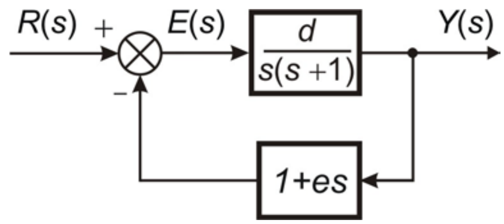
Exerciţiul 2.

Reprezentaţi răspunsul la intrarea treaptă pentru sistemul din figură (t are aceleaşi valori ca la exerciţiul anterior) şi determinaţi valoarea suprareglajului:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{25(1+0.4s)}{(1+0.16s)(s^2+6s+25)}$$

Exerciţiul 3.

Se dă următorul sistem:



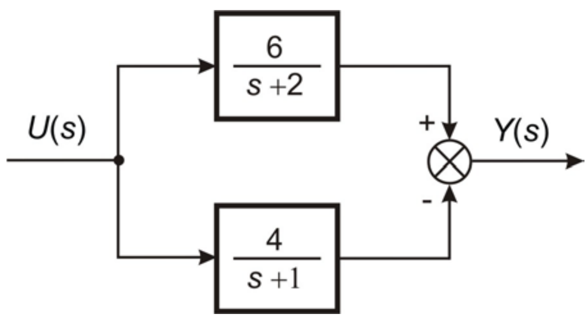
Reprezentaţi răspunsul la intrarea treaptă pentru sistemul de mai sus. Determinaţi valorile lui d şi e astfel ca $M_v = 40\%$ şi $t_v = 0.8$ sec. Pentru răspunsul treaptă ($t = [0:4]$,cu pasul 0.02) şi valoarea regimului tranzitoriu.

Exerciţiul 4.

Reprezentaţi suprareglajul sistemului de ordinul doi, ştiind că $\zeta = [0.001:1]$ cu pasul 0.001.

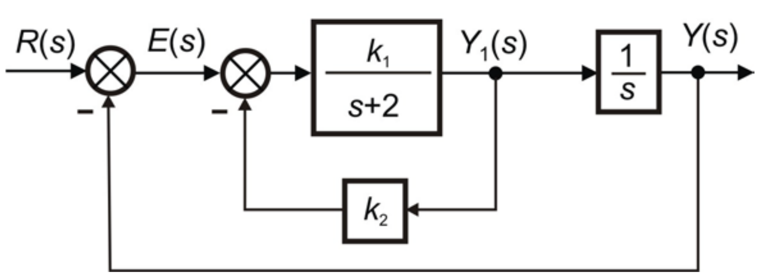
Exerciţiul 5.

Reprezentaţi răspunsul la intrarea treaptă pentru sistemul din figură ($t = [0:2]$, cu pasul 0.1):



Exerciţiul 6.

Reprezentaţi răspunsul sistemul din figură la intrarea treaptă unitară, impuls unitar şi rampă unitară, ştiind că $\zeta = 0.7$ şi $\omega_n = 4\, rad/s$ ($t = [0:2]$, cu pasul 0.1):



Exerciţiul 7.

Aplicaţi criteriul Routh pentru a stabili stabilitatea sistemului pentru uramătoarele ecuaţii caracteristice:

$s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 22s + 24 = 0$
$s^4 - 4s^2 + 20s + 24 = 0$
$s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24 = 0$

Exerciţiul 8.

Determinaţi eroarea staţionară la intrarea treaptă, rampă şi parabolă pentru următoarele sisteme:

$$G(s) = \frac{10(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+5)}$$
$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 14s + 50}$$