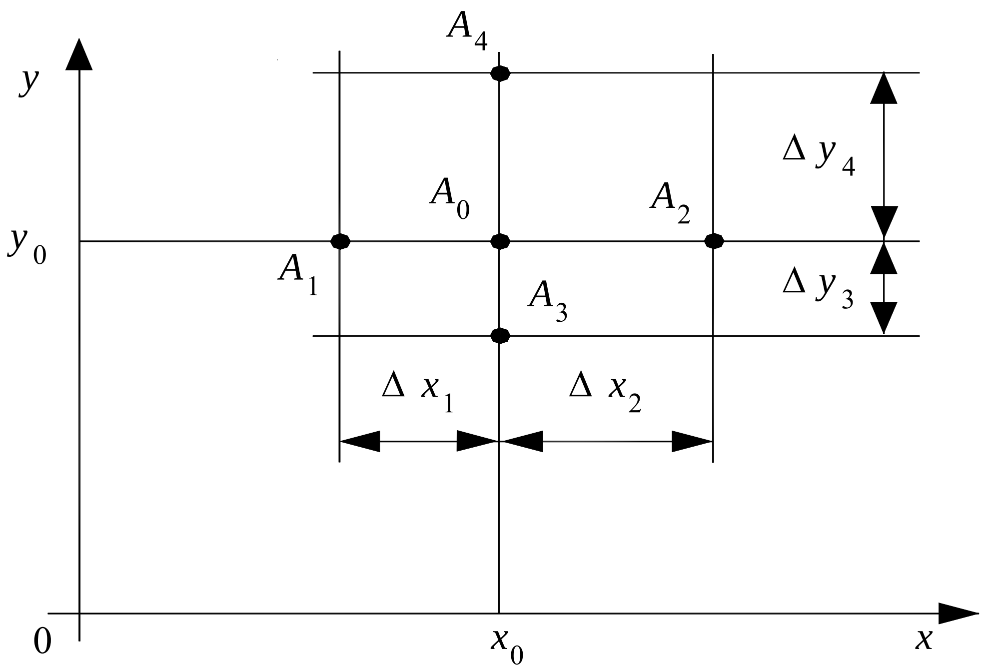
Reţele cu pas variabil

Utilizarea reţelelor cu pas variabil este justificată deoarece:

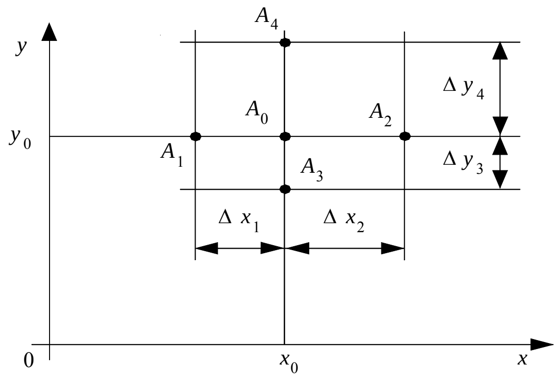
- Permite o urmărire mai precisă a frontierei domeniului.
- Permite o determinare mai precisă a soluţiei fără a mări numărul de noduri a reţelei. Astfel pentru zonele de variaţie lentă a potenţialului se poate adopta o reţea cu un pas relativ mare iar în zonele de variaţie rapidă a potenţialului se va micşora pasul reţelei.

a)Determinarea ecuaţiei corespunzătoare unui nod interior domeniului

Se va considera cazul din figura, unde puntele A_1, A_2, A_3, A_4 se află la distanţe inegale de punctul A_0.



Prin particularizarea relaţiei de dezvoltare în serie Taylor succesiv pentru nodurile A_1, A_2, A_3, A_4 , cu neglijarea derivatelor de ordinul trei, se obţine:



$$V_1 = V(x_0, y_0) - \Delta x_1 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta x_1)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$V_2 = V(x_0, y_0) + \Delta x_2 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta x_2)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$V_3 = V(x_0, y_0) - \Delta y_3 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta y_3)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$V_4 = V(x_0, y_0) + \Delta y_4 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta y_4)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Spre deosebire de cazul reţelei cu pas constant prin adunarea ecuaţiilor nu se mai obţine direct o ecuaţie de forma:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4 \cdot V_0 = -\frac{\rho_v(x_0, y_0)}{\varepsilon} \cdot h^2$$

În acest scop este necesară amplificarea ecuaţiilor respectiv cu constantele:

$$V_1 = V(x_0, y_0) - \Delta x_1 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} + \frac{(\Delta x_1)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0, y_0)} \qquad C_1 = \frac{2}{\Delta x_1 \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2)}$$

$$V_2 = V(x_0, y_0) + \Delta x_2 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} + \frac{(\Delta x_2)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0, y_0)} \qquad C_2 = \frac{2}{\Delta x_2 \cdot (\Delta x_1 + \Delta x_2)}$$

$$V_3 = V(x_0, y_0) - \Delta y_3 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} + \frac{(\Delta y_3)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0, y_0)} \qquad C_3 = \frac{2}{\Delta y_3 \cdot (\Delta y_3 + \Delta y_4)}$$

$$V_4 = V(x_0, y_0) + \Delta y_4 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} + \frac{(\Delta y_4)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0, y_0)} \qquad C_4 = \frac{2}{\Delta y_4 \cdot (\Delta y_3 + \Delta y_4)}$$

După însumarea, termen cu termen a celor patru ecuaţii, amplificate respectiv cu constantele $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ se obţine egalitatea:

$$C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 + C_3 \cdot V_3 + C_4 \cdot V_4 = \left(C_1 + C_2 + C_3 + C_4\right) \cdot V_0 + \left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0, y_0)} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0, y_0)} \right)$$

Deoarece pe domeniul *D* este satisfăcută relaţia: $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\dfrac{\rho_v(x, y)}{\varepsilon}$

rezultă în final:

$$\boxed{C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 + C_3 \cdot V_3 + C_4 \cdot V_4 - C_0 \cdot V_0 = -\frac{\rho_v(x_0, y_0)}{\varepsilon}}$$

în care

$$C_0 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = \frac{2}{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2} + \frac{2}{\Delta y_3 \cdot \Delta y_4}$$

Dacă $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta y_3 = \Delta y_4 = h$

atunci $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \frac{1}{h^2}$ şi $C_0 = \frac{4}{h^2}$

înlocuind aceste valori în ecuaţia:

$$C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 + C_3 \cdot V_3 + C_4 \cdot V_4 - C_0 \cdot V_0 = -\frac{\rho_v(x_0, y_0)}{\varepsilon}$$

se obţine ecuaţia

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4 \cdot V_0 = -\frac{\rho_v(x_0, y_0)}{\varepsilon} \cdot h^2$$

de la reţeaua cu pas constant.

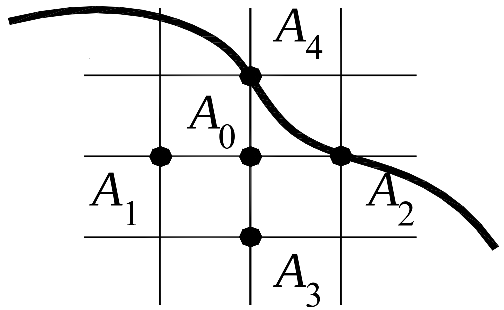
Ca urmare relaţiile obţinute pentru reţeaua cu pas constant reprezintă <u>un caz particular</u> al relaţiilor obţinute la reţelele cu pas variabil.

b) **Determinarea ecuaţiei corespunzătoare unui nod în apropierea frontierei domeniului**

Pentru această categorie de noduri ecuaţia se determină în funcţie de tipul condiţiilor de frontieră, după cum urmează:

➢<u>Condiţii de frontieră de specia întâi</u>

Utilizarea unei reţele cu pas variabil permite evitarea situaţiei în care frontiera intersectează reţeaua. Ca urmare în toate situaţiile se va obţine un caz similar celui din figură:



Ca urmare pentru nodul A_0 se va utiliza o ecuaţie de forma:

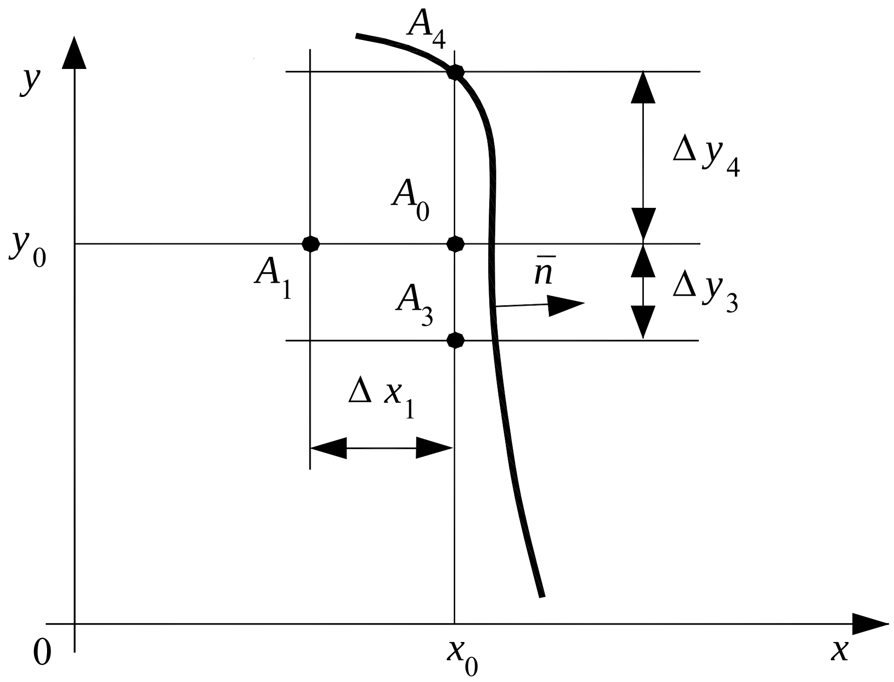
$$C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 + C_3 \cdot V_3 + C_4 \cdot V_4 - C_0 \cdot V_0 = -\frac{\rho_v(x_0, y_0)}{\varepsilon}$$

în care se înlocuiesc valorile cunoscute ale potenţialelor punctelor aflate pe frontieră.
Aceste valori vor fi trecute în membrul drept al ecuaţiei.

➢Condiţii de frontieră de specia a doua.

Pot interveni următoarele situaţii.

- Nodul de tip A_0 **nu este un colţ al frontierei**:



Ecuaţia corespunzătoare punctului A_0 se va obţine prin adunarea celor patru ecuaţii deduse anterior amplificate respectiv cu constante având valori corectate:

$$V_1 = V(x_0, y_0) - \Delta x_1 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta x_1)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad C_1 = \frac{2}{(\Delta x_1)^2}$$

$$V_2 = V(x_0, y_0) + \Delta x_2 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta x_2)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad C_2 = 0$$

$$V_3 = V(x_0, y_0) - \Delta y_3 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta y_3)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad C_3 = \frac{2}{\Delta y_3 \cdot (\Delta y_3 + \Delta y_4)}$$

$$V_4 = V(x_0, y_0) + \Delta y_4 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta y_4)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad C_4 = \frac{2}{\Delta y_4 \cdot (\Delta y_3 + \Delta y_4)}$$

După însumare se obţine egalitatea:

$$C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 + C_3 \cdot V_3 + C_4 \cdot V_4 = C_0 \cdot V_0 - \frac{2}{\Delta x_1} \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + \left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} \right)$$

$$C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 + C_3 \cdot V_3 + C_4 \cdot V_4 = C_0 \cdot V_0 - \frac{2}{\Delta x_1} \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} + \left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0, y_0)} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0, y_0)} \right)$$

în care:

$$C_0 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = \frac{2}{(\Delta x_1)^2} + \frac{2}{\Delta y_3 \cdot \Delta y_4}$$

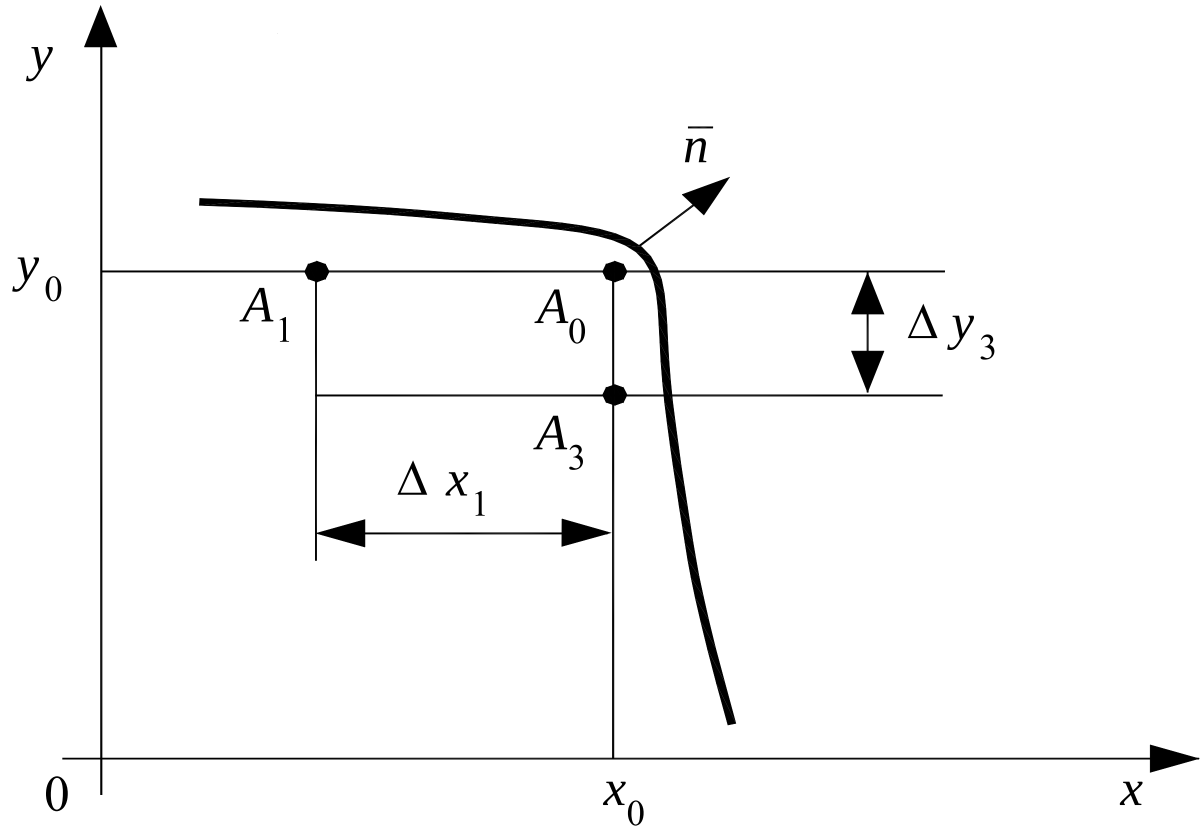
Se aproximează: $\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} \cong \left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{(x_0, y_0)}$

Deoarece pe domeniul *D* este satisfăcută relaţia $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho_v(x, y)}{\varepsilon}$

rezultă în final ecuaţia:

$$\boxed{C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 + C_3 \cdot V_3 + C_4 \cdot V_4 - C_0 \cdot V_0 = -\frac{2}{\Delta x_1} \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{(x_0, y_0)} - \frac{\rho_v(x_0, y_0)}{\varepsilon}}$$

ii.Nodul de tip A_0 **este într-un colţ al frontierei**:



Ecuaţia corespunzătoare punctului A_0 se va obţine prin adunarea celor patru ecuaţii deduse anterior amplificate respectiv cu constante având valori corectate:

$$V_1 = V(x_0, y_0) - \Delta x_1 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta x_1)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad C_1 = \frac{2}{(\Delta x_1)^2}$$

$$V_2 = V(x_0, y_0) + \Delta x_2 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta x_2)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad C_2 = 0$$

$$V_3 = V(x_0, y_0) - \Delta y_3 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta y_3)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad C_3 = \frac{2}{(\Delta y_3)^2}$$

$$V_4 = V(x_0, y_0) + \Delta y_4 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta y_4)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad C_4 = 0$$

Prin însumare se obţine egalitatea:

$$C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 + C_3 \cdot V_3 + C_4 \cdot V_4 = C_0 \cdot V_0 - \frac{2}{\Delta x_1} \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} - \frac{2}{\Delta y_3} \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} +$$

$$+ \left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} \right)$$

$$C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 + C_3 \cdot V_3 + C_4 \cdot V_4 = C_0 \cdot V_0 - \frac{2}{\Delta x_1} \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} - \frac{2}{\Delta y_3} \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} +$$

$$+ \left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} \right)$$

în care

$$C_0 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = \frac{2}{(\Delta x_1)^2} + \frac{2}{(\Delta y_3)^2}$$

Se aproximează:

$$\frac{2}{\Delta x_1} \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{2}{\Delta y_3} \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cong \left(\frac{2}{\Delta x_1} + \frac{2}{\Delta y_3} \right) \left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Deoarece pe domeniul *D* este satisfăcută relaţia $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho_v(x,y)}{\varepsilon}$

rezultă în final ecuaţia:

$$\boxed{C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 + C_3 \cdot V_3 + C_4 \cdot V_4 - C_0 \cdot V_0 = -\left(\frac{2}{\Delta x_1} + \frac{2}{\Delta y_3} \right) \left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{(x_0,y_0)} - \frac{\rho_v(x_0,y_0)}{\varepsilon}}$$

În funcţie de poziţia punctului A_0 se poate scrie o ecuaţie având una dintre formele:

$$C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 + C_3 \cdot V_3 + C_4 \cdot V_4 - C_0 \cdot V_0 = -\frac{\rho_v(x_0, y_0)}{\varepsilon}$$

sau

$$C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 + C_3 \cdot V_3 + C_4 \cdot V_4 - C_0 \cdot V_0 = -\frac{2}{\Delta x_1} \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{(x_0, y_0)} - \frac{\rho_v(x_0, y_0)}{\varepsilon}$$

sau

$$C_1 \cdot V_1 + C_2 \cdot V_2 + C_3 \cdot V_3 + C_4 \cdot V_4 - C_0 \cdot V_0 = -\left(\frac{2}{\Delta x_1} + \frac{2}{\Delta y_3}\right) \left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{(x_0, y_0)} - \frac{\rho_v(x_0, y_0)}{\varepsilon}$$

Rezultă în final un sistem de ***n*** ecuaţii cu ***n*** necunoscute, ***n*** fiind numărul de noduri determinat de reţea.

Sistemul rezultat are proprietatea de a avea matricea de coeficienţi diagonal dominantă şi ca urmare fi rezolvat atât prin metode directe cât şi prin metode iterative.

Rezolvarea sistemului conduce la determinarea valorilor potenţialului în nodurile reţelei ceea ce echivalează cu rezolvarea ecuaţiei pe domeniul specificat.

Cunoaşterea valorilor potenţialului în nodurile reţelei permite determinarea componentelor intensităţii câmpului electric în nodurile reţelei, după cum urmează:

Pentru oricare din nodurile reţelei este satisfăcută relaţia:

$$\boxed{E\Big|_{(x_0,y_0)} = -\mathrm{grad}\,V\Big|_{(x_0,y_0)} = -\bar{i}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)} - \bar{j}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)}}$$

Componenta $\dfrac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)}$ se determină prin însumarea ecuaţiilor:

$$V_1 = V(x_0, y_0) - \Delta x_1\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta x_1)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bigg|_{(x_0,y_0)}$$

$$V_2 = V(x_0, y_0) + \Delta x_2\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta x_2)^2}{2!}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bigg|_{(x_0,y_0)}$$

amplificate cu constantele:

$$K_1 = -\frac{2}{(\Delta x_1)^2}$$

$$K_2 = +\frac{2}{(\Delta x_2)^2}$$

Se obţine egalitatea:

$$K_1 \cdot V_1 + K_2 \cdot V_2 = \left(K_1 + K_2\right) \cdot V\left(x_0, y_0\right) + \left(\frac{2}{\Delta x_1} + \frac{2}{\Delta x_2}\right) \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\left(x_0, y_0\right)}$$

din care rezultă

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\left(x_0, y_0\right)} = \frac{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2}{2 \cdot \left(\Delta x_1 + \Delta x_2\right)} \cdot \left[K_1 \cdot V_1 + K_2 \cdot V_2 - \left(K_1 + K_2\right) \cdot V\left(x_0, y_0\right)\right]$$

Componenta $\left.\dfrac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$

se determină prin însumarea ecuaţiilor:

amplificate cu constantele:

$$V_3 = V(x_0, y_0) - \Delta y_3 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta y_3)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad K_3 = -\frac{2}{(\Delta y_3)^2}$$

$$V_4 = V(x_0, y_0) + \Delta y_4 \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta y_4)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad K_4 = +\frac{2}{(\Delta y_4)^2}$$

Se obţine egalitatea:

$$K_3 \cdot V_3 + K_4 \cdot V_4 = (K_3 + K_4) \cdot V(x_0, y_0) + \left(\frac{2}{\Delta y_3} + \frac{2}{\Delta y_4}\right) \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

din care rezultă

$$\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{\Delta y_3 \cdot \Delta y_4}{2 \cdot (\Delta y_3 + \Delta y_4)} \cdot \left[K_3 \cdot V_3 + K_4 \cdot V_4 - (K_3 + K_4) \cdot V(x_0, y_0)\right]$$