Cinematica Manipulatoarelor

- Descrierea elementelor;
- Formalismul Denavit-Hattenberg (DH);
- Cinematica directă.

1. Descrierea elementelor

Un lanț cinematic este format prin inserierea a *n* elemente (solide rigide). Înserierea se realizeaza prin cuplarea elementelor cu ajutorul cuplelor de rotatie sau de translatie. Pentru a descrie postura efectorului in reperul din baza (fix) sunt necesari *n* parametrii independenți, parametrii care pot fi variați (sunt variabile). Pe de alta parte transformarile omogene care descriu posturile elementelor conțin si elemente constante. Aceștia sunt de terminați de forma elementelor prin dimensiunile acestora ceea ce inseamna ca nu se modifică în timp.

Prin descrierea elementelor (definirea posturii acestora) înțelegem asocierea unui număr de parametrii și de variabile fiecărui element. Acest proces depinde de alegerea sistemului de coordonate propriu fiecarui element. Alegerea nu este unica, sistemul de coordonate poate avea origini (centrul de masa, centru articulatiei etc.) si orientări diferite. Pentru a obține un rezultat cât mai bun descrierea elementelor trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

- Ține cont de postura elementelor;
- Este unitară pentru toate elementele;
- Numărul de parametrii este minim.

Formalismul Denavit Hartenberg propune utilizarea următorilor parametrii:

a) Lungimea elementului, a_i

În caz general cele doua cuple de la capetele fiecarui element au axe oarecare. Cele doua axe (stâmbe) permit definirea unei normale comune. Lungimea elementului este definită ca fiind egală cu lungimea normalei comune (v.fig.1).

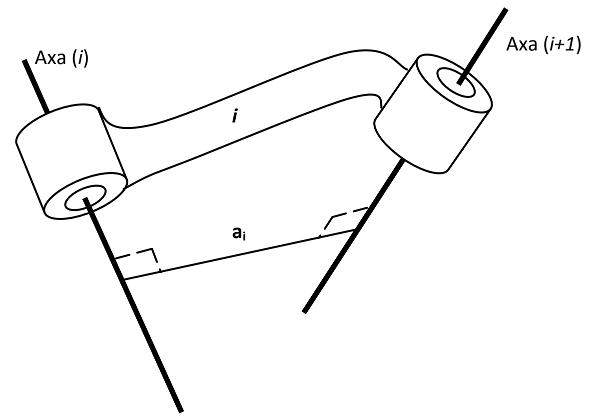


Fig. 1 Lungimea elementului (i) : parametrul a_i

În cazul general (axa i; axa $i+1$ – oarecare, strâmbe) a_i este bine definită. Există însa două cazuri particulare în care precizarea ei pare a fi mai dificilă (v.fig.2). În primul caz cele două axe sunt concurente iar atunci când lungimea elementului este considerată nulă. În al doilea caz axele sunt paralele iar atunci aleferea punctelor de intersecție dintre normală și axe este lăsată la latitudinea celui care face modelarea.

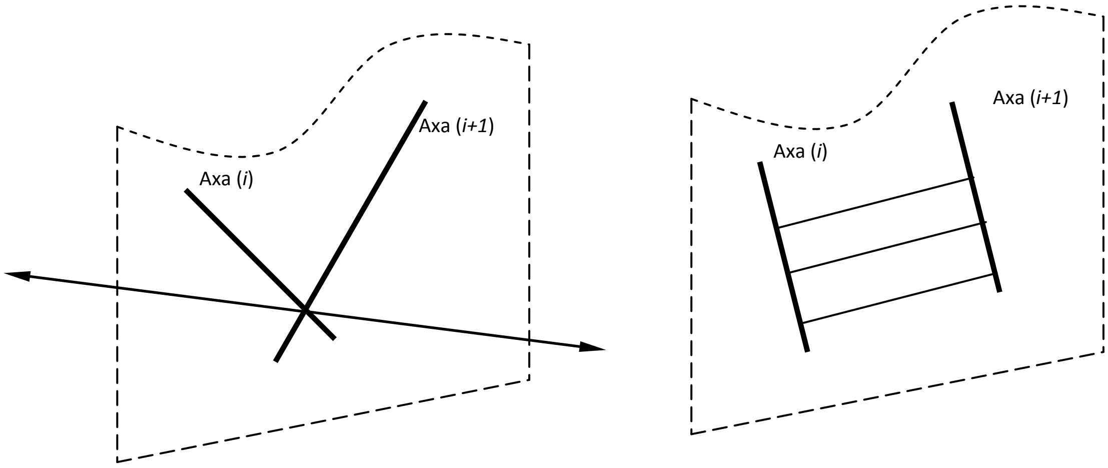


Fig. 2 Cazul in care axele i, i+1 sunt concurente sau paralele

b) Unghiul de răsucire al elementului , α_i

Utilizănd axele articulațiilor consecutive proiecția axei (i+1) pe planul care conține axa (i) si este perpendicular pe normala comună permite determinarea unghiului de răsucire α_i. Sensul de măsurare al unghiului este dat de sensul pozitiv al normalei comune (alegerea sensul normalei comune este la latitudinea celui care face modelare). De multe ori se recomandă ca (v.fig. 3) sensul de rotație să fie dat de succesiunea *i, i+1* (suprapunerea axei i peste axa i+1).

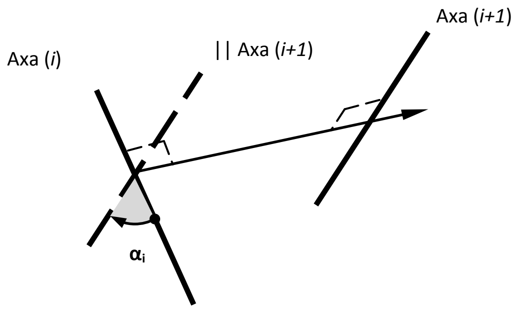


Figura. 3 Calculul unghiului de rasucire α_i. Sensul lui α_i se măsoară cu ajutorul sensului lui a_i: rotația axei A_i pe axa A_{i+1} în jurul axei a_i cu ajutorul regulii mâinii drepte. Atunci insa cand axele sunt concurente sensul axei a_i poate fi ales de catre cel care face modelarea

c) Offsetul elementului , d_i

Determinarea *offsetului* (compensarea) pentru axa *i* necesită cele două puncte care definesc normala comună relativ la axele *i-1*, respectiv *i+1.* Compensare se definește ca fiind lungimea segmentului definit de cele doua puncte menționate (v.fig.4)

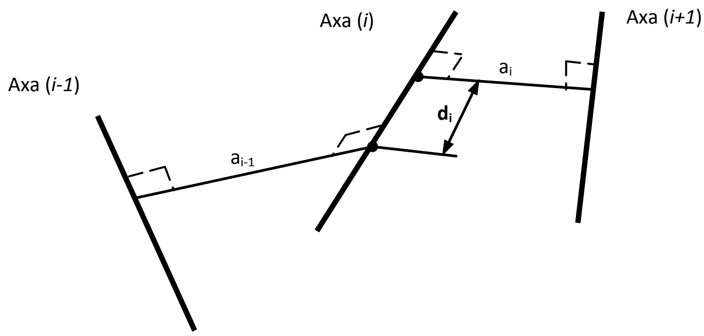


Fig. 4 Calculul parametrului d_i

Atunci când axa *i* este de translație d_i este o variabila. Acest lucru inceamnă ca valoarea lui se modifică în timpul mișcării lanțului cinematic. Când însă axa este de rotație compensarea este constantă.

d) Unghiul articulației, θ_i

Măsura unghiului θ_i se definește ca fiind unghiul dintre cele două normale consecutive la axa *i*. Pentru aceasta se proiectează normala comună axelor *i,i+1* pe planul care conține normala la axele *i-1, i* și care este perpendicular la axa *i*. Sensul unghiului este dat de suprapunera normalei a_{i-1}, peste normala a_i (v. fig. 5).

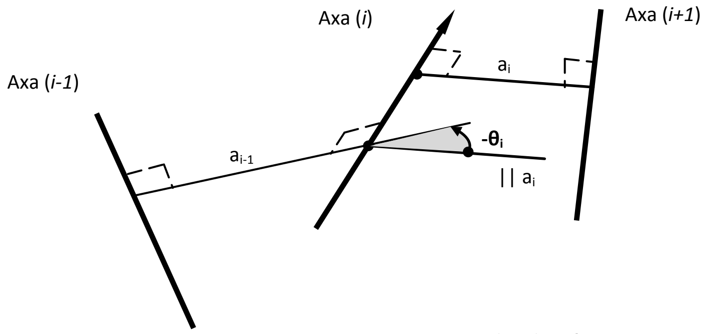


Fig. 5 Masurarea unghiului θ_i

Atunci când axa *i* este de rotație θ_i este o variabila. Acest lucru inceamnă ca valoarea lui se modifică în timpul mișcării lanțului cinematic. Când însă axa este de translație θ_i este un parametru.

Definirea celor 4 parametrii (3 constanți și o variabilă) permite deinirea posturii elementului *i* relativ la elementul *i-1*. Transformările omogene sunt construite cu ajutorul acestor parametrii. Pentru a simplifica calculele se dorește obținerea unor matrice de transformare cu cât mai multe elemente nule. Acesta este motivul pentru care se propun următoarele două convenții

C_1. Modificarea axei *(0)* și a axei *(n)* astfel încăt $a_O = a_n = 0; \quad \alpha_O = \alpha_n = 0$

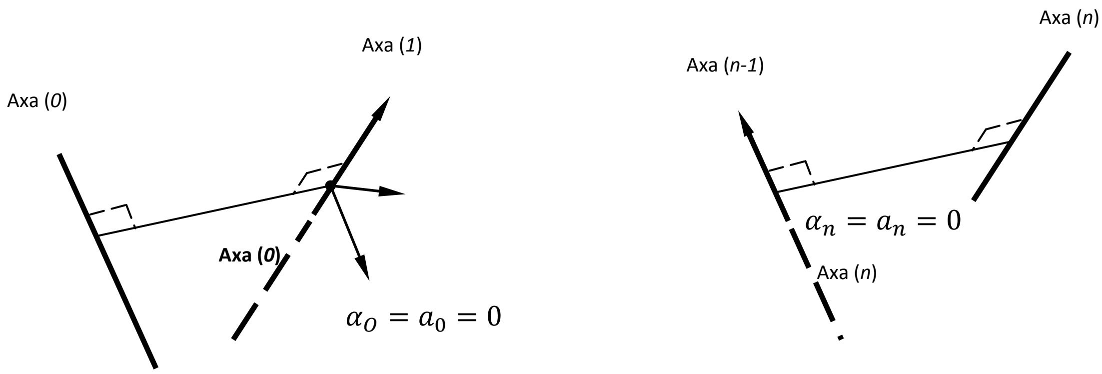


Fig. 6 Conventia C_1 referitoare la axele *(1) și (n)*;

C_2. la anularea parametrilor d_i respectiv θ_i pentru cuplele 0 și n.

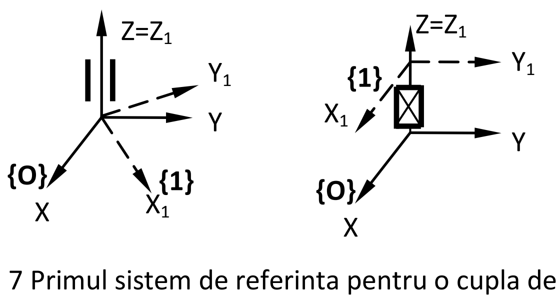


Fig. 7 Primul sistem de referinta pentru o cupla de rotatie respectiv de translatie

2. Formalismul Denavit Hartenberg (DH)

Formalismul DH se referă la construirea transformărilor omogene ${}_{A}^{B}T$ pentru elementele unui robot oarecare. Aceste elemente sunt definte cu ajutorul parametrilor-variabilelor menționate $(\alpha_i, a_i, d_i, \theta_i)$.

După cum s-a menționat deja, fiecare element este precizat (geometric) de trei parametrii si o variabilă:

- Parametrii α_i, a_i, d_i, variabila θ_i atunci când cupla are axa A_i de rotație;
- Parametrii α_i, a_i, θ_i, variabila: d_i atunci când cupla are axa A_i de translație;

Formalismul DH definește pentru fiecare element un sistem de coordonate propriu cu ajutorul următorului algoritm:

1) Determinarea normalelor comune pentru axele consecutive;
2) Stabilirea originilor, în general, ca punct de intersecție dintre axa *(i)* și normala comună axelor *(i)*, *(i+1)*;
3) Stabilirea axei z, ca fiind axa (i);
4) Stabilirea axei x, ca fiind normala comună axelor *(i)*, *(i+1)*;
5) Sensul axei y se stabilește cunoscând ca reperul este unul drept

Se obțin astfel *n* sisteme de coordonate (pentru fiecare element câte un sistem de coordonate). Chiar și acum exista mai multe posibilități de a defini transformatele omogene cautate. Formalismul DH (modificat) propune următoarea strategie de obținere a transformării omogene: o succesiune de transformări elementare (rotații și/sau translații). Este ca și cum reperul călătorește dintr-o postură in alta printr-o succesiune de rotații și/sau translații efectuate pe elementele definite in subcapitolul anterior (v.fig.8)

Trecerea de la reperul *i-1* la reperul *i* se face prin succesiunea

$${}^{i-1}_{i}T = R_x(\alpha_{i-1}) \cdot D_x(a_{i-1}) \cdot R_z(\theta_i) \cdot D_z(d_i) \tag{1}$$

unde:

$R_x(\alpha_{i-1})$ este rotația în jurul axei *x* cu unghiul α_{i-1};
$D_x(a_{i-1})$ este translația în lungul axei *x* cu distanța a_{i-1};
$R_z(\theta_i)$ este rotația în jurul axei *z* cu unghiul θ_i;
$D_z(d_i)$ este translația în lungul axei *z* cu distanța d_i;

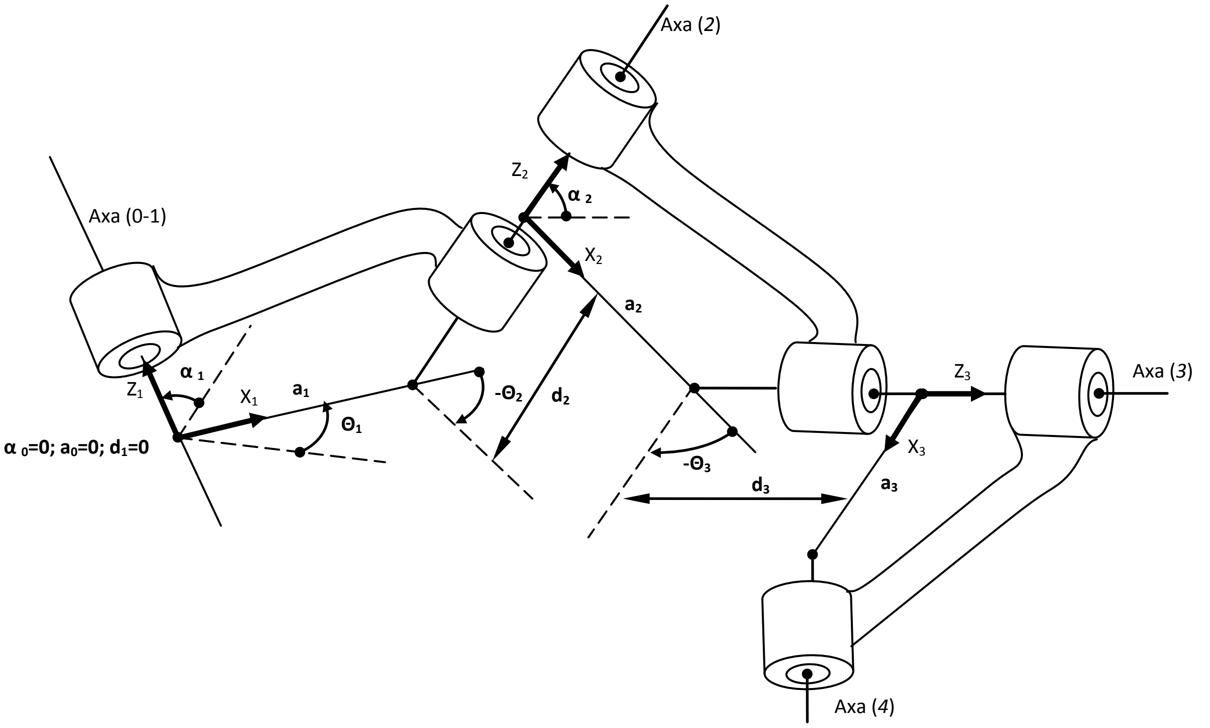
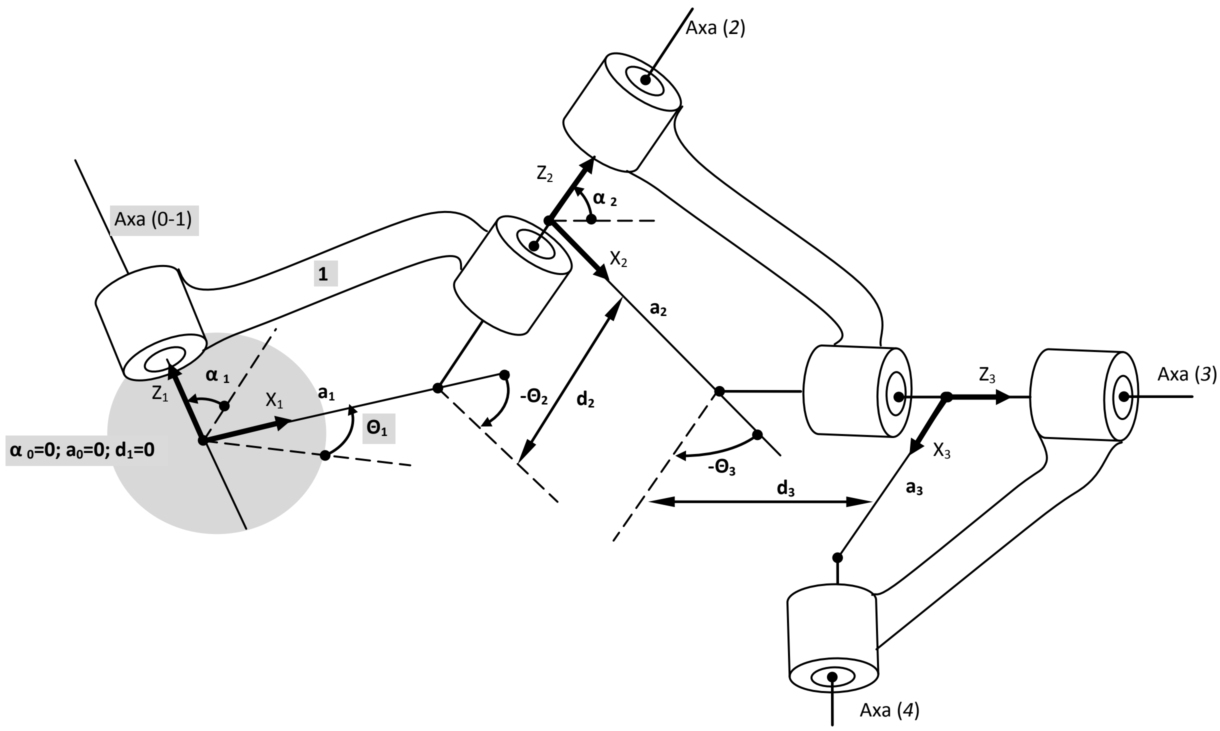


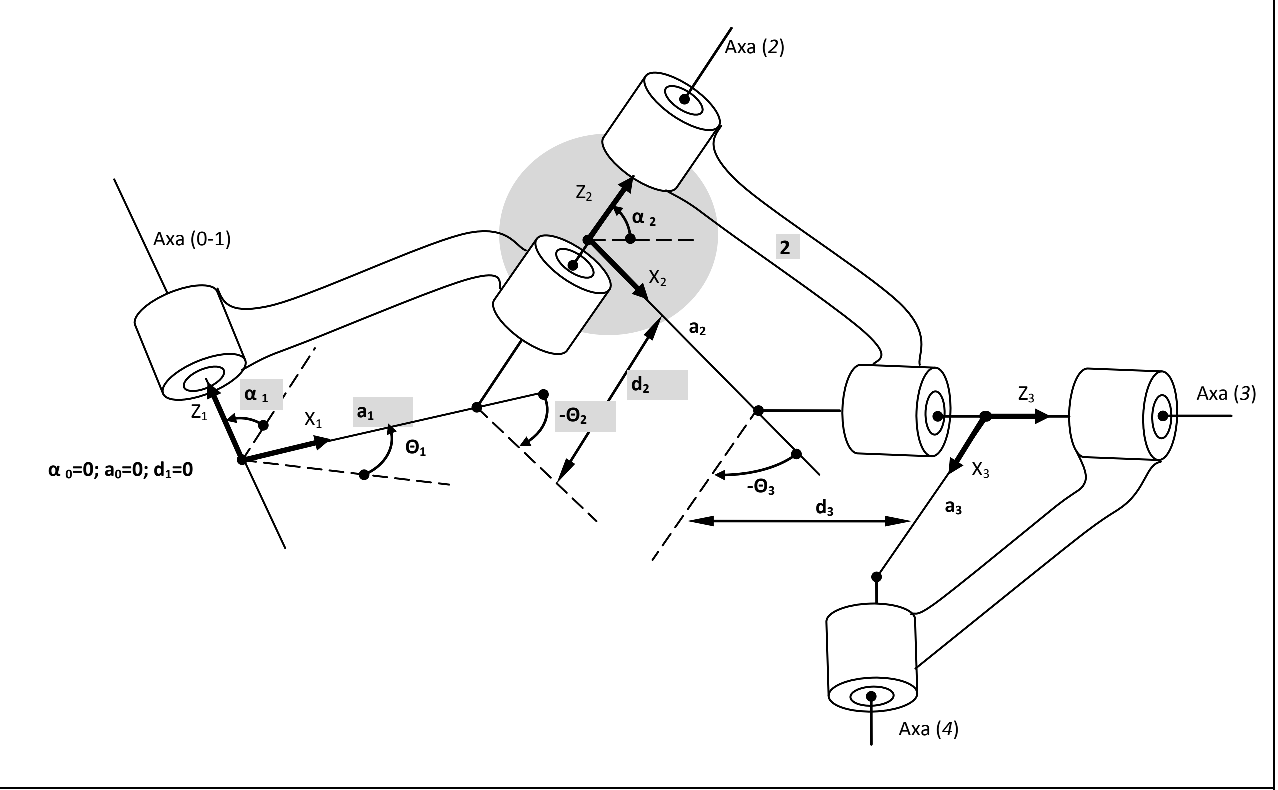
Fig. 8 Parcurgerea unui lant cinematic

Pentru o mai mare claritate in tabelul 1 au fost ilustrată succesiunea de pași pentru fiecare transformare în parte

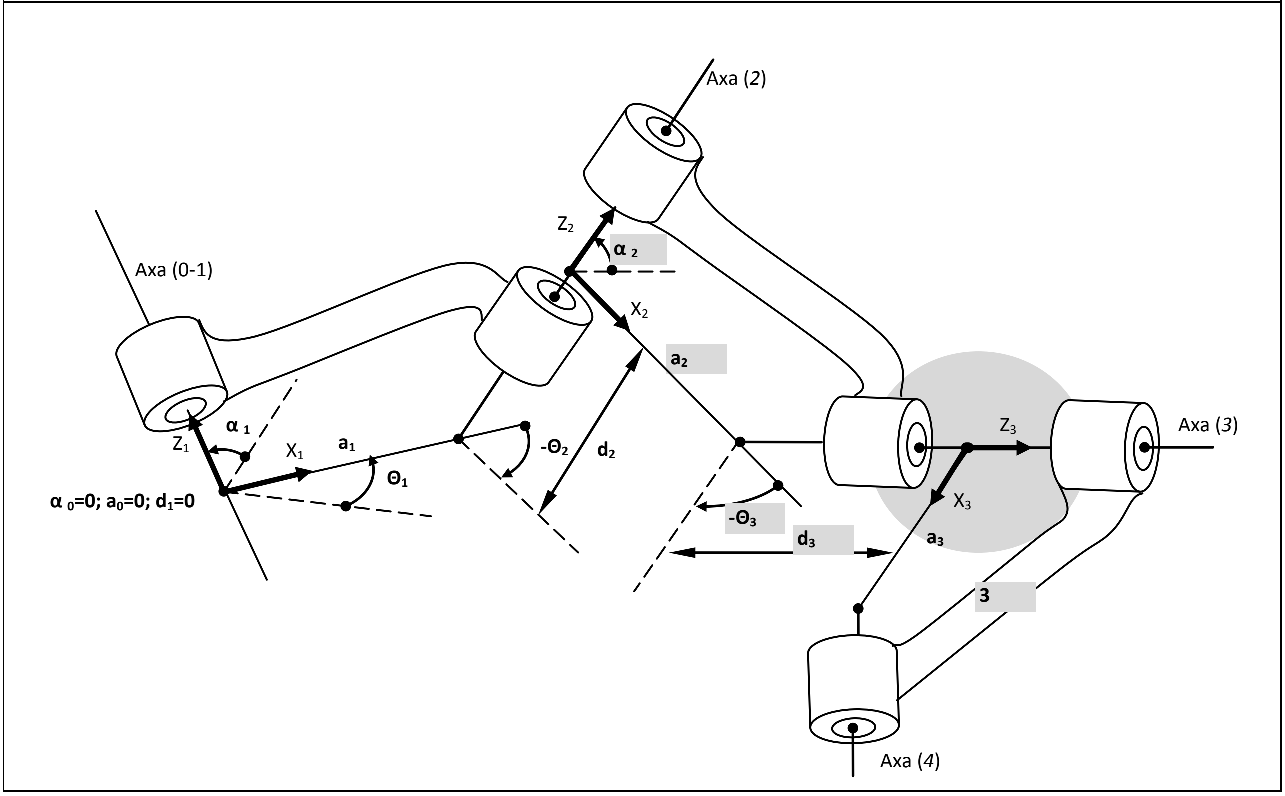
Tabelul 1. Definirea transformărilor omogene

Parametrii si variabilele care descriu ${}^0_1\boldsymbol{T}$


Parametrii si variabilele care descriu $^{2}_{1}\boldsymbol{T}$



Parametrii si variabilele care descriu $^{3}_{2}\boldsymbol{T}$



Analitic aceste transformări succesive conduc la:

$$ {}^{i-1}_{i}T = {}^{i-1}_{R_x}T(\alpha_{i-1}) \cdot {}^{R_x}_{T_x}T(a_{i-1}) \cdot {}^{T_x}_{R_z}T(\theta_i) \cdot {}^{R_z}_{T_z}T(d_i) = R_x(\alpha_{i-1}) \cdot T_x(a_{i-1}) \cdot R_z(\alpha_i) \cdot T_z(a_i) $$

$$ {}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ s_{\theta_i}c_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i}c_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}} & -s_{\alpha_{i-1}}d_i \\ s_{\theta_i}s_{\alpha_{i-1}} & c_{\theta_i}s_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}} & c_{\alpha_{i-1}}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) $$

Valoarea rezultatului obținut constă în faptul că pentru orice forma a elementelor transformarea omogenă este aceeași. Relațiile cu care se calculează elementele matricei sunt aceleași. Valoarea lor depinde de cei patru parametrii $\alpha_{i-1} a_{i-1} \theta_i d_i$.

Alegand alte convenții de măsurare a ementelor (altele decat cele prezentate în subcapitolul precedent) sau alegând o altă succesiune de parcurgere a elementului va conduce la transformări omogene cu forme diferite

În cele ce urmează elementele teoretice prezentate vor fi aprofundate printr-o serie de exemple care ilustrează modul de definire al celor 4 parametrii pentru diferite configurații ale lanțului cinematic

Exemplu 1: Structura plană RRR

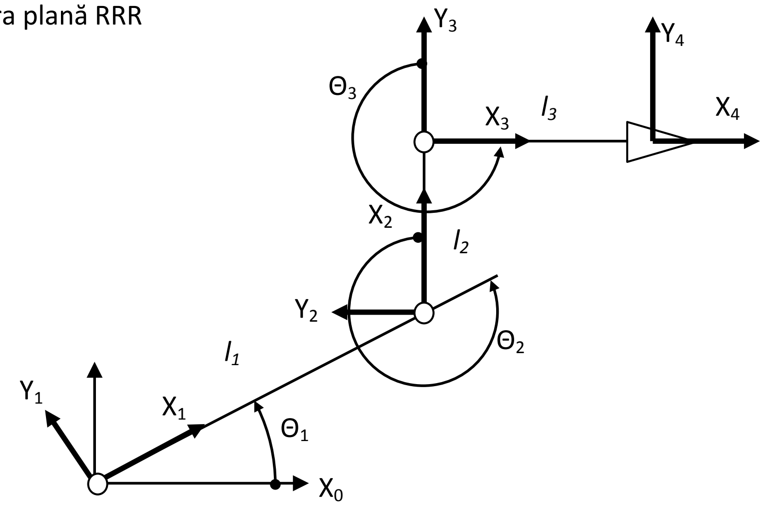
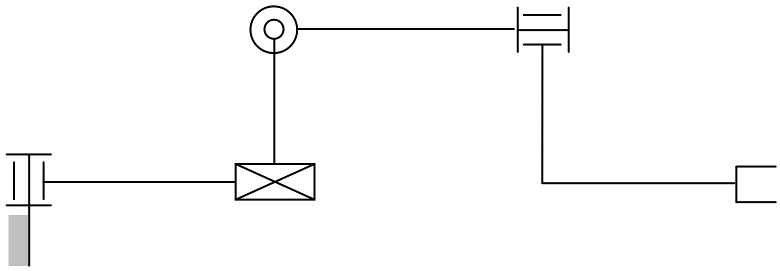


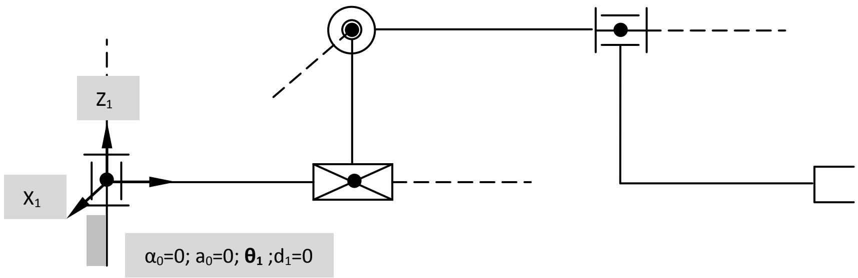
Fig. 9 Robotul plan R||R||R

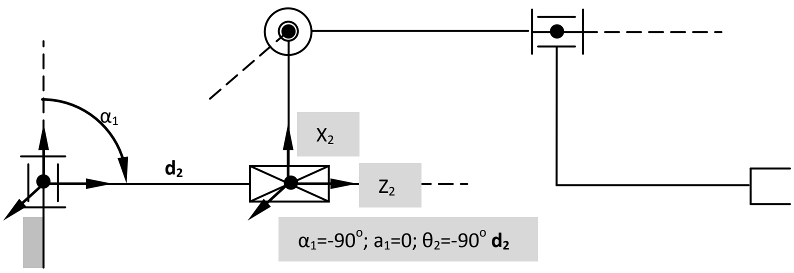
Tab. 2. Parametrii structurii

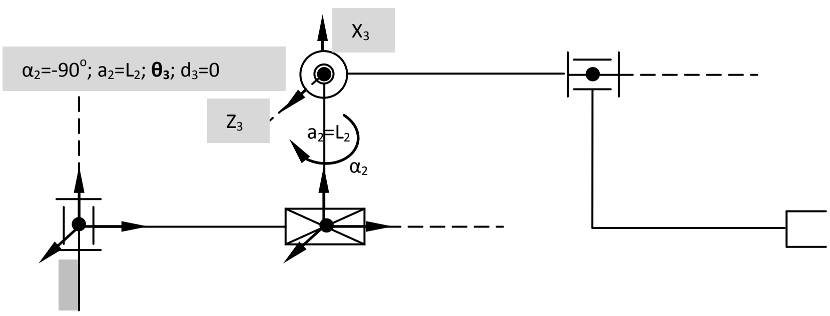
i	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	0
2	0	l_1	θ_2	0
3	0	l_2	θ_3	0

Exemplul 2: Structura RTRR









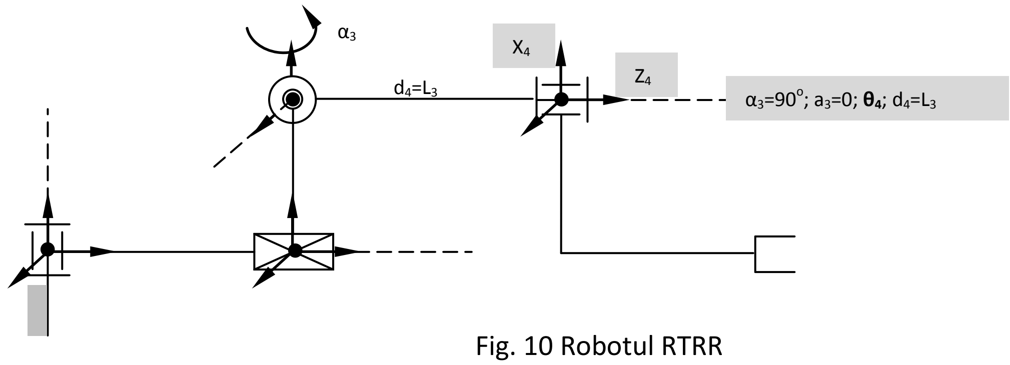
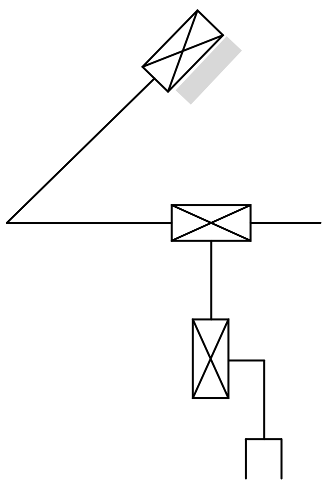


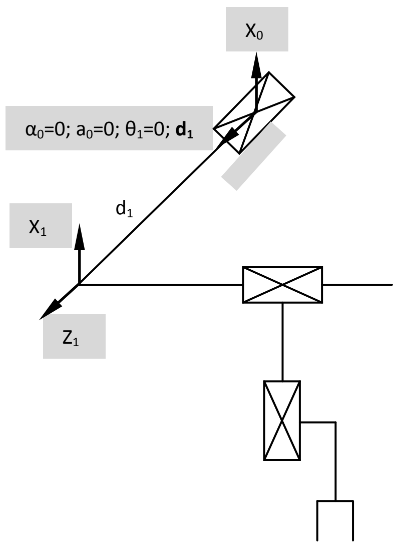
Fig. 10 Robotul RTRR

Tab. 3. Parametrii structurii

	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	0
2	-90	0	-90	d_2
3	-90	L_2	θ_3	0
4	90	0	θ_4	L_3

Exemplu 3: Structura **TTT**





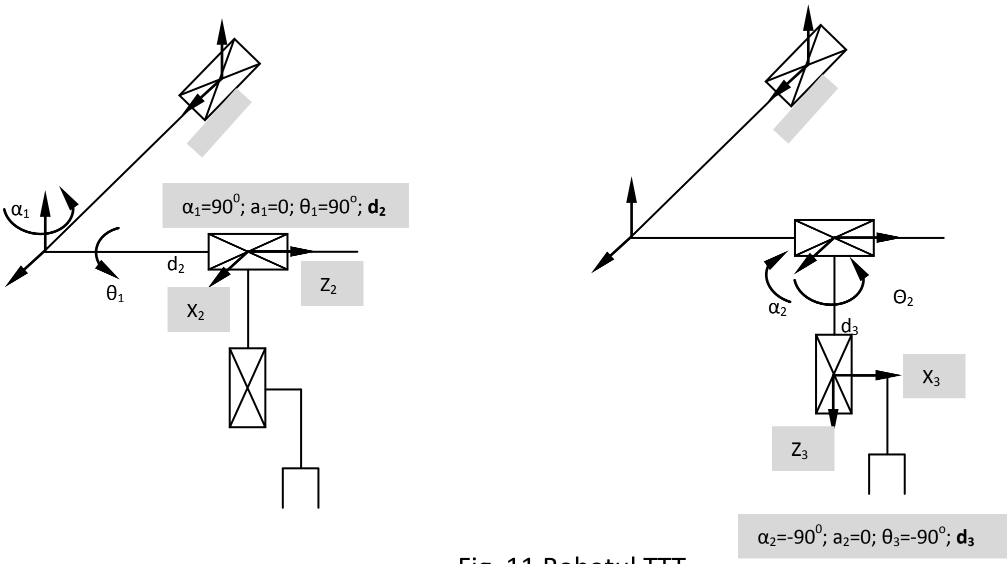
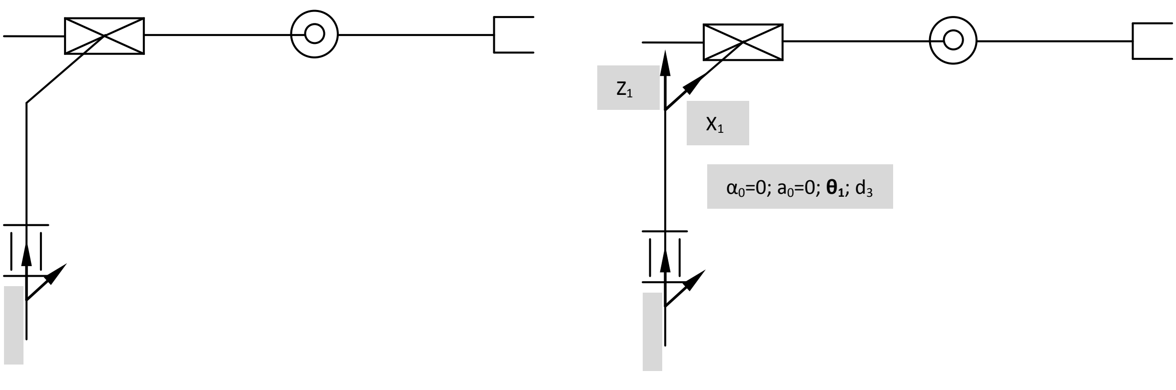


Fig. 11 Robotul TTT

Tab. 4. Parametrii structurii

	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	0	d_1
2	90	0	90	d_2
3	-90	0	-90	d_3

Exemplul 4: Structura RTR



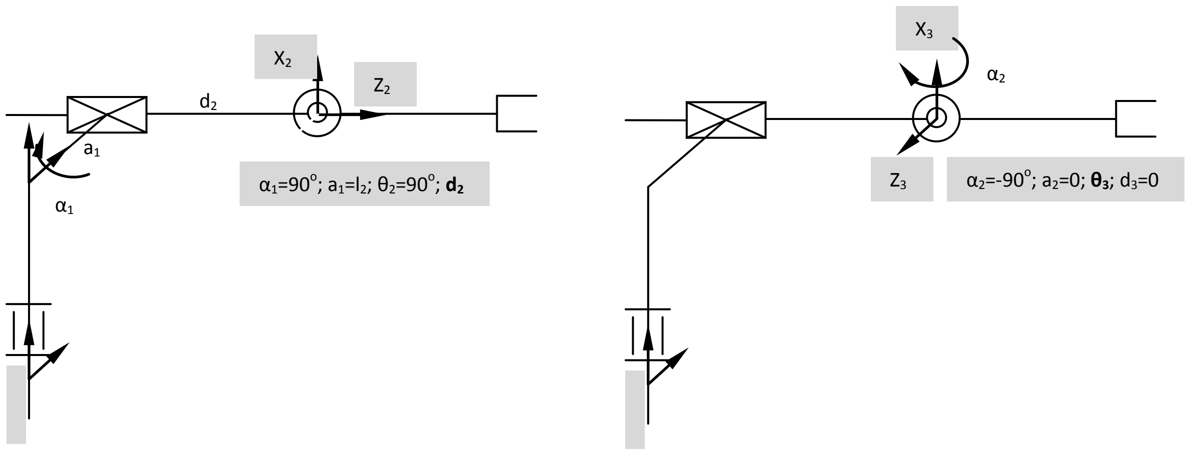
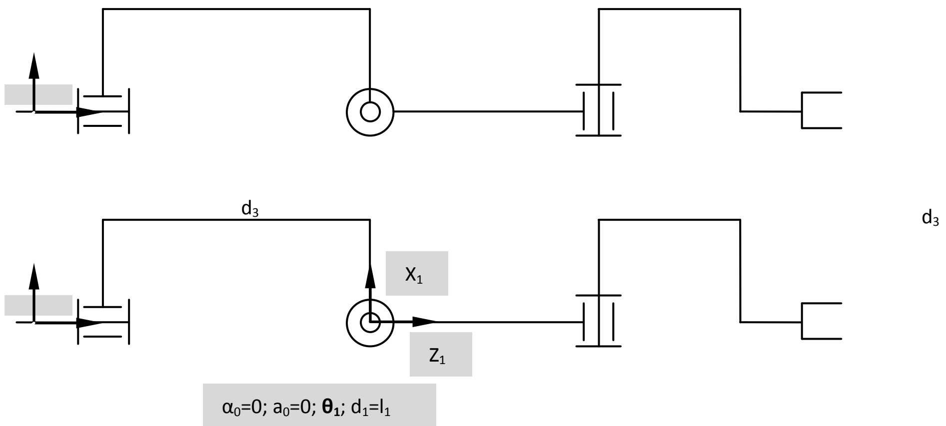


Fig. 11 Robotul RTR

Tab. 5. Parametrii structurii

	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	l_1
2	90	l_2	90	d_2
3	-90	0	θ_2	0

Exemplul 5: Structura **R ⊥ R ⊥ R**



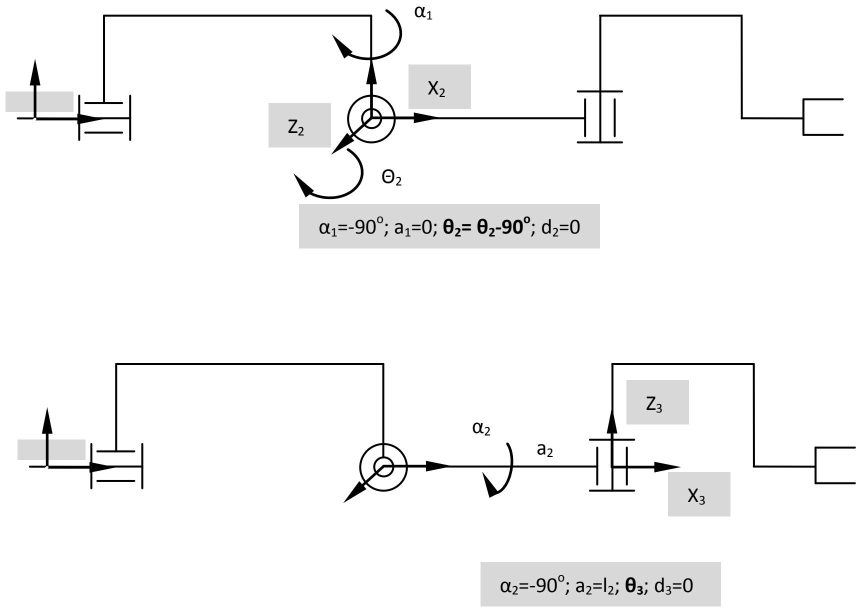


Fig. 12 Robotul RRR

Tab.6. Parametrii structurii

	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1	l_1
2	-90	0	$\theta_2 - 90$	0
3	-90	l_2	θ_3	0

3. Cinematica directă

Este un model care permite calcularea transformatei care face legătura dintre reperul definit în cupla n cu reperul din baza O.

$${}^{0}_{n}T = {}^{0}_{1}T \cdot {}^{1}_{2}T \cdot {}^{2}_{3}T \cdot \ldots \cdot {}^{n-1}_{n}T \tag{3}$$

Rezolvarearea problemei de cinematică directă presupune cunoștere variabilelor din cuple θ_i, d_i atunci când cuplele sunt de rotație, respectiv de translație. Rezultatul obținut este orientarea și poziția reperului *n*.

Alături de problema de cinematică directă se poate definii și problema de cinematică inversă în care postura reperului *n* este cunoscută iar necunoscutele sunt variabilele din cuple.

Dacă problema de cinematică directă necesită (v.(3)) un calcul algebric (relativ simplu) problema de cinematică inversă necesită de cele mai multe ori utilizarea unui calcul numeric (de foarte multe ori deosebit de complex).