I. Semnale

Din punct de vedere tehnic, semnalul reprezintă o mărime fizică care are proprietatea de a se propaga într-un anumit mediu.

Orice semnal are un conţinut informaţional, un mesaj destinat unui receptor. Pe lângă componenta utilă (informaţională) semnalele, din procesele fizice reale, conţin una sau mai multe componente perturbatoare, care apar în procesul de generare, transmitere şi recepţie a acestora.

Din punct de vedere matematic un semnal se descrie prin funcţii de timp de forma:

$$x : T \rightarrow M \text{ cu } t \in T \text{ şi } x(t) \in M ,$$

sau prin funcţii de frecvenţă:

$$X : \Omega \rightarrow N \text{ cu } \omega \in \Omega \text{ şi } \mathrm{X}(\Omega) \in \mathrm{N} .$$

1. CLASIFICAREA SEMNALELOR

a) După domeniul de definiţie T al funcţiilor de timp $x(t)$, semnalele se clasifică în:

- Semnale continue în timp (analogice), caracterizate prin:

  $T = \boldsymbol{R}$ sau $T \subset \boldsymbol{R}$, $t \in \boldsymbol{R}$;

- Semnale discrete (eşantionate)

  $T = \boldsymbol{Z}$ sau $T \subset \boldsymbol{Z}$, $t \in \boldsymbol{Z}$.

b) După numărul nivelelor pe care le poate lua semnalul în amplitudine avem:

- Semnale continue în amplitudine, caz în care:

  $M \in \boldsymbol{R}$ şi $x(t) \in \boldsymbol{R}$, M fiind o mulţime infinită (ca număr de elemente);

- Semnale cuantificate (cuantizate), situaţie în care M este o mulţime cu un număr finit de elemente. Aceste semnale sunt specifice echipamentelor de prelucrare numerică, fiind obţinute la ieşirea convertoarelor numeric-analogice. Un caz particular de semnal cuantizat, este semnalul logic sau binar, care poate avea numai două nivele, 0 şi U (informaţional 0 sau 1).

c) După modul în care se poate predetermina (prestabili sau previziona) evoluţia ulterioară a semnalelor, acestea se împart în:

- Semnale deterministe
- Semnale aleatoare (nedeterministe). Semnalele aleatoare au un caracter general, deoarece toate procesele fizice reale prelucrează semnale de acest tip, semnalele deterministe fiind de fapt idealizări prin care se aproximează, în anumite condiţii, în scopul simplificării studiului, evoluţia mărimilor cu caracter aleator. Semnalele deterministe pot fi descrise prin relaţii analitice.

Clasa **semnalelor deterministe** se împarte la rândul ei în următoarele subclase:

- Semnale periodice : armonice (SPA) şi oarecare (SPO).
- Semnale neperiodice : quasi-periodice şi tranzitorii (speciale).

Un **semnal periodic armonic** este exprimat analitic prin relații de forma:

$$x(t) = A\sin(2\,\pi\,t\,/\,T) = A\sin(2\,\pi\, f_1 t) = A\sin(\omega_1 t),$$

valabile în cazul fazei inițiale nule. Se poate utiliza în egală măsură şi funcția trigonometrică cos. Un semnal armonic este complet caracterizat dacă se cunosc amplitudinea (A) şi pulsația (ω_1) sau frecvența (f_1), respectiv perioada (T).

Semnalele periodice oarecare sunt descrise prin funcții de timp care au proprietatea:

$$x(t) = x(t \pm nT),\ n \in \boldsymbol{N},\ T \in \boldsymbol{R},$$

unde T este perioada de repetiție a semnalului.

Semnalele periodice pot fi exprimate printr-o descompunere în serie Fourier conform relației:

$$x(t) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t)],$$

sau în mod echivalent:

$$x(t) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n),\ \text{cu}\ n \in \boldsymbol{N},\ t \in \boldsymbol{R},$$

unde:

$$\omega_1 = 2\pi/T,\ M_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2},\ \varphi_n = \text{arctg}(-B_n/A_n).$$

Din relațiile anterioare se observă că semnalele periodice oarecare au un spectru discret, care conține numai armonici multiplu întreg al armonicii fundamentale.

Armonicile conținute în spectrul unui semnal periodic oarecare prezintă proprietatea:

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} = \frac{i\omega_1}{j\omega_1} = \frac{i}{j} \in \boldsymbol{Q}$$

deoarece $i, j \in \boldsymbol{N}$.

Semnalele neperiodice quasi-periodice sunt descrise analitic prin relații de forma:

$$x(t) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos(\omega_n t + \varphi_n),$$

dar în acest caz

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} = \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q} \text{ (numere iraționale).}$$

Semnalele neperiodice tranzitorii (speciale) sunt semnale care nu îndeplinesc nici una dintre proprietățile menționate. În această subclasă sunt cuprinse şi semnale tipice utilizate în automatică, prezentate succint în continuare.

- Impulsul Dirac, definit cu relațiile:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pentru } t = 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} \quad \text{şi} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1,$$

cu proprietatea numită de filtrare exprimată prin:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = \mathrm{f}(t_0).$$

- Treapta unitară descrisă de:

$$x_1(t) = 1_+(t) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } t \geq 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}.$$

Treapta unitară se corelează cu impulsul Dirac cu relația:

$$\frac{\mathrm{d}1_+(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t).$$

- Rampa unitară definită prin:

$$x_2(t) = \begin{cases} t & \text{pentru } t \geq 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases},$$

corelată cu treapta unitară conform expresiei:

$$\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = 1_+(t).$$

- Semnalul armonic unitar, descris prin funcția definită pe porțiuni:

$$x_3(t) = \begin{cases} \sin \omega t & \text{pentru } t \geq 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}.$$

2. METODE DE ANALIZĂ A SEMNALELOR DETERMINISTE

Tehnicile moderne de prelucrare a semnalelor deterministe au la bază următoarele metode:

- Descompunerea în serie Fourier reală sau complexă, care este aplicabilă semnalelor periodice (spectrul Fourier);
- Mediile temporale şi funcțiile de corelație;

- Tehnici de analiză funcțională: transformatele Laplace, Z şi Fourier;
- Funcțiile de densitate spectrală de putere.

Unele din metodele de mai sus pot fi aplicate şi la prelucrarea semnalelor nedeterministe (aleatoare).

Spectrul Fourier al semnalelor continue periodice oarecare (SPO).

Semnalele periodice oarecare sunt caracterizate aşa cum s-a arătat prin relația:

$$x(t) = x(t \pm nT),\ n \in \boldsymbol{N},\ T \in \boldsymbol{R},\ t \in \boldsymbol{R},$$

unde T este perioada de repetiție.

Spectrul Fourier se determină folosind descompunerea în serie Fourier reală sau complexă. Seria Fourier reală asociată acestui semnal este descrisă de relația:

$$x(t) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t)], \qquad (1.)$$

unde:

$$\omega_1 = 2\pi/T,\ A_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{d}t \text{ sau } A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(y)\,\mathrm{d}y \text{ cu } y = \omega_1 t.$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t \text{ sau } A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(y)\cos(ny)\,\mathrm{d}y,$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t \text{ sau } \mathrm{B}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(y)\sin(ny)\,\mathrm{d}y \text{ cu } y = \omega_1 t.$$

În relațiile de calcul de mai sus se pot alege limitele de integrare 0 pentru cea inferioară, respectiv T (2π) pentru cea superioară.

Coeficienții seriei Fourier au proprietățile:

$$x(-t) = x(t) \to B_n = 0,\ x(-t) = -x(t) \to A_n = 0$$

O formă echivalentă se obține punându-se în evidență modulul şi faza pentru fiecare armonică[1] conform relației:

$$x(t) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n),\ \text{cu } n \in \boldsymbol{N},\ t \in \boldsymbol{R}, \qquad (2.)$$

[1]Prin armonică se va înțelege un termen din suma din relația 2. O armonică este caracterizată de modul (amplitudinea maximă) şi fază. Practic, putem spune că un semnal continuu poate fi descris printr-o „sumă de armonici".

unde:

$$\omega_1 = 2\pi / T \,,\ M_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}\,,\ \varphi_n = \text{arctg}(-B_n / A_n).$$

Din relațiile (1) şi (2) se observă că spectrul unui SPO este discret. Acesta conține numai semnale armonice multiplu întreg al armonicii de bază $\omega_1 = 2\pi / T$.

O altă descriere a unui semnal periodic are la bază funcția spectrală de amplitudine numită şi funcția spectru Fourier, care pune în evidență, pentru fiecare armonică în parte, numai modulul. Funcția spectru Fourier (funcția spectrală de amplitudine - FSA) în exprimare unilaterală este descrisă conform relației:

$$X(\omega) = A_0 \delta_0(\omega) / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \delta_0(\omega - \omega_n) \text{ cu } \omega_n = n\omega_1, \tag{3.}$$

unde

$$\delta_0(\omega - \omega_n) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } \omega = \omega_n \\ 0 \text{ altfel} \end{cases}$$

constituie impulsul unitar în frecvență.

Denumirea de funcție spectrală unilaterală este ca urmare a faptului că aceasta este definită numai pentru $n > 0$.

Funcția spectrală de amplitudine semnalelor periodice armonice are expresia:

$$X(\omega) = A\delta_0(\omega - \omega_1) .$$

Seria Fourier complexă.

Relația (3), care evidențiază amplitudinea liniei spectrale corespunzătoare armonicii n ($\omega_n = n\omega_1$), prezintă dezavantajul că pierde informație referitoare la fază. Pentru a ține seama şi de acest aspect este necesar ca funcția spectru Fourier să fie exprimată în formă complexă.

Pentru introducerea seriei Fourier complexe se porneşte de la relația (2):

$$x(t) = A_0 / 2 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n),\ \ n \in \boldsymbol{N},\ \ t \in \boldsymbol{R},$$

cu:

$$\omega_1 = 2\pi / T \,,\ M_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}\,,\ \varphi_n = \text{arctg}(-B_n / A_n).$$

Se înlocuieşte funcția cos prin relația lui Euler:

$$\cos(n\omega_1 t + \varphi_n) = [\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\omega_1 t + \varphi_n)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(n\omega_1 t + \varphi_n)}] / 2 ,$$

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} M_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} M_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_n} .$$

În continuare se repartizează liniile spectrale, simetric față de originea axei pulsațiilor, considerându-se şi valorile negative ale lui n. Având în vedere că:

$$A_{-n} = A_n,\ B_{-n} = -B_n,\ M_{-n} = M_n,\ \varphi_{-n} = -\varphi_n,$$

relația (2) se poate scrie acum conform expresiei:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} M_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1} M_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}\ .$$

sau

$$x(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n} = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

unde s-a notat $\underline{c}_n = \mathrm{c}_\mathrm{n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n} = \frac{1}{2}M_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n} = \frac{1}{2}\sqrt{A_n^2 + B_n^2}\ \ (\cos\varphi_n + \sin\varphi_n)$

Dar $\cos\varphi_n = \dfrac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}$, $\sin\varphi_n = \dfrac{-B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}$

De unde rezultă $\underline{c}_n = (A_n - \mathrm{j}\,B_n)/2$.

În relația de mai înainte $\underline{c}_n$ este fazorul liniei spectrale n cu modulul $c_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ şi faza $\varphi_n = \mathrm{arctg}(-\dfrac{B_n}{A_n})$.

Având în vedere relațiile de calcul pentru A_n şi B_n obținem în continuare:

$$\underline{c}_n = \frac{1}{2}\frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{j}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\omega_1 t)\,\mathrm{d}t\right],$$

$$\underline{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

Recapitulând, seria Fourier complexă a unui semnal $x(t) = x(t \pm nT)$, cu $\omega_1 = 2\pi/T$ este descrisă de relațiile :

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

$$\underline{c}_n = \frac{1}{2}(A_n - \mathrm{j}\,B_n)\text{, sau } \underline{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

Observație: Seria Fourier complexă pentru semnalele armonice se poate obține direct cu relația lui Euler:

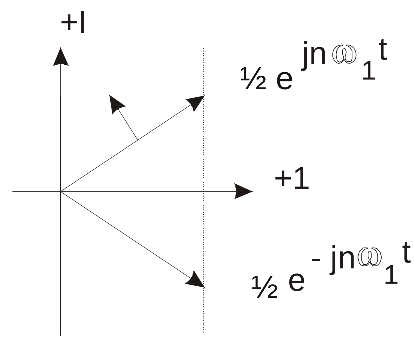
$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}].$$

Noțiunea de frecvență (pulsație) negativă.

Valorile negative ale coeficienților n şi implicit valorile negative ale pulsației ω_n s-au introdus pentru a scrie sub formă complexă $\cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$ în scopul evidențierii fazei pentru fiecare linie spectrală. Scriind funcția $\cos(n\omega_1 t)$ prin forma exponențială rezultă că aceasta se obține prin însumarea a doi fazori:

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t)}]$$

Considerând fazorii reprezentați în spațiul complex se observă că primul se roteşte cu $\omega = n\omega_1$ în sens trigonometric iar al doilea se roteşte în sens orar cu $\omega = -n\omega_1$.



Valori medii temporale. Funcții de corelație şi covarinață temporală.

Fie $x(t), t \in R$ un semnal determinist continuu şi T un interval de observare a acestuia.

Valoarea medie temporală de ordinul întâi.

Se calculează cu relația:

$$\overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,\mathrm{d}\,t = \mathrm{const.} \in \boldsymbol{R}$$

Valoarea medie temporală de ordinul unu reprezintă valoarea componentei continue a semnalului $x(t)$.

Proprietate:

- $\overline{x(t)} = \overline{x(t+t_0)}$ - valoarea medie temporală de ordinul întâi nu depinde de alegerea originii timpului sau altfel spus este invariantă la schimbarea originii timpului.

Valoarea medie temporală de ordinul doi (pătratică)

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \text{const.} \in \boldsymbol{R}$$

$$\overline{x^2(t)} = \overline{x^2(t+t_0)}$$

Valoarea medie temporală de ordinul doi reprezintă puterea semnalului la încărcare unitară.

Varianța temporală

Este valoarea medie pătratică a semnalului centrat pe valoarea medie de ordinul întâi.

$$x_0(t) = x(t) - \overline{x(t)}$$

$$\text{var}_x = \text{var}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \overline{x(t)}]^2\,\mathrm{d}\,t = \text{const.} \in \boldsymbol{R}$$

$$\text{cov}(x, y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \overline{x(t)}][y(t) - \overline{y(t)}]\,\mathrm{d}\,t = \text{const.} \in \boldsymbol{R}$$

Funcții de corelație şi covarianță temporală sunt funcții care se obțin prin medierea temporală a produsului a două semnale considerate în momente diferite de timp.

Funcții de corelație

a) Funcția de autocorelatie

$$R_{xx}(t_1, t_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+t_1)x(t+t_2)\,\mathrm{d}\,t$$

Se poate demonstra uşor că $R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\tau)$ cu $\tau = t_1 - t_2$.

Se face substituția: $t + t_2 = t'$, $t + t_1 = t + t_2 + t_1 - t_2 = t' + \tau$.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+t_1)x(t+t_2)\,\mathrm{d}\,t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}+t_2}^{\frac{T}{2}+t_2} x(t'+\tau)x(t')\,\mathrm{d}\,t'$$

În continuare vom utiliza pentru definirea funcțiilor de corelație şi covarianță relația de forma:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x(t)\,\mathrm{d}\,t\,,\ \tau \in \boldsymbol{R}$$

$$R_{xx}(\tau) = \overline{x(t+\tau)x(t)} \ .$$

Proprietăți:

- $R_{xx}(\tau) = \mathrm{f}(\tau)$ - autocorelația este o funcție de timp invariantă la schimbarea originii timpului;
- $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$, autocorelația este o funcție pară;
- $R_{xx}(0) = \overline{x^2(t)}$ - valoarea medie pătratică:

b) Funcții de intercorelație

Fie $x(t)$ şi $y(t)$ cu $t \in \boldsymbol{R}$.

Prin definiție:

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t+\tau)x(t)\,\mathrm{d}\,t = \overline{y(t+\tau)\ x(t)} = \mathrm{f}_1(\tau),\ \tau \in \boldsymbol{R}$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)y(t)\,\mathrm{d}\,t = \overline{x(t+\tau)\ y(t)},$$

Proprietăți:

- $R_{xy}(\tau),\ R_{yx}(\tau)$, sunt funcții de timp invariante la schimbarea originii timpului;
- $R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$
- $R_{xy}(0) = R_{yx}(0) = \overline{x(t)y(t)}$

Funcții de covarianță temporală.

Sunt de fapt funcții de corelație calculate pentru semnale centrate pe valoarea medie temporală de ordinul I.

Fie $x(t)$ şi $y(t)$ cu $t \in \boldsymbol{R}$, semnale deterministe continue cu valoarea medie $\overline{x(t)}$ şi $\overline{y(t)}$. Semnalele centrate pe valoarea medie sunt $x_0(t) = x(t) - \overline{x(t)}$, respectiv $y_0(t) = y(t) - \overline{y(t)}$

a) Funcții de autocovarianță:

Prin definiție:

$$C_{xx}(\tau) = \overline{x_0(t+\tau)x_0(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t+\tau) - \overline{x(t+\tau)}]\,[x(t) - \overline{x(t)}]\,\mathrm{d}\,t$$

$$C_{yy}(\tau) = \overline{y_0(t+\tau)y_0(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [y(t+\tau) - \overline{y(t+\tau)}]\,[y(t) - \overline{y(t)}]\,\mathrm{d}\,t$$

$$C_{xx}(0) = \mathrm{var}_x = \mathrm{var}(x)\,,\ C_{yy}(0) = \mathrm{var}_y = \mathrm{var}(y)$$

b) Funcții de intercovarianță:

$$C_{yx}(\tau) = \overline{y_0(t+\tau)x_0(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[y(t+\tau)-\overline{y(t)}]\,[x(t)-\overline{x(t)}]\,\mathrm{d}\,t$$

$$C_{xy}(\tau) = \overline{x_0(t+\tau)y_0(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[x(t+\tau)-\overline{x(t)}]\,[y(t)-\overline{y(t)}]\,\mathrm{d}\,t$$

$$C_{yx}(0) = \overline{[x(t)-\overline{x(t)}]\,[y(t)-\overline{y(t)}]} = \mathrm{cov}(x,\, y)$$

Transformata Laplace.

Fie semnalul continuu $x(t)$ definit pentru $t \ge 0$ cu $x(t) = 0$ pentru $t < 0$. Semnalul considerat are un mumăr finit de discontinuități şi este mărginit în sens exponențial, adică:

$$|x(t)| < Me^{at}\,,\ M\,,a \in \boldsymbol{R}^{+}\,.$$

Prin definiție transformata Laplace unilaterală a semnalului $x(t)$, denumit original, este expresia integrală

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{x(t)\},$$

unde $s = \sigma + j\omega \in \boldsymbol{C}$. Funcția $X(s) \in \boldsymbol{C}$ se numeşte funcție imagine Laplace.

Transformata Laplace a semnalelor întâlnite în practică este o funcție rațională, raport a două polinoame de variabilă s de forma:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_{nb}s^{nb} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^{na} + a_{na-1}s^{na-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{\prod_{k=1}^{na}(s + p_k)}, na, nb \in \boldsymbol{N}, a_i, b_j \in \boldsymbol{R}\,.$$

Relația de mai sus reprezintă transformata Laplace a unui semnal real dacă, şi numai dacă, este îndeplinită condiția de realizabilitate fizică exprimată prin inegalitatea $na \ge nb$.

Semnalul original $x(t)$ se poate obține din transformata Laplace $X(s)$ prin aplicarea transformatei Laplace inverse, cu relația integrală, cunoscută sub denumirea de formulă de inversiune:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}dt\,.$$

Calculul transformatei Laplace inverse cu formula de inversiune este foarte complicată, necesitând determinare reziduurilor funcției complexe $X(s)$. Dacă $X(s)$ este o funcție rațională, cu rădăcini simple la numitor, exprimată printr-o relație de forma:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{\prod_{k=1}^{na}(s + p_k)},$$

atunci semnalul original $x(t)$ se poate calcula relativ simplu cu relația:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{na} a_k e^{-p_k t},$$

unde

$$a_k = \left.\frac{B(s)}{A'(s)}\right|_{s=p_k}, \text{ sau } a_k = (s + p_k)\left.\frac{B(s)}{A(s)}\right|_{s=p_k}.$$

Transformatele Laplace ale unor semnale simple.

- $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$;
- $\mathcal{L}\{1_+(t)\} = \dfrac{1}{s}$;
- $\mathcal{L}\{t\}|_{t\geq 0} = \dfrac{1}{s^2}$;
- $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \dfrac{1}{s+a}$;
- $\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} = \dfrac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$;
- $\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} = \dfrac{s}{s^2 + \omega_0^2}$;
- $\mathcal{L}\{e^{-at}\sin(\omega_0 t)\} = \dfrac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$;
- $\mathcal{L}\{e^{-at}\cos(\omega_0 t)\} = \dfrac{s + a_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$.