

Metode de aproximare a filtrelor ideale. Filtre prototip.

Scopul lucrării

Caracteristici filtrelor ideale nu pot fi obținute prin utilizarea unor funcții de transfer cauzale (practic realizabile). Se urmărește determinarea unor funcții de transfer cu caracteristici cât mai apropiate de cele ideale, respectând restricția de realizabilitate și o condiție de stabilitate.

Pentru obținerea acestor filtre aproximative, se caută mai întâi filtre *prototip*, dintre care cele mai cunoscute sunt: Butterworth, Cebâșev (directe și inverse), Bessel și eliptice. Filtrele prototip sunt filtre trece-jos, ale căror funcții de transfer sunt prelucrate mai departe prin transformări de frecvență pentru a obține filtrul dorit. Pentru acestea, mediul Matlab oferă funcții pentru proiectarea pornind de la specificațiile impuse.

Scopul lucrării este de a proiecta filtre cu anumite specificații folosind mediul Matlab. Se va urmări evidențierea poziției polilor și zerourilor pentru filtrele obținute, cu scopul de a confirma concluziile lucrării precedente.

Considerații teoretice

Proiectarea unui filtru pornește de la specificațiile impuse:

- FTJ: bandă de trecere între 0 și ω_p , unde modulul funcției de frecvență este minim G_p ; bandă de oprire de la ω_s unde modulul funcției de frecvență este maxim G_s ;
- FTS: bandă de trecere de la ω_p , unde modulul funcției de frecvență este minim G_p ; bandă de oprire între 0 și ω_s unde modulul funcției de frecvență este maxim G_s ;
- FTB: bandă de trecere între ω_{p1} și ω_{p2} , cu câștigul minim G_{p1} , respectiv G_{p2} ; bandă de oprire de la 0 la ω_{s1} și peste ω_{s2} unde avem câștigul maxim G_{s1} , respectiv G_{s2} ;
- FOB: bandă de trecere de la 0 la ω_{p1} și peste ω_{p2} , cu câștigul minim G_{p1} , respectiv G_{p2} ; bandă de oprire între ω_{s1} și peste ω_{s2} cu câștigul maxim G_{s1} , respectiv G_{s2} .

Etapele proiectării sunt:

- folosind specificațiile inițiale se determină specificațiile unui filtru prototip (Butterworth, Cebâșev etc.)
- se găsește funcția de transfer a acestuia a filtrului prototip conform datelor obținute la pasul precedent
- se calculează funcția de transfer a filtrului dorit prin aplicarea unei transformări de frecvență corespunzătoare.

Filtre Butterworth

Relația care definește un filtru de tip Butterworth (FB) este:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}} \quad (3.1)$$

în care:

- n este ordinul filtrului care cu cât este mai mare cu atât filtrul este mai apropiat de forma ideală, cu dezavantajul implementării mai dificile deoarece ordinul filtrului este egal cu numărul polilor filtrului.
- ω_c este pulsația de tăiere, valoare a pulsației pentru care câștigul este 0,707 (-3 dB).

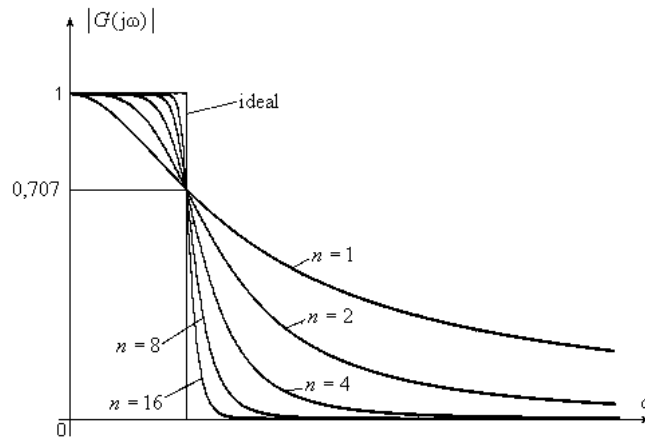


Fig. 1. Filtrul prototip Butterworth.

Observație. În proiectare, se lucrează cu filtre normalizate la care se consideră $\omega_c = 1$.

Fără a demonstra aici, forma funcției de transfer a filtrului Butterworth normalizat este:

$$G^N(s) = \frac{1}{B_n(s)} = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + as + 1} \quad (3.2)$$

($B_n(s)$ este polinomul Butterworth de ordin n)

Observație. Polinomul Butterworth depinde doar de ordinul n . Coeficienții lui se pot prelua din tabele (vezi curs), iar în Matlab se pot obține utilizând funcțiile specifice.

Filtre Cebășev

În cazul filtrelor Cebășev, relația care le definește este:

$$|G^N(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)}} \quad (3.3)$$

în care unde $C_n(\omega)$ polinomul Cebășev în variabilă ω , de ordinul n , calculat cu relația:

$$C_n(\omega) = \cos(n \cos^{-1} \omega)$$

Polinomul Cebășev are proprietatea

$$C_n(\omega) = 2\omega C_{n-1}(\omega) - C_{n-2}(\omega), \quad n > 2,$$

cu $C_0(\omega) = 1$ și $C_1(\omega) = \omega$, din care putem calcula $C_n(\omega)$ pentru orice valoare a lui n .

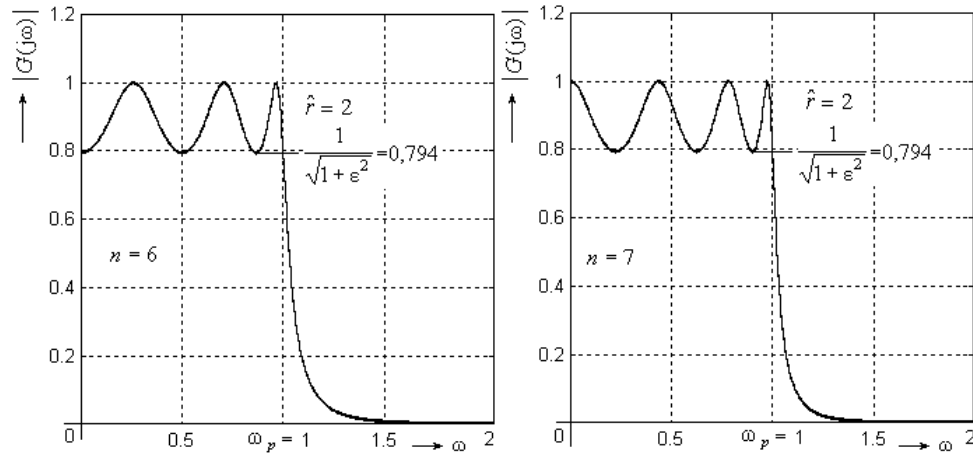


Fig. 2. Filtrul prototip Cebâșev.

Filtrul Cebâșev prezintă oscilații în banda de trecere, înălțimea oscilațiilor fiind controlată de parametrul ε .

Filtre Cebâșev inverse

Caracteristica modul pulsație a FCI normalizat va fi:

$$|G^N(j\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2(1/\omega)}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(1/\omega)}, \quad (3.4)$$

în care C_n sunt polinoamele Cebâșev prezentate mai înainte.

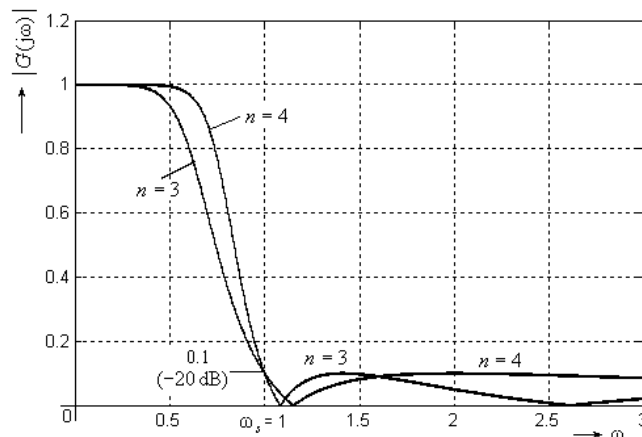


Fig. 3. Filtrul prototip Cebâșev invers

Proiectarea filtrelor prototip utilizând Matlab

Mediul Matlab oferă funcții pentru proiectarea filtrelor prototip, care înglobează calculele complexe de determinare a ordinului, polilor, funcției de transfer etc. și rezolvă problema transformării de frecvență în funcție de valorile parametrilor.

1. Să se proiecteze un filtru trece-jos de tip Butterworth cu specificațiile:

- $\omega_p = 10$, $G_p = 0.794$ (-2dB), $\omega_s = 20$, $G_s = 0.1$ (-20dB)

Secvența de program care rezolvă problema este:

```
%specificatiile impuse
wp=10;
Gp=0.794;
ws=20;
Gs=0.1;
%specificatiile exprimate in dB - calcul impus de functia buttord
GpdB=20*log10(Gp);
GsdB=20*log10(Gs);
%determinarea ordinului si a frecventei de frangere/taiere
[N1, wn1]=buttord(wp,ws,GpdB,GsdB,'s');
%determinarea functiei de transfer
[num1, den1]=butter(N1,wn1,'s');
%trasarea grafica a caracteristicii modul-pulsatie
w=0:0.01:30;
[mag,phase]=bode(num1,den1,w);
plot(w,mag,[wp ws],[Gp Gs],'o');grid
```

(vezi programul Lab3_ex01.m)

Pentru a obține funcția de transfer a filtrului prototip Butterworth (trece-jos normalizat) de ordinul n se folosește secvența:

```
[z,p,k]=buttap(n);
%returneaza zerourile, polii si amplificarea FB de ordinul n
[num,den]=zp2tf(z,p,k);
% returneaza numaratorul si numitorul functiei de transfer a FB
```

2. Să se proiecteze un filtru trece-sus cu specificațiile:

- $\omega_p = 20$, $G_p = 0.794$ (-2dB), $\omega_s = 10$, $G_s = 0.1$ (-20dB)

Programul este asemănător celui precedent cu 2 modificări:

```
%specificatiile impuse
wp=20;
Gp=0.794;
ws=10;
Gs=0.1;
...
%determinarea functiei de transfer
[num1, den1]=butter(N1,wn1,'high','s');
...
```

(vezi programul Lab3_ex02.m)

Funcția `butter` primește ca parametru suplimentar tipul filtrului:

- `high` – filtru trece-sus
- `bandpass` – filtru trece-bandă
- `stop` – filtru oprește-bandă

3. Să se proiecteze un filtru trece-bandă cu specificațiile:

- $\omega_{p1} = 12$, $\omega_{p2} = 18$, $G_p = 0.794$ (-2dB), $\omega_{s1} = 2$, $\omega_{s1} = 28$, $G_s = 0.1$ (-20dB)

și apoi proiectați filtrul oprește-bandă complementar.

```
%specificatiile impuse
wp1=12;
wp2=18;
```

```
Gp=0.794;
ws1=2;
ws2=28;
Gs=0.1;
%specificatiile exprimate in dB - calcul impus de functia buttord
GpdB=20*log10(Gp);
GsdB=20*log10(Gs);
%determinarea ordinului si a frecventei de frangere/taiere
[N1, wn1]=buttord([wp1 wp2],[ws1 ws2],GpdB,GsdB,'s');
%determinarea functiei de transfer
[num1, den1]=butter(N1,wn1,'bandpass','s');
%trasarea grafica a caracteristicii modul-pulsatie
w=0:0.01:30;
[mag,phase]=bode(num1,den1,w);
plot(w,mag,[wp1 wp2 ws1 ws2],[Gp Gs Gs Gs],'o');grid
```

(vezi programul Lab3_ex03.m)

Pentru filtrul oprește-bandă, modificările sunt:

```
%specificatiile impuse
wp1=2;
wp2=28;
Gp=0.794;
ws1=12;
ws2=18;
Gs=0.1;
...
%determinarea functiei de transfer
[num1, den1]=butter(N1,wn1,'stop','s');
...
```

(vezi programul Lab3_ex04.m)

4. Să se proiecteze un filtru Cebâșev cu specificațiile de la exemplul 1.

Programul este asemănător, folosind funcțiile: cheblord, cheby1, cu o specificație suplimentară: înălțimea maximă a oscilațiilor (riplurilor) în banda de trecere, exprimată în dB.

```
%specificatiile impuse
wp=10;
Gp=0.794;
ws=20;
Gs=0.1;
%specificatiile exprimate in dB - calcul impus de functia buttord
R=1;
%inaltimea maxima a riplurilor in banda de trecere
GpdB=20*log10(Gp);
GsdB=20*log10(Gs);
%determinarea ordinului si a frecventei de frangere/taiere
[N1, wn1]=cheblord(wp,ws,GpdB,GsdB,'s');
%determinarea functiei de transfer
[num1, den1]=cheby1(N1,1,wn1,'s');
%trasarea grafica a caracteristicii modul-pulsatie
w=0:0.01:30;
[mag,phase]=bode(num1,den1,w);
plot(w,mag,[wp ws],[Gp Gs],'o');grid
```

(vezi programul Lab3_ex05.m)

5. Să se proiecteze filtre trece-sus, trece-bandă și oprește-bandă cu specificațiile de la exemplele 2 și 3, folosind filtrul prototip Cebășev.

(vezi programul `Lab3_ex06.m`, `Lab3_ex07.m` și `Lab3_ex08.m`)

Exerciții

1. Să se refacă exemplele 1, 2, 3 folosind filtre prototip Cebășev invers și eliptice. (vezi funcțiile Matlab: `chab2ord`, `cheby2`, `ellipord`, `ellip`)
2. Scrieți un program care încarcă înregistrarea unui semnal din fișierul `Lab3_semnal.mat` și îl filtrează cu un filtru trece-jos având specificațiile $\omega_p = 10$, $G_p = 0.794$ (-2dB), $\omega_s = 20$, $G_s = 0.1$. Se vor trasa spectrele Fourier ale semnalului inițial și al semnalului filtrat. (vezi lucrarea 1). Fișierul conține vectorul momentelor de timp și vectorul valorilor semnalului prelevate la momentele de timp respective. (Vezi funcția `filter`)