ANALIZA ŞI SIMULAREA ÎN FRECVENȚĂ PENTRU SISTEMELE CONTINUE

OBIECTIVE

- Răspunsul în frecvență la o mărime de intrare sinusoidală.
- Reprezentarea diagramelor Bode şi obținerea indicatorilor de calitate.
- Trasarea caracteristicii polare (Nyquist) de frecvență şi determinarea stabilității.

6.1. Răspunsul în frecvență

Răspunsul în frecvență este răspunsul sistemului (în circuit deschis) în regim staționar obținut atunci când la intrarea sistemului se aplică o mărime sinusoidală: $r(t) = A\cos\omega t$ (6.1). Aşadar, ieşirea sistemului din funcția de transfer $G(s)$ va fi:

$$Y(s) = \frac{sAG(s)}{s^2 + \omega^2} \tag{6.2}$$

Descompunând în sumă de fracții simple rezultă:

$$Y(s) = \frac{k_1}{s-j} + \frac{k_1^*}{s+j} + \sum \text{termenii dati de polii lui } G(s) \tag{6.3}$$

Polii lui $G(s)$ sunt frecvențele naturale ale sistemului şi determină forma componentelor tranzitorii ale răspunsului sistemului. Pentru sistemele liniare, termenii dați de polii lui $G(s)$ nu contribuie la răspunsul staționar $y(t)$. Pe de altă parte, răspunsul staționar este dat de transformata Laplace inversă a primilor doi termeni din (6.3), adică:

$$y(t) = A|G(j\omega)|\cos(\omega t + \theta) \tag{6.4}$$

Din această relație rezultă că ieşirea sistemului are aceeaşi frecvență ca şi intrarea şi poate fi obținută prin multiplicarea amplitudinii intrării cu $|G(j\omega)|$, fiind defazată față de intrare cu argumentele lui $G(j\omega)$. Amplitudinea lui $G(j\omega)$ şi argumentul lui $G(j\omega)$ pentru toate valorile lui ω, constituie răspunsul în frecvență al sistemului. Corelația dintre răspunsul în frecvență şi răspunsul tranzitoriu ale sistemului este indirectă, exceptând cazul sistemului de ordinul doi. În practică, un anumit răspuns în frecvență utilizând diferite criterii de sinteză, va determina răspunsul tranzitoriu dorit.

Răspunsul în frecvență al sistemului închis de ordinul doi:

$$G_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{6.5}$$

este dat de:

$$G_0(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \angle \varphi(\omega)\,. \tag{6.6}$$

Deşi răspunsul sistemului în circuit închis depinde şi de unghiul de fază, acesta se poate neglija. Astfel, răspunsul în frecvență al sistemului este dat de funcția:

$$M(\omega) = |G_0(j\omega)| = \left|\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)}\right|, \tag{6.7}$$

sau în decibeli: $M^{\text{dB}}(\omega) = 20\lg|G_0(j\omega)|$ (figura 6.1.1).

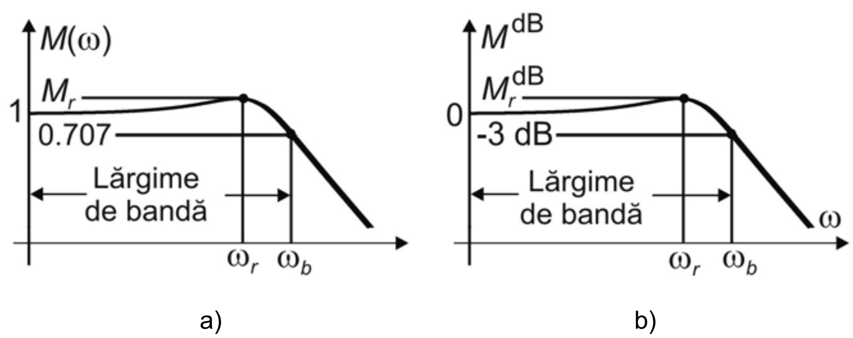


Fig. 6.1.1 Răspunsul în frecvență al sistemului de ordinul doi

Caracteristicile principale ale răspunsului în frecvență al sistemului în circuit închis sunt, de obicei, evaluate cu următorii indicatori de calitate:

- marginea de amplitudine, m_a;
- marginea de fază, γ;
- vârful de rezonanță, M_r;
- lărgimea (lățimea) de bandă, $0 - \omega_b$.

În legătură cu aceşti indicatori se poate sublinia faptul că, deşi marginile de amplitudine şi de fază caracterizează răspunsul în frecvență al sistemului în circuit închis, ei se calculează utilizând funcția de frecvență a sistemului în circuit deschis, G(jω).

Frecvența la care se obține valoarea maximă a lui $|G(j\omega)|$ este frecvența de rezonanță. În cazul nostru, pentru $\zeta < 0.707$, frecvența de rezonanță este dată de $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$ (6.10). Valoarea maximă a amplitudinii răspunsului la o frecvență (vârful de rezonanță) este:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} . \tag{6.8}$$

Marginea de amplitudine este definită prin următoarea relație:

$$m_a = \frac{1}{|G(j\omega_{-\pi})|} , \tag{6.9}$$

sau, în decibeli, $m_a^{dB} = 20\lg m_a = -20\lg|G(j\omega_{-\pi})|$ şi marginea de fază este definită conform relației:

$$\gamma = 180^\circ + \Phi = 180^\circ + \angle G(j\omega_t) \tag{6.10}$$

unde $\omega_{-\pi}$ = pulsația de fază, iar ω_t = pulsația de tăiere.

Răspunsul în frecvență cu ajutorul programului Matlab este obținut cu funcția:

`g=freqs(num,den,ω),`

unde:
`num` = numărătorul funcției de transfer;
`den` = numitorul funcției de transfer;
ω = pulsația.

Marginile de amplitudine şi de fază se obțin în Matlab cu funcția `margin(num,den)`. Pe de altă parte, în unele versiuni de Matlab, există şi funcția `freqspec(ω,mag)`, care determină valorile ω_b, M_r bazate pe valorile lui ω şi `mag` = amplitudinea.

6.2. Diagrame Bode

Diagramele Bode sunt caracteristici semilogaritmice amplitudine - pulsație şi fază - pulsație. Ele reprezintă graficele funcțiilor $A^{dB}(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$, în care abscisa este gradată în scară logaritmică, iar ordonata este gradată în decibeli (dB) pentru $A^{dB}(\omega)$ şi respectiv în radiani (grade) pentru $\varphi(\omega)$.

6.2.1. Algoritmul de trasare a diagramelor Bode

Se parcurg următoarele etape:

1) Se scrie funcția de transfer a sistemului în circuit deschis în forma standard Bode:

$$G(s)H(s) = \frac{K\prod_i (s\tau_i + 1)\prod_j (s^2\tau_j^2 + 2\zeta_j\tau_j s + 1)}{s^\alpha \prod_k (sT_k + 1)\prod_l (s^2 T_k^2 + 2\zeta_j T_j s + 1)} , \tag{6.11}$$

respectiv

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K\prod_i (j\omega\tau_i + 1)\prod_j (-\omega^2\tau_j^2 + 2\zeta_j\tau_j j\omega + 1)}{(j\omega)^\alpha \prod_k (j\omega T_k + 1)\prod_l (-\omega^2 T_k^2 + 2\zeta_j T_j j\omega + 1)} \tag{6.12}$$

2) Pe axa pulsațiilor, gradată logaritmic, se dispun în ordine crescătoare pulsațiile de frângere $\omega_{fi} = 1/\tau_i$, $\omega_{fj} = 1/\tau_j$, $\omega_{fk} = 1/T_k$, $\omega_{fl} = 1/T_l$.

6.2.1.1. Caracteristica logaritmică a modulului

3a) Se trasează caracteristicile logaritmice ale modulului pentru fiecare factor individual din (6.12).

3b) Se calculează factorul de amplificare în decibeli, $K^{dB} = 20\lg K$ şi se notează pe grafic punctul $(1, K^{dB})$. Se trasează prin acest punct asimptota de joasă frecvență, care are panta $-20\alpha dB/dec$. La intersecția asimptotei de joasă frecvență cu linia verticală de la prima frecvență de frângere se modifică panta acesteia cu $\pm 20dB/dec$ sau $\pm 40dB/dec$, după cum verticala corespunde unei pulsații de frîngere de ordinul unu sau doi de la numărător sau numitor. Pasul se repetă până la ultima pulsație de frângere. Se corectează caracteristica asimptotică în zona pulsațiilor de frângere cu $\pm 3dB/dec$ pentru un element de ordinul unu de la numărător, respectiv numitor şi cu $20\lg(1/2\zeta)$ pentru un element de ordinul doi.

6.2.1.2. Caracteristica logaritmică a fazei

4) Se desenează pe abscisa unui grid (rețea de linii ajutătoare) semilogaritmic (fază-pulsație), punctele corespunzătoare pulsațiilor $\omega_f/10$ şi $10\omega_f$ pentru toți factorii din funcția de transfer. Pentru fiecare factor individual din (6.12) se trasează caracteristicile aproximative ale fazei.

5) Se trasează asimptota de joasă frecvență a caracteristicii fazei, care este o dreaptă orizontală la $-90\times\alpha$. În continuare, se adună grafic caracteristicile aproximative de fază ale factorilor individuali din funcția de frecvență.

Funcția **bode** din Matlab este folosită pentru trasarea caracteristicilor semilogaritmice ale unei funcții de transfer.

Funcția **bode** se apelează astfel:

```
bode(num,den) sau bode(num,den,ω).
```

Pe de altă parte, dacă se cunoaşte funcția de transfer şi pulsația, se pot determina amplitudinea, respectiv faza, astfel:

```
[mag,phase]=bode(num,den,ω).
```

O ultimă variantă de apelare a funcției **bode** este:

```
[mag,phase,ω]=bode(num,den),
```

cu ajutorul căreia se determină amplitudinea, faza şi pulsația.

Observație

`num`,`den` reprezintă numărătorul, respectiv numitorul funcției de transfer, `mag`=magnitudinea (amplitudinea), `phase`=faza, iar ω=pulsația.

În spațiul stărilor, funcția **bode** se apelează cu una din sintaxele:

```
bode(A,B,C,D,u,ω),
bode(A,B,C,D,u),
bode(A,B,C,D),
[mag,phase]=bode(A,B,C,D,u,ω),
[mag,phase,ω]=bode(A,B,C,D,u),
```

unde `A`,`B`,`C`,`D` sunt matricele din spațiul stărilor, iar u intrarea sistemului.

6.3. Diagrame Nyquist

Un alt criteriu important de studiu al stabilității sistemelor continue (din domeniul frecvenței) este criteriul lui Nyquist. Acesta este un criteriu frecvențial şi are avantajul că foloseşte caracteristicile amplitudine-pulsație şi fază-pulsație (caracteristicile Bode). Pentru ca un sistem liniar şi continuu stabil în stare deschisă să fie stabil şi în stare închisă, este necesar şi suficient ca punctul (-1, j0) să nu se afle în interiorul caracteristicii amplitudine-pulsație al sistemului deschis.

Funcția **nyquist** din Matlab calculează răspunsul în frecvență pentru un sistem liniar. Reprezentarea grafică a acestui răspuns poartă numele de loc Nyquist sau loc de transfer sau hodograf. Locul Nyquist se utilizează în analiza şi sinteza sistemelor de reglare automată.

Dacă sistemul liniar este reprezentat prin funcția de transfer:

$$G(s)H(s)=\frac{num(s)}{den(s)}, \tag{6.13}$$

atunci răspunsul Nyquist se obține cu una din sintaxele:

```
[re,im]=nyquist(num,den,ω),
[re,im,ω]=nyquist(num,den),
nyquist(num,den),
nyquist(num,den,ω).
```

Dacă sistemul liniar este reprezentat în spațiul stărilor prin ecuațiile:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=Ax(t)+Bu(t),\\ y(t)&=Cx(t)+Du(t),\end{aligned} \tag{6.14}$$

atunci:

```
[re,im]=nyquist(A,B,C,D,u,ω),
[re,im,ω]=nyquist(A,B,C,D,u),
nyquist(A,B,C,D,u),
nyquist(A,B,C,D,u,ω),
```

calculează răspunsul în frecvență corespunzător componentei u a intrării. Vectorul ω (se poate omite) specifică pulsațiile pentru care este evaluat răspunsul Nyquist.

Funcția **nyquist** determină răspunsul în frecvență sub forma a doua matrice, `re`, `im`, care au tot atâtea coloane câte componente are vectorul de ieşire y şi acelaşi număr de linii.

Observație:

Atât caracteristicile Bode cât şi Nyquist, pot fi folosite pentru determinarea răspunsului în frecvență al unui sistem. Dacă sistemul liniar are poli situați pe axa imaginară $j\omega$, iar vectorul ω conține frecvențele corespunzătoare acestor puncte, atunci matricea $(j\omega\mathrm{I}-\mathrm{A})$ este singulară şi funcția **nyquist** furnizează mesajul: „Matrix is singular to working precision".

6.4. Exerciții propuse

Exercițiul 6.4.1

Funcția de transfer a sistemului în circuit închis este:

$$G_0(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Să se determine răspunsul în frecvență al sistemului (pulsația are următoarele valori $\omega = [0:3]$ cu pasul $0{,}01$).

Exercițiul 6.4.2

Pornind de la exemplul anterior se introduce un pol suplimentar, rezultând astfel următoarea funcție de transfer:

$$G_0(s) = \frac{10}{(s + 2.5)(s^2 + 2s + 4)}$$

Să se reprezinte răspunsul sistemului la intrarea treaptă şi răspunsul în frecvență al sistemului (în aceeaşi fereastră vor apărea 2 grafice). Se va folosi funcția **subplot** ($t = [0:4]$, pasul 0,02 şi $\omega = [0:3]$, pasul 0,01).

Exercițiul 6.4.3

Se dă un sistem închis de ordinul trei în circuit închis:

$$G_0(s) = \frac{750}{s^3 + 36s^2 + 205s + 750}$$

Scopuri:

- Determinarea polilor sistemului.
- Obținerea unei reduceri a ordinului modelului.
- Reprezentarea răspunsului în frecvență, la intrarea treaptă a sistemului de ordinul 3 şi a sistemului redus (în aceeaşi fereastră vor apărea patru grafice, două reprezentând răspunsurile în treaptă şi în frecvență pentru sistemul de ordinul 3, iar celelalte două fiind răspunsurile în treaptă şi în frecvență pentru sistemul redus).

Date $t = [0:2]$, pasul 0,2; $\omega = [0:8]$, pasul 0,2.

Exercițiul 6.4.4

Pentru sistemele liniare cu funcțiile de transfer în circuit deschis:

$$G(s) = \frac{150(s + 0.2)(s + 1)}{s(s + 3)(0.01s^2 + 0.1s + 1)},$$

$$G(s) = \frac{20(s^2 + s + 1)}{s(s + 2)(0.01s^2 + 0.1s + 1)}.$$

- Să se traseze caracteristicile de frecvență amplitudine-pulsație şi fază-pulsație folosind funcția **bode**.
- Să se traseze diagramele bode folosind funcția **plot**; pentru calcularea pulsației se va folosi funcția **logspace**, care se va aplica, pentru primul sistem, pe intervalul [-3,3], respectiv [-2,2] pentru cel de-al doilea sistem. Se vor reprezenta magnitudinea în funcție de pulsație, respectiv faza în funcție de pulsație.

- Să se determine marginile de amplitudine şi de fază.

Exercițiul 6.4.5

Fie sistemul caracterizat prin funcția de transfer în circuit deschis:

$$G(s)=\frac{10}{s^3+3s^2+2s}.$$

Să se traseze locul de transfer al funcției de transfer. Pentru determinarea pulsației se va folosi funcția **logspace**, care se va aplica pe intervalul [-1,2].

Exercițiul 6.4.6

Se consideră sistemul reprezentat în spațiul stărilor:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -25 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

Să se traseze diagramele **bode** pentru următoarele funcții de transfer $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$, $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ (în aceste două cazuri se consideră $U_2(j\omega)=0$), respectiv $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$, $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ (se consideră $U_1(j\omega)=0$).

Exercițiul 6.4.7

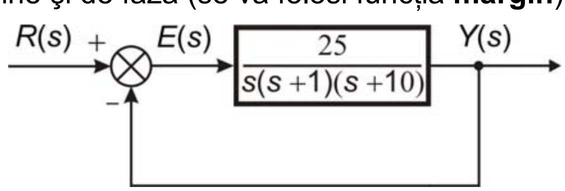
Se consideră sistemul reprezentat în spațiul stărilor:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 6.5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

Să se traseze diagramele **nyquist** referitoare la intrarea u_1, respectiv la intrarea u_2, în diagrame diferite.

Exercițiul 6.4.8

Să se traseze diagramele **bode** pentru sistemul din figură şi să se determine marginile de amplitudine şi de fază (se va folosi funcția **margin**).



Exercițiul 6.4.9

Se consideră următoarele două sisteme cu funcțiile de trasfer în circuit închis:

$$G_{01}(s)=\frac{1}{s+1};$$

$$G_{02}(s)=\frac{1}{3s+1}.$$

Să se traseze răspunsul în frecvență (în coordonate logaritmice), răspunsul în timp la intrarea treaptă unitară şi răspunsul în timp la intrarea rampă unitară (în aceeaşi fereastră se vor trasa trei grafice, în fiecare fereastră reprezentându-se răspunsurile pentru ambele sisteme). Să se compare cele două sisteme şi să se determine care este cel mai rapid. Date $\omega = [0:20]$, pasul 0,1; $t = [0:8]$, pasul 0,01.