ANALIZA ŞI SIMULAREA ÎN FRECVENŢĂ A SISTEMELOR CONTINUE

1.1. Răspunsul în frecvenţă

Răspunsul la frecvenţă este răspunsul în regim staţionar obţinut când la intrarea sistemului se aplică o mărime sinusoidală : $r(t) = A\cos\omega t$ (1.1). Deci ieşirea sistemului în funcţie de transfer $G(s)$ este :

$$Y(s) = \frac{sAG(s)}{s^2 + \omega^2} \tag{1.2}$$

Descompunând în sumă de fracţii simple rezultă:

$$Y(s) = \frac{k_1}{s - j} + \frac{k_1^*}{s + j} + \sum \textit{termenii dati de polii lui } G(s) \tag{1.3}$$

Polii lui $G(s)$ sunt frecvenţele naturale ale sistemului şi ele determină forma componentelor tranzitorii ale răspunsului sistemului. Pentru sistemele liniare termenii daţi de polii lui $G(s)$ nu contribuie la răspunsul staţionar $y(t)$. Pe de altă parte răspunsul staţionar este dat de transformata Laplace inversă a primilor doi termeni din (1.3) adică:

$$y(t) = A|G(j\omega)|\cos(\omega t + \theta) \tag{1.4}$$

Din această relaţie (1.4) rezultă că ieşirea sistemului are aceeaşi frecvenţă ca şi intrarea şi poate fi obţinută prin multiplicarea amplitudinii intrării cu $|G(j\omega)|$ şi este defazată faţă de intrare cu argumentele lui $G(j\omega)$. Amplitudinea lui $G(j\omega)$ şi argumentul lui $G(j\omega)$ pentru toate valorile lui ω constituie răspunsul la frecvenţă al sistemului. Corelaţia dintre răspunsul la frecvenţă şi răspunsul tranzitoriu al sistemului este indirectă, exceptând cazul sistemului de ordinul doi. În practică un anumit răspuns la frecvenţă utilizând diferite criterii de sinteză va determina un răspuns tranzitoriu dorit.

Răspunsul la frecvenţă al sistemului de ordinul unu este:

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \tag{1.5}$$

se obţine înlocuind se obţine înlocuind $s = j\omega$:

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} < \Phi(\omega) \tag{1.6}$$

unde $\Phi(\omega) = \ \ arctg(\tau\omega)$.

Lărgimea de bandă a sistemului, ω_b este de ordinul unu la care $\left|G(j\omega_b)\right| = \sqrt{2}/2$. Pentru sistemul de ordinul unu ea este $\omega_b = 1/T$. Răspunsul la frecvenţă al sistemului de ordinul doi:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{1.7}$$

este dat de:

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}} < \Phi(\omega) \tag{1.8}$$

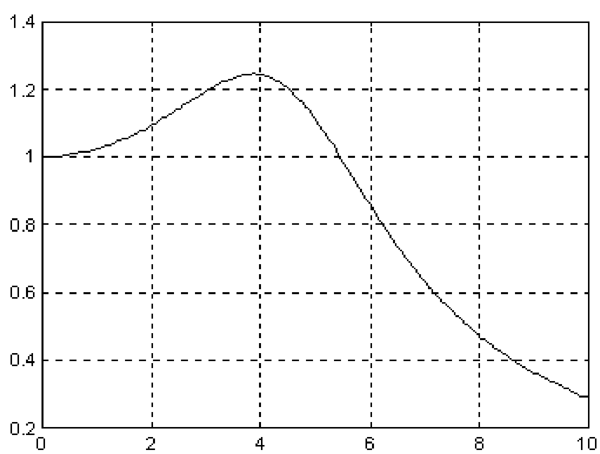

Fig 1.1 Răspunsul în frecvenţă al sistemului de ordinul doi

Pentru un ζ constant dacă ω_n descreşte atunci ω_b descreşte cu acelaşi factor. Aceasta răspunde la o descreştere a timpului de maxim şi a duratei regimului tranzitoriu. Pentru un sistem particular avem relaţia $\omega_b t_c \quad const$. (1.9) şi această constantă este 2.

Frecvenţa la care se obţine valoarea maximă a lui $|G(j\omega)|$ este frecvenţa de rezonanţă. În cazul nostru pentru $\zeta < 0.707$ frecvenţa de rezonanţă este dată de $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$ (1.10).
Valoarea maximă a amplitudinii răspunsului la o frecvenţă (vârful de rezonanţă) este:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{1.11}$$

Marginea de amplitudine este definită cu următoarea relaţie:

$$m_a = \frac{1}{|G(j\omega_{-\pi})|}, \tag{1.12}$$

sau în decibeli $m_a^{dB} = 20\lg m_a = -20\lg|G(j\omega_{-\pi})|$ şi marginea de fază este definită conform relaţiei:

$$\gamma = 180^\circ + \Phi = 180^\circ + \square G(j\omega_t), \tag{1.13}$$

unde ω_{π} =pulsaţia de fază iar ω_t =pulsaţia de tăiere.

Răspunsul la frecvenţă cu ajutorul programului MATLAB este obţinut cu funcţia:

```
g=freqs(num,den,ω),
```

unde
`num`=numărătorul funcţiei de transfer;
`den`=numitorul funcţiei de transfer;
ω = pulsaţia.
Marginile de amplitudine şi de fază se obţin în MATLAB cu funcţia `margin(num,den)`.

Pe de alta parte, în unele versiuni de MATLAB, există şi funcţia `freqspec(ω,mag,` care determină valorile ω_b, M_r bazate pe valorile lui ω şi `mag` =amplitudinea.

1.2. Diagrame Bode

Diagramele Bode sunt caracteristici semilogaritmice amplitudine – pulsaţie şi fază – pulsaţie. Ele reprezintă graficele funcţiilor $A^{dB}(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$, în care abscisa este gradată în scară logaritmică, iar ordonata este gradată în decibeli (dB) pentru $A^{dB}(\omega)$ şi respectiv în radiani (grade) pentru $\varphi(\omega)$.

1.2.1. Algoritmul de trasare a diagramelor Bode

Se parcurg următoarele etape:
Se scrie funcţia de transfer a sistemului în circuit deschis în forma standard Bode, conform relaţiei:

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_i (s\tau_i+1)\prod_j (s^2\tau_j^2+2\zeta_j\tau_j s+1)}{s^\alpha\prod_k (sT_k+1)\prod_l (s^2T_k^2+2\zeta_j T_j s+1)} \tag{1.14}$$

Respectiv

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K\prod_i (j\omega\tau_i+1)\prod_j (-\omega^2\tau_j^2+2\zeta_j\tau_j j\omega+1)}{(j\omega)^\alpha\prod_k (j\omega T_k+1)\prod_l (-\omega^2T_k^2+2\zeta_j T_j j\omega+1)} \tag{1.15}$$

Pe axa pulsaţiilor gradată logaritmic se dispun în ordine crescătoare pulsaţiile de frângere $\omega_{fi}=1/\tau_i$, $\omega_{fj}=1/\tau_j$, $\omega_{fk}=1/T_k$, $\omega_{fl}=1/T_l$.

1.2.1.1. Caracteristica logaritmică a modulului

Se trasează caracteristicile logaritmice ale modului pentru fiecare factor individual din (1.15).
Se calculează factorul de amplificare în decibeli, $K^{dB}=20\lg K$ şi se figurează punctul $(1,K^{dB})$. Se trasează prin acest punct asimptota de joasă frecvenţă, care are panta $-20\alpha dB/dec$.
La intersecţia asimptotei de joasă frecvenţă cu linia verticală de la prima frecvenţă de frângere se modifică panta acesteia cu $\pm 20dB/dec$ sau $\pm 40dB/dec$, după cum verticala corespunde unei pulsaţii de frîngere de ordinul unu sau doi de la numărător sau numitor. Pasul se repetă până la ultima pulsaţie de frângere. Se corectează caracteristica asimptotică în zona pulsaţiilor de frângere cu $\pm 3dB/dec$ pentru un element de ordinul unu de la numărător, respectiv numitor şi cu $20\lg(1/2\zeta)$ pentru un element de ordinul doi.

1.2.1.2. Caracteristica logaritmică a fazei

Se desenază pe abscisa unui grid semilogaritmic (fază-pulsaţie), punctele corespunzătoare pulsaţiilor $\omega_f/10$ şi $10\omega_f$, pentru toţi factorii din funcţia de transfer. Pentru fiecare factor individual din (1.15) se trasează caracteristicile aproximative ale fazei.
Se trasează asimptota de joasă frecvenţă a caracteristicii fazei, care este o dreaptă orizontală la $-90\times\alpha$. În continuare se adună grafic caracteristicile aproximative de fază ale factorilor individuali din funcţia de frecvenţă.
Funcţia **bode** din MATLAB este folosită pentru trasarea caracteristicilor semilogaritmice a unei funcţii de transfer. Funcţia **bode** se apelează astfel:

```
bode(num,den) sau bode(num,den,ω)
```

Pe de altă parte dacă se cunoaşte funcţia de transfer şi pulsaţia se poate determina amplitudinea, respectiv faza, astfel:

```
[mag,phase]=bode(num,den,ω)
```

O ultimă variantă de apelare a funcţiei **bode** este:

```
[mag,phase,ω]=bode(num,den),
```

cu ajutorul căreia se determină ampliudinea, faza şi pulsaţia.

Observaţie
`num`,`den` reprezintă numărătorul, respectiv numitorul funcţiei de transfer, `mag`=magnitudinea (amplitudinea), `phase`=faza iar ω=pulsaţia.
În spaţiul stărilor funcţia **bode** se apelează cu una din sintaxele:

```
bode(A,B,C,D,u,ω);
bode(A,B,C,D,u);
bode(A,B,C,D);
[mag,phase]=bode(A,B,C,D,u,ω);
[mag,phase,ω]=bode(A,B,C,D,u);
```

unde `A`,`B`,`C`,`D` sunt matricele din spaţiul stărilor iar u intrarea sistemului.

1.3. Diagrame Nyquist

Un alt criteriu important de studiu al stabilităţii sistemelor continue (din domeniul frecvenţei) este criteriul lui Nyquist. Acesta este un criteriu frecvenţial. Aceste criteriu are avantajul că foloseşte caracteristicile amplitudine-pulsaţie şi fază-pulsaţie (caracteristicile Bode).

Pentru ca un sistem liniar şi continuu stabil în stare deschisă să fie stabil şi în stare închisă, este necesar şi suficient ca punctul (-1,j0) să nu se afle în interiorul caracteristicii amplitudine- pulsaţie a sistemului deschis.

Funcţia **nyquist** din MATLAB calculează răspunsul în frecvenţă pentru un sistem liniar. Reprezentarea grafică a acestui răspuns poartă numele de loc Nyquist sau loc de transfer sau hodograf. Locul Nyquist se utilizează în analiza şi sinteza sistemelor de reglare automată.

Dacă sistemul liniar este reprezentat prin funcţia de transfer:

$$G(s)H(s)=\frac{num(s)}{den(s)} \tag{1.16}$$

atunci răspunsul nyquist se obţine astfe cu una din sintaxele:

```
[re,im]=nyquist(num,den,ω),
[re,im,ω]=nyquist(num,den),
 nyquist(num,den),
nyquist(num,den,ω).
```

Dacă sistemul liniar este reprezentat în spaţiul stărilor prin ecuaţiile:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.17}$$

atunci:

```
[re,im]=nyquist(A,B,C,D,u,ω),
[re,im,ω]=nyquist(A,B,C,D,u),
nyquist(A,B,C,D,u),
nyquist(A,B,C,D,u,ω).
```

calculează răspunsul în frecvenţă corespunzător componentei u a intrării. Vectorul ω (se poate omite) specifică pulsaţiile pentru care este evaluat răspunsul Nyquist. Funcţia **nyquist** determină răspunsul în frecvenţă sub forma a doua matrice, `re`, `im`, care au tot atâtea coloane câte componente are vectorul de ieşire y şi acelaşi număr de linii.

Observaţie:
Atât caracteristicile Bode cât şi cea Nyquist pot fi folosite pentru determinarea răspunsului în frecvenţă al unui sistem.
Dacă sistemul liniar are poli situaţi pe axa imaginară iar vectorul ω conţine frecvenţele corespunzătoare acestor puncte, atunci matricea $(j\omega I - A)$ este singulară şi funcţia **nyquist** furnizează mesajul: „Matrix is singular to working precision". În versiunea MATLAB programul pentru trasarea locului nyquist este simplu.

1.4. Exerciţii propuse

Exerciţiul 1.

Funcţia de transfer a sistemului închis este:

$$G(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Să se determine răspunsul în frecvenţă al sistemului (pulsaţia are următoarele valori $\omega = [0:3]$ cu pasul 0.01).

Exerciţiul 2.

Pornind de la exemplul anterior introducem un pol suplimentar, rezultând astfel următoarea funcţie de transfer:

$$G(s) = \frac{10}{(s + 2.5)(s^2 + 2s + 4)}$$

Să se reprezinte răspunsul sistemului la intrarea treaptă şi răspunsul la frecvenţă a sistemului (în aceeaşi fereastră vor apărea 2 grafice; se va folosi funcţia **subplot**)($t = [0:4]$, pasul 0,02 şi $\omega = [0:3]$, pasul 0,01).

Exerciţiul 3.

Se dă un sistem închis de ordinul trei:

$$G(s) = \frac{750}{s^3 + 36s^2 + 205s + 750}$$

Scopuri:

- determinarea polilor sistemului;
- obţinerea unei reduceri a ordinului modelului;
- reprezentaţi răspunsul în frecvenţă şi răspunsul la intrarea treaptă a sistemului de ordinul 3 şi a sistemului redus (în aceeaşi fereastră vor apărea 4 grafice, 2 reprezentând răspunsul în treaptă şi în frecvenţă pentru sistemul de ordinul 3 iar celelalte 2 reprezintă răspunsul în treaptă şi în frecvenţă pentru sistemul redus).

Date $t = [0:2]$ pasul 0,2; $\omega = [0:8]$, pasul 0,2.

Exerciţiul 4.

Fie sistemele liniare care au următoarele funcţii de transfer:

$$G(s) = \frac{150(s+0.2)(s+1)}{s(s+3)(0.01s^2+0.1s+1)}$$

$$G(s) = \frac{20(s^2+s+1)}{s(s+2)(0.01s^2+0.1s+1)}$$

- trasaţi caracteristicile de frecvenţă amplitudine – pulsaţie şi fază – pulsaţie folosind funcţia **bode**;
- trasaţi diagramele bode folosind funcţia **plot**. Pentru determinarea pulsaţiei se va folosi funcţia **logspace** care se va aplica pe intervalul [-3,3] pentru primul sistem, respectiv [-2,2] pentru cel de-al doilea sistem. Se va reprezenta magnitudinea în funcţie de pulsaţie, respectiv faza în funcţie de pulsaţie;
- determinati marginea de amplitudine şi marginea de fază.

Exerciţiul 5.

Fie sistemul caracterizat prin funcţia de transfer:

$$G(s)=\frac{10}{s^3+3s^2+2s}$$

Să se traseze locul de transfer al funcţiei de transfer. Pentru determinarea pulaţiei se va folosi funcţia **logspace** care se va aplica pe intervalul [-1,2].

Exerciţiul 6.

Se consideră sistemul reprezentat în spaţiul stărilor:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -25 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Să se traseze diagramele bode pentru următoarele funcţii de transfer $Y_1(j\omega)/U_1(j\omega)$, $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$ (în aceste două cazuri se consideră $U_2(j\omega)=0$), respectiv $Y_2(j\omega)/U_1(j\omega)$, $Y_2(j\omega)/U_2(j\omega)$ (cazuri în care se consideră $U_1(j\omega)=0$).

Exerciţiul 7.

Se consideră sistemul reprezentat în spaţiul stărilor:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 6.5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Să se traseze diagramele nyquist referitoare la intrarea u_1 şi respectiv la intrarea u_2, în diagrame diferite.

Exerciţiul 8.

Să se traseze diagramele bode pentru sistemul din figură. Determinaţi apoi marginea de aplitudine şi marginea de fază (se va folosi funcţia **margin**).