METODE DE INTEGRARE NUMERICĂ A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE CU DERIVATE PARŢIALE

În diferite aplicaţii din electromagnetism este necesar studiul câmpurilor potenţiale, ceea ce necesită rezolvarea unor ecuaţii de forma:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

unde ε este permitivitatea mediului.

Considerând cazul câmpurilor cu simetrie plan paralelă, ecuaţia devine:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho_v(x, y)}{\varepsilon}$$

În continuare vor fi prezentate două metode numerice de rezolvare a ecuaţiei $\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$ pentru un domeniu dat.

Aceste metode au drept scop determinarea valorii funcţiei necunoscute V (potenţial) în orice punct al domeniului dat, pentru care este satisfăcută ecuaţia şi condiţiile specificate pentru frontiera domeniului.

Condiţiile de frontieră pot fi:

- Condiţii de ***specia întâi***, sau condiţii de tip Dirichlet, dacă pe frontieră sunt date valorile funcţiei necunoscute.

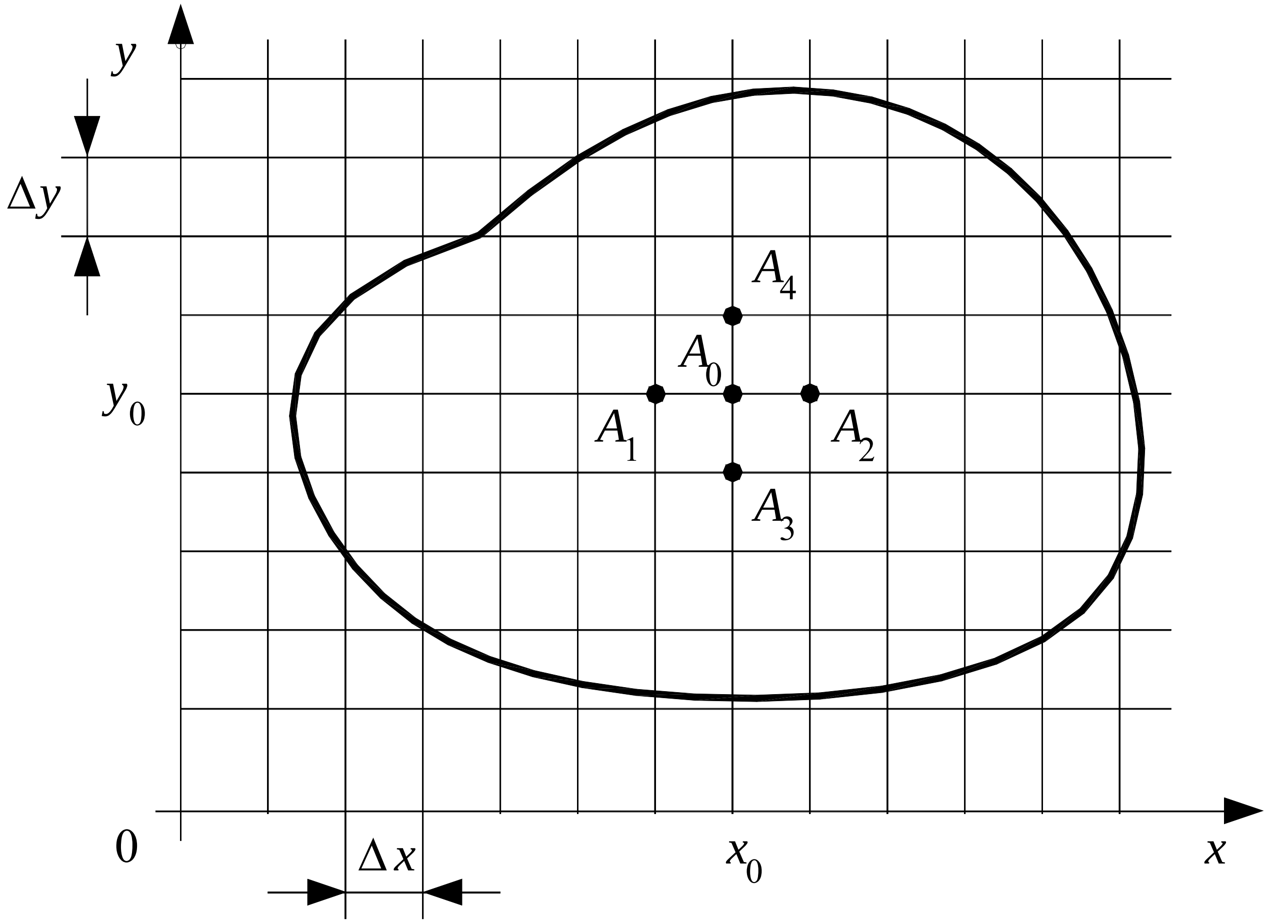
- Condiţii de ***specia a doua***, sau condiţii de tip Neumann, dacă pe frontieră sunt date valorile derivatei funcţiei necunoscute după direcţia normală.

- Condiţii de ***specie mixtă*** dacă în unele zone ale frontierei sunt date condiţii de specia întâi iar în celelalte zone condiţii de specia a doua.

În ambele metode rezolvarea ecuaţiei diferenţiale, pe domeniul dat, este redusă la rezolvarea unui sistem de ecuaţii liniare ale cărui necunoscute sunt valorile potenţialului în puncte ale domeniului dat.

METODA DIFERENŢELOR FINITE

În aceasta metodă stabilirea coordonatelor punctelor domeniului, pentru care se vor determina valorile potenţialului, se determină prin acoperirea domeniului dat, *D*, cu o reţea de drepte paralele. Pentru simplificarea expresiei ecuaţiilor care urmează a fi determinate reţeaua de drepte se va duce paralel cu axele de coordonate.



În funcţie de valorile utilizate pentru distanţele Δx şi Δy pot fi definite diferite tipuri de reţele.

În cazul din figura: $\Delta x = \Delta y = h$, caz în care reţeaua are ***pas constant***

în caz contrar reţeaua are ***pas variabil***.

Reţeaua trasată va determina în interiorul domeniului D un număr $\boldsymbol{n}$ de noduri.

Valorile funcţiei necunoscute (potenţialul) în aceste noduri vor constitui necunoscutele sistemului de ecuaţii liniare echivalent ecuaţiei diferenţiale de rezolvat.

Pentru fiecare nod urmează a fi determinată o ecuaţie obţinându-se în final un sistem de $\boldsymbol{n}$ ecuaţii cu $\boldsymbol{n}$ necunoscute.

Nodurile determinate de reţeaua trasată se împart în două categorii:

- **Noduri <u>interioare</u> domeniului** D, de tip $\boldsymbol{A_0}$, care au toate punctele vecine, $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$, $\boldsymbol{A_4}$, în interiorul domeniului.

- **Noduri <u>în apropierea frontierei</u> domeniului** D, care au cel puţin unul dintre punctele vecine, $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$, $\boldsymbol{A_4}$, în afara domeniului.

Ecuaţia corespunzătoare unui **nod interior domeniului** *D*, se determină utilizând dezvoltarea în serie Taylor a unei funcţii de două variabile:

$$V\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)=V\left(x_0, y_0\right)+\Delta x\cdot\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\left(x_0,y_0\right)}+\Delta y\cdot\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{\left(x_0,y_0\right)}+$$

$$+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\cdot\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{\left(x_0,y_0\right)}+\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{2!}\cdot\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right|_{\left(x_0,y_0\right)}+\frac{(\Delta y)^2}{2!}\cdot\left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{\left(x_0,y_0\right)}+$$

$$+\frac{(\Delta x)^3}{3!}\cdot\left.\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right|_{\left(x_0,y_0\right)}+\frac{(\Delta x)^2\cdot\Delta y}{3!}\cdot\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2\partial y}\right|_{\left(x_0,y_0\right)}+\frac{\Delta x\cdot(\Delta y)^2}{3!}\cdot\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y^2}\right|_{\left(x_0,y_0\right)}+\frac{(\Delta y)^3}{3!}\cdot\left.\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}\right|_{\left(x_0,y_0\right)}+\cdots$$

Pentru o reţea de drepte paralele cu axele, coordonatele a două puncte alăturate vor diferi fie prin valoarea Δx fie prin valoarea Δy.

Ca urmare particularizarea relaţiei conduce la relaţii de o formă mai simplă.

Reţele cu pas constant

a) Determinarea ecuaţiei corespunzătoare unui nod interior domeniului

Prin particularizarea ecuaţiei succesiv pentru nodurile A_1, A_2, A_3, A_4 se obţine:

$$V_1 = V(x_0 - \Delta x, y_0) = V(x_0, y_0) - \Delta x \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \cdot \left.\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$V_2 = V(x_0 + \Delta x, y_0) = V(x_0, y_0) + \Delta x \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \cdot \left.\frac{\partial^3 V}{\partial x^3}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$V_3 = V(x_0, y_0 - \Delta y) = V(x_0, y_0) - \Delta y \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} - \frac{(\Delta y)^3}{3!} \cdot \left.\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$V_4 = V(x_0, y_0 + \Delta y) = V(x_0, y_0) + \Delta y \cdot \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \cdot \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} + \frac{(\Delta y)^3}{3!} \cdot \left.\frac{\partial^3 V}{\partial y^3}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Notând $V_0 = V(x_0, y_0)$

şi ţinând seama că $\Delta x = \Delta y = h$, prin însumarea celor patru relaţii se obţine ecuaţia:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 4 \cdot V_0 + \left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(x_0, y_0)} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(x_0, y_0)} \right) \cdot h^2$$

Deoarece pe domeniul *D* este satisfăcută relaţia $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\rho_v(x, y)}{\varepsilon}$

rezultă în final

$$\boxed{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4 \cdot V_0 = -\frac{\rho_v(x_0, y_0)}{\varepsilon} \cdot h^2}$$

Coeficientul necunoscutei V_0 este egal în modul, cu suma celorlalţi patru coeficienţi ai necunoscutelor din membrul stâng al ecuaţiei.

b) Determinarea ecuaţiei corespunzătoare unui nod în apropierea frontierei domeniului

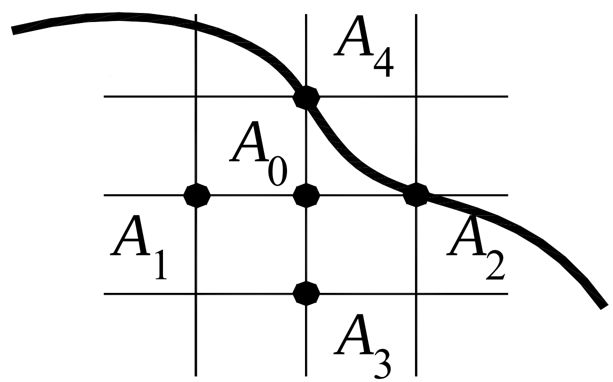
Pentru această categorie de noduri ecuaţia se determină în funcţie de tipul condiţiilor de frontieră, după cum urmează:

➢**Condiţii de frontieră de specia întâi.** Pot interveni următoarele situaţii.

- Frontiera nu intersectează reţeaua:

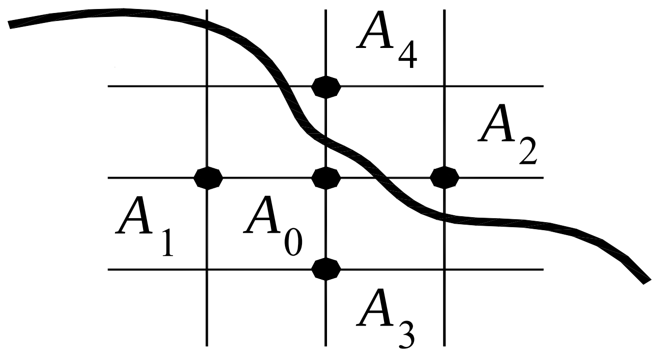
În această situaţie reţeaua conţine noduri ale reţelei.
Ca urmare pentru nodul A_0 se va utiliza o ecuaţie de forma

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4 \cdot V_0 = -\frac{\rho_v(x_0, y_0)}{\varepsilon} \cdot h^2$$



în care se înlocuiesc valorile cunoscute
ale potenţialului în punctele aflate pe frontieră $\boldsymbol{A_2}$ şi $\boldsymbol{A_4}$. Aceste valori vor fi trecute în membrul drept al ecuaţiei.

Frontiera intersectează reţeaua



Pentru nodul A_0 din figura, se va utiliza tot o ecuaţie de forma:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4 \cdot V_0 = -\frac{\rho_v(x_0, y_0)}{\varepsilon} \cdot h^2$$

alegând una din următoarele trei posibilităţi:

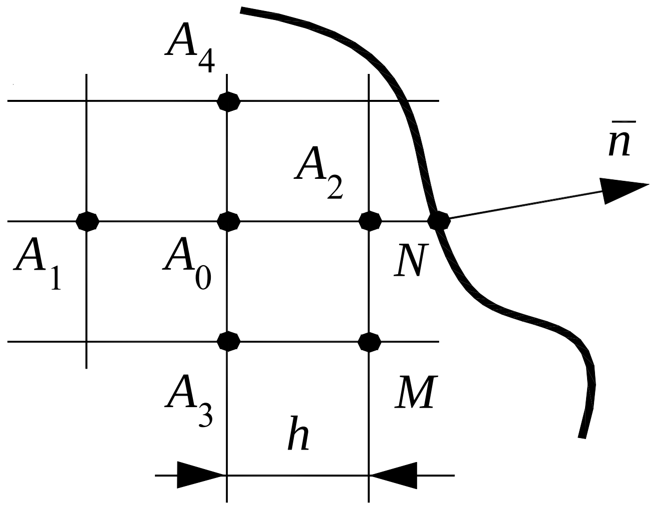
- Utilizarea unei <u>reţele cu un pas mai mic</u>, până se ajunge la situaţia din cazul precedent.

- Utilizarea, pentru punctele A_2 şi A_4 a unor valori ale potenţialului rezultate prin aplicarea unor <u>relaţii de interpolare</u>.

- Utilizarea unei <u>reţele cu pas variabil</u> astfel încât punctele A_2 şi A_4 să aparţină frontierei

➢**Condiţii de frontieră de <u>specia a doua</u>.**

Această situaţie este reprezentată în figura:



Deoarece pasul reţelei este în general mic se poate aproxima că potenţialele punctelor $\boldsymbol{A_2}$ şi $\boldsymbol{N}$ sunt egale.

Pe frontieră fiind specificate condiţii de specia a doua, rezultă că este cunoscută valoarea

$$\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_N$$

Ecuaţia corespunzătoare punctului $A_2 \cong N$ se va deduce plecând de la relaţia de definiţie a derivatei în raport cu normala:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \bar{n} = \left(\bar{i} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \bar{j} \cdot \frac{\partial V}{\partial y}\right) \cdot \bar{n} \quad \text{în care:} \quad \bar{n} = \bar{i} \cdot n_x + \bar{j} \cdot n_y$$

Dezvoltând funcţia $V(x,y)$ în jurul punctului N şi neglijând derivatele de ordin mai mare decât unu, se obţine succesiv:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_N = \left(\bar{i}\cdot\frac{V_N - V_0}{h} + \bar{j}\cdot\frac{V_N - V_M}{h}\right)\cdot\left(\bar{i}\cdot n_x + \bar{j}\cdot n_y\right)$$

$$\frac{V_N - V_0}{h}\cdot n_x + \frac{V_N - V_M}{h}\cdot n_y = \left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_N$$

$$\boxed{\left(n_x + n_y\right)\cdot V_N - n_x\cdot V_0 - n_y\cdot V_M = h\cdot\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_N}$$

O relaţie de aceeaşi formă se obţine şi pentru alte configuraţii posibile.

Referitor la relaţia obţinută poate fi făcută <u>observaţia</u>:

➢Coeficientul necunoscutei V_N este egal în modul, cu suma celorlalţi doi coeficienţi. Deoarece în sistemul de ecuaţii final coeficientul corespunzător necunoscutei V_N se află pe diagonala principală a sistemului rezultă că relaţiile obţinute conduc la un sistem având matricea diagonal dominantă şi ca urmare rezolvabil şi prin metode iterative.