PS

Bilet 2

1. Enumerați cele 4 tipuri de filtre și descrieți datele de proiectare a filtrelor analogice.

• Filtre ideale. Tipuri de filtre

Un filtru va prelucra un semnal de intrare, în scopul diminuării armonicilor într-o anumită bandă de pulsație.

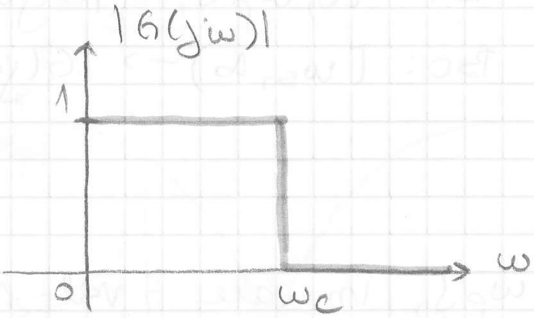
Domeniul valorilor ω pentru care se dorește reducerea armonicilor = bandă de oprire.

Domeniul valorilor ω pt. care nu se dorește reducerea armonicilor = bandă de trecere.

Filtrele ideale consideră că orice semnal armonic din BT este neafectat de filtru și orice semnal armonic din BO este complet eliminat.

TIPURI: a) FTJ b) FTS c) FTB d) FOB.

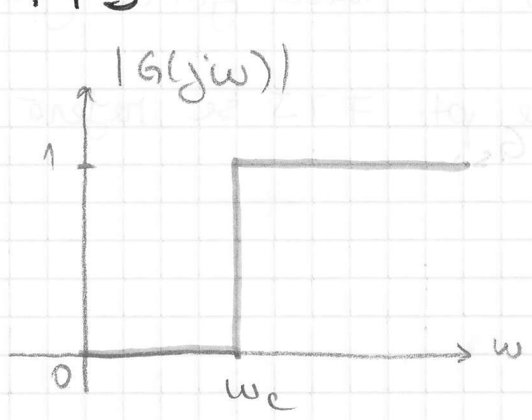
a) FTJ



BT: $[0, \omega_c]$

BO: (ω_c, ∞)

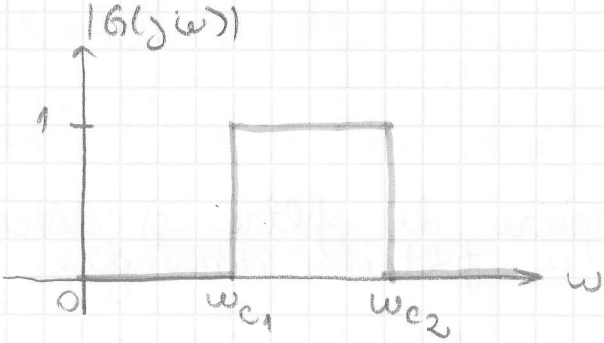
b) FTS



BT: $[\omega_c, \infty)$

BO: $[0, \omega_c)$.

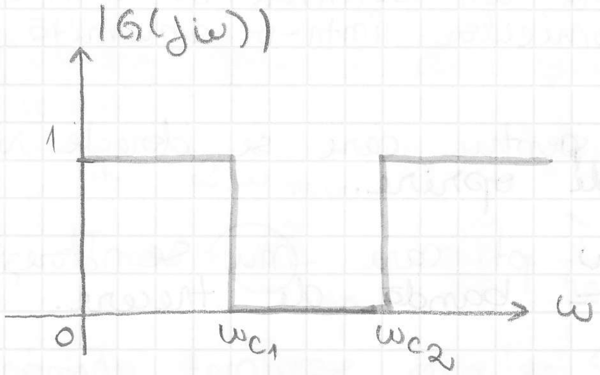
c) FTB



BT: $[\omega_{c_1}, \omega_{c_2}]$

BO: $[0, \omega_{c_1}) \cup (\omega_{c_2}, \infty)$.

d) FOB

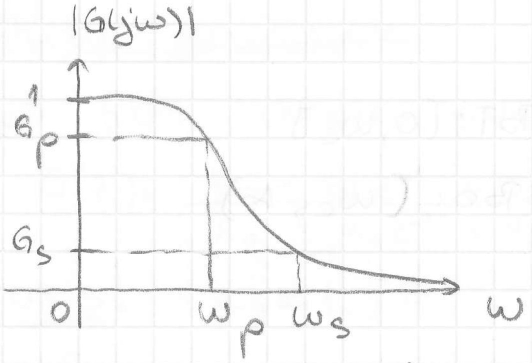


BT: $[0, \omega_{c_1}] \cup [\omega_{c_2}, \infty)$.

BO: $(\omega_{c_1}, \omega_{c_2})$.

• Filtre analogice practice. Specificații de proiectare

a) FTJ



BT: $[0, \omega_p] \to |G(j\omega)| \geq G_p$.

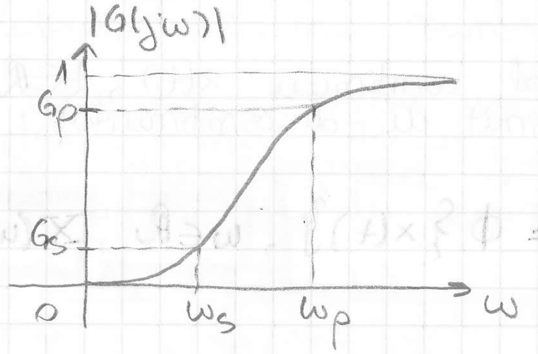
BO: $[\omega_s, \infty) \to |G(j\omega)| \leq G_s$.

BT. este intervalul $[0, \omega_p]$, în care, val. modulului fc. de T este cel puțin G_p.

BO : $[\omega_s, \infty)$, în care, val. mod. fc. de frecv. este cel mult G_s.

Specificațiile de proiectare pt. FTJ se referă la valorile: ω_p, G_p, ω_s, G_s.

b) FTS

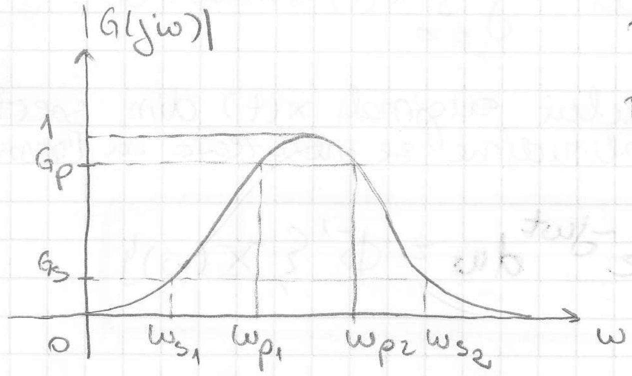


BT: $[\omega_p, \infty) \rightarrow |G(j\omega)| \geq G_p$

BO: $[0, \omega_s] \rightarrow |G(j\omega)| \leq G_s$.

Intervalul dintre ω_p și ω_s = banda intermediară. Este de dorit ca aceasta să fie cât mai îngustă.

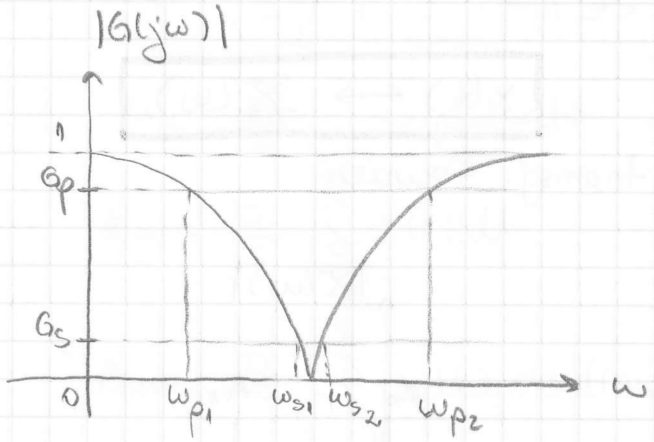
c) FTB.



BT: $[\omega_{p_1}, \omega_{p_2}]$; $|G(j\omega)| \geq G_p$

BO: $[0, \omega_{s_1}] \cup [\omega_{s_2}, \infty)$; $|G(j\omega)| \leq G_s$

d) FOB



BT: $[0, \omega_{p_1}] \cup [\omega_{p_2}, \infty)$

$|G(j\omega)| \geq G_p$

BO: $[\omega_{s_1}, \omega_{s_2}]$

$|G(j\omega)| \leq G_s$

2. Transformata Fourier

- Se consideră un semnal continuu $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, care admite un număr finit de discontinuități:

$$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \Phi\{x(t)\}}, \quad \boxed{\omega \in \mathbb{R}}, \quad \boxed{X(\omega) \in \mathbb{C}}$$

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t, \quad j = \sqrt{-1}$$

↳ FSA se mai poate scrie sub formă complexă algebrică:

$$X(\omega) = A_x(\omega) - j B_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t\, dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t\, dt.$$

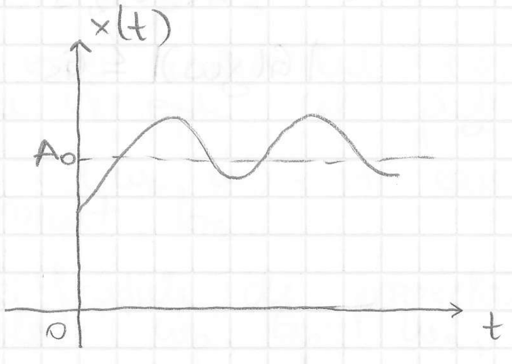
- Reconstituirea semnalului original $x(t)$ din spectrul său complex de amplitudine se realizează cu Transf. F. inv.

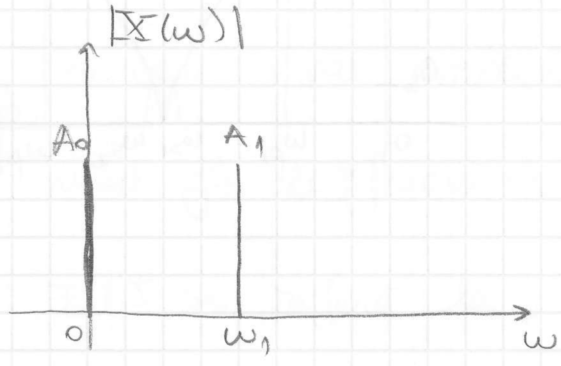
$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega = \Phi^{-1}\{X(\omega)\}}$$

$x(t)$ ↓ în dom. timp, $X(\omega)$ ↓ în dom. frecvenței
- descriu același semnal
- formează o pereche Fourier

$$\boxed{x(t) \longleftrightarrow X(\omega)}$$

$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ → transf. Fourier.





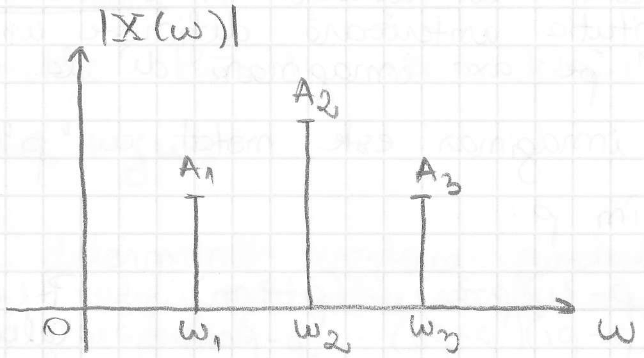
$x(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega_1 t)$

- Transformata Fourier se aplică oricărui semnal determinist, nu numai pentru semnale periodice.
- Dacă un semnal are 1 punct de discontinuitate, transformata Fourier a acestuia e o funcție continuă în pulsație, ceea ce înseamnă că aceasta conține o infinitate de semnale armonice:

$$A_i \cos(\omega_i t)$$

- Transf. Fourier a unui semnal se folosește la obținerea spectrului semnalului respectiv, deoarece transf. Fourier este o fc. complexă $\Longrightarrow$

spectrul de amplitudine și spectrul de fază



- Seria Fourier reală:

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(n\omega_1 t) + B_n \sin(n\omega_1 t)\right].$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \text{pulsația de bază}$$

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos(n\omega_1 t)\,dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin(n\omega_1 t)\,dt.$$

FSA – fc. spectrală de A.

③ Dependenta răspunsului în frecvență de polii și zerourile funcției de transfer a filtrului și detaliați efectul polilor al acesteia

Considerăm o fc. de transfer a unui sistem:

$$\boxed{G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = b_m \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}}$$

m - zerouri
n - poli
$(n \geq m)$.

Pentru a analiza comcondarea sistemului în domeniul frecvenței, se consideră axa imaginară din planul complex "s", ceea ce înseamnă că facem substituția: $s = j\omega$

OBS! Deoarece discutăm de analiza în domeniul ⓕ, ω din substituția anterioară definește un punct care "circulă" pe axa imaginară de la $0 \to \infty$.

Acest punct imaginar este notat cu "p": $s = p$.

Fc. de transfer în p:

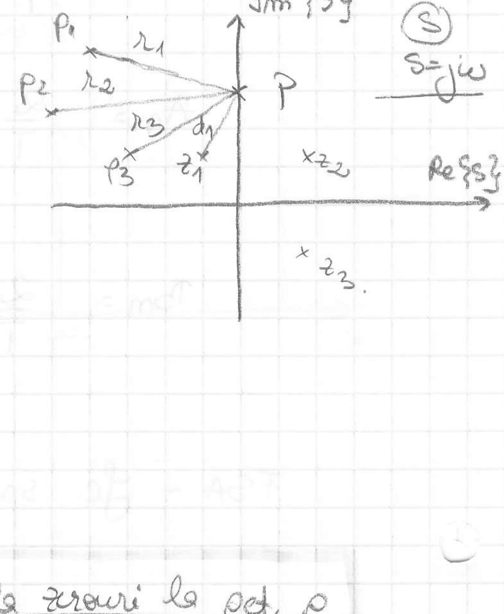
$$\boxed{G(s)\Big|_{s=p} = b_m \frac{(p-z_1)(p-z_2)\cdots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n)}}$$

$$\boxed{|G(j\omega)| = b_m \frac{|p-z_1|\cdot|p-z_2|\cdots|p-z_m|}{|p-p_1|\cdot|p-p_2|\cdots|p-p_n|}}$$

Pt. analiză, se calculează modulul fc. de frecv.: $\Leftarrow$

În relația fc. de transfer, fiecare factor de forma: $p-p_i$ sau $p-z_i$ reprezintă un număr complex, reprezentat în planul "s" de un vector care pornește din punctul p_i sau z_i și ajunge în punctul p.

Putem scrie factorii $p-p_i$ sau $z-z_i$ în forma cu argument:



$$p - p_i = r_i e^{j\varphi_i}$$

$$p - z_i = d_i e^{j\theta_i}$$

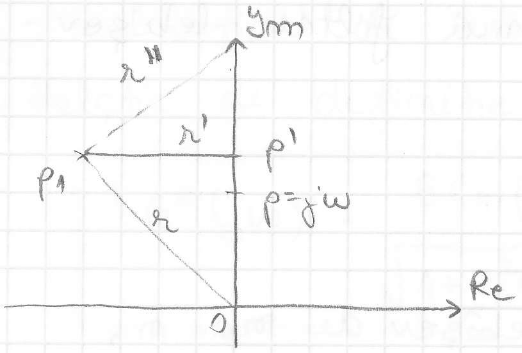
Fc. de transfer se scrie:

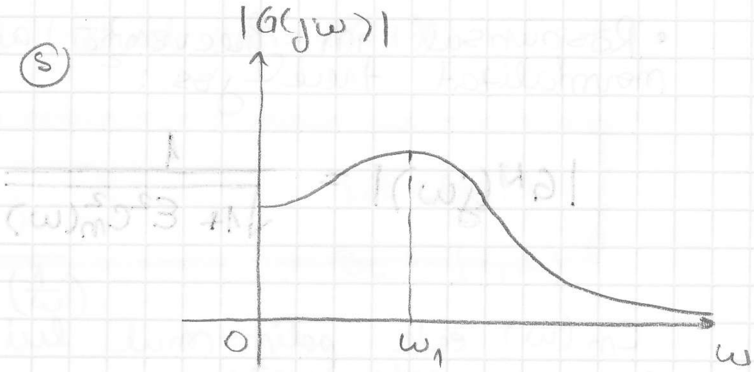
$$G(s)\Big|_{s=p} = b_m \frac{d_1 e^{j\theta_1}\cdot d_2 e^{j\theta_2}\cdots d_m e^{j\theta_m}}{r_1 e^{j\varphi_1}\cdot r_2 e^{j\varphi_2}\cdots r_n e^{j\varphi_n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |G(s)|\Big|_{s=p} = b_m \frac{d_1 d_2 \cdots d_m}{r_1 r_2 \cdots r_n} =$$

$$\boxed{= b_m \frac{\text{produsul distanțelor de la zerouri la pct. } p}{\text{produsul distanțelor de la poli la pct. } p}}$$

EFECTUL UNUI POL





$$|G(j\omega)| = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_m}{r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_m}$$

Se consideră $b_m = 1$, adică filtrul nu are amplificare.

$$p_1 = -\alpha_1 + j\omega_1$$

Un pol determină creșterea modulului fc. de frecvență în dreptul valorii pulsației egală cu valoarea părții imaginare a polului respectiv.

Prezența polului determină o scădere a modulului fc. de frecvență pt. valori ale pulsației depărtate de valoarea părții imaginare.

4. Filtrul Cebâshev (Chebyshev)

• Răspunsul în frecvență a unui filtru Cebâșev normalizat trece jos:

$$\boxed{|G^N(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2(\omega)}}}$$

$C_n(\omega)$ este polinomul lui Cebâșev de ord. n, care se calculează:

$$C_n(\omega) = \cos(n \cdot \cos^{-1}\omega)$$

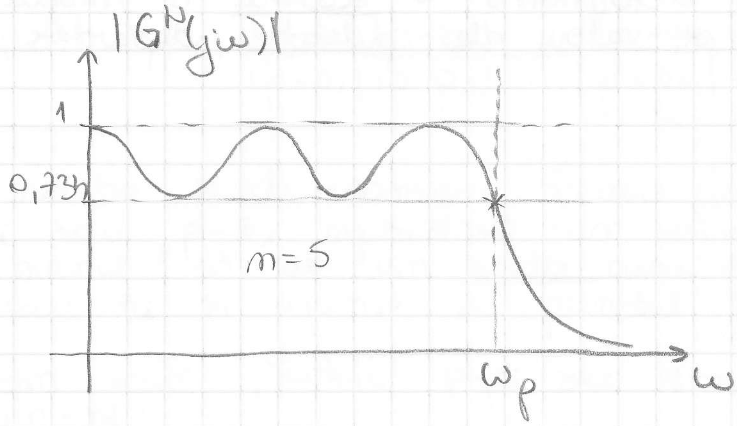
Polinomul se poate calcula cu relația:

$$C_n(\omega) = 2\omega\, C_{n-1}(\omega) - C_{n-2}(\omega)$$

$$C_0(\omega) = 1 \quad ; \quad C_1(\omega) = \omega.$$

• Caracteristica modul-pulsație a filtrului Cebâșev prezintă ondulații în banda de trecere, amplitudinea acestor oscilații este determinată de parametrul ε:

$\boxed{r = \sqrt{1+\varepsilon^2}}$ r = amplitudinea oscilațiilor



• Numărul punctelor de extrem al caracteristicii în banda de trecere este egal cu ordinul filtrului.

Dacă ordinul este impar, caracteristica pleacă de la valoarea 1, iar dacă este par, caract. pleacă din valoarea:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}}$$

FILTRELE CEBÂŞEV INVERSE

- nr. infinit de zerouri (uzual $m = n-1$)

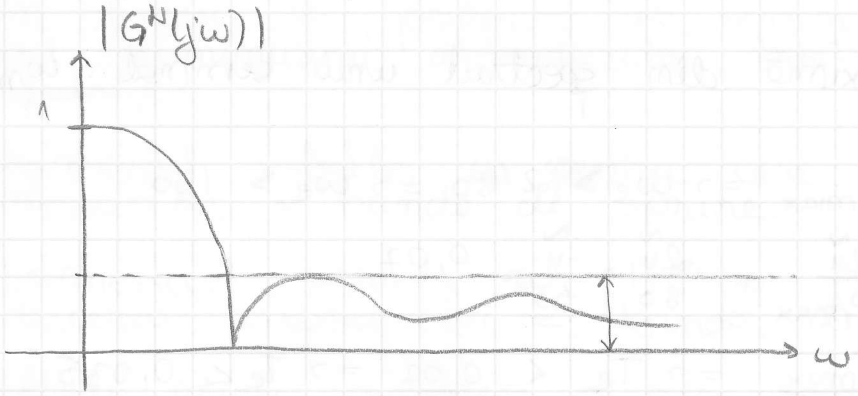
Relația de definiție:

$$\boxed{|G^N(j\omega)| = \frac{\varepsilon C_n\left(\frac{1}{\omega}\right)}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}}}$$

BT: $(0,1)$

BO: $(1,\infty)$.

Filtrul invers prezintă oscilații în banda de oprire.



5. Ex.

În urma calculului ordinului unui filtru C, pe baza datelor de proiectare, s-a obținut valoarea: $n = 2,3$

Ce valoare finală se alege și care este motivația alegerii? Câți poli și câte zerouri ar avea fc. de transfer a filtrului cu ordinul ales?

Deoarece ordinul filtrului ar trebui să fie un număr întreg, se va alege numărul imediat mai mare: $n = 3$

Caracteristica filtrului este cu atât mai apropiată de o formă ideală, cu cât ordinul este mai mare, atunci, performanțele și respectarea condițiilor de proiectare ale filtrului impun alegerea valorii întregi mai mari.

=> Fc. de transfer va avea 3 poli și niciun zero.

6. Ex

Calculați fc. de transfer a FTB cu:

$\omega_{p1} = 40$ și $\omega_{p2} = 180$, pt. care în prima etapă, s-a obținut FTJ cu fc. de transfer:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1{,}4s + 1}$$

$$T(s) = \frac{s^2 + \omega_{p1} \cdot \omega_{p2}}{(\omega_{p2} - \omega_{p1})^2} = \frac{s^2 + 7200}{140^2}$$

7. Pulsația maximă din spectrul unui semnal: $\omega_{max} = 80$.
$T_e\ min = ?$

$$\omega_e > 2\omega_{max} \Rightarrow \omega_e > 2 \cdot 80 \Rightarrow \omega_e > 160$$

$$T_{max} = \frac{2\pi}{\omega_{max}} = \frac{2\pi}{80} = \frac{\pi}{40} = 0{,}07$$

$$T_e < \frac{T_{max}}{2} \Rightarrow T_e < \frac{0{,}07}{2} \Rightarrow T_e < 0{,}035$$

Practic, $\omega_e > 10 \cdot \omega_{max} \Rightarrow \omega_e > 800$., pt. e

8. Filtre nerecursive

Un filtru descris printr-o funcție de transfer:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}}$$

OBS! $a_0 = 1$

$$y[k] = -a_1 y[k-1] - a_2 y[k-2] - \ldots - a_m y[k-m] + $$
$$+ b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \ldots + b_m u[k-m].$$

→ sunt de două feluri: recursive / nerecursive

Filtrele nerecursive:

- au toți coef. a_i, $i = \overline{1,m}$ nuli.
- dacă la intrare se aplică un impuls Dirac, ieșirea filtrului se diminuează cu fiecare eșantion
  - ↳ filtre cu răspuns pondere finită (FIR).