Filtrarea semnalelor.
Proiectarea filtrelor prin metoda repartiției poli-zerouri.

Scopul lucrării

Toate sistemele modifică spectrul semnalelor de intrare. Modul în care sistemele acționează asupra semnalelor de intrare este descris de caracteristica modul-pulsație a acestora. Pentru a prelucra un semnal într-o manieră impusă de specificații, se va proiecta un filtru pornind de la relația dintre amplasarea poli-zerouri şi caracteristica modul-pulsație a sistemului.

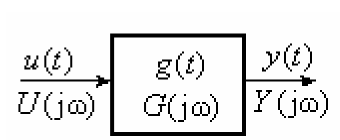
Scopul lucrării este de a proiecta filtre trece-jos cu anumite specificații pornind de la un element cunoscut (elementul de ordinul 1, elementul de ordinul 2), urmărind descrierea grafică a efectului polilor şi zerourilor suplimentar introduşi. Se urmăreşte prezentarea termenilor specifici şi formularea concluziilor privind metoda de proiectare prin testare în mediul Matlab. Se vor proiecta filtre trece-jos folosind mediul Matlab.

Considerații teoretice

Un *filtru* este un sistem de prelucrare a semnalelor al cărui răspuns modifică semnalul de intrare într-un mod prestabilit. Funcțional, el este un sistem selectiv în frecvență care transmite la ieşire un spectru modificat în amplitudine al semnalului aplicat la intrare astfel:

- componentele (armonicile) sunt atenuate sau chiar eliminate într-o anumită gamă de valori ale frecvenței (gamă numită *bandă de atenuare*) şi
- componentele sunt puțin reduse sau chiar neafectate într-o gamă complementară de valori ale frecvenței (gamă numită *bandă de trecere*).

În general, noțiunea de sistem de prelucrare a semnalelor (filtru) este similară cu noțiunea de sistem dinamic (definit în Teoria Sistemelor). Un filtru este complet definit dacă se cunosc: semnalul original (mărimea de intrare), semnalul filtrat (mărimea de ieşire) şi legile care îi descriu funcționarea. Acest ansamblu formează modelul sistemului.



Comportarea unui sistem în domeniul de frecvență (şi deci acțiunea sistemului asupra spectrului semnalului de intrare) este descrisă de funcția de frecvență a sistemului:

$$G(j\omega) = G(s)\,|_{s=j\omega} = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{s=j\omega} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \tag{2.1}$$

Din punctul de vedere al filtrării semnalelor, ne interesează acțiunea filtrului / sistemului asupra amplitudinii armonicilor din spectru, adică este relevant modulul transformatei Fourier a acestor semnale:

$$U(\omega) = |U(j\omega)|$$
$$Y(\omega) = |Y(j\omega)|$$

care sunt evidențiate în modulul funcției de frecvență a sistemului (caracteristica modul-pulsație):

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}\right| = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} \tag{2.2}$$

Observație. Aceasta este caracteristica Bode de amplitudine în scalare naturală (nelogaritmică).

După „aşezarea” cele două intervale de valori ale frecvenței în care sistemul / filtrul acționează diferit (banda de trecere şi banda de atenuare), filtrele se clasifică în patru tipuri:

- filtrul trece-jos (FTJ),
- filtrul trece-sus (FTS),
- filtrul trece-bandă (FTB),
- filtrul opreşte-bandă (FOB).

În figura 1 sunt prezentate formele *ideale* ale celor patru tipuri.

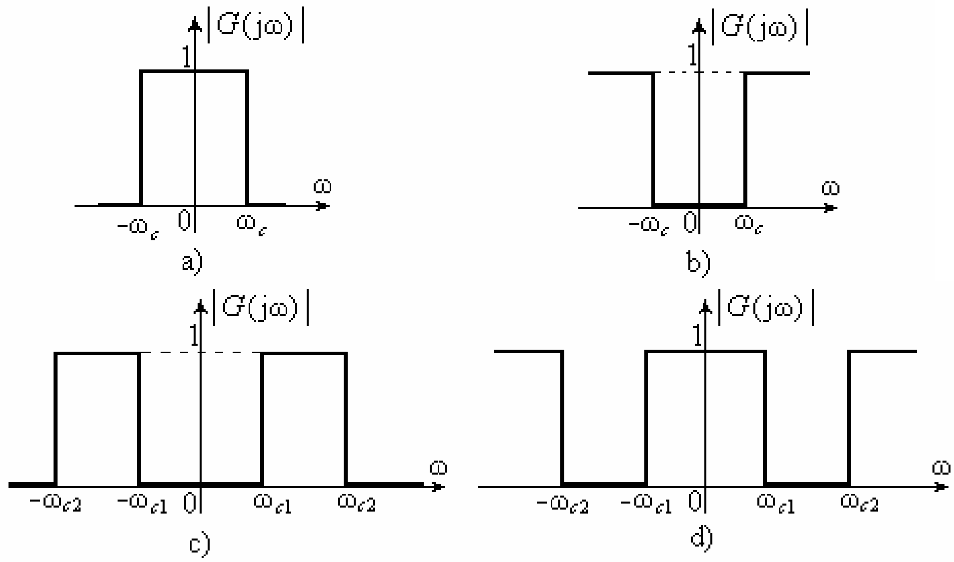


Fig. 1. Filtrele prototip / ideale.

Aceste caracteristici ale filtrelor ideale nu pot fi obținute prin utilizarea unor funcții de transfer cauzale (practic realizabile). Se urmăreşte determinarea unor funcții de transfer cu caracteristici cât mai apropiate de cele ideale, respectând restricția de realizabilitate şi o condiție de stabilitate. Fiind aproximații, funcțiile de transfer care se deduc, trebuie să respecte o serie de *specificații* impuse răspunsului filtrului (cu anumite toleranțe):

- FTJ: bandă de trecere între 0 şi ω_p, unde modulul funcției de frecvență este minim $|G(\omega)|_{\omega=\omega_p} = G_p$; bandă de oprire de la ω_s unde modulul funcției de frecvență este maxim $|G(\omega)|_{\omega=\omega_s} = G_s$;
- FTS: bandă de trecere de la ω_p, unde modulul funcției de frecvență este minim G_p; bandă de oprire între 0 şi ω_s unde modulul funcției de frecvență este maxim G_s;

- FTB: bandă de trecere între ω_{p1} şi ω_{p2}, cu modulul funcţiei de frecvenţă minim G_{p1}, respectiv G_{p2}; bandă de oprire de la 0 la ω_{s1} şi peste ω_{s2} unde avem maxim G_{s1}, respectiv G_{s2};
- FOB: bandă de trecere de la 0 la ω_{p1} şi peste ω_{p2}, cu minim G_{p1}, respectiv G_{p2}; bandă de oprire între ω_{s1} şi peste ω_{s2} cu maxim G_{s1}, respectiv G_{s2}.

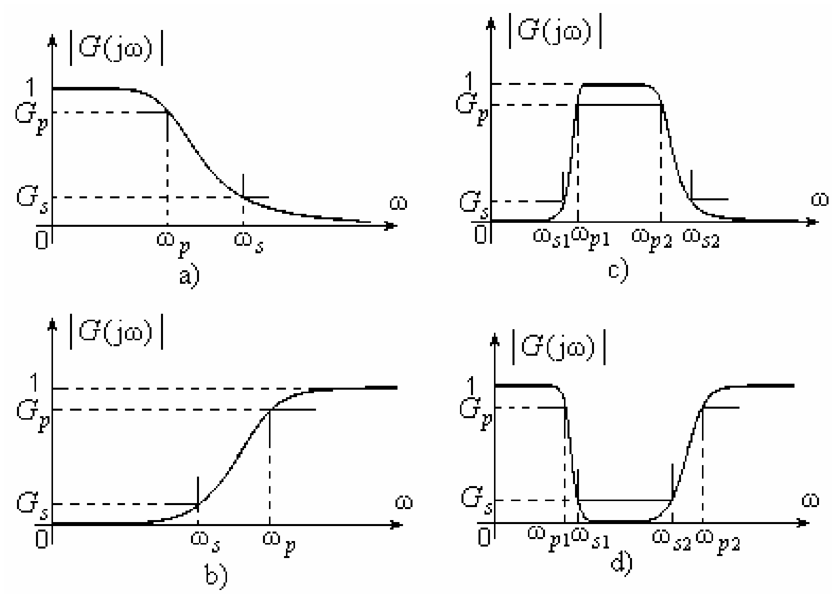


Fig. 2. Specificaţiile filtrelor practice.

Pentru a descrie metoda proiectării prin repartiţia poli-zerouri, pornim de la acţiunea elementelor simple asupra spectrului semnalului de intrare. Astfel, comportarea unui element de ordinul 1 va fi descrisă astfel:

$$|G(\mathrm{j}\omega)| = \left|\frac{k}{sT+1}\right|_{s=j\omega} = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}},$$

iar acţiunea elementului de ordinul 2:

$$|G(\mathrm{j}\omega)| = \left|\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\right|_{s=j\omega} = \frac{k\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega^2\omega_n^2}}.$$

În figura 3. sunt trasate caracteristicile $|G(j\omega)| = f(\omega)$ ale celor două elemente, pentru valorile: $k=1$, $T=0.2$, $\xi=0.7$, $\omega_n=10$. (vezi programul `Lab2_ex01.m` şi funcţia Matlab `bode`).

De aici se pot trage două concluzii:

- aceste elemente sunt filtre trece-jos: armonicile cu frecvenţă apropiată de 0 sunt puţin atenuate (componenta continuă – de frecvenţă 0 – rămâne neatenuată), iar armonicile sunt diminuate în amplitudine cu cât frecvenţa lor este mai mare.
- prezenţa polului suplimentar la elementul de ordinul 2 îmbunătăţeşte comportarea acestuia ca filtru trece-jos, în special în banda de trecere. O comportare mai bună în banda de trecere se poate obţine prin „mutarea” polilor (schimbarea parametrilor ξ şi ω_n) şi, mai ales, prin adaugarea de poli.

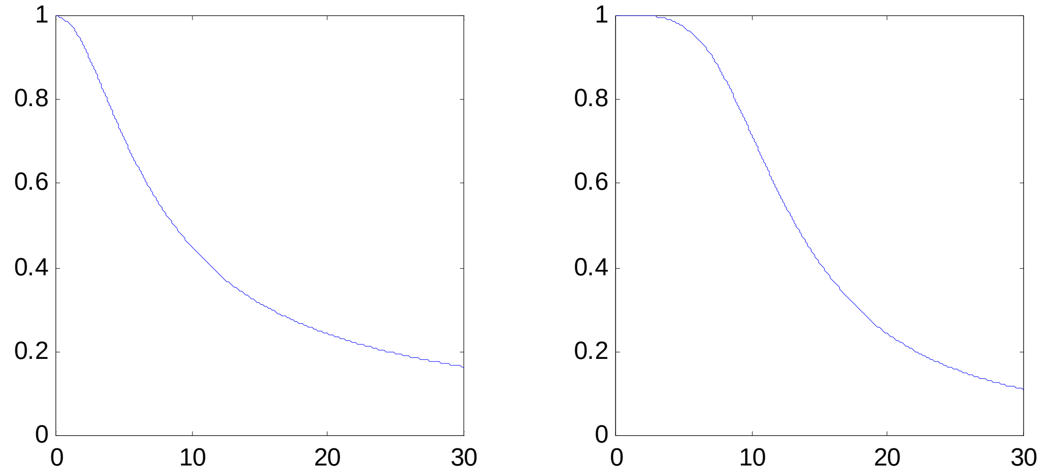


Fig. 3. Caracteristicile modul-pulsaţie pentru elementul de ordinul 1 şi pentru elementul de ordinul 2.

Pentru a îndeplini specificaţiile impuse unui filtru trece-jos polii se aleg corespunzător şi se pot adăuga suplimentar poli şi zerouri. Utilizarea acestei metode impune cunoaşterea relaţiei dintre caracteristica modul-pulsaţie şi poziţia polilor şi zerourilor, relaţie descrisă analitic:

$$\left|G(j\omega)\right| = b_n \frac{r_1 r_2 ... r_n}{d_1 d_2 ... d_n} = b_n \frac{\text{produsul distantelor de la zerouri la } j\omega}{\text{produsul distantelor de la poli la } j\omega}, \text{ pentru } \forall\omega$$

sau o experienţă câştigată prin experimente privind această relaţie.

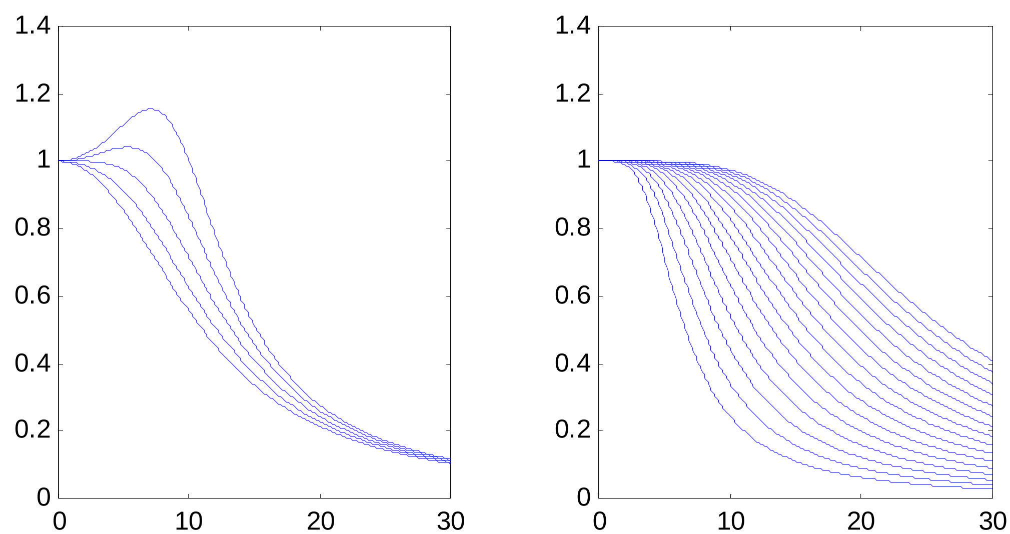


Fig. 4. Efectul modificării factorului de amortizare şi a pulsaţiei naturale ale unui element de ordinul 2 asupra caracteristicii modul-pulsaţie.

Proiectarea filtrelor prin metoda poli-zerouri utilizând Matlab

Pentru a utiliza metoda poli-zerouri este important să trasăm caracteristicile modul pulsaţie ale elementelor de ordinul 1 şi 2 pentru diverse valori ale parametrilor acestora (amplasări diverse ale polilor). Mai mult, trebuie remarcată evoluţia funcţiei de frecvenţă în jurul valorilor frecvenţei egale cu partea imaginară a polilor şi zerourilor (vezi figura 4 şi programul `Lab2_ex03.m`).

Exemple

1. Să se traseze caracteristica modul-pulsație a elementului de ordinul 2 pentru diverse valori ale factorului de amortizare şi pulsației naturale. Pentru fiecare caz, evidențiați polii.

Pentru a trasa caracteristica modul-pulsație plecând de la funcția de transfer a sistemului se poate folosi funcția `bode`, iar pentru a calcula polii sistemului având funcția de transfer se foloseşte funcția `tf2zp`.

```
k = 1; %amplificarea sistemului
wn = 10; %pulsatia naturala
z = 0.7 %factorul de amortizare
num = [k*wn*wn];
den = [1 2*z*wn wn*wn];
%functia de transfer a filtrului num/den
Gw = bode(num,den,w);
%caracteristica modul-pulsatie = caracteristica Bode de amplitudine
plot(w,Gw)
```

(vezi şi programele `Lab2_ex03.m` şi `Lab2_ex04.m`)

2. Să se traseze caracteristica modul pulsație a unui sistem cu 2 poli: $-7 \pm j*5$.

Se foloseşte funcția `zp2tf`, care calculează numărătorul şi numitorul funcției de transfer care are polii şi zerourile dorite.

```
w=0:0.1:30; %domeniul de frecventa pentru care se traseaza caracteristica
z = []; %zerourile (nu are)
p = [-7+j*5 -7-j*5]; %polii impusi
k = prod(p); %amplificarea egala cu produsul polilor pentru a indeplini
      conditia ca in 0 sa avem castig unitar – filtru trece-jos
[num, den] = zp2tf(z,p,k);
%se obtine functia de transfer a sistemului cu polii alesi
Gw = bode(num,den,w);
%caracteristica modul-pulsatie = caracteristica Bode de amplitudine
plot(w,Gw);
```

(vezi programul `Lab2_ex05.m`)

3. Să se studieze efectul introducerii unei perechi de poli suplimentari $-5 \pm j*10$ asupra caracteristicii obținute la exemplul anterior.

(vezi programul `Lab2_ex06.m`)

4. Să se studieze efectul introducerii zeroului $z_1 = -5$ în funcția de transfer a elementului de ordinul 2 cu $\xi = 0.7$, $\omega_n = 10$.

Funcția de transfer a filtrului în acest caz este:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2 (s+5) \frac{1}{5}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

iar factorul 1/5 este impus de condiția: $\left|G(j\omega)\right|_{\omega=0} = G(0) = 1$.

(vezi programul `Lab2_ex07.m`)

5. Să se studieze efectul introducerii unei perechi de zerouri complexe $-5 \pm j*20$ în funcția de transfer a elementului de ordinul 2 de la exemplul anterior.

Funcția de transfer a filtrului în acest caz este

$$G(s) = \frac{\omega_n^2 (s^2 + 10s + 425)\frac{1}{425}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

Observație. Partea imaginară a perechii de zerouri este ± 20. Notați efectul în zona $\omega = 20$.

(vezi programul `Lab2_ex08.m`)

6. Analizați caracteristica filtrului cu polii $p_{1,2} = -5 \pm 5j$ și zerourile $z_{1,2} = -5 \pm 15j$, apoi considerați filtrul cu $p_{1,2} = -5 \pm 15j$ și $z_{1,2} = -5 \pm 5j$.

Cele două funcții de transfer sunt:

$$G(s) = k_1 \frac{s^2 + 10s + 250}{s^2 + 10s + 50} \text{ și } G(s) = k_2 \frac{s^2 + 10s + 50}{s^2 + 10s + 250}$$

Alegând $k_1 = 0.2$ și $k_2 = 0.5$, vom observa primul este un filtru oprește-bandă, iar al doilea este un filtru trece-bandă. Poziția relativă a polilor și zerourilor schimbă tipul filtrului prin faptul că determină ridicarea, respectiv coborârea caracteristicii în jurul pulsațiilor egale cu părțile lor imaginare. Prezența zerourilor în dreptul pulsației $\omega = \pm 5$ determină „coborârea" caracteristicii în jurul acestei valori în caracteristica modul pulsație, pe când prezența polilor în dreptul valorilor $\omega = \pm 15$ determină ridicarea caracteristicii în dreptul acestor valori.

(vezi programul `Lab2_ex09.m`)

Observație. Îmbunătățirea performanțelor în banda de trecere sau în banda de oprire se realizează în primul rând prin introducerea unui număr mai mare de poli, respectiv de zerouri, cu valori convenabile ale părților imaginare.

Observație. Este util pentru fiecare caz, să se prezinte grafic (pe hârtie) poziția polilor și zerourilor, marcând pozițiile lor pe axa imaginară, apoi marcând părțile imaginare pe axa pulsației în caracteristica modul-pulsație.

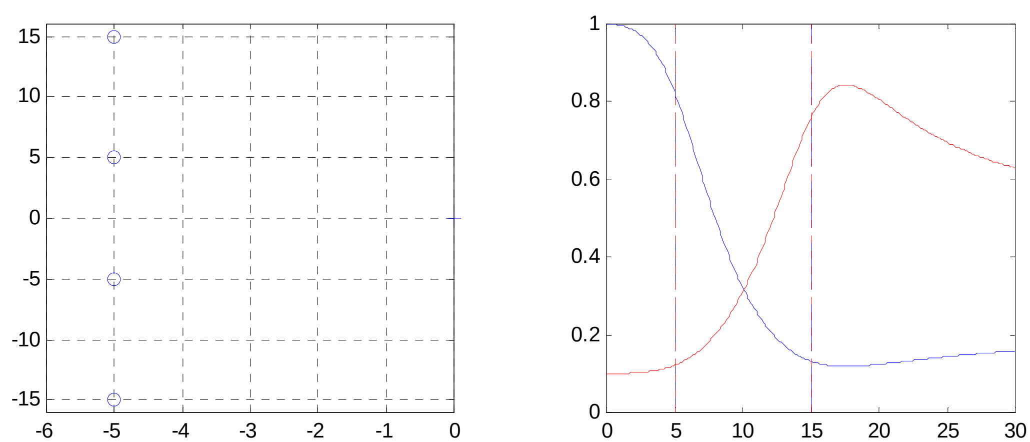


Fig. 5. Poziția polilor și zerourilor marcată pe caracteristica modul-pulsație.

Exerciții

1. Să se studieze efectul introducerii zeroului $z_1 = -2$ asupra caracteristicii unui element de ordinul 2.
2. Să se studieze efectul introducerii unei perechi de zerouri $(-2 \pm j)$ asupra caracteristicii unui element cu polii $-5 \pm j*10$. Evidențiați poziția în raport cu axa pulsației a polilor şi zerourilor (marcați pe axa pulsației valorile părților imaginare ale acestora).
3. Să se traseze caracteristica modul-pulsație pentru cazurile următoare, notând poziția a polilor şi zerourilor pe axa pulsației (valorile părții imaginare ale polilor şi zerourilor):

- polii $-5 \pm j*10$ şi zerourile $-2 \pm j$
- polii $-2 \pm j$ şi zerourile $-5 \pm j*10$.

4. Să se proiecteze un filtru trece-jos cu specificațiile:

- banda de trecere $\omega_p = 5$ cu $G_p = 0.9$
- banda de oprire $\omega_p = 15$ cu $G_p = 0.1$

(Scrieți un program Matlab cu care poziționând poli şi zerouri, modificați caracteristica modul-pulsație până la obținerea specificațiilor impuse.)