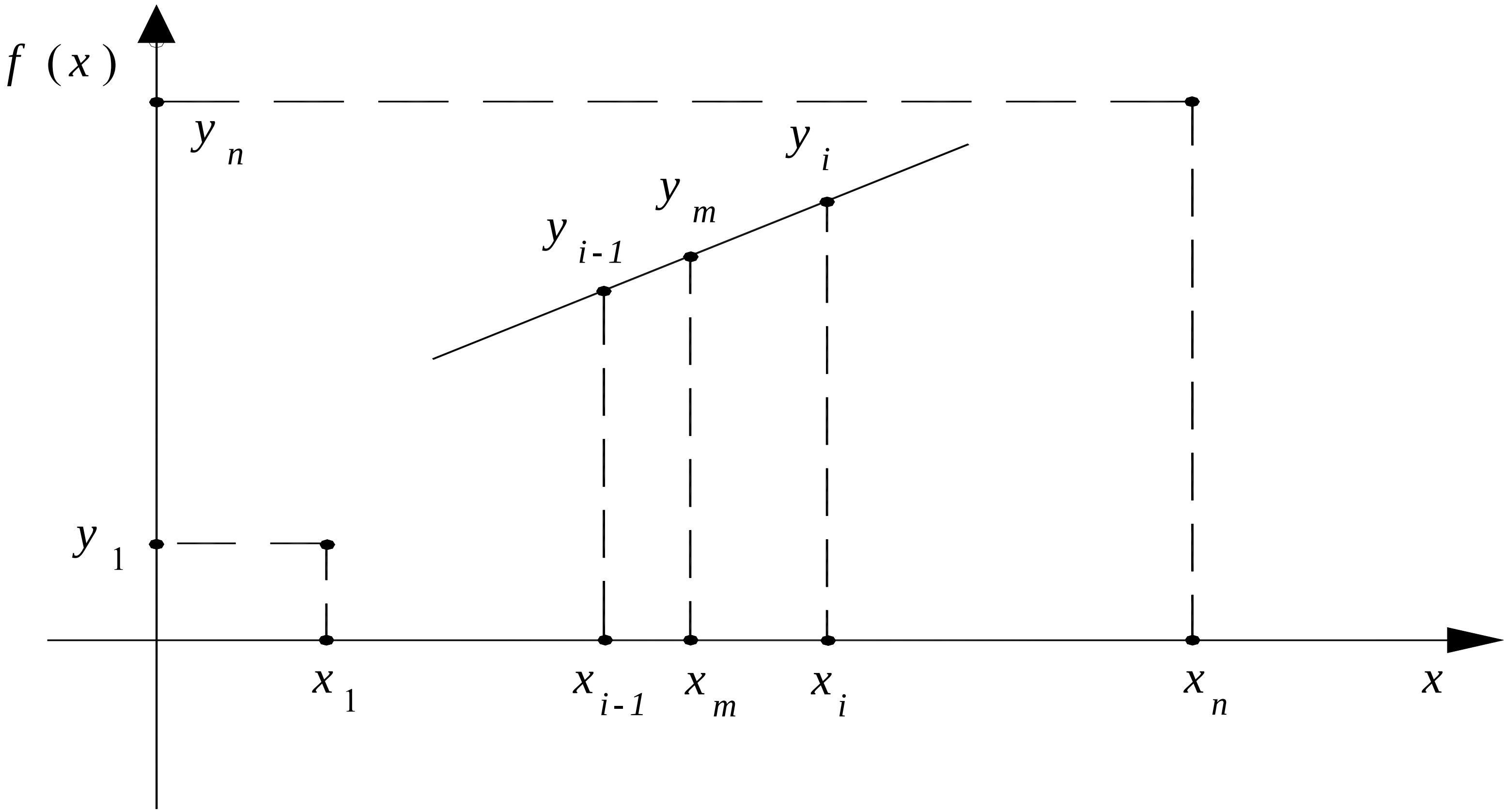
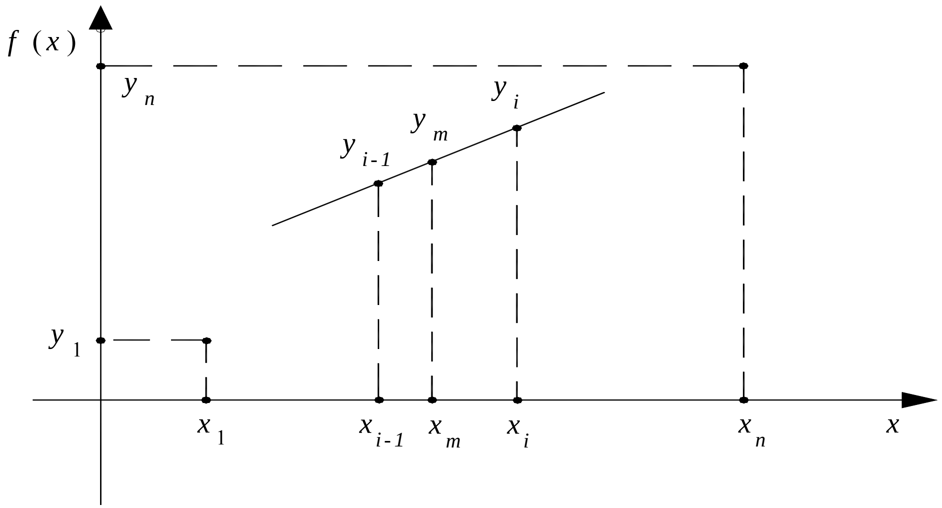
INTERPOLARE NUMERICĂ

În mod curent există posibilitatea ca modul de variaţie al unei funcţii să fie specificat prin intermediul unor **puncte** distincte obţinute pe baza unor **măsurători experimentale**, **fără a cunoaşte expresia analitică a funcţiei**. În această situaţie, determinarea valorii funcţiei într-un punct oarecare se va putea face prin interpolare sau extrapolare numerică.

INTERPOLARE LINIARĂ: Aproximarea valorii funcţiei se efectuează prin segmente de dreaptă:



Procedeul este următorul:



Se încadrează abscisa, pentru care se doreşte determinarea funcţiei, între două abscise consecutive aparţinând intervalului pentru care s-au efectuat măsurători:

$$x \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$$

Se aproximează liniar funcţia prin dreapta care uneşte punctele de coordonate $\boldsymbol{(x_{i-1}, y_{i-1})}$ şi $\boldsymbol{(x_i, y_i)}$ adică dreapta având ecuaţia:

$$\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}$$

Valoarea funcţiei se obţine efectuând intersecţia dintre dreapta determinată anterior şi verticala în punctul de abscisă $\boldsymbol{x_m}$, se obţine valoarea necunoscută a funcţiei:

$$y_m = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \left(x_m - x_{i-1}\right)$$

Existenţa unui număr mare de determinări experimentale va asigura o bună precizie de determinare a valorilor funcţiei.

INTERPOLARE LAGRANGE

Aproximare prin polinome de gradul II.

Acest tip de aproximare necesită cunoaşterea a 3 puncte ale graficului funcţiei. Notăm coordonatele acestor puncte astfel (x_{k-1}, y_{k-1}) , (x_k, y_k) si (x_{k+1}, y_{k+1}) .

Procedeul este următorul:

Se încadrează abscisa pentru care se doreşte determinarea funcţiei, între două abscise consecutive aparţinând intervalului pentru care s-au efectuat măsurători, $x \in [x_{k-1}, x_k]$

Se aproximează funcţia prin polinomul de gradul II a cărui grafic (parabola) conţine punctele de coordonate (x_{k-1}, y_{k-1}) , (x_k, y_k) si (x_{k+1}, y_{k+1}).

Consideram polinomul de gradul II: $P(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

şi vom determina coeficienţii punând condiţia ca graficul polinomului să conţină punctele specificate:

$$\begin{cases} a_2 \cdot x_{k-1}^2 & + & a_1 \cdot x_{k-1} & + & a_0 & = & y_{k-1} \\ a_2 \cdot x_k^2 & + & a_1 \cdot x_k & + & a_0 & = & y_k \\ a_2 \cdot x_{k+1}^2 & + & a_1 \cdot x_{k+1} & + & a_0 & = & y_{k+1} \end{cases}$$

$P(x)=a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0$

$$\begin{cases} a_2\cdot x_{k-1}^2 & + & a_1\cdot x_{k-1} & + & a_0 & = & y_{k-1} \\ a_2\cdot x_k^2 & + & a_1\cdot x_k & + & a_0 & = & y_k \\ a_2\cdot x_{k+1}^2 & + & a_1\cdot x_{k+1} & + & a_0 & = & y_{k+1} \end{cases}$$

Pentru a verifica dacă sistemul are soluţie, presupunem cazul unui sistem omogen ($\boldsymbol{y_{k-1}=y_k=y_{k+1}=0}$). În această situaţie pot interveni două cazuri:

1. Dacă determinantul sistemului este diferit de zero sistemul admite numai soluţia banală ($\boldsymbol{a_0=a_1=a_2=0}$).
2. Dacă determinantul sistemului este zero sistemul admite soluţie nebanală, ($\boldsymbol{a_0\neq a_1\neq a_2\neq 0}$). Acest caz este însă **imposibil** deoarece ar însemna ca **polinomul de gradul doi să aibă trei soluţii distincte**. Ca urmare, **determinantul sistemului nu poate fi decât diferit de zero şi prin urmare sistemul neomogen va fi întotdeauna compatibil determinat**.

Pentru a obţine, în mod convenabil, expresia polinomului , se va proceda după cum urmează. Se consideră polinoamele de gradul II:

$Q_1(x)=(x-x_2)\cdot(x-x_3)$ $\quad$ $Q_2(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_3)$ $\quad$ $Q_3(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

şi se exprima polinomul ***P*(*x*)** ca o combinaţie liniară a celor trei polinoame:

$$P(x)=b_1\cdot Q_1(x)+b_2\cdot Q_2(x)+b_3\cdot Q_3(x)$$

$Q_1(x)=(x-x_2)\cdot(x-x_3)$ $\quad$ $Q_2(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_3)$ $\quad$ $Q_3(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

$P(x)=b_1\cdot Q_1(x)+b_2\cdot Q_2(x)+b_3\cdot Q_3(x)$

Coeficienţii reali se determină punând condiţiile:

$$\begin{cases} P(x_1) & = & y_1 \\ P(x_2) & = & y_2 \\ P(x_3) & = & y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1\cdot Q_1(x_1) & = & y_1 \\ b_2\cdot Q_2(x_2) & = & y_2 \\ b_3\cdot Q_3(x_3) & = & y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 & = & \dfrac{y_1}{Q_1(x_1)} \\ b_2 & = & \dfrac{y_2}{Q_2(x_2)} \\ b_3 & = & \dfrac{y_3}{Q_3(x_3)} \end{cases}$$

Ca urmare rezultă:

$$P(x)=y_1\cdot\frac{Q_1(x)}{Q_1(x_1)}+y_2\cdot\frac{Q_2(x)}{Q_2(x_2)}+y_3\cdot\frac{Q_3(x)}{Q_3(x_3)}=\sum_{i=1}^{3}y_i\cdot\frac{Q_i(x)}{Q_i(x_i)}$$

$$P(x)=y_1\cdot\frac{Q_1(x)}{Q_1(x_1)}+y_2\cdot\frac{Q_2(x)}{Q_2(x_2)}+y_3\cdot\frac{Q_3(x)}{Q_3(x_3)}=\sum_{i=1}^{3}y_i\cdot\frac{Q_i(x)}{Q_i(x_i)}$$

$$Q_1(x)=(x-x_2)\cdot(x-x_3)$$

$$Q_2(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_3)$$

$$Q_3(x)=(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

sau $$P(x)=\sum_{i=1}^{3}y_i\cdot\frac{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}(x-x_j)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}(x_i-x_j)}$$

sau $$P(x)=\sum_{i=1}^{3}y_i\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

care reprezintă **formula de interpolare a lui Lagrange pentru polinoame de gradul II**.

În mod **analog** se obţine formula de interpolare Lagrange pentru **polinoame de gradul *n*:**

$$\boxed{P(x)=\sum_{i=1}^{n+1}y_i\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}}$$

METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

Acest procedeu este utilizat în situaţia în care se doreşte determinarea valorii funcţiei **în interiorul sau în afara domeniului de valori pentru care au fost efectuate măsurători experimentale** şi ca urmare au fost obţinute un număr de $\boldsymbol{n}$ de perechi de coordonate: (x_1, y_1) , …. , (x_n, y_n) .

Metoda permite **stabilirea unei expresii analitice pentru funcţia necunoscută**, care poate fi utilizată atât **în interiorul intervalului** conţinând determinări experimentale: $[x_1, x_n]$ cât şi **în afara lui**.

Principiul metodei este următorul: presupunem că am ales o aproximare a funcţiei ***f*(*x*)** necunoscute. În acest caz vom dispune de **două categorii ale valorilor funcţiei** şi anume:

Valorile exacte, obţinute în urma măsurătorilor: $y_1 \cdots y_n$

Valorile aproximative, calculate cu funcţia de aproximare: $\overline{y}_i = f(x_i) \ , \ i = \overline{1, n}$

Ca urmare se vor produce **abaterile**: $d_i = y_i - \overline{y}_i \ , \ i = \overline{1, n}$

Forma funcţiei alese (<u>polinomială</u>, <u>logaritmică</u>, <u>trigonometrică</u>, etc.) depinde de **forma graficului funcţiei reale fiind în concordanţă cu acesta**. Alegerea unei expresii pentru ***f*(*x*)** presupune utilizarea unor **coeficienţi reali** în expresia acesteia. Metoda celor mai mici pătrate constă în determinarea valorilor acestor coeficienţi astfel încât să se obţină **valoarea minimă a sumei pătratelor abaterilor**, adică a sumei:

$$S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y}_i\right)^2$$

Regresie liniară

$$f(x) = a_1 \cdot x + a_0$$

Valorile coeficienţilor $\boldsymbol{a_1}$ şi $\boldsymbol{a_0}$ se vor obţine punând condiţia ca suma pătratelor abaterilor să fie minimă:

$$S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_1 \cdot x_i - a_0\right)^2$$

Condiţia de minim se obţine prin rezolvarea următorului sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_1 \cdot x_i - a_0\right) \cdot x_i = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_1 \cdot x_i - a_0\right) = 0 \end{cases}$$

echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

ale cărui soluţii sunt:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right)}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ \\ a_1 = \dfrac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \end{cases}$$

Regresie exponenţială

$$f(x) = a \cdot b^x$$

Valorile coeficienţilor ***a*** şi ***b*** se vor obţine punând condiţia ca suma pătratelor abaterilor să fie minimă:

$$S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a \cdot b^{x_i}\right)^2$$

În scopul de a simplifica sistemul de ecuaţii care se obţine, se va efectua următoarea schimbare de variabilă. Se logaritmează expresia:

$\overline{y} = a \cdot b^x$ şi ca urmare se obţine: $\ln \overline{y} = \ln a + x \cdot \ln b$

în care se fac notaţiile: $A = \ln a$ $B = \ln b$

ca urmare: $\ln \overline{y} = A + x \cdot B = \overline{z}$ de asemenea se mai notează: $z = \ln y$

şi se consideră abaterea ca fiind: $d_i = z_i - \overline{z_i} = \ln y_i - A - B \cdot x_i$

Suma pătratelor abaterilor rezultă: $$S=\sum_{i=1}^{n}\left(z_i-\overline{z_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\ln y_i-A-B\cdot x_i\right)^2$$

Coeficienţii A şi B rezultă prin rezolvarea următorului sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial A} = 0\\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial B} = 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\ln y_i-A-B\cdot x_i\right) = 0\\[2ex] \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\ln y_i-A-B\cdot x_i\right)\cdot x_i = 0\end{cases}$$

care este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases}n\cdot A + B\cdot\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}\ln y_i\\[2ex] A\cdot\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i + B\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln y_i\end{cases}$$

ale cărui soluţii sunt:

$$\begin{cases} A = \dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \ln y_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln y_i\right)}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ B = \dfrac{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln y_i - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \ln y_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \end{cases}$$

Ca urmare coeficienţii din expresia funcţiei de aproximare se vor calcula cu relaţiile:

$$a = e^A \quad ; \quad b = e^B$$

Regresie geometrică

$$f(x) = a \cdot x^b$$

Valorile coeficienţilor ***a*** şi ***b*** se vor obţine punând condiţia ca suma pătratelor abaterilor să fie minimă:

$$S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a \cdot x_i^b\right)^2$$

În scopul de a simplifica sistemul de ecuaţii care se obţine, se va efectua următoarea schimbare de variabilă. Se logaritmează expresia:

$\overline{y} = a \cdot x^b$ şi ca urmare se obţine: $\ln \overline{y} = \ln a + b \cdot \ln x$

în care se fac notaţiile: $A = \ln a \quad \overline{z} = \ln \overline{y}$

de asemenea se mai notează: $z = \ln y$

şi se consideră abaterea ca fiind: $d_i = z_i - \overline{z_i} = \ln y_i - A - b \cdot \ln x_i$

Suma pătratelor abaterilor rezultă: $S = \sum_{i=1}^{n} \left(z_i - \overline{z_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln y_i - A - b \cdot \ln x_i \right)^2$

Coeficienţii A şi B rezultă prin rezolvarea următorului sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial A} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(\ln y_i - A - b \cdot \ln x_i \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(\ln y_i - A - b \cdot \ln x_i \right) \cdot \ln x_i = 0 \end{cases}$$

care este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} n \cdot A + b \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \\ A \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln^2 x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \cdot \ln y_i \end{cases}$$

ale cărui soluţii sunt:

$$\begin{cases} A = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} \ln y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \ln^2 x_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \cdot \ln y_i\right)}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln^2 x_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)^2} \\ \\ b = \dfrac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \cdot \ln y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln y_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln^2 x_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)^2} \end{cases}$$

Ca urmare coeficientul ***a*** , din expresia funcţiei de aproximare, se va calcula cu relaţia:

$$a = e^A$$