IV. Filtre Butterworth

Caracteristica modul-pulsație $\left|G(\mathrm{j}\omega)\right|$ a unui filtru Butterworth trece jos de ordinul *n* este dată de expresia

$$\left|G(\mathrm{j}\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}}.$$

Se observă că la $\omega = 0$, câştigul $\left|G(\mathrm{j}0)\right|$ este unitar iar la $\omega = \omega_c$ câştigul are valoarea $\left|G(\mathrm{j}\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $-3\,\mathrm{dB}$. Câştigul se reduce la pulsația de tăiere ω_c cu un factor egal cu $\sqrt{2}$. Deoarece puterea este proporțională cu pătratul modulului rezultă un raport între puterea semnalului aplicat la intrare şi puterea semnalului de la ieşire egal cu doi. (Invers $P_{out} / P_{in} = \frac{1}{2}$). Din acest motiv frecvența ω_c se mai numeşte frecvența de înjumătățire a puterii sau frecvență de tăiere de $3\,\mathrm{dB}$.

Filtrul Normalizat de Tip Butterworth

În procedurile de proiectare este mult mai convenabil şi comod să se lucreze cu filtre normalizate cu funcția de transfer notată $G^N(s)$. În acest caz frecvența ω_c se ia egală cu 1 şi caracteristica modul pulsație va avea la bază relația

$$\left|G^N(\mathrm{j}\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^{2n}}}.$$

Pornind de la această relație de bază se pot deduce mai uşor funcțiile de transfer normalizate pentru diferite valori ale lui *n*. Având funcțiile de transfer normalizate putem obține funcțiile de transfer $G(s)$ pentru orice valoare a lui ω_c printr-o simplă scalare în frecvnță realizată prin înlocuirea lui s cu s/ω_c. Caracteristica modul-pulsație a filtrului Butterworth normalizat $\left|G^N(\mathrm{j}\omega)\right|$ este prezentată în figura 14. De aici se pot observa următoarele:

1) Câştigul (modulul) răspunsului în frecvență pentru filtrul Butterworth (FB) descreşte monoton. Primele $2n-1$ derivate ale modulului au valoarea nulă la $\omega = 0$.
2) Câştigul FB normalizat este 1 (0 dB) la $\omega = 0$ şi respectiv 0,707 (-3 dB) la $\omega = 1$, pentru orice valoare a lui *n*. Deci frecvența de tăiere de –3 dB este aceeaşi indiferent de ordinul filtrului.

3) Pentru n mare, modulul funcției de frecvență a FBN se apropie de caracteristica ideală.

Pentru a deduce funcția de transfer a unui filtru Butterworth normalizat, $G^N(s)$, să ne reamintim că $G^N(-\mathrm{j}\omega)$ este egală cu conjugata complexă a funcției $G^N(\mathrm{j}\omega)$, deci

$$G^N(\mathrm{j}\omega)G^N(-\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\omega^{2n}}.$$

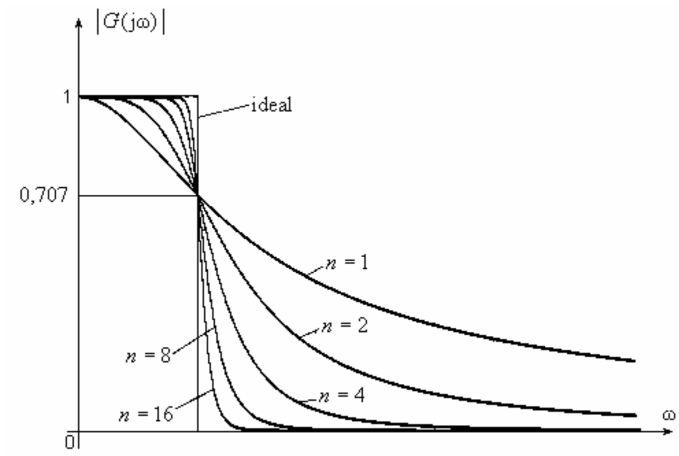


Fig. 14.

Înlocuind $\omega=\frac{s}{\mathrm{j}}$ în relația de mai sus obținem

$$G^N(s)G^N(-s)=\frac{1}{1+\left(\frac{s}{\mathrm{j}}\right)^{2n}},$$

deci polii expresiei $G^N(s)G^N(-s)$ vor fi rădăcinile ecuației

$s^{2n}=-(\mathrm{j})^{2n}=-1\cdot(\mathrm{j})^{2n}$. Având în vedere că $-1=\cos(-\pi)+\mathrm{j}\sin(-\pi)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi}$ şi $\mathrm{j}=e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2}$, vom avea în continuare:

$s^{2n}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-1)\pi}$, $s^{2n}=\cos\pi(n-1)+\mathrm{j}\sin\pi(n-1)$.

Aşadar polii expresiei $G^N(s)G^N(-s)$ sunt numerele complexe

$$s_k=\sqrt[2n]{\cos\pi(n-1)+\mathrm{j}\sin\pi(n-1)}=\cos\frac{\pi(n-1)+2k\pi}{2n}+\mathrm{j}\sin\frac{\pi(n-1)+2k\pi}{2n}=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}\pi}{2n}(2k-1+n)},$$

$k=1,...,2n$. Se observă că toți polii au modul unitar, ceea ce înseamnă că aceştia sunt plasați în planul complex pe un cerc de rază unitară (deoarece toți polii au modulul egal cu 1), fiind separați de unghiul π/n (deoarece avem $\angle s_k = \frac{\pi}{2n}(2k+n-1)$ şi, respectiv $\angle s_{k+1} = \frac{\pi}{2n}(2k+2+n-1) = \frac{\pi}{2n}(2k+n+1)$, deci $\angle s_{k+1} - \angle s_k = \frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$.

Repartiția polilor funcției $G^N(s)G^N(-s)$ este prezentată în figura pentru n impar, respectiv par. Deoarece $G^N(s)$ trebuie să fie stabilă şi cauzală, polii acestei funcții de transfer trebuie să fie amplasați în semiplanul complex stâng (SCS). Polii funcției de transfer $G^N(-s)$ sunt imaginea în oglindă a polilor funcției de transfer $G^N(s)$ față de axa imaginară, deci sunt plasați în semiplanul complex drept (SCD).

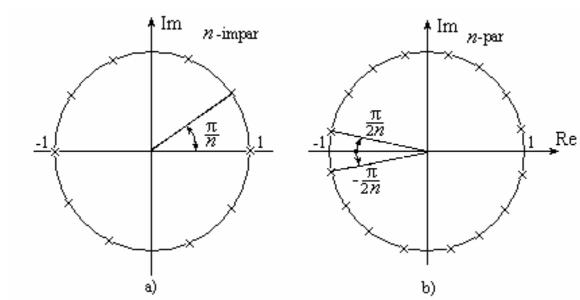


Fig. 15.

Din cele prezentate rezultă că polii corespunzători FB normalizat cu funcția de transfer $G^N(s)$ vor fi

$$s_k = e^{j\pi(2k+n-1)/2n} = \cos\frac{\pi}{2n}(2k+n-1) + j\sin\frac{\pi}{2n}(2k+n-1),\quad k = 1,2,,...,n.$$

Scriind $\frac{\pi}{2n}(2k+n-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}(k-\frac{1}{2})$ şi având în vedere că $\frac{\pi}{n}(k-\frac{1}{2})$ are valorile $\frac{\pi}{2n}$, $\frac{3\pi}{2n}$, ... , $\frac{\pi(n-1)}{2n} < \frac{\pi}{2}$ deci $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2n}(2k+n-1) < \frac{3\pi}{2}$ când $k = \overline{1,n}$, se poate observa că aceşti poli sunt plasați în SCS.

Cunoscând rădăcinile polinomului de la numitor vom avea funcția de transfer a FB normalizat

$$G^N(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)...(s-s_n)}.$$

Exemplu

Filtrul Butterworth de ordinul 2.

$n=2 \quad , \angle s_1 = \frac{\pi}{2}(2+2-1) = \frac{3\pi}{4}\,,\ \angle s_2 = \frac{\pi}{4}(4+2-1) = \frac{5\pi}{4}\,,$

$s_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\ s_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{j}\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$G^N(s) = \frac{1}{(s+\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2})(s+\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}\,.$$

FB de ordinul 3

$n=3 \quad , \angle s_1 = \frac{2\pi}{3}\,,\ \angle s_2 = \pi\,,\ \angle s_3 = \frac{4\pi}{3}$

$s_1 = -\frac{1}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ s_2 = -1\,,\ s_3 = -\frac{1}{2} - \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(s+1)[(s+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2] = (s+1)(s^2+s+1) = s^3+2s^2+2s+1$$

$$G^N(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+2s+1}$$

FB de ordinul 4

$n=4$, unghiurile vor fi $5\pi/8,\ 7\pi/8,\ 9\pi/8,\ 11\pi/8$

$s_{1,2} = -0{,}3827 \pm \mathrm{j}0{,}9239\,;\ s_{3,4} = -0{,}9239 \pm \mathrm{j}0{,}3827\,.$

$$G^N(s) = \frac{1}{(s^2+0{,}7654s+1)(s^2+1{,}8478s+1)} = \frac{1}{s^4+2{,}6131s^3+3{,}4142s+2{,}6131s+1}$$

În general vom avea

$$G^N(s) = \frac{1}{B_n(s)} = \frac{1}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+as+1}\,.$$

unde $B_n(s)$ este polinomul Butterworth de ordinul *n*. În tabela 1 se prezintă coeficienții polinomului $B_n(s)$ pentru diverse valori ale lui *n*. Polinomul B_n poate fi scris şi în formă factorizată. Tabela 2 prezintă PB (polinoamele Butterworth) scrise în această formă pentru diverse valori ale lui *n*.

Scalarea în Frecvență

FBN au pulsația de tăiere (lărgimea de bandă) egală cu 1. Pentru a obține funcția de transfer pentru o frecvență de tăiere oarecare ω_c, se înlocuieşte în funcția de transfer a

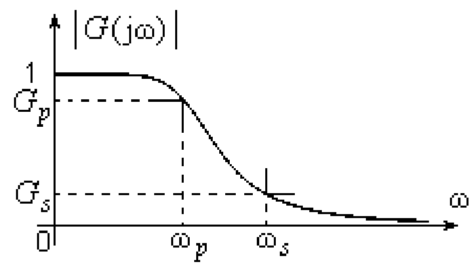
FBN s cu $\frac{s}{\omega_c}$. De exemplu pentru FB de ordinul 2 cu $\omega_c = 100$, vom avea funcția de transfer

$$G(s) = \frac{1}{(\frac{s}{100})^2 + \sqrt{2}(\frac{s}{100}) + 1} = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2} \cdot 100s + 10^4}.$$

Modulul răspunsului în frecvență pentru FB cu funcția de transfer dedusă mai înainte ($|G(\mathrm{j}\omega)|$) este identic ca formă de variație cu cel al FBN, dar este dilatat cu un factor de 100 în direcție orizontală – direcția axei ω (scalare în frecvență).

Determinarea Ordinului *n* al FBN

Ordinul filtrului BN va rezulta prin prelucrarea datelor de proiectare, respectiv a specificațiilor pe care trebuie să le respecte filtrul. În cazul filtrelor trece-jos practice specificațiile de proiectare precizează (fig.16)



- banda de trecere (pulsația maximă ω_p și câștigul minim acceptat la această pulsație G_p),
- banda de oprire (pulsația minimă ω_s și câștigul maxim admis la această pulsație G_s).

În continuare se exprimă în decibeli specificațiile referitoare la câștigurile G_s și G_p.

$$\hat{G}_s = 20\lg G_s,\ \hat{G}_p = 20\lg G_p.$$

Câștigul în dB a FBN pentru o pulsație oarecare $\omega = \omega_x$ este

$$\hat{G}_x = 20\lg\left|G^N(\mathrm{j}\omega)\right| = -20\lg\sqrt{[1+(\frac{\omega_x}{\omega_c})^2]^2} = -10\lg[1+(\frac{\omega_x}{\omega_c})^2]$$ Înlocuind specificațiile de proiectare în această relație se obține

$$\hat{G}_p = -10\lg[1+(\frac{\omega_p}{\omega_c})^{2n}],$$ respectiv

$$\hat{G}_s = -10\lg[1+(\frac{\omega_s}{\omega_c})^{2n}],$$ sau în mod echivalent

$$(\frac{\omega_p}{\omega_c})^{2n} = 10^{-\hat{G}_p/10} - 1,\ (\frac{\omega_s}{\omega_c})^{2n} = 10^{-\hat{G}_s/10} - 1.\ (1, 2)$$

Împărțind ultimele două relații se obține:

$$(\frac{\omega_p}{\omega_s})^{2n} = \frac{10^{-\hat{G}_p/10} - 1}{10^{-\hat{G}_s/10} - 1}.$$

de unde prin logaritmare rezultă:

$$n = \frac{\lg[(10^{-\hat{G}_p/10} - 1)/(10^{-\hat{G}_s/10} - 1)}{2\lg(\omega_p/\omega_s)} \quad . (3)$$

De asemenea din ecuația (1), vom avea:

$$\omega_c = \frac{\omega_p}{[10^{-\hat{G}_p/10} - 1]^{\frac{1}{2n}}}, (4)$$

Alternativ din ecuația (2), rezultă:

$$\omega_c = \frac{\omega_s}{[10^{-\hat{G}_s/10} - 1]^{\frac{1}{2n}}}. (5)$$

<u>Exemplu:</u>

Să se proiecteze un filtru Butterworth trece-jos cu specificatiile:

1)Câştigul in banda de trecere între 1 şi G_p=0,794 ($\hat{G}_p = -2\text{dB}$) pentru $0 \le \omega < 10 = \omega_p$

2)Câştigul în banda de oprire nu trebuie să fie mai mare decât $G_s = 0{,}1$ ($\hat{G}_s = -20\text{dB}$) pentru $\omega \ge 20 = \omega_s$

<u>Pasul 1:</u> Se determină n

Avem datele de proiectare $\omega_p = 10, \hat{G}_p = -2\text{dB}, \omega_s = 20, \hat{G}_s = -20\text{dB}$

Înlocuind acestevalori in ecuația (c) se obține:

$$n = \frac{\lg[(10^{2/10} - 1)/(10^{20/10} - 1)]}{2\lg(10/20)} = 3{,}701$$

Deoarece n trebuie să fie un întreg se va alege $n = 4$

<u>Pasul 2:</u> Se determină ω_c

Înlocuind $n = 4$ şi ω_p în relația (4), se obține

$\omega_c = 10{,}693$

Alternativ, substituind $n = 4$ şi ω_s în relația (5), rezultă

$\omega_c = 11{,}261$

Deoarece s-a adoptat $n = 4$ in loc de $n = 3{,}701$ se obțin două valori pentru ω_c. Alegând $\omega_c = 10{,}693$ va fi îndeplinită exact cerința $G_p \geq 0{,}794$ în banda de trecere si se va satisface în mod acoperitor cerința $G_s \leq 0{,}1$ in banda de oprire $\omega \geq 20$. Dacă însă se alege $\omega_c = 11{,}261$ vor fi îndeplinite exact specificațiile pentru banda de oprire si în mod acoperitor cerințele pentru banda de trecere. Vom presupune în continuare $\omega_c = 10{,}693$.

<u>Pasul 3:</u> Se determină funcția de transfer normalizată a FB

Din tabelul 1 pentru FBN de ordinul 4, rezultă FTN

$$G^N(s) = \frac{1}{s^4 + 2{,}6131s^3 + 3{,}4142s^2 + 2{,}6131s + 1}$$

<u>Pasul 4:</u> Se determină funcția de transfer finală a FB

Funcția de transfer căutată cu $\omega_c = 10{,}693$ se obține înlocuind s cu $s/10{,}693$ în funcția de transfer normalizată, obținându-se astfel:

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{10{,}693}\right)^4 + 2{,}6131\left(\frac{s}{10{,}693}\right)^3 + 3{,}4142\left(\frac{s}{10{,}693}\right)^2 + 2{,}6131\left(\frac{s}{10{,}693}\right) + 1}$$

$$G(s) = \frac{13073{,}7}{s^4 + 27{,}942s^3 + 390{,}4s^2 + 3194{,}88s + 13073{,}7},$$

$$G(s) = \frac{13073{,}7}{(s^2 + 8{,}1844s + 114{,}34)(s^2 + 19{,}758s + 114{,}34)}$$

Răspunsul în frecvență al acestui filtru este dat de relația:

$$\left|G^N(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{10{,}693}\right)^8 + 1}}$$

Se poate alege de asemenea $\omega_c = 11{,}261$. Ca rezultat vom avea un filtru B cu o funcție de transfer uşor modificată. Ambele variante de proiectare vor satisface insă specificațiile.

Tabela 1 Coeficienții Polinoamelor Butterworth

n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
2	1.41421356								
3	2.00000000	2.00000000							
4	2.61312593	3.41421356	2.61312593						
5	3.23606798	5.23606798	5.23606798	3.23606798					
6	3.86370331	7.46410162	9.14162017	7.46410162	3.86370331				
7	4.49395921	10.09783468	14.59179389	14.59179389	10.09783468	4.49395921			
8	5.12583090	13.13707118	21.84615097	25.68835593	21.84615097	13.13707118	5.12583090		
9	5.75877048	16.58171874	31.16343748	41.98638573	41.98638573	31.16343748	16.58171874	5.75877048	
10	6.39245322	20.43172909	42.80206107	64.88239627	74.23342926	64.88239627	42.80206107	20.43172909	6.39245322

Tabela 2 Polinoamele Butterworth în formă factorizată

n	
1	$s+1$
2	$s^2+1.41421356\,s+1$
3	$s^3+2.\,s^2+2.\,s+1$
4	$s^4+2.61312593\,s^3+3.41421356\,s^2+2.61312593\,s+1$
5	$s^5+3.23606798\,s^4+5.23606798s^3+5.23606798\,s^2 3.23606798\,s+1$
6	$s^6+3.86370331\,s^5+7.46410162\,s^4+9.14162017\,s^3+7.46410162\,s^2+3.86370331\,s+1$
7	$s^7+4.49395921\,s^6+10.09783468\,s^5+14.59179389\,s^4+14.59179389\,s^3+10.09783468\,s^2+4.49395921\,s+1$
8	$s^8+5.12583090\,s^7+13.13707118\,s^6+21.846150\,s^5+25.68835593\,s^4+21.84615097\,s^3+13.13707118\,s^2+5.12583090\,s+1$
9	$s^9+5.7587705\,s^8+16.5817187\,s^7+31.16343748\,s^6+41.9863857\,s^5+41.9863857\,s^4+31.1634375\,s^3+16.581718\,s^2+5.758770\,s+1$
10	