

Filtrarea semnalelor. Proiectarea filtrelor prin metoda repartiției poli-zeroouri.

Scopul lucrării

Toate sistemele modifică spectrul semnalelor de intrare. Modul în care sistemele acționează asupra semnalelor de intrare este descris de caracteristica modul-pulsație a acestora. Pentru a prelucra un semnal într-o manieră impusă de specificații, se va proiecta un filtru pornind de la relația dintre amplasarea poli-zeroouri și caracteristica modul-pulsație a sistemului.

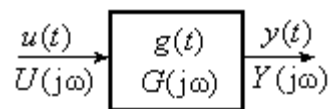
Scopul lucrării este de a proiecta filtre trece-jos cu anumite specificații pornind de la un element cunoscut (elementul de ordinul 1, elementul de ordinul 2), urmărind descrierea grafică a efectului polilor și zerourilor suplimentar introduși. Se urmărește prezentarea termenilor specifici și formularea concluziilor privind metoda de proiectare prin testare în mediul Matlab. Se vor proiecta filtre trece-jos folosind mediul Matlab.

Considerații teoretice

Un *filtru* este un sistem de prelucrare a semnalelor al cărui răspuns modifică semnalul de intrare într-un mod prestabilit. Funcțional, el este un sistem selectiv în frecvență care transmite la ieșire un spectru modificat în amplitudine al semnalului aplicat la intrare astfel:

- componentele (armonicile) sunt atenuate sau chiar eliminate într-o anumită gamă de valori ale frecvenței (gamă numită *bandă de atenuare*) și
- componentele sunt puțin reduse sau chiar neafectate într-o gamă complementară de valori ale frecvenței (gamă numită *bandă de trecere*).

În general, noțiunea de sistem de prelucrare a semnalelor (filtru) este similară cu noțiunea de sistem dinamic (definit în Teoria Sistemelor). Un filtru este complet definit dacă se cunosc: semnalul original (mărimea de intrare), semnalul filtrat (mărimea de ieșire) și legile care îi descriu funcționarea. Acest ansamblu formează modelul sistemului.



Comportarea unui sistem în domeniul de frecvență (și deci acțiunea sistemului asupra spectrului semnalului de intrare) este descrisă de funcția de frecvență a sistemului:

$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{Y(s)}{U(s)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \quad (2.1)$$

Din punctul de vedere al filtrării semnalelor, ne interesează acțiunea filtrului / sistemului asupra amplitudinii armonicilor din spectru, adică este relevant modulul transformatei Fourier a acestor semnale:

$$U(\omega) = |U(j\omega)|$$

$$Y(\omega) = |Y(j\omega)|$$

care sunt evidențiate în modulul funcției de frecvență a sistemului (caracteristica modul-pulsăție):

$$|G(j\omega)| = \frac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|} = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)} \quad (2.2)$$

Observație. Aceasta este caracteristica Bode de amplitudine în scalare naturală (nelogaritmă).

După „așezarea” cele două intervale de valori ale frecvenței în care sistemul / filtrul acționează diferit (banda de trecere și banda de atenuare), filtrele se clasifică în patru tipuri:

- filtrul trece-jos (FTJ),
- filtrul trece-sus (FTS),
- filtrul trece-bandă (FTB),
- filtrul oprește-bandă (FOB).

În figura 1 sunt prezentate formele *ideale* ale celor patru tipuri.

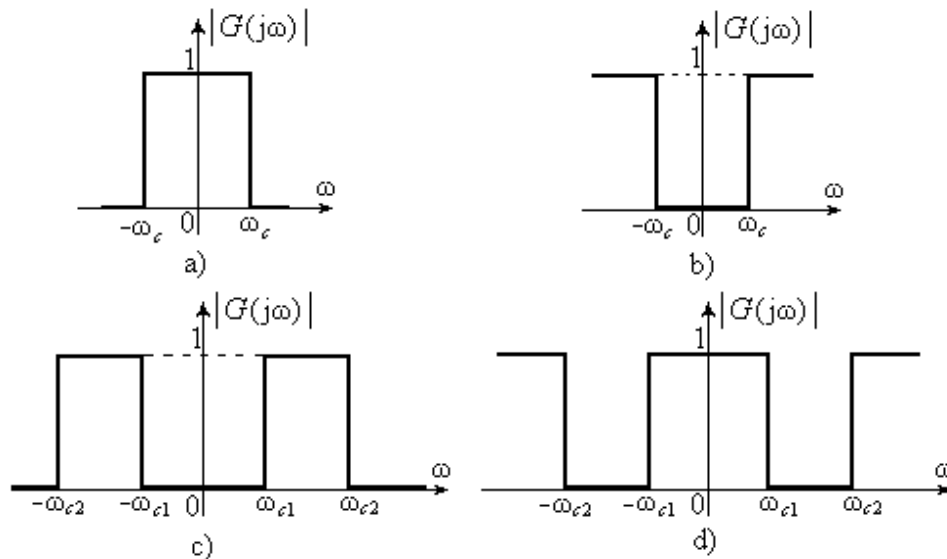


Fig. 1. Filtrele prototip / ideale.

Aceste caracteristici ale filtrelor ideale nu pot fi obținute prin utilizarea unor funcții de transfer cauzale (practic realizabile). Se urmărește determinarea unor funcții de transfer cu caracteristici cât mai apropiate de cele ideale, respectând restricția de realizabilitate și o condiție de stabilitate. Fiind aproximații, funcțiile de transfer care se deduc, trebuie să respecte o serie de *specificații* impuse răspunsului filtrului (cu anumite toleranțe):

- FTJ: bandă de trecere între 0 și ω_p , unde modulul funcției de frecvență este minim $|G(\omega)|_{\omega=\omega_p} = G_p$; bandă de oprire de la ω_s unde modulul funcției de frecvență este maxim $|G(\omega)|_{\omega=\omega_s} = G_s$;
- FTS: bandă de trecere de la ω_p , unde modulul funcției de frecvență este minim G_p ; bandă de oprire între 0 și ω_s unde modulul funcției de frecvență este maxim G_s ;

- FTB: bandă de trecere între ω_{p1} și ω_{p2} , cu modulul funcției de frecvență minim G_{p1} , respectiv G_{p2} ; bandă de oprire de la 0 la ω_{s1} și peste ω_{s2} unde avem maxim G_{s1} , respectiv G_{s2} ;
- FOB: bandă de trecere de la 0 la ω_{p1} și peste ω_{p2} , cu minim G_{p1} , respectiv G_{p2} ; bandă de oprire între ω_{s1} și peste ω_{s2} cu maxim G_{s1} , respectiv G_{s2} .

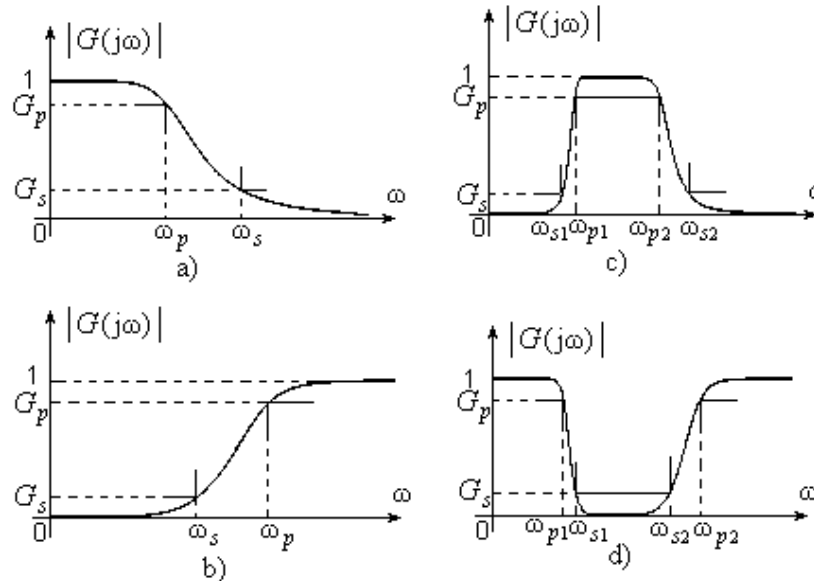


Fig. 2. Specificațiile filtrelor practice.

Pentru a descrie metoda proiectării prin repartizarea poli-zero-uri, pornim de la acțiunea elementelor simple asupra spectrului semnalului de intrare. Astfel, comportarea unui element de ordinul 1 va fi descrisă astfel:

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{k}{sT + 1} \right|_{s=j\omega} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}},$$

iar acțiunea elementului de ordinul 2:

$$|G(j\omega)| = \left| \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \right|_{s=j\omega} = \frac{k\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2\omega_n^2}}.$$

În figura 3. sunt trasate caracteristicile $|G(j\omega)| = f(\omega)$ ale celor două elemente, pentru valorile: $k = 1$, $T = 0.2$, $\xi = 0.7$, $\omega_n = 10$. (vezi programul Lab2_ex01.m și funcția Matlab bode).

De aici se pot trage două concluzii:

- aceste elemente sunt filtre trece-jos: armonicile cu frecvență apropiată de 0 sunt puțin atenuate (componenta continuă – de frecvență 0 – rămâne neatenuată), iar armonicile sunt diminuate în amplitudine cu cât frecvența lor este mai mare.
- prezența polului suplimentar la elementul de ordinul 2 îmbunătățește comportarea acestuia ca filtru trece-jos, în special în banda de trecere. O comportare mai bună în banda de trecere se poate obține prin „mutarea” polilor (schimbarea parametrilor ξ și ω_n) și, mai ales, prin adăugarea de poli.

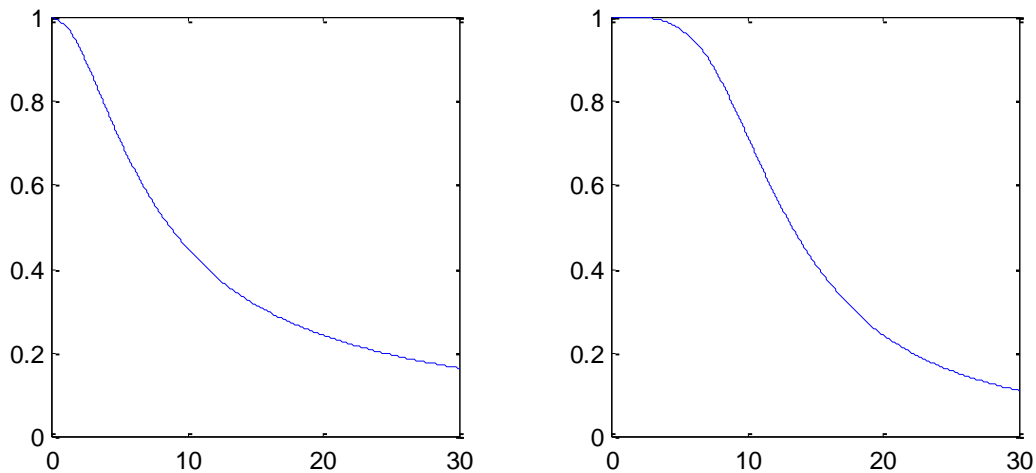


Fig. 3. Caracteristicile modul-pulsatie pentru elementul de ordinul 1 și pentru elementul de ordinul 2.

Pentru a îndeplini specificațiile impuse unui filtru trece-jos polii se aleg corespunzător și se pot adăuga suplimentar poli și zerouri. Utilizarea acestei metode impune cunoașterea relației dintre caracteristica modul-pulsatie și poziția polilor și zerourilor, relație descrisă analitic:

$$|G(j\omega)| = b_n \frac{r_1 r_2 \dots r_n}{d_1 d_2 \dots d_n} = b_n \frac{\text{produsul distantelor de la zerouri la } j\omega}{\text{produsul distantelor de la poli la } j\omega}, \text{ pentru } \forall \omega$$

sau o experiență câștigată prin experimente privind această relație.

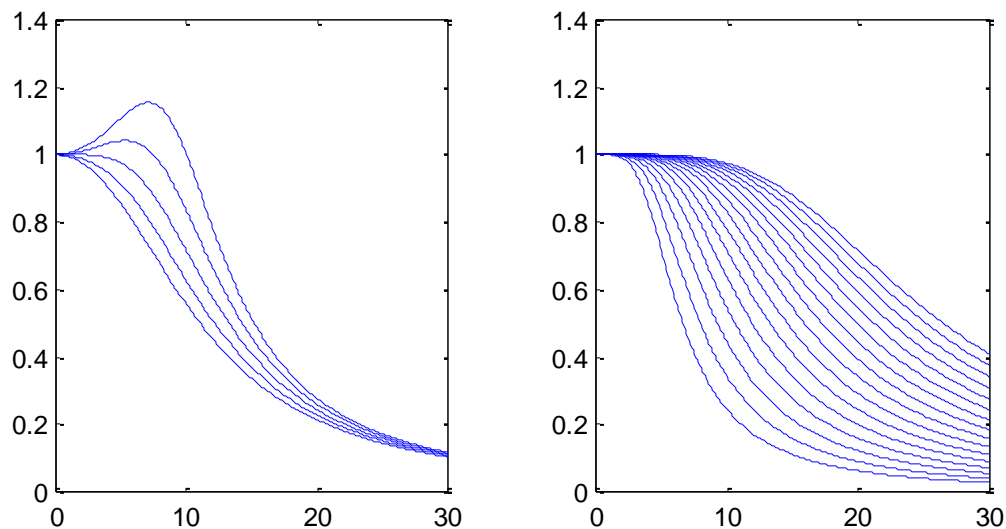


Fig. 4. Efectul modificării factorului de amortizare și a pulsației naturale ale unui element de ordinul 2 asupra caracteristicii modul-pulsatie.

Proiectarea filtrelor prin metoda poli-zerouri utilizând Matlab

Pentru a utiliza metoda poli-zerouri este important să trasăm caracteristicile modul pulsatie ale elementelor de ordinul 1 și 2 pentru diverse valori ale parametrilor acestora (amplasări diverse ale polilor). Mai mult, trebuie remarcată evoluția funcției de frecvență în jurul valorilor frecvenței egale cu partea imaginară a polilor și zerourilor (vezi figura 4 și programul `Lab2_ex03.m`).

Exemple

1. Să se traseze caracteristica modul-pulsație a elementului de ordinul 2 pentru diverse valori ale factorului de amortizare și pulsației naturale. Pentru fiecare caz, evidențiați polii.

Pentru a trasa caracteristica modul-pulsație plecând de la funcția de transfer a sistemului se poate folosi funcția `bode`, iar pentru a calcula polii sistemului având funcția de transfer se folosește funcția `tf2zp`.

```
k = 1; %amplificarea sistemului
wn = 10; %pulsatia naturala
z = 0.7 %factorul de amortizare
num = [k*wn*wn];
den = [1 2*z*wn wn*wn];
%functia de transfer a filtrului num/den
Gw = bode(num,den,w);
%caracteristica modul-pulsatie = caracteristica Bode de amplitudine
plot(w,Gw)
```

(vezi și programele `Lab2_ex03.m` și `Lab2_ex04.m`)

2. Să se traseze caracteristica modul pulsație a unui sistem cu 2 poli: $-7 \pm j*5$.

Se folosește funcția `zp2tf`, care calculează numărătorul și numitorul funcției de transfer care are polii și zerourile dorite.

```
w=0:0.1:30; %domeniul de frecventa pentru care se traseaza caracteristica
z = []; %zerourile (nu are)
p = [-7+j*5 -7-j*5]; %polii impusi
k = prod(p); %amplificarea egala cu produsul polilor pentru a indeplini
    conditia ca in 0 sa avem castig unitar - filtru trece-jos
[num, den] = zp2tf(z,p,k);
%se obtine functia de transfer a sistemului cu polii alesi
Gw = bode(num,den,w);
%caracteristica modul-pulsatie = caracteristica Bode de amplitudine
plot(w,Gw);
```

(vezi programul `Lab2_ex05.m`)

3. Să se studieze efectul introducerii unei perechi de poli suplimentari $-5 \pm j*10$ asupra caracteristicii obținute la exemplul anterior.

(vezi programul `Lab2_ex06.m`)

4. Să se studieze efectul introducerii zeroului $z_1 = -5$ în funcția de transfer a elementului de ordinul 2 cu $\xi = 0.7$, $\omega_n = 10$.

Funcția de transfer a filtrului în acest caz este:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2(s+5)\frac{1}{5}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

iar factorul $1/5$ este impus de condiția: $|G(j\omega)|_{\omega=0} = G(0) = 1$.

(vezi programul `Lab2_ex07.m`)

5. Să se studieze efectul introducerii unei perechi de zerouri complexe $-5 \pm j*20$ în funcția de transfer a elementului de ordinul 2 de la exemplul anterior.

Funcția de transfer a filtrului în acest caz este

$$G(s) = \frac{\omega_n^2(s^2 + 10s + 425) \frac{1}{425}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2},$$

Observație. Partea imaginară a perechii de zerouri este ± 20 . Notați efectul în zona $\omega = 20$.

(vezi programul Lab2_ex08.m)

6. Analizați caracteristica filtrului cu polii $p_{1,2} = -5 \pm 5j$ și zerourile $z_{1,2} = -5 \pm 15j$, apoi considerați filtrul cu $p_{1,2} = -5 \pm 15j$ și $z_{1,2} = -5 \pm 5j$.

Cele două funcții de transfer sunt:

$$G(s) = k_1 \frac{s^2 + 10s + 250}{s^2 + 10s + 50} \text{ și } G(s) = k_2 \frac{s^2 + 10s + 50}{s^2 + 10s + 250}$$

Alegând $k_1 = 0.2$ și $k_2 = 0.5$, vom observa primul este un filtru oprește-bandă, iar al doilea este un filtru trece-bandă. Poziția relativă a polilor și zerourilor schimbă tipul filtrului prin faptul că determină ridicarea, respectiv coborârea caracteristicii în jurul pulsațiilor egale cu părțile lor imaginare. Prezența zerourilor în dreptul pulsației $\omega = \pm 5$ determină „coborârea” caracteristicii în jurul acestei valori în caracteristica modul pulsație, pe când prezența polilor în dreptul valorilor $\omega = \pm 15$ determină ridicarea caracteristicii în dreptul acestor valori.

(vezi programul Lab2_ex09.m)

Observație. Îmbunătățirea performanțelor în banda de trecere sau în banda de oprire se realizează în primul rând prin introducerea unui număr mai mare de poli, respectiv de zerouri, cu valori convenabile ale părților imaginare.

Observație. Este util pentru fiecare caz, să se prezinte grafic (pe hârtie) poziția polilor și zerourilor, marcând pozițiile lor pe axa imaginară, apoi marcând părțile imaginare pe axa pulsației în caracteristica modul-pulsație.

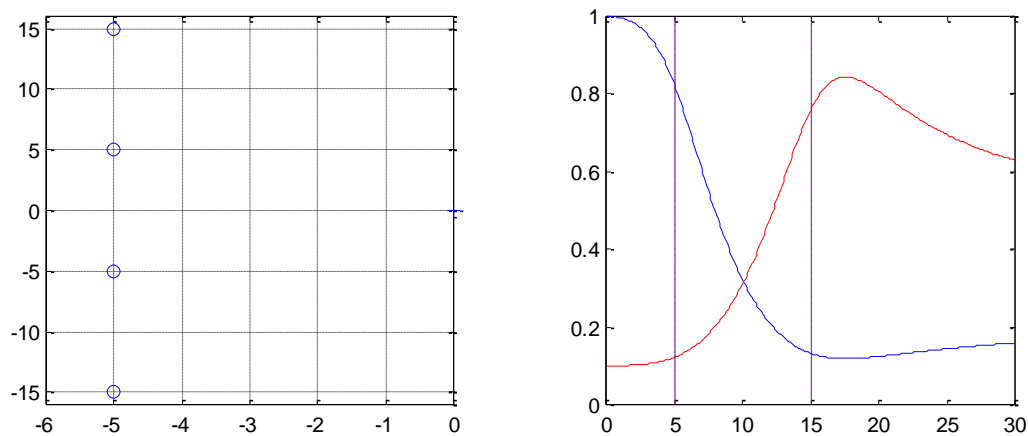


Fig. 5. Poziția polilor și zerourilor marcată pe caracteristica modul-pulsație.

Exerciții

1. Să se studieze efectul introducerii zeroului $z_1 = -2$ asupra caracteristicii unui element de ordinul 2.
2. Să se studieze efectul introducerii unei perechi de zerouri $(-2 \pm j)$ asupra caracteristicii unui element cu polii $-5 \pm j \cdot 10$. Evidențiați poziția în raport cu axa pulsației a polilor și zerourilor (marcați pe axa pulsației valorile părților imaginare ale acestora).
3. Să se traseze caracteristica modul-pulsație pentru cazurile următoare, notând poziția a polilor și zerourilor pe axa pulsației (valorile părții imaginare ale polilor și zerourilor):
 - polii $-5 \pm j \cdot 10$ și zerourile $-2 \pm j$
 - polii $-2 \pm j$ și zerourile $-5 \pm j \cdot 10$.
4. Să se proiecteze un filtru trece-jos cu specificațiile:
 - banda de trecere $\omega_p = 5$ cu $G_p = 0.9$
 - banda de oprire $\omega_p = 15$ cu $G_p = 0.1$

(Scrieți un program Matlab cu care poziționând poli și zerouri, modificați caracteristica modul-pulsație până la obținerea specificațiilor impuse.)