Dinamica Manipulatorului

- Dinamica solidului rigid;
- Formalismil Newton Euler;
- Forma explicită a modelului dinamic;
- Formalismul Lagrange;

1. Dinamica solidului rigid

În general modelul dinamic este o aproximare a realității care permite stabilirea unei relații cauzale (cauză-efect) în condițiile în care starea sistemului este cunoscută de un anumit timp. În acest mod dinamica poate face predicții asupra viitorului doar dacă, pe lângă noile cauze care acționează asupra sistemului sunt cunoscute și starile anterioare ale acestuia. Este nevoie deci de cunoașterea unei istorii a ceea ce s-a intâmplat deja.

Din punct de vedere (al limbajului) matematic ceea ce s-a întâmplat deja se coroborează cu cauzele din acest moment prin ecuații diferențiale. Rezolvarea acestor ecuații presupune integrarea adică indicarea constantelor de integrare ceea ce înseamnă a da socoteală de stările menționate.

În mecanică dinamica presupune o ecuație diferențială de ordinul doi de tipul:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \tag{1}$$

unde: *x* este deplasarea obiectului ($\ddot{x}$ este accelerația obiectului);
F este forța care acționează asupra obiectului (interacțiunea);
m este masa obiectului (măsura inerției acestuia: capacitatea lui de a se împotrivi la modificarea stării sale de mișcare)

În relația (1) apare sintagma *stare de mișcare* ceea ce este în concordanță cu faptul că rezolvarea ei presupune cunoașterea a două mărimi inițiale: viteza și poziția inițială ($\dot{x}(0); x(0)$).

O imagine încă mai intuitivă asupra implicării starilor trecute în ecuația de dinamică poate fi obținută dacă ecuația (1) este transformată într-o ecuație cu diferențe finite. Se obține astfel o relație de recurență de tipul (1)’:

$$x(k+2) = 2x(k+1) - x(k) + \frac{F(k+2)}{m} \tag{1'}$$

unde: *x(k)* reprezintă starea numărul *k*.

Generalizând (1) pentru un sistem mecanic în general și pentru un manipulator în special se obține următoarea ecuație diferențială matriceală:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\Gamma} \tag{3}$$

unde: $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})$ este matricea de inerție a sistemului (*nxn)*;
$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ este vectorul Coriolis_Centripetal al sistemului (*nx1*);
$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})$ este vectorul gravitațional (*nx1*);
$\boldsymbol{\Gamma}$ este vectorul momentelor motoare care acționează în cuplele robotului (*nx1*);
$\boldsymbol{q}$ este vectorul coordonatelor generalizate (*nx1*);
n este numărul elementelor sistemului – numarul corpurilor manipulatorului.
Pentru a explicita (3) se poate face apel la formalismul lui Newton Euler sau cel a lui Lagrange.

2. Formalismul Newton Euler

Pe scurt, formalismul Newton Euler (în varianta d’Alembert) extinde noțiunea de echilibru static la cel de echilibru dinamic. Ne reamintim ca echilibrul static (echilibrul propriu-zis) se manifesta dacă torsorul forțelor și al momentelor care acționează asupra unui corp este egal cu zero. În cazul de față (v.fig.1), echilibrul dinamic se obține din egalarea torsorului menționat cu torsorul forțelor de inerție (4).

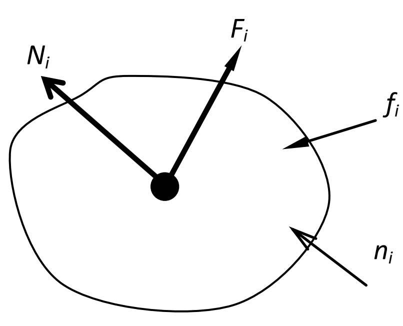

Fig.1 Forțele și momentele de inerție

$$\begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i \\ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_i \\ \boldsymbol{N}_i \end{Bmatrix} \tag{4}$$

unde: $\boldsymbol{r}_i$ este vectorul de poziție al punctului de aplicare al forței $\boldsymbol{f}_i$ relativ la centrul de masă;

$\boldsymbol{f}_i$ este forța care acționează asupra corpului *i=1...n*;

$\boldsymbol{n}_i$ este momentul care acționează asupra corpului *i=1...n*;

$\boldsymbol{F}_i$ este forța de inerție;

$\boldsymbol{N}_i$ este momentul de inerție.

Mai intuitivă varianta d'Alenbert adaugă la un corp în mișcare torsorul $\begin{Bmatrix} -\boldsymbol{F}_i \\ -\boldsymbol{N}_i \end{Bmatrix}$ care este tratat sub forma unei interacțiuni exterioare.

Forțele și a momentele de inerție pot fi obținute cu ajurorul relațiilor lui Newton (5), respectiv Euler(6).

$$\boldsymbol{F}_i = m\ddot{\boldsymbol{x}} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{I}_C\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}_C\boldsymbol{\omega} \tag{6}$$

unde: *m* este masa solidului rigid;

$\ddot{\boldsymbol{x}}$ este accelerația solidului rigid;

$\boldsymbol{I}_C$ este tensorul de inerție al corpului;

$\dot{\boldsymbol{\omega}}$ este accelerația unghiulară a solidului rigid

$\boldsymbol{\omega}$ este viteza unghiulară a corpului.

Relația (4) poate fi generalizată pentru un manipulator. Egalitatea menționată se va obține pentru fiecare element al lanțului cinematic. În acest scop legaturile cinematice (cuplele) vor fi înlocuite prin forțe și momente de legătură (reacțiuni) astfel încât asupra elementelor vor acționa pe lângă sistemul de forțe, momente exterioare menționate și forțele, momentele datorate legăturilor. Figura 2 ilustrează operația de echivalare a legăturilor. Asupa corpului *i* actionează forțele, momentele de legătură datorate cuplei *i* și cele datorate cuplei *i+1*. În conformitate cu principiul al treilea al mecanicii se observă faptul că legăturile genereaza un sistem de forțe, momente egale în modul și opuse ca sens care actionează pe corpurile adiacente.

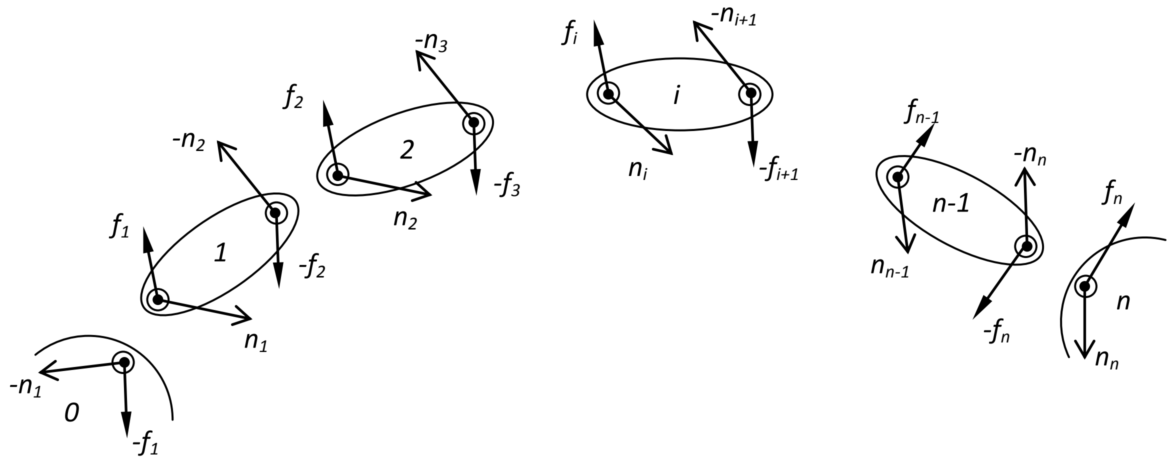

Fig.2. Lanțul cinematic

Dacă din lanțul cinematic prezentat în figura 2 se va detalia corpul *i* atunci se obține figura 3 care permite scrierea ecuațiilor de echilibru dinamic (7).

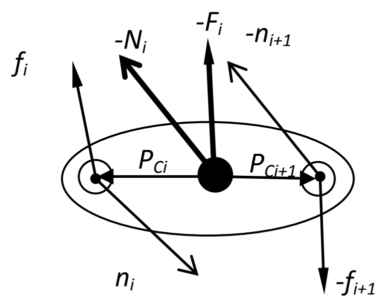

Fig.3. Elementul *i*

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{f}_i - \boldsymbol{f}_{i+1}$$

$$\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{n}_i - \boldsymbol{n}_{i+1} + \boldsymbol{p}_{Ci} \times \boldsymbol{f}_i - \boldsymbol{p}_{Ci+1} \times \boldsymbol{f}_{i+1}$$

(7)

Ecuația (7) se utilizează pentru determinarea reacțiunilor din cupla *i* ($\boldsymbol{f}_i$ $\boldsymbol{n}_i$) în ipoteza că restul termenilor sunt cunoscuți (inclusiv reacțiunile din cupla *i+1*). Cuplele robotului au un singur grad de mobilitate (translație sau rotație) ceea ce înseamnă că pot genera (pasiv) 5 reacțiuni. În consecință pentru a obține echilibru lanțului cinematic a șasea componentă trebuie să fie generată (activ) de un actuator (motor). Calculul forțelor sau a momnetelor motoare (pentru cuplele de translație respectiv de rotație) se realizează cu ajutorul relației (8).

$$\tau_i = \begin{cases} \boldsymbol{n}_i \boldsymbol{Z}_i \text{ pentru cuple de rotație} \\ \boldsymbol{f}_i \boldsymbol{Z}_i \text{ pentru cuple de translație} \end{cases}$$

(8)

Ecuația (7) poate fi rescrisă iterativ prin parcurgerea lanțului cinematic de la cupla *n* către cupla *1* astfel:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_n \\ \boldsymbol{n}_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_{n-1} = \boldsymbol{F}_{n-1} + \boldsymbol{f}_n \\ \boldsymbol{n}_n = N_{n-1} + n_n - \boldsymbol{p}_{Cn-1} \times \boldsymbol{f}_{n-1} + \boldsymbol{p}_{Cn} \times \boldsymbol{f}_n \end{cases}$$

......

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{f}_{i+1} \\ \boldsymbol{n}_i = N_i + n_{i+1} - \boldsymbol{p}_{Ci} \times \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{p}_{Ci+1} \times \boldsymbol{f}_{i+1} \end{cases}$$

.....

$$\begin{cases} \boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{f}_2 \\ \boldsymbol{n}_1 = N_1 + n_2 - \boldsymbol{p}_{C1} \times \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{p}_{C2} \times \boldsymbol{f}_2 \end{cases}$$

(9)

Se observă că parcurgerea acestui algoritm depinde de cunoașterea prealabilă a forțelor și a momentelor de inerție. Ecuațiile (5) și (6) relevă faptul că această cunoaștere se bazează pe determinarea mărimilor cinematice de tipul $\ddot{\boldsymbol{x}}$;$\dot{\boldsymbol{\omega}}$; $\boldsymbol{\omega}$ **.** La rândul lor aceste mărimi pot fi calculate iterativ. Capitolul anterior a prezentat un algoritm corespunzător care, de această dată, necesită parcurgerea lanțului cinematic de la cupla *1 la n*.

În concluzie, pentru a scrie modelul dinamic (3) sunt necesare două etape:

- Parcurgerea lanțului cinematic de la bază spre vârf pentru determinarea mărimilor cinematice (etapa de cinematică);
- Parcurgerea lanțului cinematic de la vârf la baza pentru determinarea reacțiunilor din cuple iar in final a forțelor și momentelor motoare din cuple (etapa de dinamică).

3. Forma explicită a modelului dinamic

În cele ce urmează se dorește aprofundarea noțiunilor prezentate prin explicarea relației lui Euler urmată de prezentarea modului în care este calculat tensorul de inerție. Aceste elemente vor permite o prezentare sintetică atat a parții de calcul cinematic cât și a celei referitoare la echilibru dinamic.

Explicarea relației lui Euler (6) pornește de la concepția Newtoniană în conformitate cu care un corp este un ansamblu de elemente de masă inifinit de mici. Pentru un punct material de masă *m* principiul al doilea al mecanicii stipulează:

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} \Rightarrow \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \Rightarrow \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{10}$$

unde: $m\boldsymbol{v}$ este denumit impulsul punctului material (cantitatea de mișcare); iar de cele mai multe ori este notată prin $\boldsymbol{H} = m\boldsymbol{v}$

Efectul rotației (față de un pol a) punctului material este surprins cu ajutorul noțiunii de moment. Utilizând rezultatul precedent se obțin succesiv:

$$\boldsymbol{F} = m\dot{\boldsymbol{v}} \Rightarrow \boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}$$

$$\frac{d(r \times m\boldsymbol{v})}{dt} = r \times m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{N}$$

în concluzie

$$\frac{d(r \times m\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{11}$$

unde: $r \times m\boldsymbol{v}$ este denumit momentul cinetic al punctului material; iar de cele mai multe ori este notată prin $\boldsymbol{K} = r \times m\boldsymbol{v}$

Relația (11) poate fi generalizată pentru un solid rigid (v.fig.4)

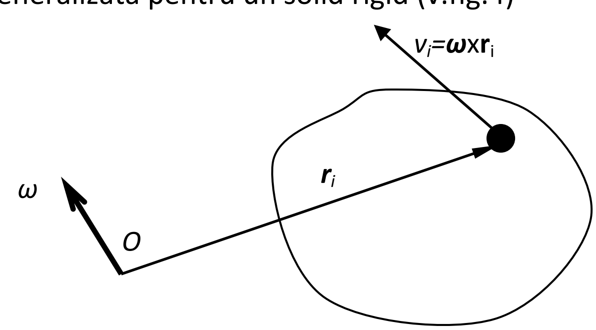

Fig.4. Momentul cinetic al solidului rigid

$\boldsymbol{K} = \int \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i dm \Rightarrow \boldsymbol{K} = \int \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i \rho dV$

dar $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i$

$\boldsymbol{K} = \int \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)\rho dV \Rightarrow \boldsymbol{K} = \int \tilde{\boldsymbol{r}}_i(-\tilde{\boldsymbol{r}}_i)\boldsymbol{\omega}\rho dV = (\int \tilde{\boldsymbol{r}}_i(-\tilde{\boldsymbol{r}}_i)\rho dV)\boldsymbol{\omega}$

Dacă notăm prin $\boldsymbol{I_O} = \int \tilde{\boldsymbol{r}}_i(-\tilde{\boldsymbol{r}}_i)\rho dV$ tensorul de inerție relativ la polul O (v.fig.4) atunci se obține relația:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I_O}\boldsymbol{\omega} \tag{12}$$

Calculul tensorului de inerție se face cu relația $\boldsymbol{I_O} = \int \tilde{\boldsymbol{r}}_i(-\tilde{\boldsymbol{r}}_i)\rho dV$. Astfel:

$$\boldsymbol{I_O} = \int \tilde{\boldsymbol{r}}_i(-\tilde{\boldsymbol{r}}_i)\rho dV = -\int \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}\rho dV$$

$$\boldsymbol{I_O} = \int \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}\rho dV$$

Ceea ce se notează prin:

$$\boldsymbol{I_O} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Relațiile (11) și (12) permit descrierea unei paralele între relația lui Newton și cea a lui Euler. Această sinteză este prezentată în tabelul 1.

Tabelul 1

Impulsul	Momentul cinetic
$\boldsymbol{H} = m\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I_O}\boldsymbol{\omega}$
Ecuația lui Newton	Ecuația lui Euler
$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{F}$	$\frac{d(r \times m\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{N}$
$\dot{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{F}$	$\dot{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{N}$
$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{I}_O\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}_O\boldsymbol{\omega}$

Ecuațiile (5) și (6) surprind ambele aspecte ale mișcării: caracterul liniar (ecuația lui Newton) și caracterul circular (ecuația lui Euler). Analizând cele două ecuații se observă faptul că la scrierea lor este necesar calculul accelerațiilor liniare și a celor unghiulare. Acest calcul dezvoltă rezultatele obținute in capitolul precedent unde a fost propus un algoritm de calcul a vitezelor liniare și unghiulare.

Astfel utilizând regula de derivare, pentru accelerația unghiulară se obține succesiv:

$$\boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{i+1}} = \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\theta}_{\mathrm{i+1}}\mathbf{Z}_{\mathrm{i+1}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \dot{\theta}_{\mathrm{i+1}}(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{Z}_{\mathrm{i+1}}) + \ddot{\theta}_{\mathrm{i+1}}\mathbf{Z}_{\mathrm{i+1}} \tag{14}$$

iar pentru viteza liniară:

$$\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{p}_{i+1} + \dot{d}_{i+1}\boldsymbol{Z}_{i+1}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{v}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \boldsymbol{p}_{i+1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \dot{\boldsymbol{p}}_{i+1} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{p}_{i+1}) + \ddot{d}_{i+1}\boldsymbol{Z}_{i+1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \dot{d}_{i+1}\boldsymbol{Z}_{i+1}$$

dar: $\boldsymbol{p}_{i+1} = \boldsymbol{a}_i + d_{i+1}\boldsymbol{Z}_{i+1}$ unde: $\boldsymbol{a}_i$ componenta normală pe Z_{i+1} este constantă (v.fig.5); ceea ce conduce la

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{v}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \boldsymbol{p}_{i+1} + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{p}_{i+1}) + \ddot{d}_{i+1}\boldsymbol{Z}_{i+1} + 2\dot{d}_{i+1}\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{Z}_{i+1} \tag{15}$$

Atunci când cupla *i+1* este de translație termenul $d_{i+1} = 0$ sau este o constantă

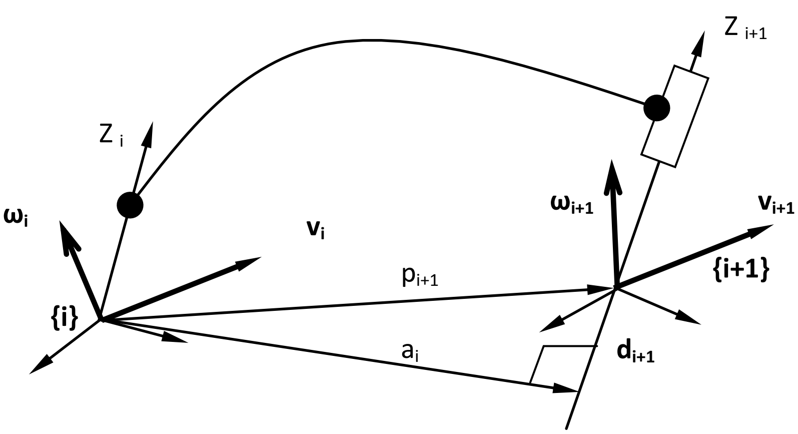

Fig.5 Relația dintre sistemele *i*, *i+1*

Deoarece relația lui Newton a fost scrisă pentru centrul de masă sunt necsare două iterații suplimentare (v.fig. 6):

$$\boldsymbol{v}_{Ci+1} = \boldsymbol{v}_{i+1} + \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \boldsymbol{p}_{Ci+1} \tag{16}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{Ci+1} = \dot{\boldsymbol{v}}_{i+1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} \times \boldsymbol{p}_{Ci+1} + \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times (\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \boldsymbol{p}_{Ci+1}) \tag{17}$$

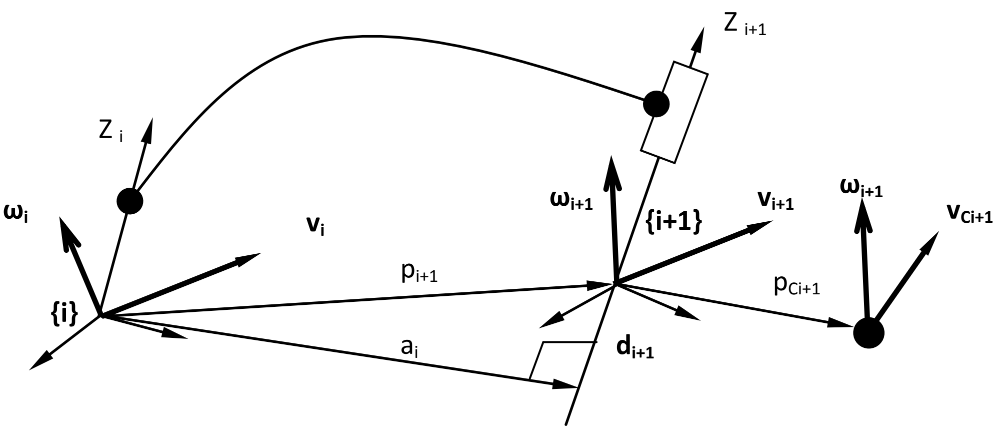

Fig.6 Vitezele centrului de masă al elementului *i+1*

Utilizând ecuațiile anterioare se poate enunța următorul algoritm iterativ:

- Date inițiale:
  Poziția, viteza și accelerația coordonatelor generalizate: $\boldsymbol{\theta}; \dot{\boldsymbol{\theta}}; \ddot{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{d}; \dot{\boldsymbol{d}}; \ddot{\boldsymbol{d}}$;
  Vectorii de poziție ai centrului de masă și ai reperului următor: ${}^{i}\boldsymbol{p}_{Ci}$; ${}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1}$
  Operatorii de rotație de la reperul *i* la reperul *i+1*: ${}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}$
  Masa și tensorul de inerție al fiecărui element: m_i; ${}^{i}\boldsymbol{I}_{Ci}$
  Torsorul cu care este incărcat prehensorul: $\{ {}^{n}\boldsymbol{f}_n;\ {}^{n}\boldsymbol{n}_n \}$
  Efectul gravitației ${}^{0}\dot{\boldsymbol{v}}_0 = \boldsymbol{g}$

- Etapa de cinematică: parcurgerea lanțului cinematic de la bază la vârf
  Pentri i=1 pâna la i=n-1

$${}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\ {}^{i}\boldsymbol{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\mathbf{Z}_{i+1}$$

$${}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\ {}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \dot{\theta}_{i+1}({}^{i}\boldsymbol{\omega}_i \times {}^{i+1}\mathbf{Z}_{i+1}) + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\mathbf{Z}_{i+1}$$

$${}^{i+1}\dot{\boldsymbol{v}}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\left({}^{i}\dot{\boldsymbol{v}}_i + {}^{i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{\omega}_i \times ({}^{i}\boldsymbol{\omega}_i \times {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1})\right) + \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\mathbf{Z}_{i+1} + 2\dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\ {}^{i}\boldsymbol{\omega}_i \times {}^{i+1}\mathbf{Z}_{i+1}$$

$${}^{i+1}\dot{\boldsymbol{v}}_{Ci+1} = {}^{i+1}\dot{\boldsymbol{v}}_{i+1} + {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}\boldsymbol{p}_{Ci+1} + {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times ({}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}\boldsymbol{p}_{Ci+1})$$

$${}^{i+1}\boldsymbol{F}_{i+1} = m_{i+1}{}^{i+1}\dot{\boldsymbol{v}}_{Ci+1}$$

$${}^{i+1}\boldsymbol{N}_{i+1} = {}^{i+1}\boldsymbol{I}_{Ci+1}{}^{i+1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1} + {}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}\boldsymbol{I}_{Ci+1}{}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1}$$

- Etapa de dinamică: parcurgerea lanțului cinematic de la vârf la bază (v.fig.7)

  Pentri i=n-1 până la i=1

$${}^{i}\boldsymbol{f}_i = {}_{i+1}^{i}\boldsymbol{R}^{i+1}\boldsymbol{f}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{F}_i$$

$${}^{i}\boldsymbol{n}_i = {}^{i}\boldsymbol{N}_i + {}_{i+1}^{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i+1}\boldsymbol{n}_{i+1} + {}^{i}\boldsymbol{p}_{Ci} \times {}^{i}\boldsymbol{F}_i + {}^{i}\boldsymbol{p}_{i+1} \times {}_{i+1}^{i}\boldsymbol{R}\,{}^{i+1}\boldsymbol{f}_{i+1}$$

$$\tau = {}^{i}\boldsymbol{n}_i^{T}\,{}^{i}\boldsymbol{Z}_i$$

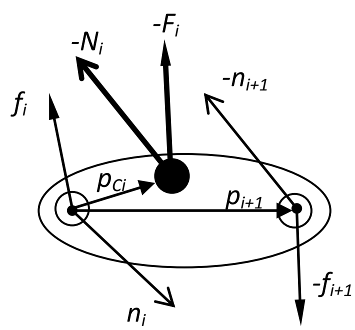

Fig.7. Echilibru dinamic vizavi de originea elementulu *i*

4. Formalismul Lagrange

Originea formalismului Lagrange este dorința de a scrie ecuațiile dinamice cu un număr minim de calcule. Formalismul NE operează cu mărimi vectoriale cu șase dimensiuni. Aceste dimensiuni se referă la mișcările posibile pe cele trei direcții (translații și rotații). Un sistem mecanic supus la legături nu poate să execute cele șase mișcări cu fiecare element din care este construit. Coordonatele generalizate au rolul de a evidenția direcțiile pe care sunt posibile mișcările elementelor care compun sistemul. A scrie ecuații relativ la dimensiunea gradului de libertate presupune o economie de calcul. În acest scop algoritmul iterativ Newton Euler este înlocuit de relații care reflectă energia sistemului mecanic (mărime scalară)

Ecuația lui Lagrange este:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\tau}$$

(18)

unde: L este Lagrangeanul sistemului mecanic;

$\boldsymbol{q}$ este vectorul coordonatelor generalizate;

$\dot{\boldsymbol{q}}$ este vectorul vitezelor generalizate;

$\boldsymbol{\tau}$ este vectorul momentelor motoare care acționează în sensul coordonatelor generalizate

Lagrangeanul este definit cu ajutorul relației:

$$L = K - U$$

(19)

unde: $K(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ este energia cinetică a sistemului;

$U(\boldsymbol{q})$ este energia potențială a sistemului.

Deoarece energia potențială nu depinde de viteza coordonatelor generalizate ecuația (18) poate fi rescrisă astfel:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{q}} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\tau}$$

(20)

Ecuația (20) permite distincția dintre termenii inerțiali și cei gravitaționali (distincție care a fost precizată chiar și la ecuația (3)).

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{q}}$ reprezintă termenii inerțiali ai modelului dinamic;

$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{q}}$ reprezintă termenul gravitațional al modelului dinamic.

Dacă în continuare se utilizează separația celor doi termeni și forma generală a modelului dinamic (3) putem obține corespondențele de tipul:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$$

(21)

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})$$

(22)

Ecuațiile (21) și (22) permit calculul elementelor modelului dinamic (matricele de inerție, vectorul coriolis centripetal, vectorul gravitațional) pornind de la mărimile energetice.

Termenii menționați se obțin prin următoarea succesiune de calcule:

$$K = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\right) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})}\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}$$

Ceea ce în final conduce la următoarea formă:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \left(\dot{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})}\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}^T \frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})}{\partial q_1}\dot{\boldsymbol{q}} \\ \cdots \\ \dot{\boldsymbol{q}}^T \frac{\partial \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})}{\partial q_n}\dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$$

(23)

Beneficiul acestui rezultat constă în determinarea elementelor modelului dinamic urmând succesiunea $K \Rightarrow \boldsymbol{M} \Rightarrow \boldsymbol{V}$.

Energia cinetică a structurii mecanice este suma energiilor cinetice ale elementelor din care acesta se compune. Datorită faptului că aceste elemente execută o mișcare complexă care conține atât componenta liniară cât și cea circulară (de rotație) energia cinetică a elementului se generează la rândul ei din cele două componente.

Din această cauză relația energiei cinetice este următoarea:

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(m_i {\boldsymbol{v}_{Ci}}^T \boldsymbol{v}_{Ci} + {\boldsymbol{\omega}_i}^T \boldsymbol{I}_{Ci}\boldsymbol{\omega}_i\right)$$

(23)

unde: $\boldsymbol{v}_{Ci}$ este viteza centrului de masă al ementului *i*;

$\boldsymbol{\omega}_i$ este viteza unghiulară a corpului *i*;

$\boldsymbol{I}_{Ci}$ este tensorul de inerție al elemntului *i*;

În consecință:

$$\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(m_i\boldsymbol{v}_{Ci}{}^T\boldsymbol{v}_{Ci} + \boldsymbol{\omega}_i{}^T\boldsymbol{I}_{Ci}\boldsymbol{\omega}_i\right) \tag{24}$$

Relația (24) poate fi dezvoltată utilizînd Jacobianul:

$$\boldsymbol{v}_{Ci} = \boldsymbol{J}_{vi}\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{J}_{\omega i}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{25}$$

Este importantă observația referitoare la caracterul special a acestor Jacobiene (v.fig.8). Indicele *i* indică faptul că acestea conțin *i* coloane (v.Calculul Jacobianului), cu toate acestea, deoarece Jacobianul trebuie să inmulțească un vector de dimensiunea *n*x*1* (viteza generalizată) el este scris într-o matrice cu *n* coloane obținută prin adaugarea a *n-i* coloane nule la Jacobianul inițial.

$$\boldsymbol{J}_{vi} = \left[\frac{\partial\boldsymbol{p}_{Ci}}{\partial q_1}, \frac{\partial\boldsymbol{p}_{Ci}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial\boldsymbol{p}_{Ci}}{\partial q_i}, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0}\right] \tag{26}$$

$$\boldsymbol{J}_{\omega i} = \left[\bar{\varepsilon}_1\boldsymbol{Z}_1, \bar{\varepsilon}_2\boldsymbol{Z}_2, \ldots, \bar{\varepsilon}_i\boldsymbol{Z}_i, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0}\right] \tag{27}$$

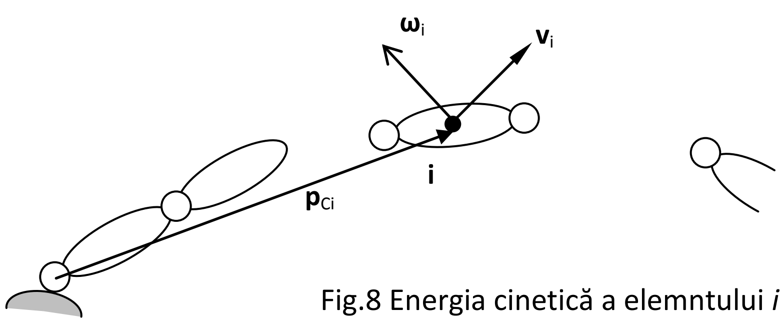

Fig.8 Energia cinetică a elemntului *i*

Coroborând relațiile (24) și (25) se obține următotul rezultat referitor la matricea de inerție a sistemului:

$$\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{J}_{vi}{}^T\boldsymbol{J}_{vi}\dot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{J}_{\omega i}{}^T\boldsymbol{I}_{Ci}\boldsymbol{J}_{\omega i}\dot{\boldsymbol{q}}\right)$$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n}\left(m_i\boldsymbol{J}_{vi}{}^T\boldsymbol{J}_{vi} + \boldsymbol{J}_{\omega i}{}^T\boldsymbol{I}_{Ci}\boldsymbol{J}_{\omega i}\right)$$

(28)

Pentu calculul vectorului Coriolis Centripetal $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ se utilizează elementele matricei de inerție calculate deja (28). Pentru a ușura calculul și totodata pentru a explicita influența fiecarui element asupra mărimilor dinamice, vectorul menționat este scris ca sumă a termenului Coriolis și a celui Centripetal.

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{2}}] + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}]$$

(29)

unde: $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{2}}]$ reprezintă termenul centripetal (nxn)(nx1);

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{2}}] = \begin{bmatrix} b_{111} & b_{122} & \dots & b_{1nn} \\ b_{211} & b_{222} & \dots & b_{2nn} \\ . & . & \dots & . \\ b_{n11} & b_{n22} & \dots & b_{nnn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {q_1}^2 \\ {q_2}^2 \\ . \\ {q_n}^2 \end{bmatrix};$$

(30)

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}]$ reprezintă termenul Coriolis $\left(n \times \frac{(n-1)n}{2}\right)\left(\frac{(n-1)n}{2} \times 1\right)$;

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}] = \begin{bmatrix} 2b_{112} & 2b_{123} & \dots & 2b_{1n-1n} \\ 2b_{212} & 2b_{223} & \dots & 2b_{2n-1n} \\ . & . & . & . \\ . & . & \dots & . \\ 2b_{n12} & 2b_{n23} & \dots & 2b_{nn-1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1\dot{q}_3 \\ . \\ . \\ \dot{q}_{n-1}\dot{q}_n \end{bmatrix};$$

(31)

b_{ijk} sunt coeficienții lui Cristoffel

$$b_{ijk} = \frac{1}{2}\left(m_{ijk} + m_{ikj} - m_{jki}\right),$$

(32)

cu

$$m_{ijk} = \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}$$

Termenul gravitational se calculează cu relația:

$U = \sum_{i=1}^{n} U_i$; unde $U_i = m_i(-g^T)\boldsymbol{p}_{Ci}$

$G_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\sum_{i=1}^{n} m_i(-\boldsymbol{g}^T)\frac{\partial \boldsymbol{p}_{Ci}}{\partial q_i}$;

$\boldsymbol{g}^T = [0 \quad -g \quad 0]$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}) = -[\boldsymbol{J}_{v1}{}^T \quad \boldsymbol{J}_{v2}{}^T \quad \dots \quad \boldsymbol{J}_{vn}{}^T]\begin{bmatrix} m_1 g \\ m_2 g \\ \cdot \\ m_n g \end{bmatrix} \tag{33}$$

Exemplul 1. Obținerea modelului dinamic pentru structura plană RT din figura 9.

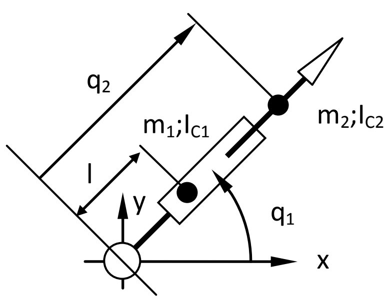

Fig.9. Structura RT

Date inițiale ale problemei sunt:

- Funcțiile coordonatelor generalizate ale robotului: $q_1; q_2; \dot{q}_1; \dot{q}_2; \ddot{q}_1; \ddot{q}_2;$
- Pozițiile centrelor de masă: $l; l_2;$
- Proprietățile inerțiale ale elementelor: $m_1; m_2; \boldsymbol{I}_{C1}; \boldsymbol{I}_{C2}$
- Vectorul accelerație gravitațională $\boldsymbol{g} = [0 \quad -g \quad 0]^T$

Structura din figură (faptul că avem un caz particular de tip plan și cu axele celor două cuple concurente) sugerează alegerea unei modelări cinematice particulare. Se va evita în acest caz scrierea formalismului DH și se va proceda la precizarea coordonatelor generalizate în concordanță cu figura 9. Se observă faptul că l_2 a fost eludat prin înlocuirea sa cu q_2.

Rezolvarea problemei propuse se va realiza cu ajutorul formalismului Lagrage. Se propun următorii pași:

1. Determinarea matricei de inerție:

(28) ---> $\boldsymbol{M} = m_1 \boldsymbol{J}_{v1}{}^T \boldsymbol{J}_{v1} + m_2 \boldsymbol{J}_{v2}{}^T \boldsymbol{J}_{v2} + \boldsymbol{J}_{\omega 1}{}^T \boldsymbol{I}_{C1} \boldsymbol{J}_{\omega 1} + \boldsymbol{J}_{\omega 2}{}^T \boldsymbol{I}_{C2} \boldsymbol{J}_{\omega 2}$

unde:

(26)---> $\boldsymbol{J}_{v1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{p}_{C1}}{\partial q_1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}; \boldsymbol{J}_{v2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{p}_{C2}}{\partial q_1} & \frac{\partial \boldsymbol{p}_{C2}}{\partial q_2} \end{bmatrix};$

(27)---> $\boldsymbol{J}_{\omega 1} = [\bar{\epsilon}_1 \boldsymbol{Z}_1 \quad \boldsymbol{0}]; \boldsymbol{J}_{\omega 1} = [\bar{\epsilon}_1 \boldsymbol{Z}_1 \quad \bar{\epsilon}_2 \boldsymbol{Z}_2];$

$$^0\boldsymbol{p}_{C1} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix};\ ^0\boldsymbol{p}_{C2} = \begin{bmatrix} q_2 c_1 \\ q_2 s_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{\epsilon}_1 = 1; \bar{\epsilon}_2 = 0; \boldsymbol{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{J}_{v1} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & 0 \\ l_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \boldsymbol{J}_{v2} = \begin{bmatrix} -q_2 s_1 & c_1 \\ q_2 c_1 & s_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \boldsymbol{J}_{\omega 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \boldsymbol{J}_{\omega 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{I}_{C1,2} = \begin{bmatrix} I_{xx1,2} & -I_{xy1,2} & -I_{xz1,2} \\ -I_{xy1,2} & I_{yy1,2} & -I_{yz1,2} \\ -I_{xz1,2} & -I_{yz1,2} & I_{zz1,2} \end{bmatrix}$$

În final se obține:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + I_{zz1} + m_2 q_2^2 + I_{zz2} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

2. Determinarea matriei Centripetale

(30)--- $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}^2] = \begin{bmatrix} b_{111} & b_{122} \\ b_{211} & b_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_1^2 \end{bmatrix};$

unde:

(32)--->

$$b_{111} = \frac{1}{2}(m_{111} + m_{111} - m_{111}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial m_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial q_1}\right) = 0$$

$$b_{122} = \frac{1}{2}(m_{122} + m_{122} - m_{221}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial m_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{22}}{\partial q_1}\right) = 0$$

$$b_{211} = \frac{1}{2}(m_{211} + m_{211} - m_{112}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial m_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial q_2}\right) = -m_2 q_2$$

$$b_{222} = \frac{1}{2}(m_{222} + m_{222} - m_{222}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial m_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{22}}{\partial q_2}\right) = 0$$

În final se obține:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -m_2 q_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

3. Determinarea matricei Coriolis

(31)---> $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}] = \begin{bmatrix} 2b_{112} \\ 2b_{212} \end{bmatrix} [\dot{q}_1 \dot{q}_2];$

unde:

(32)--->

$$b_{112} = \frac{1}{2}(m_{112} + m_{121} - m_{121}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial m_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{12}}{\partial q_1}\right) = m_2 d_2$$

$$b_{212} = \frac{1}{2}(m_{212} + m_{221} - m_{122}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial m_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{12}}{\partial q_2}\right) = 0$$

În final se obține:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}] = \begin{bmatrix} 2m_2 d_2 \\ 0 \end{bmatrix} [\dot{q}_1 \dot{q}_2]$$

4. Determinarea termenului Gravitațional

(33) ---> $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}) = -[\boldsymbol{J}_{v1}{}^T \quad \boldsymbol{J}_{v2}{}^T] \begin{bmatrix} m_1 \boldsymbol{g} \\ m_2 \boldsymbol{g} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{J}_{v1}{}^T m_1 \boldsymbol{g} - \boldsymbol{J}_{v2}{}^T m_2 \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} (m_1 l_1 + m_2 q_2) c_1 g \\ m_2 g \end{bmatrix}$

5. Scrierea modelului dinamic

(3) --->

$$\begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + I_{zz1} + m_2 q_2^2 + I_{zz2} & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -m_2 q_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_2 d_2 \\ 0 \end{bmatrix} [\dot{q}_1 \dot{q}_2] +$$
$$\begin{bmatrix} (m_1 l_1 + m_2 q_2) c_1 g \\ m_2 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

Exemplul 2. Obținerea modelului dinamic pentru structura plană RR din figura 10.

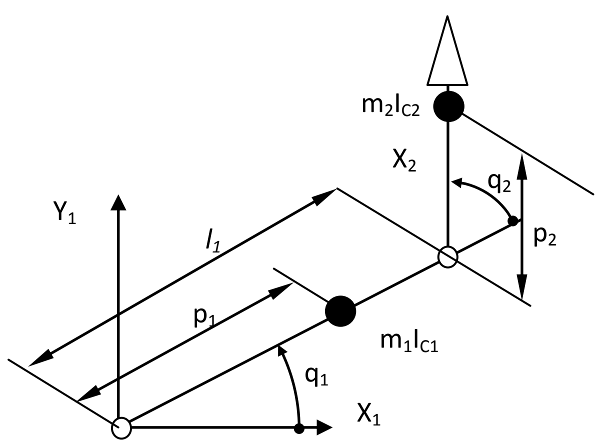

Fig.10 Modelul dinamic a structurii RR plana

Date inițiale ale problemei sunt:

- Funcțiile coordonatelor generalizate ale robotului: $q_1; q_2; \dot{q}_1; \dot{q}_2; \ddot{q}_1; \ddot{q}_2;$
- Pozițiile centrelor de masă: $l; l_2;$
- Proprietățile inerțiale ale elementelor: $m_1; m_2; \boldsymbol{I}_{C1}; \boldsymbol{I}_{C2}$
- Vectorul accelerație gravitațională $\boldsymbol{g} = [0 \quad -g \quad 0]^T$

Si de această dată structura este particulară, mărimile cinematice pot fi ușor calculate.

1. Determinarea matricei de inerție:

(28) ---> $\boldsymbol{M} = m_1 {\boldsymbol{J}_{v1}}^T \boldsymbol{J}_{v1} + m_2 {\boldsymbol{J}_{v2}}^T \boldsymbol{J}_{v2} + {\boldsymbol{J}_{\omega 1}}^T \boldsymbol{I}_{C1} \boldsymbol{J}_{\omega 1} + {\boldsymbol{J}_{\omega 2}}^T \boldsymbol{I}_{C2} \boldsymbol{J}_{\omega 2}$

unde:

(26)---> $\boldsymbol{J}_{v1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{p}_{C1}}{\partial q_1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}; \boldsymbol{J}_{v2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{p}_{C2}}{\partial q_1} & \frac{\partial \boldsymbol{p}_{C2}}{\partial q_2} \end{bmatrix};$

(27)---> $\boldsymbol{J}_{\omega 1} = [\bar{\epsilon}_1 \boldsymbol{Z}_1 \quad \boldsymbol{0}]; \boldsymbol{J}_{\omega 1} = [\bar{\epsilon}_1 \boldsymbol{Z}_1 \quad \bar{\epsilon}_2 \boldsymbol{Z}_2];$

$$ {}^0\boldsymbol{p}_{C1} = \begin{bmatrix} p_1 c_1 \\ p_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix};\ {}^0\boldsymbol{p}_{C2} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + p_2 c_{12} \\ l_1 s_1 + p_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{\epsilon}_1 = 1; \bar{\epsilon}_2 = 1; \boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{Z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; $$

$$ \boldsymbol{J}_{v1} = \begin{bmatrix} -p_1 s_1 & 0 \\ p_1 c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \boldsymbol{J}_{v2} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - p_2 s_{12} & -p_1 s_{12} \\ l_1 c_1 + p_2 c_{12} & p_1 c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \boldsymbol{J}_{\omega 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \boldsymbol{J}_{\omega 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; $$

$$ \boldsymbol{I}_{C1,2} = \begin{bmatrix} I_{xx1,2} & -I_{xy1,2} & -I_{xz1,2} \\ -I_{xy1,2} & I_{yy1,2} & -I_{yz1,2} \\ -I_{xz1,2} & -I_{yz1,2} & I_{zz1,2} \end{bmatrix} $$

În final se obține:

$$ \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 p_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 p_2^2 + 2 m_2 l_1 p_2 c_2 + I_{zz1} + I_{zz2} & m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 c_2 + I_{zz2} \\ m_2 p_2^2 + m_2 l_1 p_2 c_2 + I_{zz2} & m_2 p_2^2 + I_{zz2} \end{bmatrix} $$

2. Determinarea matriei Centripetale

(30)---> $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}^2] = \begin{bmatrix} b_{111} & b_{122} \\ b_{211} & b_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_1^2 \end{bmatrix};$

unde:

(32)--->

$$b_{111} = \frac{1}{2}(m_{111} + m_{111} - m_{111}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial m_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial q_1}\right) = 0$$

$$b_{122} = \frac{1}{2}(m_{122} + m_{122} - m_{221}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial m_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{22}}{\partial q_1}\right) = -m_2 l_1 p_2 s_1$$

$$b_{211} = \frac{1}{2}(m_{211} + m_{211} - m_{112}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial m_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial q_2}\right) = -m_2 l_1 p_2 s_2$$

$$b_{222} = \frac{1}{2}(m_{222} + m_{222} - m_{222}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial m_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial m_{22}}{\partial q_2}\right) = 0$$

În final se obține:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathbf{2}}] = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 p_2 s_1 \\ -m_2 l_1 p_1 s_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

3. Determinarea matricei Coriolis

(31)---> $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}] = \begin{bmatrix} 2b_{112} \\ 2b_{212} \end{bmatrix} [\dot{q}_1 \dot{q}_2]$;

unde:

(32)--->

$$b_{112} = \frac{1}{2}(m_{112} + m_{121} - m_{121}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial m_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{12}}{\partial q_1}\right) = -m_2 p_2 l_1 s_2$$

$$b_{212} = \frac{1}{2}(m_{212} + m_{221} - m_{122}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial m_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial m_{12}}{\partial q_2}\right) = 0$$

În final se obține:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})[\dot{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}] = \begin{bmatrix} 2m_2 p_2 l_1 s_2 \\ 0 \end{bmatrix} [\dot{q}_1 \dot{q}_2]$$

4. Determinarea termenului Gravitațional

(33) --->

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}) = -[\boldsymbol{J}_{v1}{}^T \quad \boldsymbol{J}_{v2}{}^T] \begin{bmatrix} m_1 \boldsymbol{g} \\ m_2 \boldsymbol{g} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{J}_{v1}{}^T m_1 \boldsymbol{g} - \boldsymbol{J}_{v2}{}^T m_2 \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} (m_1 p_1 c_1 + m_2 l_1 c_1 + m_2 p_2 c_{12}) g \\ m_2 p_2 c_{12} g \end{bmatrix}$$

5. Scrierea modelului dinamic

$$
\begin{bmatrix} m_1p_1^2 + m_2l_1^2 + m_2p_2^2 + 2m_2l_1p_2c_2 + \ I_{zz1} + I_{zz2} & m_2p_2^2 + m_2l_1p_2c_2 + I_{zz2} \\ m_2p_2^2 + m_2l_1p_2c_2 + I_{zz2} & m_2p_2^2 + I_{zz2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} +
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & -m_2l_1p_2s_1 \\ -m_2l_1p_1s_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2m_2p_2l_1s_2 \\ 0 \end{bmatrix} [\dot{q}_1 \dot{q}_2] +
$$

$$
\begin{bmatrix} (m_1p_1c_1 + m_2l_1c_1 + m_2p_2c_{12})g \\ m_2p_2c_{12}g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}
$$