

I. TRANSFORMATĂ FOURIER CONTINUĂ (TF)

Este o metoda de analiză spectrală a semnalelor deterministe sau nedeterministe oarecare. Se consideră un semnal continuu $x(t)$, cu evoluție pentru $t \in \mathbf{R}$, care admite un număr finit de discontinuități. Prin definiție Transformata Fourier a semnalului continuu, notată $X(\omega)$ se determină cu relația:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \Phi \{x(t)\}, \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad X(\omega) \in \mathbf{C}$$

Funcția $X(\omega)$ de argument real cu valori complexe va fi numită în continuare funcție spectrală de amplitudine (FSA) sau spectru complex de amplitudine (SCA).

Având în vedere că:

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

FSA se mai poate scrie sub forma complexă algebrică:

$$X(\omega) = A_x(\omega) - j B_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt,$$

sau sub forma complexă exponențială:

$$X(\omega) = M_x(\omega) e^{-j\varphi_x(\omega)},$$

cu

$$M_x(\omega) = \sqrt{A_x^2(\omega) + B_x^2(\omega)} \quad \text{și} \quad \varphi_x(\omega) = \arctg [-B_x(\omega) / A_x(\omega)].$$

Reconstituirea semnalului original $x(t)$ din spectrul său complex de amplitudine se realizează cu transformata Fourier inversă (TFI), care se calculează cu relația:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \Phi^{-1} \{X(\omega)\}.$$

Factorul $\frac{1}{2\pi}$ apare ca urmare a faptului că FSA utilizează variabila pulsație (ω). Dacă se

înlocuiește ω cu $2\pi f$, factorul $\frac{1}{2\pi}$ dispare din relația de definiție a TFI.

Funcțiile $x(t)$ și $X(\omega)$ constituie o pereche Fourier, fapt care se va nota în continuare prin:

$$x(t) \Leftrightarrow X(\omega).$$

În general se adoptă convenția de notare a funcției spectrale de amplitudine cu majuscula corespunzătoare literei folosite pentru specificarea funcției semnal. Excepțiile de la această regulă de notare vor fi semnalate în funcție de contextul concret de utilizare.

Semnalul $x(t)$ și spectrul său complex de amplitudine $X(\omega)$ exprimă același fenomen fizic în două forme diferite, în domeniul amplitudine–timp (reprezentare temporală) și în domeniul amplitudine–pulsăție (reprezentare frecvențială).

1. PROPRIETĂȚILE TRANSFORMATEI FOURIER

Fie perechile Fourier $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ și $y(t) \Leftrightarrow Y(\omega)$, definite pentru t și $\omega \in \mathbf{R}$ cu valori $x(t), y(t) \in \mathbf{R}$ și $X(\omega), Y(\omega) \in \mathbf{C}$.

$$1) \quad X(-\omega) = X^*(\omega),$$

unde notația cu asterisc specifică operația de conjugare complexă.

Demonstrație:

$$X(\omega) = A_x(\omega) - j B_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt.$$

$$X(-\omega) = A_x(-\omega) - j B_x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos (-\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin (-\omega t) dt.$$

Dar în baza proprietăților de paritate a funcției cosinus și de imparitate a funcției sinus avem $A_x(-\omega) = A_x(\omega)$ și $B_x(-\omega) = -B_x(\omega)$, deci $X(-\omega) = A_x(\omega) + j B_x(\omega) = X^*(\omega)$.

2) Proprietatea de liniaritate (de superpoziție)

Fie λ și μ constante ce aparțin numerelor reale.

$$\Phi \{ \lambda x(t) + \mu y(t) \} = \lambda X(\omega) + \mu Y(\omega)$$

Proprietatea rezultă direct din relația de definiție.

3) Proprietățile de paritate și imparitate

a) Dacă $x(t)$ este o funcție pară atunci $X(\omega)$ este reală și pară ($\forall \omega \in \mathbf{R}$).

Demonstrație:

$$B_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt = \int_{-\infty}^0 x(t) \sin(\omega t) dt + \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt.$$

În prima integrală se face substituția $t' = -t$ obținându-se

$$B_x(\omega) = - \int_{+\infty}^0 x(-t') \sin(-\omega t') dt' + \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt. \text{ Deoarece } x(-t') = x(t') \text{ și funcția}$$

sinus este impară vom avea

$$B_X(\omega) = \int_{-\infty}^0 x(t') \sin(\omega t') dt' + \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt = - \int_0^{+\infty} x(t') \sin(\omega t') dt' + \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) dt = 0$$

, deci $X(\omega) = A_X(\omega) \in \mathbf{R}$. Paritatea funcției $X(\omega)$ rezultă în mod asemănător având în vedere proprietate de paritate a funcției cosinus.

b) Dacă $x(t) = -x(-t)$ (funcție impară) atunci $X(\omega) \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ și $X(-\omega) = -X(\omega)$. Demonstrația se face în mod asemănător ca la punctul 3a.

4) Proprietatea de similitudine (de schimbare a scării timpului)

Fie $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ și $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

$$\Phi \{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X(\omega/a)$$

Demonstrație:

$\Phi \{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$. Notăm $at = t' \rightarrow t = t'/a$, $dt = dt'/a$ și având în vedere schimbarea de semn a limitelor care rezultă pentru $a < 0$, se obține

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{|a|} \int_{\substack{(-\infty) \\ +\infty}}^{+\infty} x(t') e^{-j\omega t'/a} dt' = \frac{1}{|a|} X(\omega/a)$$

5) Proprietatea de translație

a) În domeniul timpului $\Phi \{x(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau} X(\omega)$.

Demonstrație:

$$\Phi \{x(t - \tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-j\omega t} dt$$

Notăm $t - \tau = t' \rightarrow t = t' + \tau$, $dt = dt'$ și deoarece limitele rămân neschimbate avem succesiv

$$\Phi \{x(t - \tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j\omega t'} e^{-j\omega\tau} dt' = e^{-j\omega\tau} X(\omega).$$

b) În domeniul pulsațiilor

$$\Phi^{-1} \{X(\omega \pm \omega_1)\} = e^{\mp j\omega_1 t} x(t).$$

Demonstrație:

$$\Phi^{-1}\{X(\omega \pm \omega_1)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega \pm \omega_1) e^{j\omega t} d\omega.$$

Notăm $\omega \pm \omega_1 = \omega' \rightarrow \omega = \omega' \mp \omega_1, d\omega = d\omega'$ și deoarece limitele rămân neschimbate avem succesiv

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega \pm \omega_1) e^{j\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega') e^{j\omega' t} e^{\mp j\omega_1 t} d\omega' = \\ &= e^{\mp j\omega_1 t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega') e^{j\omega' t} d\omega' = e^{\mp j\omega_1 t} x(t) \end{aligned}$$

Proprietatea se folosește de obicei în sensul

$$\Phi\{e^{\pm j\omega_1 t} x(t)\} = X(\omega \mp \omega_1).$$

Această proprietate se mai numește proprietatea de multiplicare cu o exponențială a funcțiilor de timp.

6) Proprietatea produsului de convoluție

Produsul de convoluție a două funcții de variabilă timp, $x(t)$ și $y(t)$ cu $t \in \mathbf{R}$ se definește conform relației:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau.$$

Produsul de convoluție (PC) este comutativ, adică

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t - \tau) d\tau.$$

Dacă funcțiile de timp sunt definite pentru $t \geq 0$, fiind nule pentru $t < 0$, atunci

$$x(t) * y(t) = \int_0^t x(\tau) y(t - \tau) d\tau.$$

Funcția element neutru în raport cu operația produs de convoluție a semnalelor continue este impulsul Dirac definit conform relațiilor

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pentru } t = 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} \quad \text{și} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1,$$

cu proprietatea numită de filtrare exprimată prin:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0).$$

Astfel, aplicând produsul de convoluție funcțiilor $x(t)$ și $\delta(t)$, având în vedere proprietatea de filtrare a impulsului Dirac și faptul că $\delta(t - \tau) = \delta(\tau - t)$ avem

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t).$$

Proprietatea specifică transformatei Fourier legată de produsul de convoluție se exprimă prin relația

$$\Phi \{x(t) * y(t)\} = X(\omega)Y(\omega),$$

Demonstrație:

$$\Phi \{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt.$$

Se introduce la integrand $e^{-j\omega\tau} e^{j\omega\tau}$ și se schimbă ordinea de efectuare a celor două integrale

$$\Phi \{x(t) * y(t)\} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) e^{-j\omega(t - \tau)} dt \right] = X(\omega)Y(\omega).$$

O proprietate similară există și pentru convoluția funcțiilor spectrale de amplitudine în raport cu transformata Fourier inversă:

$$\Phi^{-1}\{X(\omega) * Y(\omega)\} = x(t)y(t).$$

7) Proprietatea (teorema) de dualitate

În prezentarea acestei proprietăți se renunță la convenția de notare cu majusculă pentru transformatele Fourier, respectiv funcțiile spectrale de amplitudine. Așadar, fie perechea Fourier $x(t) \Leftrightarrow y(\omega)$, pentru care avem relațiile:

$$y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

În baza proprietății de dualitate rezultă următoarele perechi Fourier:

$$x(\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} y(-t) \text{ sau în mod echivalent } y(-t) \Leftrightarrow 2\pi x(\omega),$$

respectiv deoarece $x(-\omega) = x^*(\omega)$ rezultă

$$x^*(\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} y(t).$$

Demonstrație: În relația

$$y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

se înlocuiește mai întâi ω cu $-\omega$

$$y(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt,$$

apoi se schimbă variabilele t și ω între ele

$$y(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Având în vedere relația de definiție a transformatei Fourier inverse se introduce factorul $\frac{1}{2\pi}$ în fața integralei și se înmulțește integrandul cu 2π . Se obține astfel

$$y(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [2\pi x(\omega)] e^{j\omega t} d\omega,$$

de unde rezultă perechea Fourier,

$$y(-t) \Leftrightarrow 2\pi x(\omega).$$

În mod asemănător înlocuind t cu $-t$ în

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \text{ rezultă } x(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(\omega) e^{-j\omega t} d\omega,$$

apoi schimbând ω cu t și invers vom avea

$$x(-\omega) = x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} y(t) \right] e^{-j\omega t} dt,$$

deci rezultă perechea Fourier

$$x^*(\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} y(t).$$

Observație: La obținerea prin dualitate a noilor perechi Fourier, pe lângă substituția reciprocă a variabilelor t și ω , se vor schimba reciproc și mărimile constante, intervale temporale (T), cu mărimi constante, intervale în domeniul pulsației ($\Omega = 2\pi/T$).

8) Proprietatea de multiplicare

Are la bază expresia

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) Y(\omega) d\omega,$$

În particular pentru $y(t) = x(t)$ se obține teorema lui Parseval exprimată prin relația

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega,$$

care rezultă având în vedere proprietatea numerelor complexe $z z^* = |z|^2$.

Din punct de vedere fizic, integrala din membrul stâng exprimă energia semnalului în domeniul timpului, iar cea din membrul drept, constituie aceeași mărime, dar exprimată în domeniul pulsațiilor.

Demonstrație: În membrul stâng al relației de mai sus se înlocuiește $y(t)$ prin transformata Fourier inversă

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(-\omega) Y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) Y(\omega) d\omega \end{aligned}$$

2. EXEMPLE DE CALCUL PENTRU TF

1. Impulsul Dirac

$$x_1(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pentru } t = 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} \quad \text{cu } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1,$$

$$\text{cu proprietatea de filtrare } \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - \tau) dt = f(\tau)$$

$$\Delta(\omega) = \Phi \{ \delta(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \delta(t) dt = e^{-j\omega 0} = 1(\omega), \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad (\text{fig. 2. 2b})$$

Rezultă perechea Fourier

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1(\omega)$$

Observație: Transformata Fourier a impulsului Dirac este o funcție de pulsație, constantă în tot spectrul ($\omega \in \mathbf{R}$), nu o constantă numerică, așa cum rezultă în cazul transformatei Laplace.

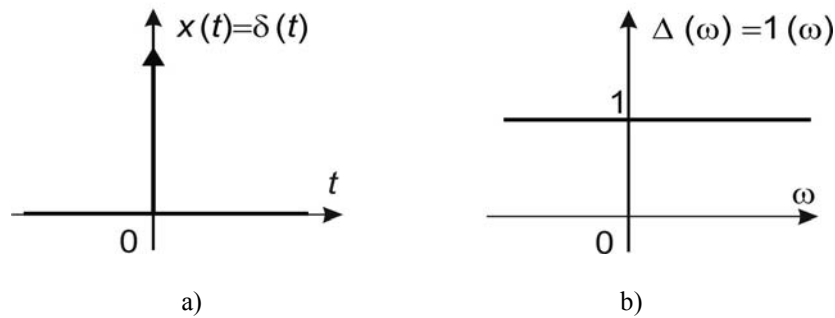


Fig 2.2

2. Semnalul funcție de timp constantă egală cu 1 pentru $t \in \mathbf{R}$

$x_2(t) = 1(t)$, $t \in \mathbf{R}$, (fig. 2.3a).

Este evident că acest semnal, cu caracter pur teoretic, diferă de semnalul treaptă unitară definit pe $t \geq 0$, cu valoare nulă pentru $t < 0$.

Transformata Fourier a semnalului unitar pentru $t \in \mathbf{R}$ se determină prin dualitate cu perechea Fourier dedusă la exemplul anterior (1).

Notând $x(t) = \delta(t) \Leftrightarrow y(\omega) = 1(\omega)$, prin dualitate avem:

$$x(\omega) = \delta(\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} y(-t) = \frac{1}{2\pi} 1(-t).$$

Dar $1(-t) = 1(t)$, deci:

$$\Phi\{1(t)\} = 2\pi \cdot \delta(\omega), \text{ (fig. 2.3b),}$$

unde

$$\delta(\omega) = \begin{cases} \infty & \text{pentru } \omega = 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} \quad \text{cu} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1.$$

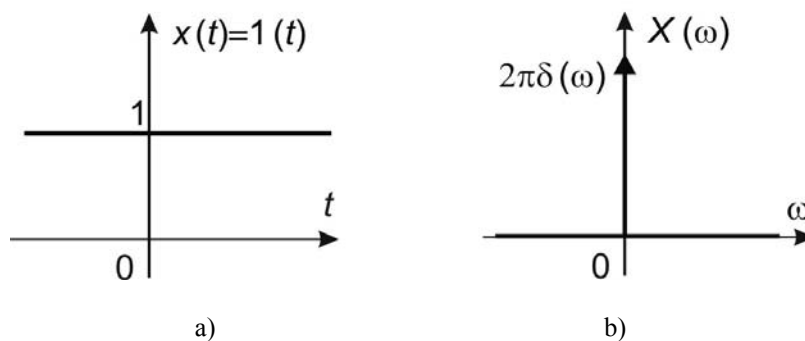


Fig. 2.3

3. Semnalul funcție exponențială definită în timp infinit

$$x_3(t) = e^{j\omega_1 t}, \quad t \in \mathbf{R}$$

Pentru calculul TF a acestei funcții se aplică teorema de deplasare în domeniul pulsațiilor, considerând funcția

$$x(t) = 1(t) \text{ cu } X(\omega) = 2\pi\delta(\omega).$$

Proprietatea menționată va fi în acest caz:

$$\Phi \{e^{j\omega_1 t} 1(t)\} = \Phi \{e^{j\omega_1 t}\} = \Phi \{1(t)\} \Big|_{\omega=\omega-\omega_1} = 2\pi \delta(\omega - \omega_1).$$

Se obține așadar:

$$\Phi \{e^{\pm j\omega_1 t}\} = 2\pi \delta(\omega \mp \omega_1).$$

Observație: Dacă $x(t) = e^{\pm j\omega_1 t}$ pentru $t \geq 0$, respectiv $x(t) = 0$ pentru $t < 0$, TF se poate deduce pe baza transformatei Laplace prin substituția variabilei s cu $j\omega$. Vom avea deci:

$$\Phi \{e^{\pm j\omega_1 t}\}_{t \geq 0} = \frac{1}{s \mp j\omega_1} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega \mp j\omega_1}.$$

Rezultatul se obține în mod riguros aplicând relația de definiție a TF

$$\Phi \{e^{\pm j\omega_1 t}\}_{t \geq 0} = \int_0^{\infty} e^{\pm j\omega_1 t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j(\omega \mp \omega_1)} e^{-j(\omega \mp \omega_1)t} \Big|_{t=0}^{\infty},$$

$$\Phi \{e^{\pm j\omega_1 t}\}_{t \geq 0} = \frac{1}{j\omega \mp j\omega_1}.$$

4. TF ale funcțiilor armonice

Se pot calcula pe baza rezultatului obținut la exemplul 3.

$$x_{4a}(t) = \cos(\omega_1 t) = \frac{1}{2} [e^{+j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}] \Leftrightarrow X_{4a}(\omega) = \pi [\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)],$$

$$x_{4b}(t) = \sin(\omega_1 t) = \frac{1}{2j} [e^{+j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}] \Leftrightarrow X_{4b}(\omega) = j\pi [\delta(\omega + \omega_1) - \delta(\omega - \omega_1)],$$

$$\Phi \{\cos(\omega_1 t)\} = \pi [\delta(\omega + \omega_1) + \delta(\omega - \omega_1)],$$

$$\Phi \{\sin(\omega_1 t)\} = j\pi [\delta(\omega + \omega_1) - \delta(\omega - \omega_1)].$$

5. Transformata Fourier a semnalului poartă temporală centrată

$$w_T^c(t) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

$$W_T^c(\omega) = \Phi \{w_T^c(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} w_T^c(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$W_T^c(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1(t) e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{j\omega}$$

$$W_T^c(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2} = T \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) / \left(\frac{\omega T}{2}\right) = T \operatorname{sinc} \frac{\omega T}{2}, \text{ unde } \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Reprezentarea grafică a funcției $W_T^c(\omega) = T \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) / \left(\frac{\omega T}{2}\right)$

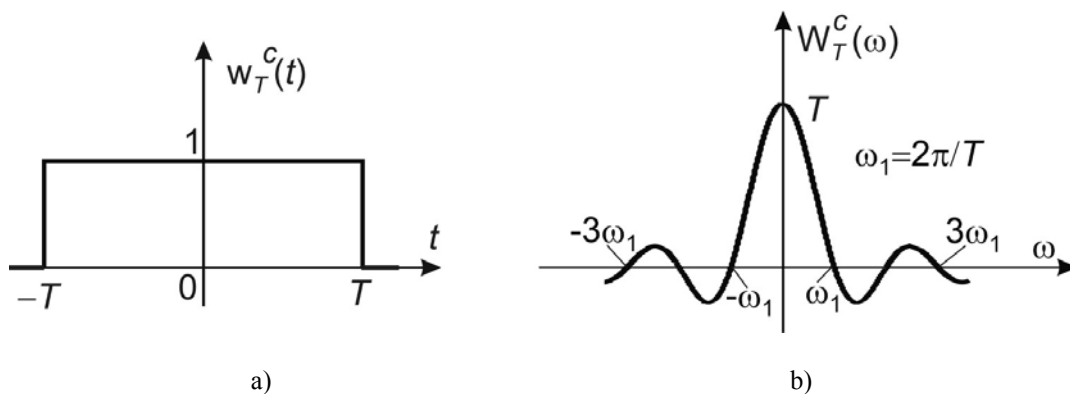


Fig. 2.4

Se observă că $W_T^c(0) = T \frac{\sin 0}{0} = T$.

Funcția se anulează pentru $\frac{\omega T}{2} = k\pi \rightarrow \omega_k = \frac{2k\pi}{T} = k\omega_1$ cu $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

Există o infinitate de minime și maxime locale, care se reduc în valoare absolută.

6. Semnalul poartă temporală necentrată

$$w_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } t \in [0, T] \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

Transformata Fourier se obține cu teorema de translație temporală

Se observă că $w_T(t) = w_T^c\left(t - \frac{T}{2}\right) \rightarrow W_T(\omega) = e^{-j\omega T/2} W_T^c(\omega) = e^{-j\omega T/2} T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$

7. Transformata Fourier inversă a porții frecvențiale centrate

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } |\omega| < \omega_c / 2 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} \quad \text{unde } \omega_c = \frac{2\pi}{T}.$$

TFI (Transformata Fourier Inversă) se determină prin dualitate; considerându-se perechea Fourier

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } |t| < T/2 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} \Leftrightarrow y(\omega) = T \frac{\sin \omega \frac{T}{2}}{\omega \frac{T}{2}} = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2}$$

care este duală cu perechea

$$x_1(\omega) = X(\omega) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} y(-t) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{(-t)} \sin\left(-\frac{t\omega_c}{2}\right), \text{ deci}$$

$$\Phi^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{\pi t} \cdot \sin \frac{\omega_c t}{2}$$

Perechea duală s-a obținut înlocuind ω cu $(-t)$ și T cu ω_c .

8. Transformata Fourier a semnalului treaptă unitară.

$$x(t) = 1_+(t) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } t \geq 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}, \text{ (fig. 2.5a).}$$

Calculul direct prin aplicarea relației de definiție furnizează un rezultat parțial. Astfel se obține funcția spectrală:

$$X(\omega) = \mathfrak{T}\{1_+(t)\} = \int_0^{\infty} 1 e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{j\omega},$$

care nu conține informația referitoare la componenta continuă existentă în semnalul treaptă unitară. Pentru calculul exact se folosește funcția auxiliară:

$$x_1(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{pentru } t \geq 0 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} \quad \text{cu } \alpha \rightarrow 0.$$

Transformata Fourier a acestui semnal este:

$$X_1(\omega) = \Phi \{x_1(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-(\alpha + j\omega)} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty},$$

respectiv,

$$X_1(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \quad (1)$$

Pentru $\omega \neq 0$, treapta unitară se obține pentru $\alpha = 0$, deci $X_1(\omega) = \mathfrak{F}\{1_+(t)\} = \frac{1}{j\omega}$, care

este tocmai rezultatul obținut anterior prin aplicarea relației de definiție.

Pentru $\alpha \rightarrow 0$ și $\omega \rightarrow 0$ rezultă prin calcul direct $x_1(t) \rightarrow \infty$. Pentru a vedea care este variația funcției $X(\omega)$ la limită ($\alpha \rightarrow 0$ și $\omega \rightarrow 0$) se observă mai întâi că partea imaginară a lui $X_1(\omega) = 0$ și se analizează partea reală

$$X_1(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2},$$

care este prezentată în graficul din figura 2.5b în funcție de ω cu α ca parametru.

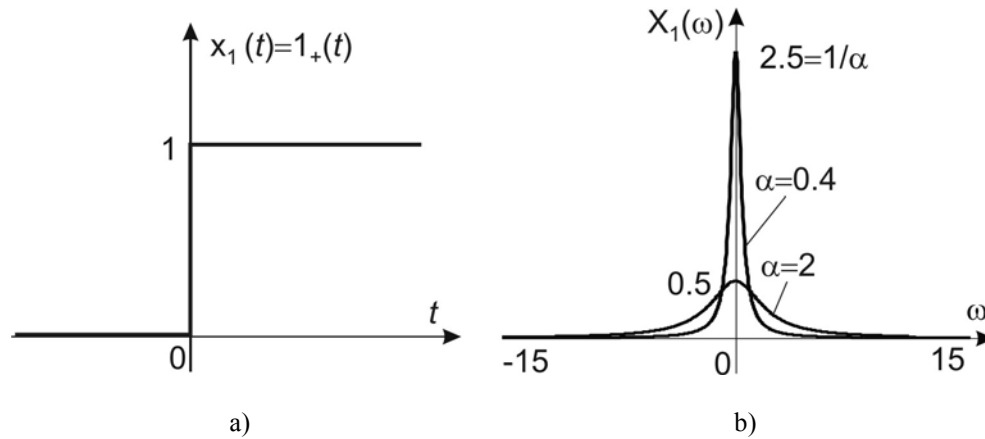


Fig.2.5

Se observă ușor că $X(\omega) \rightarrow \infty$ pentru $\alpha \rightarrow 0$. De asemenea rezultă că pentru $\alpha \rightarrow 0$ se obține un impuls Dirac cu aria:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} = \arctg \frac{\omega}{\alpha} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Deci $\Phi \{x_1(t)\} = \pi \delta(\omega)$ când $\alpha \rightarrow 0$ și $\omega \rightarrow 0$

Așadar

$$\Phi\{1_+(t)\} = \begin{cases} \pi \delta(\omega) & \text{pentru } \omega = 0 \\ \frac{1}{j\omega} & \text{pentru } \omega \neq 0 \end{cases}$$

Transformatele Fourier ale semnalelor fereastră de îngustare (tapering windows) de tip Hanning si Hamming.

Ferestrele de îngustare sunt funcții utilizate pentru prelucrarea semnalelor achiziționate pe intervalele de timp limitate (trunchiate temporal), pentru atenuarea fenomenului de scăpări (leakage) sau licaș.

Variantele centrate ale acestor ferestre sunt descrise de relația:

$$W_H^c(t) = \begin{cases} a + b \cos \omega_1 t & \text{pentru } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases} \quad \text{cu } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

Pentru $a=b=1/2$ se obține fereastra Hanning, $W_{Hn}^c(t)$, (fig 2.7a), iar pentru $a=0.54$ si $b=0.46$ avem fereastra Hamming numită fereastra cosinus cu pedestal, notată $W_{Hm}^c(t)$ cu graficul din figura (2.7b).

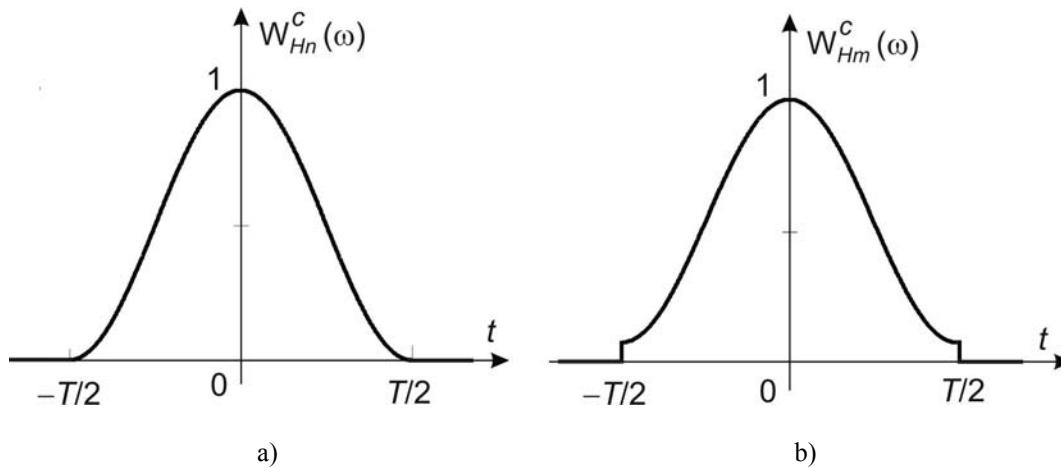


Fig 2.7

Pentru a calcula TF a fereastrelor Hn si Hm este necesar să determinăm mai întâi:

$$\begin{aligned} \Phi(\cos \omega_1 t) \Big|_{|t| < T/2} &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_1 t e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} \left[e^{-j(\omega - \omega_1)t} + e^{-j(\omega + \omega_1)t} \right] dt = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{e^{-j(\omega - \omega_1)t}}{j(\omega - \omega_1)} \Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{1}{2} \frac{e^{-j(\omega + \omega_1)t}}{j(\omega + \omega_1)} \Big|_{-T/2}^{T/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{j(\omega-\omega_1)T/2} - e^{-j(\omega-\omega_1)T/2}}{2j(\omega-\omega_1)} + \frac{e^{j(\omega+\omega_1)T/2} - e^{-j(\omega+\omega_1)T/2}}{2j(\omega+\omega_1)} = \\
&= \frac{\sin(\omega-\omega_1)T/2}{\omega-\omega_1} + \frac{\sin(\omega+\omega_1)T/2}{\omega+\omega_1} = \frac{T}{2} \frac{\sin(\omega-\omega_1)T/2}{(\omega-\omega_1)T/2} + \frac{T}{2} \frac{\sin(\omega+\omega_1)T/2}{(\omega+\omega_1)T/2} = \\
&= \frac{1}{2} [T \operatorname{sinc}(\omega-\omega_1)T/2 + T \operatorname{sinc}(\omega+\omega_1)T/2] = \frac{1}{2} W_T^c(\omega-\omega_1) + \frac{1}{2} W_T^c(\omega+\omega_1).
\end{aligned}$$

Așadar

$$\Phi\{\cos \omega_1 t\}_{|t| < T/2} = \frac{1}{2} [W_T^c(\omega+\omega_1) + W_T^c(\omega-\omega_1)],$$

unde $W_T^c(\omega)$ este FSA a ferestrei temporale centrate. De asemenea avem

$$\Phi\{a\}_{|t| < T/2} = a W_T^c(\omega),$$

astfel că în final rezultă

$$\Phi\{w_H^c(t)\} = W_H^c(\omega) = a W_T^c(\omega) + \frac{b}{2} [W_T^c(\omega+\omega_1) + W_T^c(\omega-\omega_1)].$$

În continuare se va prezenta grafic funcția spectrală de amplitudine a ferestrei Hanning centrate comparativ cu cea a ferestrei temporale centrate. Pentru aceasta este indicat ca $W_H^c(\omega)$ să fie scrisă explicit

$$W_{Hn}^c(\omega) = \frac{1}{2} T \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} + \frac{1}{4} T \frac{\sin(\omega+\omega_1)T/2}{(\omega+\omega_1)T/2} + \frac{1}{4} T \frac{\sin(\omega-\omega_1)T/2}{(\omega-\omega_1)T/2}$$

$$\text{cu } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Pentru simplificarea reprezentării fie $T=1$, deci $\omega_1 = 2\pi$ și relația de mai sus devine

$$W_{Hn}^c(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\sin \omega_1/2}{\omega_1/2} + \frac{1}{4} \frac{\sin(\omega+\omega_1)/2}{(\omega+\omega_1)/2} + \frac{1}{4} \frac{\sin(\omega-\omega_1)/2}{(\omega-\omega_1)/2}$$

Pentru $\omega = 0$ avem:

$$W_{Hn}^c(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{\sin \omega_1/2}{\omega_1/2} + \frac{1}{4} \frac{\sin(-\omega_1/2)}{(-\omega_1/2)} = \frac{1}{2}$$

iar pentru $\omega = \omega_1$ rezultă

$$W_{Hn}^c(\omega_1) = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\sin \omega_1 / 2}{\omega_1 / 2}}_{=0} + \frac{1}{4} \underbrace{\frac{\sin \omega_1}{\omega_1}}_{=0} + \frac{1}{4} \frac{\sin 0}{0} = \frac{1}{4}$$

De asemenea pentru $\omega = -\omega_1$ vom avea $W_{Hn}^c(-\omega_1) = \frac{1}{4}$, iar pentru $\omega = 2\omega_1$ se vede că

$W_{Hn}^c(2\omega_1) = 0$. Rezultă în acest fel graficul prezentat în figura 2.8 în care se expune comparativ și variația funcției spectrale de amplitudine a fereștii temporale centrată, $W_T^c(\omega)$.

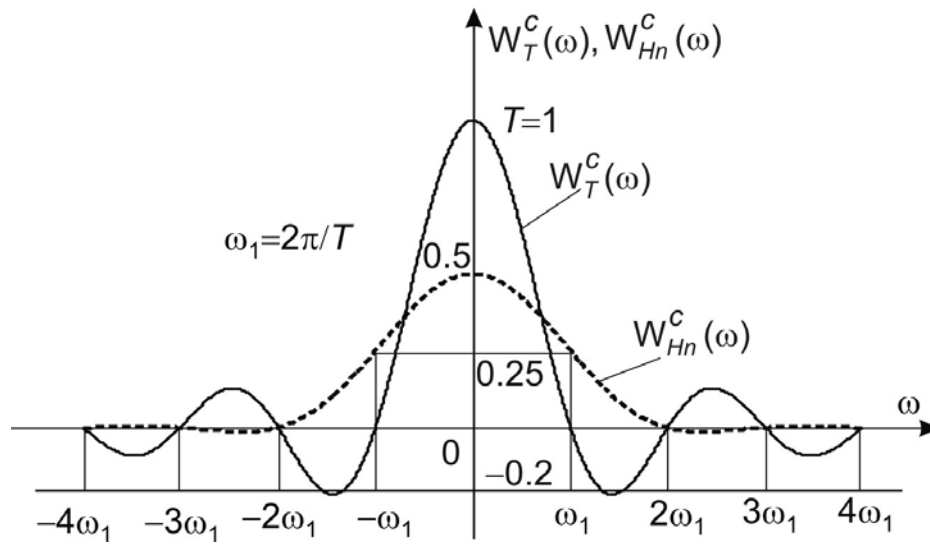


Fig. 2.8