DESCRIEREA ÎN SPAȚIUL STĂRILOR A SISTEMELOR CONTINUE

OBIECTIVE

- Conversia din spațiul stărilor în funcții de transfer şi invers.
- Controlabilitatea şi observabilitatea sistemelor.
- Reducerea schemelor bloc în spațiul stărilor.

8.1. Descrierea intrare - stare - ieşire

Sistemul liniar continuu este reprezentat de ecuația matriceală a stărilor:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ . \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & ... & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \tag{8.1}$$

unde:
$x(t)$ - matricea (vector) stărilor; $u(t)$ - matricea intrărilor;
A - matricea sistemului (constantă); B - matricea de intrare (constantă).

Această descriere are avantajul că soluția sistemului poate fi obținută destul de uşor, atât prin metode analogice, cât şi numerice. De asemenea, metoda poate fi extinsă şi la sistemele neliniare.

Pentru exemplificarea unui mod de alegere a variabilelor de stare, se consideră un sistem descris de ecuația diferențială de ordinul n cu o singură intrare:

$$a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = b_0 u(t), \tag{8.2}$$

unde $y(t)$ este mărimea de ieşire (răspunsul sistemului) şi $u(t)$ este mărimea de intrare. Modelul de stare pentru acest sistem nu este unic, ci depinde de modul cum se aleg variabilele de stare. Un set de variabile de stare, întâlnit foarte des, este setul variabilelor de fază în care se alege prima variabilă de stare x_1 (care poate fii mărimea de ieşire, eroarea etc.), iar celelalte (n-1) mărimi de stare, ce completează setul, sunt derivatele succesive pînă la (n-1) ale mărimii x_1, adică:

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, ..., x_n = y^{n-1} \tag{8.3}$$

Cu această alegere, ecuația (8.1) se poate scrie sub forma (8.3):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 \quad .... - a_1 x_n + u(t) \end{aligned} \tag{8.4}$$

Sistemul (8.4) poate fi scris sub forma matriceală:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ . \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & ... & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \tag{8.5}$$

iar ecuația ieşirii este:

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] x \tag{8.6}$$

8.1.1. Trecerea de la funcția de transfer la spațiul stărilor

Matlab conține un set de funcții care fac trecerea de la funcția de transfer la matricele A, B, C, D, care se realizează cu funcția:

```
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den),
```

unde `A`, `B`, `C` şi `D` sunt matrice de dimensiuni nxn, nxm, rxn şi respectiv rxm.

8.1.2. Trecerea de la spațiul stărilor la funcția de transfer

Fiind date ecuațiile matriceale ale stării şi ieşirii:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{8.7}$$

şi aplicând transformata Laplace (în condiții inițiale nule) la aceste ecuații, rezultă:

$$Y(s) = C(s\mathrm{I} - A)^{-1} BU(s) + DU(s)$$

sau

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(s\mathrm{I} - A)^{-1} B + D = C\Phi(s)B + D, \tag{8.8}$$

unde I este matricea unitate, iar $\Phi(s) = (s\mathrm{I} - A)^{-1} = \dfrac{\mathrm{adj}(s\mathrm{I} - A)}{\det(s\mathrm{I} - A)}$ se numeşte matricea fundamentală a sistemului modelat la stare. Matricea de tranziție a stărilor, $\varphi(t)$, se obține aplicând transformata Laplace inversă matricei fundamentale.

În Matlab transferul este făcut cu funcția **ss2tf**, cu următoarea sintaxă:

```
ss2tf(A,B,C,D,u),
```

ce converteşte ecuația stării în funcția de transfer pentru intarea u.

Funcția de transfer se poate obține şi sub forma vectorială a zerourilor şi polilor, folosindu-se funcția:

```
ss2zp(A,B,C,D,u),
```

unde A,B,C,D reprezintă matricele din spațiul stărilor, iar u reprezintă intrarea.
Matricea de tranziție a stărilor se determină cu funcția:

```
expm(At),
```

unde A este o matrice pătratică, iar t reprezintă timpul. Pentru crearea unor obiecte simbol se va folosi funcția **syms**.

Soluția numerică a ecuației de stare permite simularea numerică a răspunsului unui sistem în reprezentarea variabilei de stare. Pentru sistemele liniare continue funcția este:

```
[y,x]=lsim(A,B,C,D,u,t)
```

şi simulează răspunsul sistemului la o intrare oarecare.

În cazul intrărilor impuls Dirac şi treaptă, funcțiile sunt:

```
[y,x]=impulse(A,B,C,D,u,t)
```

şi respectiv

```
[y,x]=step(A,B,C,D,u,t).
```

8.1.3. Controlabilitate şi observabilitate

Controlabilitatea unui sistem caracterizează capacitatea de modificare (de control) a întregului set de variabile de stare de către mărimea de intrare. Un sistem descris la stare de către matricele (A,B) se spune că este controlabil dacă există o mărime de intrare u care poate transfera orice stare inițială $x(0)$ în orice altă stare $x(t)$. Propietatea de controlabilitate se poate verifica analitic cu ajutorul matricei de controlabilitate: $P=[B\ AB\ A^2B\ldots A^{n-1}B]$. Matematic, sistemul considerat este controlabil dacă $rangP = n$.

Condiția de mai sus poate fi îndeplinită dacă determinantul matricei de controlabilitate P este diferit de zero. Observabilitatea unui sistem caracterizează capacitatea de estimare a unei variabile de stare din valorile mărimii de ieşire. Se spune că un sistem este observabil, dacă mărimea de ieşire are componente determinate (este influențată) de toate variabilele de stare. Un sistem este observabil dacă şi numai dacă, o stare inițială $x(0)$ poate fi determinată prin observare, pe un interval de timp finit T al mărimii de ieşire $y(t)$ şi al mărimii de intrare $u(t)$. Sistemul este observabil dacă determinantul matricei de observabilitate:

$$Q=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \text{ este diferit de zero.}$$

Un sistem care este descris în forma controlabilă cu variabile de fază este întotdeauna şi observabil. În Matlab controlabilitatea şi observabilitatea unui sistem se determină cu funcțiile:

```
ctrb(A,B) şi obsv(A,C),
```

unde A, B şi C reprezintă matricele din spaţiul stărilor.

8.1.4. Reducerea schemelor bloc în spaţiul stărilor

Limbajul Matlab, în cadrul funcţiilor grupate în "Control Toolbox", realizează funcţiile **blkbuild** şi **connect**, care convertesc diagramele bloc în modele în spaţiul stărilor. Blocurile funcţiilor de transfer sunt numerotate de la 1 la valoarea numărului de blocuri **nblocks** (numărul total de blocuri) şi converteşte fiecare bloc la o reprezentare în spaţiul stărilor.

Funcţia:

```
[A,B,C,D]=connect(a,b,c,d,q,iu,iy),
```

conectează blocurile în concordanţă cu o matrice predefinită q care specifică interconectarea blocurilor. Primul element al fiecărei linii a matricei q este numărul blocului. Celelalte elemente indică sursa intrărilor blocurilor de însumare. Când intrarea la sumator este legată negativ, numărul blocului apare cu semnul minus. Vectorii linie `iu` şi `iy` indică blocurile de intrare şi ieşire. În final se obţine funcţia de transfer echivalentă pentru intrarea `iu`:

```
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,iu).
```

8.2. Exerciţii propuse

Exerciţiul 8.2.1

Fie un sistem reprezentat prin următoarea funcţie de transfer:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+7s+2}{s^3+9s^2+26s+24}.$$

Să se determine matricele stărilor pentru sistemul reprezentat prin funcţia de transfer.

Exerciţiul 8.2.2

Fie un sistem reprezentat în spaţiul stărilor de următoarele matrice:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}10\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\ C=[1\quad 0\quad 0],\ D=[0]$$

Să se determine:

- funcţia de transfer a sistemului;
- matricea fundamentală;
- matricea de tranziţie a stărilor;
- dacă sistemul este controlabil şi observabil.

Exerciţiul 8.2.3

Fie sistemul reprezentat în spaţiul stărilor ($t=[0:10]$ cu pasul 0,05):

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -0.5\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.5\\ 0\end{bmatrix}u \text{ şi } y=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

- Să se simuleze răspunsul sistemului la intrarea treaptă.

- Să se simuleze răspunsul sistemului la intrarea impuls unitar.

Exercițiul 8.2.4

Se dă sistemul modelat la stare:

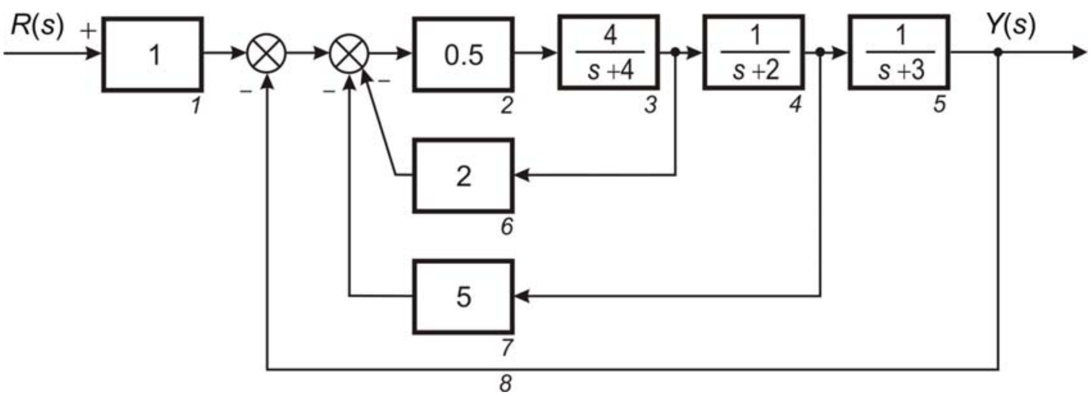
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u(t) \text{ şi } y=[1\ \ 1\ \ 0]x$$

Se impun condițiile inițiale $x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0.5\\ -0.5\end{bmatrix}$, $t=[0:4]$ cu pasul 0,05.

- Să se simuleze răspunsul sistemului la intrarea treaptă.
- Să se simuleze răspunsul sistemului la intrarea $\sin(2\pi t)$.

Exercițiul 8.2.5

Să se realizeze programul pentru reducerea schemei bloc din figură:



Exercițiul 8.2.6

Se consideră sistemul definit la stare sub următoarea formă:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -25 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}.$$

Sistemul are două intrări şi două ieşiri. Să se determine cele patru funcții de transfer $Y_1(s)/U_1(s)$, $Y_1(s)/U_2(s)$, $Y_2(s)/U_1(s)$, $Y_2(s)/U_2(s)$ (când sistemului i se aplică intrarea u_1 se presupune că intrarea u_2 este zero şi vice-versa).