<u>METODE INDIRECTE SAU METODE DE TIP PREDICTOR-CORECTOR</u>

După cum s-a putut constata la paragraful anterior, metodele de tip **<u>Runge-Kutta</u>** prezintă următoarele două caracteristici:

La determinarea punctului următor, $\left(x_{m+1},\ y_{m+1}\right)$, nu se folosesc **decât** informaţiile date la punctul anterior $\left(x_m,\ y_m\right)$

Evaluarea erorii de trunchiere presupune un **volum mare de calcule**, ceea ce afectează durata de calcul.

Metodele de tip **<u>predictor-corector</u>** propun relaţii de recurenţă care pe de o parte să permită utilizarea de **informaţii suplimentare** la determinarea punctului următor: $\left(x_{m+1},\ y_{m+1}\right)$

şi anume <u>informaţiile disponibile de la două puncte obţinute anterior</u>, iar pe de altă parte să permită **corectarea în mod convenabil** a valorii y_{m+1}

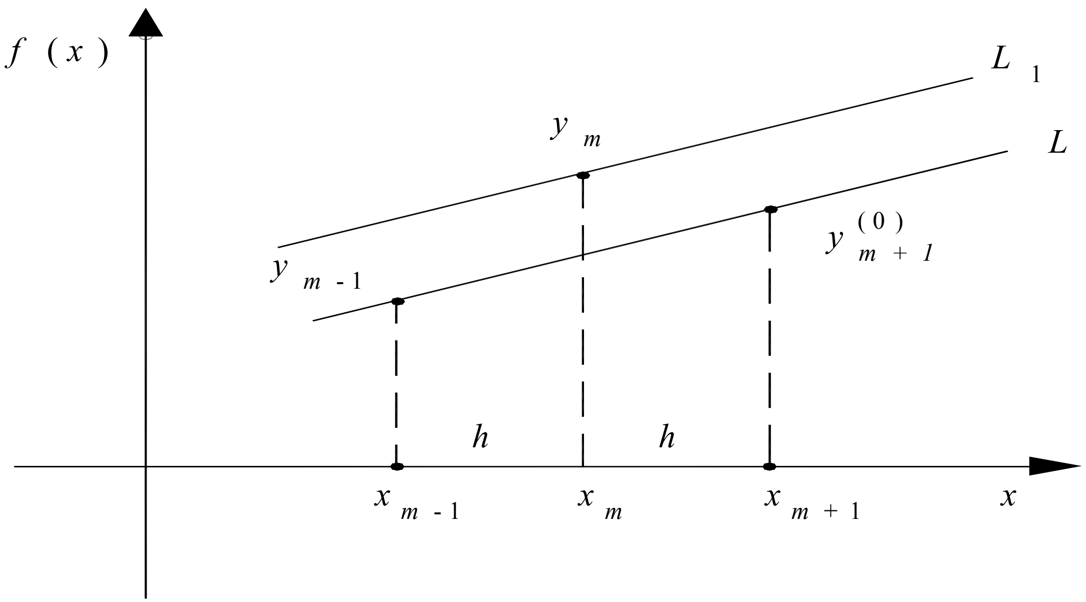
Determinarea punctului următor, $\left(x_{m+1},\ y_{m+1}\right)$, se efectuează în **două etape**:

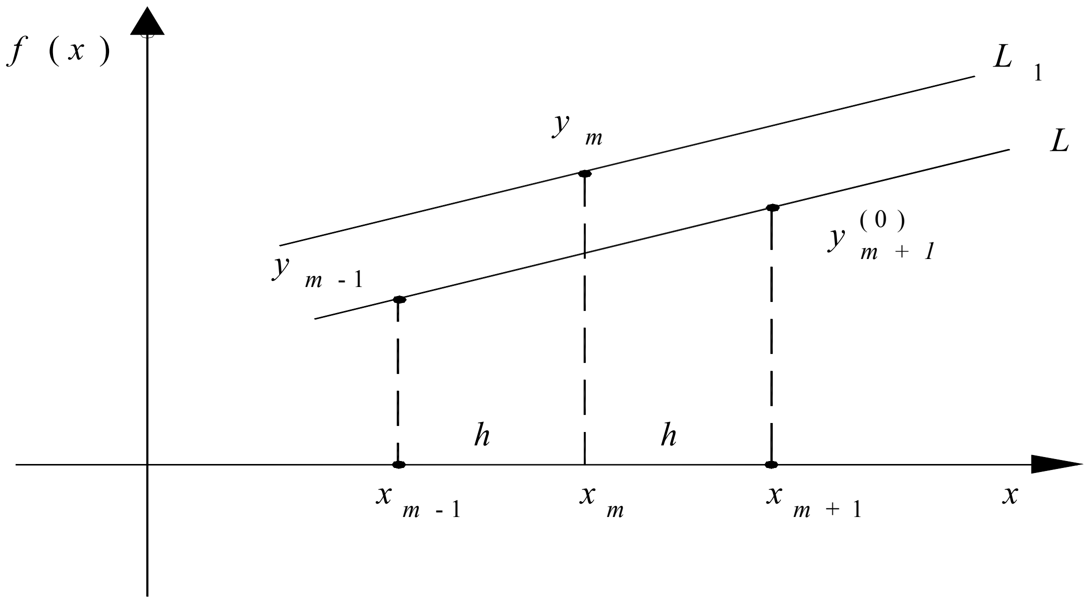
•Predictor

În această etapă se efectuează o primă evaluare a mărimii y_{m+1} obţinându-se o valoare estimată $y_{m+1}^{(0)}$. Cea mai utilizată metodă determină valoarea $y_{m+1}^{(0)}$ utilizând informaţiile disponibile de la două puncte determinate anterior $\left(x_{m-1}, y_{m-1}\right)$ şi $\left(x_m, y_m\right)$ după cum urmează:

Presupunem cunoscute coordonatele $\left(x_m, y_m\right)$ ale unui punct aparţinând graficului funcţiei.

Calculând valoarea derivatei funcţiei în acel punct, cu ajutorul relaţiei, se obţine valoarea $y_m^{'} = f\left(x_m, y_m\right)$ care reprezintă panta tangentei la grafic în acel punct, dreapta $\boldsymbol{L_1}$ din figura:





Dreapta ***L*** paralelă cu dreapta ***L*$_1$** şi care trece prin punctul de coordonate $\left(x_{m-1},\ y_{m-1}\right)$ va avea ecuaţia: $y - y_{m-1} = f\left(x_m, y_m\right)\cdot\left(x - x_{m-1}\right)$

Obţinem o primă evaluare a mărimii y_{m+1}, intersectând dreapta ***L*** cu verticala dusă în dreptul abscisei $x_{m+1} = x_m + h$, ordonata acestui punct va fi: $y_{m+1}^{(0)} = y_{m-1} + 2\cdot h\cdot f\left(x_m, y_m\right)$

Relaţia reprezintă **formula de calcul utilizată în etapa predictor** pentru a obţine o primă evaluare a valorii y_{m+1}

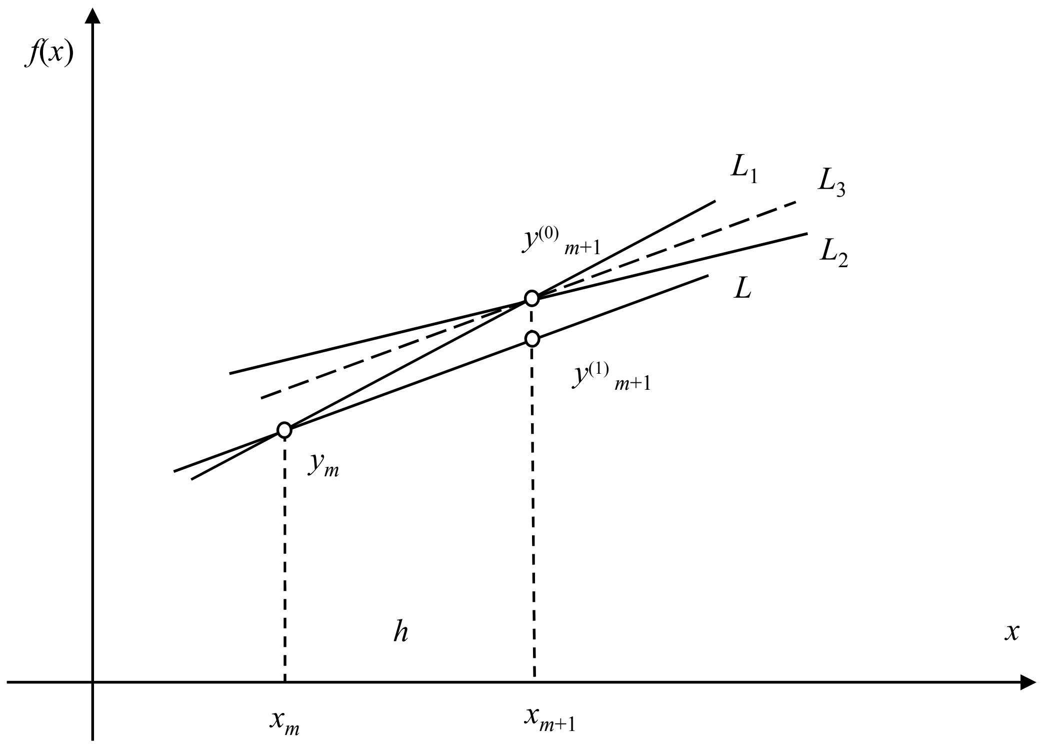
Observaţie. Datorită faptului că etapa predictor necesită existenţa a două puncte calculate anterior, rezultă că această etapă nu poate fi aplicată la efectuarea primului pas de integrare. Ca urmare primul pas de integrare va trebui efectuat cu ajutorul unei metode directe, de tip Runge-Kutta, după care, la efectuarea următorilor paşi poate fi aplicată metoda predictor-corector.

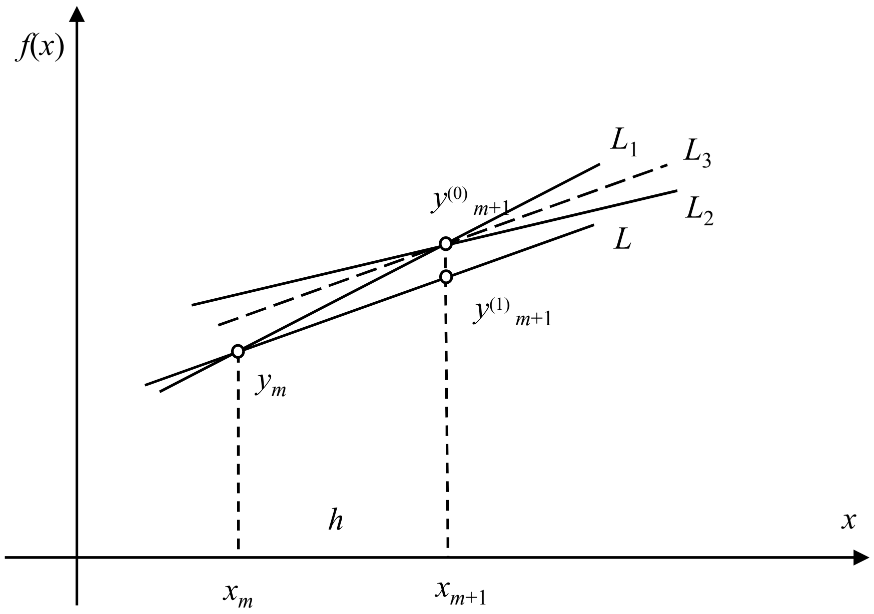
•Corector

Această etapă constă în corectarea valorii estimate, $y_{m+1}^{(0)}$, prin determinarea unui **şir de valori corectate**, notate cu $y_{m+1}^{(1)}$, … , $y_{m+1}^{(i)}$. Procesul de corectare se încheie în momentul în care este îndeplinită o condiţie referitoare la precizia de calcul. Această relaţie poate fi de forma:

$\left| y_{m+1}^{(i)} - y_{m+1}^{(i-1)} \right| \leq \varepsilon$ unde ε reprezintă precizia de calcul, impusă iniţial.

Procesul de corectare este ilustrat în figura de mai jos şi constă în următoarele.





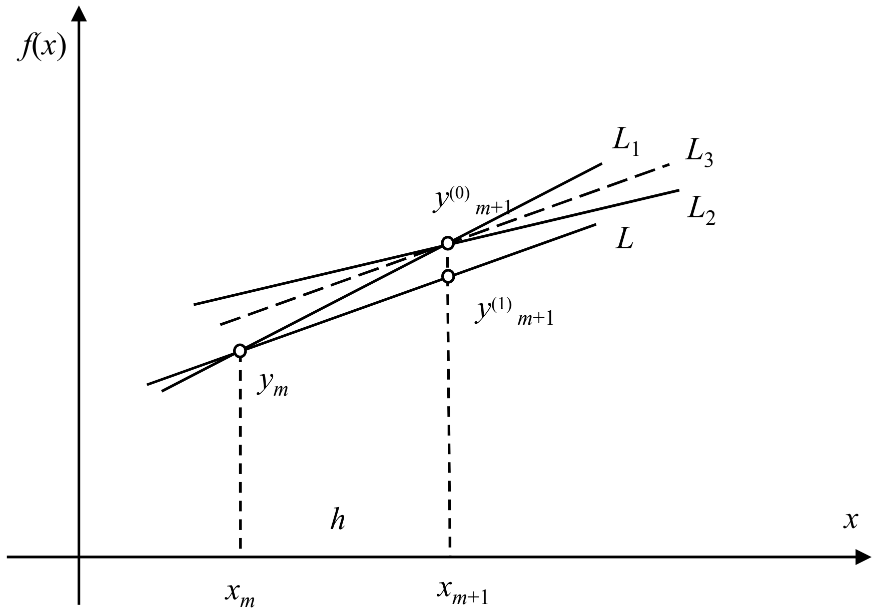
Calculând valoarea derivatei funcţiei în punctul (x_m, y_m), se obţine valoarea $y_m^{'} = f(x_m, y_m)$ care reprezintă panta tangentei la grafic în acel punct, dreapta ***L_1*** din figură.

Pentru punctul de coordonate $\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{(0)}\right)$ se recalculează valoarea derivatei funcţiei cu relaţia obţinându-se o valoare, $f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{(0)}\right)$, care reprezintă panta dreptei ***L_2***

Se determină panta dreptei ***L_3*** ca medie aritmetică a pantelor dreptelor ***L_1*** şi ***L_2***:

$$\Psi = \frac{1}{2} \cdot \left[f(x_m, y_m) + f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{(0)}\right) \right]$$

$$\Psi = \frac{1}{2} \cdot \left[f\left(x_m, y_m\right) + f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{(0)}\right)\right]$$



Dreapta ***L*** de pantă Ψ şi care trece prin punctul de coordonate $\left(x_m, y_m\right)$ va avea ecuaţia:

$$y - y_m = \Psi \cdot \left(x - x_m\right)$$

Obţinem prima corectare a valorii $y_{m+1}^{(0)}$ intersectând dreapta L cu verticala dusă în dreptul abscisei $x_{m+1} = x_m + h$, ordonata acestui punct va fi :

$$y_{m+1}^{(1)} = y_m + \frac{h}{2} \cdot \left[f\left(x_m, y_m\right) + f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{(0)}\right)\right]$$

A doua corectare a valorii y_{m+1} se obţine utilizând valoarea $y_{m+1}^{(1)}$, ca urmare **relaţia de recurenţă pentru etapa corector** se poate scrie sub forma:

$$y_{m+1}^{(i)} = y_m + \frac{h}{2} \cdot \left[f\left(x_m, y_m\right) + f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i-1)}\right) \right]$$

care reprezintă formula de recurenţă pentru etapa corector.

Pentru a stabili condiţiile în care aplicarea repetată a relaţiei de recurenţă determină un proces convergent se procedează astfel:

$$y_{m+1}^{(i)} - y_{m+1}^{(i-1)} = \frac{h}{2} \cdot \left[f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i-1)}\right) - f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i-2)}\right) \right]$$

Utilizând formula de dezvoltare în serie Taylor pentru o funcţie de două variabile:

$$f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) = f\left(x, y\right) + \Delta x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots$$

putem scrie: $$f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i-1)}\right) = f\left(x_m, y_m\right) + h \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \left(y_{m+1}^{(i-1)} - y_m\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

respectiv : $$f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i-2)}\right) = f\left(x_m, y_m\right) + h \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \left(y_{m+1}^{(i-2)} - y_m\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

Prin înlocuire se obţinem:

$$y_{m+1}^{(i)} - y_{m+1}^{(i-1)} = \frac{h}{2} \cdot \left[y_{m+1}^{(i-1)} - y_{m+1}^{(i-2)} \right] \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

care reprezintă o relaţie de legătură între trei valori obţinute succesiv: $y_{m+1}^{(i-2)}$, $y_{m+1}^{(i-1)}$ şi $y_{m+1}^{(i)}$

Presupunem că funcţia $\frac{\partial f}{\partial y}$ este mărginită, ca urmare există o valoare M astfel încât: $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \le M$

ca urmare: $$\left| y_{m+1}^{(i)} - y_{m+1}^{(i-1)} \right| \le \frac{h \cdot M}{2} \cdot \left| y_{m+1}^{(i-1)} - y_{m+1}^{(i-2)} \right|$$

În mod analog putem scrie: $$\left| y_{m+1}^{(i-1)} - y_{m+1}^{(i-2)} \right| \le \frac{h \cdot M}{2} \cdot \left| y_{m+1}^{(i-2)} - y_{m+1}^{(i-3)} \right|$$

Prin substituţie obţinem: $$\left| y_{m+1}^{(i)} - y_{m+1}^{(i-1)} \right| \le \left(\frac{h \cdot M}{2} \right)^2 \cdot \left| y_{m+1}^{(i-2)} - y_{m+1}^{(i-3)} \right|$$

Procedând în mod analog se obţine în final relaţia: $$\left| y_{m+1}^{(i)} - y_{m+1}^{(i-1)} \right| \le \left(\frac{h \cdot M}{2} \right)^i \cdot \left| y_{m+1}^{(1)} - y_{m+1}^{(0)} \right|$$

Prin urmare dacă pasul de integrare h se alege astfel încât să fie îndeplinită inegalitatea: $h < \frac{2}{M}$ diferenţa valorilor corectate tinde spre zero şi ca urmare procedeul este convergent. Deci **convergenţa este mai rapidă cu cât pasul de integrare *h* este mai mic**.

Caz particular: $f(x, y) = F(x)$

În situaţia în care funcţia de integrat depinde numai de x obţinem: $y' = F(x)$

şi ca urmare $\int_{x_0}^{x} F(x) \cdot \mathrm{d}x = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0$

Dacă în relaţia se renunţă la indicele superior: $y_{m+1}^{(i)} = y_m + \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_m, y_m) + f\left(x_{m+1}, y_{m+1}^{(i-1)}\right) \right]$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1}) \right]$$

întrucât $f(x, y) = F(x)$, relaţia devine: $y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \cdot \left[F(x_m) + F(x_{m+1}) \right]$

Adunând relaţiile pentru $m = 1,\ 2, \cdots,\ n$ se obţine:

$$y_n - y_0 = \frac{h}{2}\left[F(x_0) + 2 \cdot F(x_1) + 2 \cdot F(x_2) + \cdots + 2 \cdot F(x_{n-1}) + F(x_n) \right]$$

care reprezintă formula de calcul utilizată în metoda trapezelor, ca urmare formula de corecţie este o generalizare a metodei trapezelor pentru funcţii de mai multe variabile.

REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDINUL UNU

Se consideră sistemul de ecuaţii diferenţiale, scris sub formă matricială:

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = A \cdot X(t) + B \cdot E(t)$$

în care

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{bmatrix} \; ; \quad A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{bmatrix} \; ; \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdot & \cdot & b_{1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1} & \cdot & \cdot & b_{n,m} \end{bmatrix} \; ; \quad E(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ e_m(t) \end{bmatrix}$$

Presupunem că valorile iniţiale ale necunoscutelor sunt cunoscute având valorile exprimate prin matricea coloană $X(t_0)$.

Pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii vom utiliza metoda ***variaţiei parametrului***.

Această metodă utilizează o transformare de forma: $\boxed{X(t) = Y(t) \cdot X_1(t)}$

în care $Y(t)$ este o matrice pătrată de ordinul ***n*** presupusă nesingulară pentru orice $t \geq t_0$

Înlocuind transformarea în sistemul de ecuaţii se obţine, după gruparea termenilor:

$$\left[\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t} - A \cdot Y(t) \right] \cdot X_1(t) = -Y(t) \cdot \frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} + B \cdot E(t)$$

Deoarece *Y*(*t*) nu este specificată, alegerea acesteia se va face astfel încât să se obţină simplificarea rezolvării ecuaţiei. Ca urmare $Y(t)$ se determină astfel încât paranteza pătrată din membrul stâng al ecuaţiei să fie zero. Următoarea succesiune de calcule va conduce la obţinerea soluţiei ecuaţiei.

Se rezolvă mai întâi ecuaţia: $$\boxed{\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t} - A \cdot Y(t) = 0}$$

care este o ecuaţie diferenţială omogenă având ca necunoscută matricea $Y(t)$. După rezolvarea acestei ecuaţii rezultatul va fi introdus în ecuaţia:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} = Y(t)^{-1} \cdot B \cdot E(t)}$$

care poate fi rezolvată prin integrare directă de la t_0 la t.

Presupunem că ecuaţia $\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t} - A \cdot Y(t) = 0$ a fost rezolvată

prin integrarea ecuaţiei $\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} = Y(t)^{-1} \cdot B \cdot E(t)$ se obţine:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} \cdot dt = \int_{t_0}^{t} Y(\tau)^{-1} \cdot B \cdot E(\tau) \cdot \mathrm{d}t \qquad \text{adică} \qquad X_1(t) = X_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(\tau)^{-1} \cdot B \cdot E(\tau) \cdot \mathrm{d}t$$

Utilizând relaţia $X(t) = Y(t) \cdot X_1(t)$ se poate obţine relaţia de legătură între matricile valorilor iniţiale:

$$X(t_0) = Y(t_0) \cdot X_1(t_0) \qquad \text{sau} \qquad X_1(t_0) = Y(t_0)^{-1} \cdot X(t_0)$$

Existenţa acestei egalităţii impune pentru matricea $Y(t)$ o condiţie iniţială nesingulară de forma:

$Y(t_0) = U$ în care s-a notat cu U matricea unitate de ordinul n.

Pe de altă parte, mai rezultă că: $X_1(t) = Y(t)^{-1} \cdot X(t)$

Prin premultiplicarea ecuaţiei

$$X_1(t) = X_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(\tau)^{-1} \cdot B \cdot E(\tau) \cdot \mathrm{d}t \qquad \text{cu} \qquad Y(t)^{-1}$$

şi ţinând seama de relaţiile:

$$X_1(t) = Y(t)^{-1} \cdot X(t) \qquad\qquad X_1(t_0) = Y(t_0)^{-1} \cdot X(t_0)$$

Se obţine

$$X(t) = Y(t) \cdot Y(t_0)^{-1} \cdot X(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y(t)^{-1} \cdot Y(\tau)^{-1} \cdot B \cdot E(\tau) \cdot \mathrm{d}t$$

Utilizând notaţia simbolică $\boxed{Y(t) \cdot Y(\tau)^{-1} = \Phi(t-\tau)}$ relaţia devine:

$$\boxed{X(t) = \Phi(t-t_0) \cdot X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau) \cdot B \cdot E(\tau) \cdot \mathrm{d}t}$$

care reprezintă soluţia ecuaţiei diferenţiale neomogene iniţiale $\dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = A \cdot X(t) + B \cdot E(t)$

a cărei rezolvare completă necesită rezolvarea în prealabil a ecuaţiei diferenţiale omogene $\dfrac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t} - A \cdot Y(t) = 0$

Exponenţiala matricială

Pentru stabilirea soluţiei ecuaţiei diferenţiale omogene $\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t} - A \cdot Y(t) = 0$

vom considera ecuaţia diferenţială omogenă scalară:

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - a \cdot y = 0$ în care *a* este o constantă.

Presupunem condiţia iniţială ca fiind $y(t_0) = 1$

Soluţia ecuaţiei scalare este: $y(t) = e^{a \cdot (t - t_0)}$ care poate fi verificată prin substituţie directă.

Deoarece forma ecuaţiei matriciale este identică cu a ecuaţiei scalare

vom scrie soluţia sub aceeaşi formă: $\boxed{Y(t) = e^{A \cdot (t - t_0)}}$

expresie în care apare o exponenţială având o matrice la exponent care

poartă denumirea de ***exponenţială matricială.***

Valoarea exponenţialei matriciale va fi definită utilizând expresia de dezvoltare în serie a unei exponenţiale scalare, astfel:

$$\boxed{e^{A\cdot t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k\cdot t^k}{k!}=U+A\cdot t+\frac{A^2\cdot t^2}{2!}+\frac{A^3\cdot t^3}{3!}+\cdots+\frac{A^k\cdot t^k}{k!}+\cdots}$$

Deoarece *A* este o matrice pătrată de ordinul *n*, rezultă că şi $e^{A\cdot t}$

este tot **o matrice pătrată** de ordinul ***n***

Exemplu

Fie: $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \; ;$$

şi $$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

atunci

$$e^{A\cdot t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

deci

$$e^{A\cdot t} = \begin{bmatrix} 1 + 2\cdot t + 2\cdot t^2 + \frac{4}{3}\cdot t^3 + \cdots & 0 \\ -2\cdot t - t^2 - t^3 - \cdots & 1 - t + \frac{1}{2}\cdot t^2 - \frac{1}{3}\cdot t^3 + \cdots \end{bmatrix}$$

Aşa cum rezultă din relaţia de definiţie şi din exemplul precedent exponenţiala matricială este reprezentată de o **sumă infinită**.

Se poate obţine o formă echivalentă cu **termeni finiţi** utilizând transformata Laplace.

Pentru simplificare considerăm $t_0 = 0$, ca urmare rezultă:

$$Y(t) = e^{A\cdot(t-t_0)} = e^{A\cdot t}$$

de asemenea avem în vedere condiţia $Y(t_0) = U$

Aplicând transformata Laplace, ecuaţia $\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t} - A\cdot Y(t) = 0$

se transformă astfel:

$$s\cdot Y(s) - Y(0) - A\cdot Y(s) = 0$$

sau $(s\cdot U - A)\cdot Y(s) = Y(0)$ sau $(s\cdot U - A)\cdot Y(s) = U$

din care rezultă expresia transformatei Laplace

$$\boxed{Y(s) = (s\cdot U - A)^{-1}}$$

Efectuând transformarea inversă se obţine expresia exponenţialei matriciale în termeni finiţi, ca

fiind:

$$\boxed{Y(t) = e^{A\cdot t} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{ s\cdot U - A \right\}^{-1}}$$

Exemplu

Dacă $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ atunci $s\cdot U - A = s\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-2 & 0 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}$

Inversa matricei precedente se calculează astfel: $(s\cdot U - A)^{-1} = \dfrac{1}{(s-2)\cdot(s+1)}\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -2 & s-2 \end{bmatrix}$

adică $(s\cdot U - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-2} & 0 \\ \dfrac{-2}{(s-2)\cdot(s+1)} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$ sau $(s\cdot U - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-2} & 0 \\ \dfrac{2}{3\cdot(s+1)} - \dfrac{2}{3\cdot(s-2)} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$

sau

$$
(s \cdot U - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s-2} & 0 \\ \dfrac{2}{3\cdot(s+1)} - \dfrac{2}{3\cdot(s-2)} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}
$$

Efectuând transformata inversă, se obţine

$$
e^{A\cdot t} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{ s \cdot U - A \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{2\cdot t} & 0 \\ \dfrac{2}{3}\cdot\left(e^{-t} - e^{2\cdot t}\right) & e^{-t} \end{bmatrix}
$$

Prin descompunerea în serie a elementelor matricii rezultat se obţine o expresie identică cu cea obţinută la precedentul exemplu.

Se demonstrează că fiecare din elementele matricei $e^{A\cdot t}$ converge către o funcţie continuă de t, pentru orice t finit şi uniform, pentru orice interval de timp finit.

Ca urmare, diferenţierea termen cu termen a seriei este permisă. Rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{A\cdot t}=A+A^2\cdot t+\frac{A^3\cdot t^2}{2!}+\frac{A^4\cdot t^3}{3!}+\cdots=A\cdot\left(U+A\quad\cdot t+\frac{A^2\cdot t^2}{2!}+\frac{A^3\cdot t^3}{3!}+\cdots\right)$$

deci
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{A\cdot t}=A\cdot e^{A\cdot t}}$$

ca urmare formula de derivare a exponenţialei matriciale este aceeaşi ca pentru exponenţiala scalară

Acest rezultat permite concluzia că valoarea $Y(t)=e^{A\cdot(t-t_0)}$

este soluţia unică a ecuaţiei $\frac{\mathrm{d}Y(t)}{\mathrm{d}t}-A\cdot Y(t)=0$

cu condiţia iniţială $Y(t_0)=U$

Utilizând relaţia: $e^{A\cdot t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k\cdot t^k}{k!}=U+A\cdot t+\frac{A^2\cdot t^2}{2!}+\frac{A^3\cdot t^3}{3!}+\cdots+\frac{A^k\cdot t^k}{k!}+\cdots$

putem scrie:

$$e^{-A\cdot t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot A^k\cdot t^k}{k!}=U-A\cdot t+\frac{A^2\cdot t^2}{2!}-\frac{A^3\cdot t^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^k\cdot A^k\cdot t^k}{k!}+\cdots$$

Efectuând produsul relaţiilor, rezultă că: $\boxed{e^{A\cdot t}\cdot e^{-A\cdot t}=U}$

ca urmare inversa matricii $e^{A\cdot t}$ este matricea $e^{-A\cdot t}$

Acest rezultat justifică notaţia introdusă anterior: $\Phi(t-\tau)=e^{A\cdot(t-\tau)}$

deoarece: $Y(t)\cdot Y(\tau)^{-1}=e^{A\cdot t}\cdot e^{-A\cdot\tau}=e^{A\cdot(t-\tau)}$

Prin urmare se poate nota: $\boxed{X(t)=e^{A\cdot(t-t_0)}\cdot X(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A\cdot(t-\tau)}\cdot B\cdot E(\tau)\cdot \mathrm{d}t}$

formă care permite deducerea unei relaţii prin care să fie efectuată integrarea numerică.

$$X(t) = e^{A\cdot(t-t_0)} \cdot X(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A\cdot(t-\tau)} \cdot B \cdot E(\tau) \cdot \mathrm{d}t$$

$$X(n\cdot\Delta t) = e^{A\cdot(n\cdot\Delta t)} \cdot X(0) + \sum_{k=1}^{n} \left[e^{A\cdot(n\cdot\Delta t - k\cdot\Delta t)} \cdot B \cdot E(k\cdot\Delta t) \cdot \Delta t \right]$$

separând ultimul termen al sumei, rezultă:

$$X(n\cdot\Delta t) = e^{A\cdot(n\cdot\Delta t)} \cdot X(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[e^{A\cdot(n-k)\cdot\Delta t} \cdot B \cdot E(k\cdot\Delta t) \cdot \Delta t \right] + B \cdot E(n\cdot\Delta t) \cdot \Delta t$$

Mărimea $e^{A\cdot\Delta t}$ se dă factor comun forţat între primii doi termeni, ca urmare se obţine:

$$X(n\cdot\Delta t)=e^{A\cdot\Delta t}\cdot\left\{e^{A\cdot(n-1)\cdot\Delta t}\cdot X(0)+\sum_{k=1}^{n-1}\left[e^{A\cdot(n-k-1)\cdot\Delta t}\cdot B\cdot E(k\cdot\Delta t)\cdot\Delta t\right]\right\}+B\cdot E(n\cdot\Delta t)\cdot\Delta t$$

prin urmare se poate scrie formula de recurenţă:

$$\boxed{X(n\cdot\Delta t)=e^{A\cdot\Delta t}\cdot X[(n-1)\cdot\Delta t]+B\cdot E(n\cdot\Delta t)\cdot\Delta t, \qquad n=1,2,3,\ldots}$$

care permite integrarea numerică a relaţiei:

$$X(t)=e^{A\cdot(t-t_0)}\cdot X(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A\cdot(t-\tau)}\cdot B\cdot E(\tau)\cdot \mathrm{d}t$$

METODA TRANSFORMATEI LAPLACE

Funcţia original

Transformata Laplace este definită prin integrala:

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\, \mathrm{d}t$$

unde $f(t)$ este o funcţie reală de timp iar $s = \sigma + j\,\omega$ este o variabilă complexă.

Integrala este convergentă, dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:

a) pentru $t > 0$, ***f(t) este monotonă pe porţiuni***;

b) Pentru $t > t_0 > 0$, **$|f(t)|$ nu creşte mai repede decât o exponenţială**, există constantele pozitive A_0, σ_0 şi t_0, astfel încât:
dacă $t > t_0 > 0$;

$$\left| f(t) \right| < A_0 e^{\sigma_0 t}$$

a) Variabila complexă **s are partea reală suficient de mare**, astfel încât: $\sigma > \sigma_0$

Funcţiile care satisfac condiţiile precedente se numesc **funcţii original**.

<u>Funcţiile imagine</u> (transformatele Laplace)

Dată fiind o funcţie original ***f*(*t*)** , numim **transformată Laplace**, funcţia ***F*(*s*)** de variabila complexă ***s***, <u>univoc asociată</u> prin expresia:

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

Se demonstrează că această regulă de asociere este biunivocă.

Definim **operatorul**, notat cu : $\mathfrak{L}$

$$F(s)=\mathfrak{L}\left[f(t)\right]=\mathfrak{L}\left[f\right]$$

Care asociază funcţiei original ***f*(*t*)** (cu ***t* ≥ 0**) funcţia de variabilă complexă ***F*(*s*)**.

Transformarea inversă este notată cu: $\mathfrak{L}^{-1}$

$$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\mathfrak{L}^{-1}\left[F\right]$$

Care asociază funcţiei de variabilă complexă ***F*(*s*)**, o funcţie de timp ***f*(*t*)**, univoc determinată pentru ***t* ≥ 0**.

Transformata Laplace a unor funcţii mai des utilizate:

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]$
1	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t + b)$	$\frac{1}{s^2+\omega^2}(s \sin b + \omega \cos b)$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t + b)$	$\frac{1}{s^2+\omega^2}(s \cos b - \omega \sin b)$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\mathrm{sh}\,at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\mathrm{ch}\,at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

Corespondenţa operaţiilor prin transformata Laplace:

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt$$

Operaţiile mai des întâlnite la rezolvarea reţelelor electrice sunt: adunare, multiplicare cu un scalar, derivare şi integrare.

1. Transformata Laplace a sumei

$$\int_0^{\infty} [f_1(t) + f_2(t)] e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} f_1(t)\, e^{-st}\, dt + \int_0^{\infty} f_2(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\boxed{\mathfrak{L}\,[f_1(t) + f_2(t)] = \mathfrak{L}\,[f_1(t)] + \mathfrak{L}\,[f_2(t)]}$$

2. Transformata laplace a produsului cu constanta λ

$$\int_0^{\infty} [\lambda f(t)] e^{-st}\, dt = \lambda \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\boxed{\mathfrak{L}\,[\lambda f(t)] = \lambda\, \mathfrak{L}\,[f(t)]}$$

3. Transformata Laplace a derivatei

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\, \mathrm{d}t$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} e^{-st}\, \mathrm{d}t = f(t) e^{-st}\Big|_0^{\infty} + s \cdot \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = s \cdot \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t - f(0)$$

$$\lim_{t\to\infty} \left| f(t) e^{-st} \right| \le \lim_{t\to\infty} \left| A_0\, e^{\sigma_0 t} e^{-st} \right| = A_0 \lim_{t\to\infty} e^{-(s-\sigma_0)t} = 0$$

$$\boxed{\mathfrak{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = s\,\mathfrak{L}[f(t)] - f(0)}$$

Pentru condiţii iniţiale zero $f(0) = 0$:

$$\boxed{\mathfrak{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = s\,\mathfrak{L}[f(t)]}$$

4. Transformata Laplace a integralei

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\frac{\mathrm{d}\,g(t)}{\mathrm{d}t} = f(t) \qquad \text{şi} \qquad g(0) = 0$$

$$\boxed{\mathfrak{L}\left[\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = s\,\mathfrak{L}[f(t)]} \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{L}\left[\frac{\mathrm{d}\,g(t)}{\mathrm{d}t}\right] = s\,\mathfrak{L}[g(t)]$$

$$\boxed{\mathfrak{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}\,\mathfrak{L}[f(\tau)]}$$

Concluzie:

Transformata Laplace permite transformarea ecuaţiilor integro-diferenţiale în ecuaţii algebrice.