# Jacobianul Manipulatoarelor

- Mișcarea diferențială
- Mișcarea liniară și unghiulară
- Propagarea vitezei
- Forma explicită
- Utilizarea Jacobianului în controlul manipulatorului
- Forțele statice

## 1. Mișcarea diferențială

Pentru un lanț cinematic cu $n$ grade de libertate exprimabile și prin variabile din cuple $\theta_1 \dots \theta_n$ se pune următoarea problemă: *Cum influențează deplasarea infiitezimală din cuple postura efectorului (poziție și orientare)?* Adică, cunoscând (problema de cinematică directă) dependența $\theta \rightarrow x$, unde $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \dots \theta_n]^T$, $\boldsymbol{x} = [x, y, z, \alpha, \beta, \gamma]^T$, care este dependența

$$\boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x} \tag{1}$$

Relația (1) poate fi redusă și la:

$$\delta\boldsymbol{\theta} \rightarrow \delta\boldsymbol{x} \tag{1)’}$$

Deoarece coordonatele generalizate, variabilele, din cuple pot fi de două tipuri (rotație $\theta_i$ sau translație $d_i$), în scopul unei reprezentări unitare se introduc variabile:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{dacă cupla } i \text{ este de rotație} \\ 1 & \text{dacă cupla } i \text{ este de translație} \end{cases} \tag{2}$$

$$\overline{\varepsilon_i} = 1 - \varepsilon \tag{3}$$

Ceea ce permite scrierea:

$$q_i = \overline{\varepsilon_i}\theta_i + \varepsilon_i d_i \tag{4}$$

În consecință, variabilele unghiulare (de acum coordonate generalizate) pot fi scrise:

$$\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, \dots\ q_n]^T$$

Jacobianul se definește ca fiind operatorul (matricea) care exprimă dependența (1)’.

$$\delta\boldsymbol{x}_{(m\times1)} = \boldsymbol{J}_{(m\times n)}(\boldsymbol{q}) \cdot \delta\boldsymbol{q}_{(n\times1)} \tag{5}$$

Pentru aceasta se pornește de la relația obținută în problema de cinematică directă.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) \tag{6}$$

unde $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_m]^T$;

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = [f_1(\boldsymbol{q}), \dots, f_m(\boldsymbol{q})]^T$

$\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, \dots\ q_n]^T$

$m$ este numărul gradelor de mobilitate, $m \in \{1 \dots 6\}$;

$n$ este numărul gradelor de libertate, numărul cuplelor.

(6) ⇒

$$\delta x_1 = \frac{\partial f_1(\boldsymbol{q})}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial f_1(\boldsymbol{q})}{\partial q_n} \cdot \delta q_n$$

.........................................................

$$\delta x_m = \frac{\partial f_m(\boldsymbol{q})}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \cdots + \frac{\partial f_m(\boldsymbol{q})}{\partial q_n} \cdot \delta q_n$$

Adică

$$\delta \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta q_n \end{bmatrix}$$

(5)’

Relația Jacobianului (5) poate fi interpretată și ca o relație între vitezele coordonatelor generalizate și vitezele (de translație și rotație) ale efectorului.

$$\delta \boldsymbol{x}_{(m\times1)} = \boldsymbol{J}_{(m\times n)}(\boldsymbol{q}) \cdot \delta \boldsymbol{q}_{(n\times1)} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{(m\times1)} = \boldsymbol{J}_{(m\times n)}(\boldsymbol{q}) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}_{(n\times1)} \tag{7}$$

unde , din nou, $J_{ij}(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial}{\partial q_j} \cdot f_i(\boldsymbol{q})$

***Exemplul 1. Calculul Jacobianului pentru structura RR***

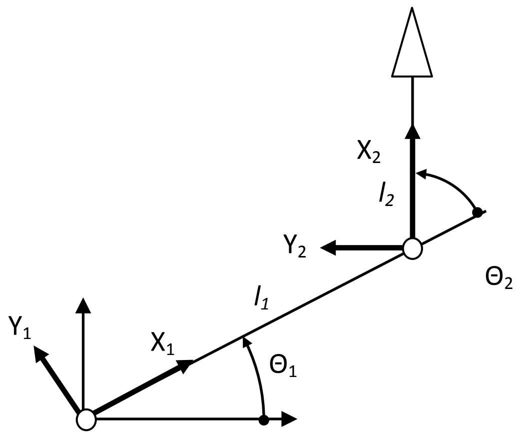


Fig.1. Structura RR

$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12}$
$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12}$

Unde $c_1 = \cos\theta_1\,; c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$ etc.

$\Rightarrow$ $\delta x = -(l_1 s_1 + l_2 s_{12})\delta\theta_1 - l_2 s_{12}\delta\theta_2$

$$\delta y = (l_1 c_1 + l_2 c_{12})\delta\theta_1 + l_2 c_{12}\delta\theta_2$$

$$\delta\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -l_2 s_{12} \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12}) & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -l_2 s_{12} \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12}) & l_2 c_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & -l_2 s_{12} \\ x & l_2 c_{12} \end{bmatrix}.$$

Revenind la relația (5) putem să facem următoarele observații:

1) Vectorul $x$ conține postura efectorului

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_P \\ \boldsymbol{x}_R \end{bmatrix}$$

unde: $\boldsymbol{x}_P$ este vectorul de poziție;

$\boldsymbol{x}_R$ este vectorul de orientare.

Pot fi utilizate oricare dintre reprezentările cunoscute.

$\boldsymbol{x}_P$ – coordonate carteziene, sferice, cilindrice, ...

$\boldsymbol{x}_R$ – unghiurile lui Euler, cosinuși directori, ...

2) Ca o consecință a primei observații, Jacobianul poate fi partiționat pe cele două componente ale posturii (poziție, orientare)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{x_P}(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_{x_R}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

3) În confirmitate cu prima observație, Jacobianul depinde de reprezentare atât ca formă a termenilor cât și a dimensiuni deoarece reprezentările menționate au dimensiuni diferite . Această diversitate a făcut necesară definirea unui Jacobian particular de la care poate fi derivată oricare din reprezentările particulare. Jacobianul menționat a fost denumit Jacobianul de baza.

Separarea menționată la observația (2) poate fi aprofundată vizavi de efectorul robotului:

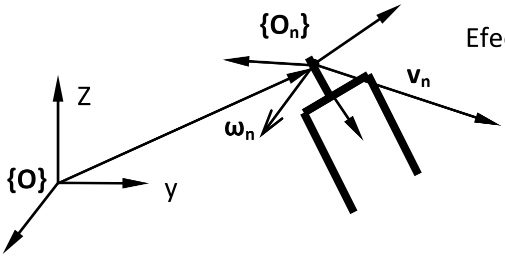


Fig. 2. Viteza liniara $v$ si cea unghiulara $\omega$ a electorului

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_O(\boldsymbol{q})_{(6\times n)} \cdot \dot{\boldsymbol{q}}_{(n\times 1)}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_P = \boldsymbol{E}_P(\boldsymbol{x}_P)\cdot \boldsymbol{v}$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}_R = \boldsymbol{E}_R(\boldsymbol{x}_R)\cdot \boldsymbol{\omega}$$

(8)

Unde $\boldsymbol{E}_P(\boldsymbol{x}_P)$; $\boldsymbol{E}_R(\boldsymbol{x}_R)$ sunt operatori care transformă reprezentările menționate;

$\boldsymbol{J}_O$ Jacobianul de bază.

***Exemplu 2. Elementele componente ale Jacobianului atunci cand pozitia este carteziană și orientarea depinde de unghiurile lui Euler***

$$\boldsymbol{x}_R = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix};\ \boldsymbol{E}_R = \begin{bmatrix} -\dfrac{s\alpha\cdot c\beta}{s\beta} & \dfrac{c\alpha\cdot c\beta}{s\beta} & 1 \\ c\alpha & s\alpha & 0 \\ \dfrac{s\alpha}{s\beta} & -\dfrac{c\alpha}{s\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix};\ \boldsymbol{E}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jacobianul de bază ține cont de reprezentarea $[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}]^T$ este considerată cea mai sugestivă reprezentare analitică pentru că, după cum se va vedea, permite observații asupra influenței fiecarei cuple asupra vitezelor efectorului ; pentru orice altă reprezentare avem la îndemână matricea de conversie.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_O \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \tag{9}$$

Atunci când definim o reprezentare particulara putem sa defim conversia

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}_x \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\boldsymbol{J}_x(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{E}(x) \cdot \boldsymbol{J}_O(q)$$

Adică

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_O \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_v \\ \boldsymbol{J}_\omega \end{bmatrix} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}_v \cdot \dot{\boldsymbol{q}};\ \omega = \boldsymbol{J}_\omega \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$$

Dar

$$\dot{\boldsymbol{x}}_P = \boldsymbol{E}_P \cdot \boldsymbol{v};\ \dot{\boldsymbol{x}}_R = \boldsymbol{E}_R \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$\Rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{x}}_P = (\boldsymbol{E}_P \cdot \boldsymbol{J}_v) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}\ ;\ \ \dot{\boldsymbol{x}}_R = (\boldsymbol{E}_R \cdot \boldsymbol{J}_\omega) \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{J}_{x_P} = \boldsymbol{E}_P \cdot \boldsymbol{J}_v \qquad ; \qquad \boldsymbol{J}_{x_R} = \boldsymbol{E}_R \cdot \boldsymbol{J}_\omega$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{x_P} \\ \boldsymbol{J}_{x_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_P & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_v \\ \boldsymbol{J}_\omega \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{J}_O$$

În coordonate carteziene, unghiurile lui Euler

$$\boldsymbol{E}_P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I}_3$$

$$\boldsymbol{E}_R = \begin{bmatrix} -\frac{s\alpha \cdot c\beta}{s\beta} & \frac{c\alpha \cdot c\beta}{s\beta} & 1 \\ c\alpha & s\alpha & 0 \\ \frac{s\alpha}{s\beta} & -\frac{c\alpha}{s\beta} & 0 \end{bmatrix}$$

În coordonate cilindrice, unghiurile lui Euler $(\rho, \theta, z)$

$$\boldsymbol{E}_p(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta/\rho & -\cos\theta/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

unde $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ z \end{bmatrix}$

## 2. Mișcarea liniară și unghiulară și compusă

În cazul unei mișcări de translație în care reperele au aceeași orientare, atunci când reperul B se deplasează fața de reperul A cu viteza ${}^{A}\boldsymbol{v}_{B}$, iar punctul P se deplasează cu viteza ${}^{B}\boldsymbol{v}_{P}$, compunerea vitezelor se face cu relația (10).

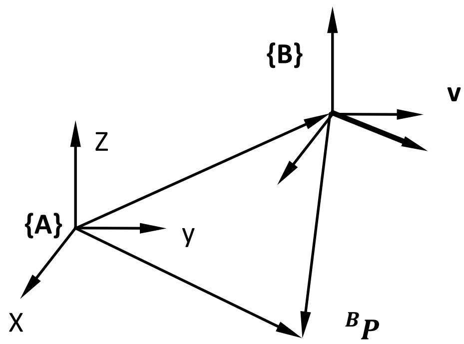


Fig. 3. Doua repere aflate in mișcare de translație

$${}^{A}\boldsymbol{v}_{P} = {}^{A}\boldsymbol{v}_{B} + {}^{B}\boldsymbol{v}_{P} \qquad (10)$$

$${}^{A}\boldsymbol{v}_{P} = {}^{A}\boldsymbol{v}_{B} + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{v}_{P} \qquad \text{aici însă } {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} = I$$

În cazul unei mișcări de rotație atunci când originile celor două repere sunt comune (nu se deplasează reciproc în timpul mișcării) și când reperul B se rotește cu viteza unghiulara **ω** față de reperul A iar punctul P este fixat în reperul B (nu se mișcă în acest reper):

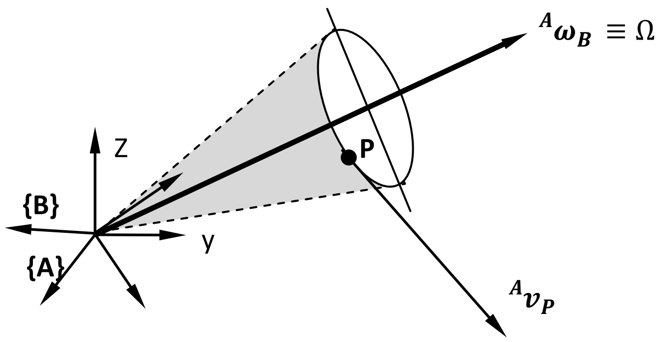


Fig. 4. Doua repere aflate in mișcare de rotatie relativă ${}^{B}\boldsymbol{v}_{P} = \boldsymbol{0}$

$${}^{A}\boldsymbol{v}_{P} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{p} \qquad (11)$$

unde ***p*** este vectorul de poziție a punctului P; în acest caz, deoarece viteza liniară este exprimată in A, viteza unghiulară este exprimată in A și vectorul ***p*** este exprimat tot in A

Relația (11) poate fi scrisă matriceal utilizând tensorul vectorului de rotatie:

$$^{A}\boldsymbol{v}_P = \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{p} \qquad \text{unde } \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Într-o mișcare compusă dintr-o translație și o rotație, atunci când reperul B se deplaseaza (translație și rotație) față de A iar punctul ***P*** se deplasează față de B, compunerea vitezelor se face astfel:

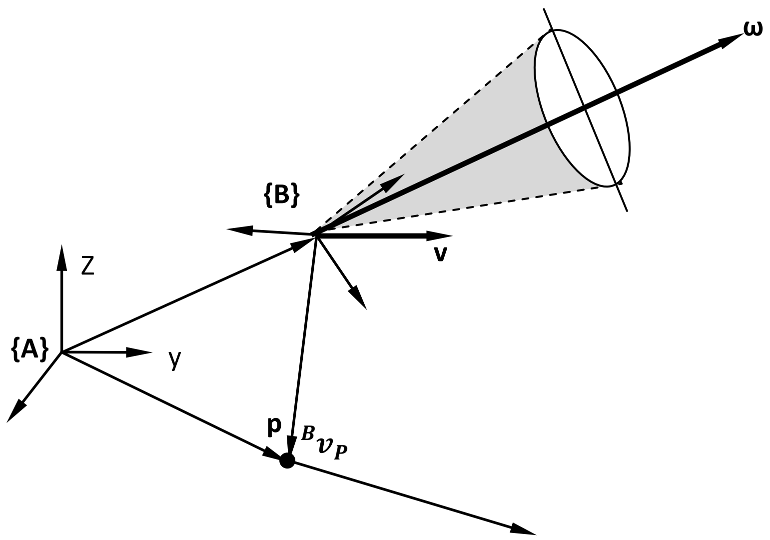


Fig. 5. Reperul B se rotește și translatează față de A; punctul P se deplaseaza față e B

$$^{A}\boldsymbol{v}_P = {}^{A}\boldsymbol{v}_B + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R} \cdot {}^{B}\boldsymbol{v}_P + {}^{A}\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_B \cdot {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\, {}^{B}\boldsymbol{p}_B \qquad (12)$$

$^{A}\boldsymbol{v}_B$ – viteza lui $B$ (origine și toate punctele fixe din B) față de $A$ exprimată în reperul $A$;

$^{B}\boldsymbol{v}_P$ - viteza lui $P$ (un punct mobil din B) față de $B$ exprimată în reperul $B$;

$^{A}_{B}\boldsymbol{R}$ – rotația de la $B$ la $A$;

$^{A}\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_B$ – operatorul (tensorul) de rotație definit față de A;

$^{B}\boldsymbol{p}_B$ – vectorul de poziție al punctului $P$ față de $B$ exprimat în $B$;

$^{A}\boldsymbol{v}_P$ – viteza lui $P$ față de $A$ exprimată în reperul $A$.

Relația de compunere a vitezelor poate fi dedusă din suma vectorială a vectorilor de poziție ai punctului P coroborată cu regula de derivare a vectorilor.

- $^{A}\boldsymbol{p}_A = {}^{A}\boldsymbol{p}_B + {}^{B}\boldsymbol{p}_B$

- $(\dot{\alpha\hat{\boldsymbol{x}}}) = \dot{\alpha}\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\omega} \times \alpha\hat{\boldsymbol{x}}$ derivata unui vector este suma dintre derivata modulului și derivata orientării. **ω** este vectorul vitezei unghiulare cu care se modifică orientarea vectorului. În cazul în care orientarea nu se modifică atunci **ω=0**

Derivând suma vectorilor de poziție (relativ la reperul A) se obține:

$${}^{A}\boldsymbol{v}_P = {}^{A}\boldsymbol{v}_B + {}^{B}\boldsymbol{v}_P + {}^{A}\boldsymbol{\omega}_B \times {}^{B}\boldsymbol{p}_B$$

Pentru a putea face suma și produsul vectorial toate mărimile trebuie scrise față de reperul A. Astfel:

$${}^{A}\boldsymbol{v}_P = {}^{A}\boldsymbol{v}_B + {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{v}_P + {}^{A}\boldsymbol{\omega}_B \times {}^{A}_{B}\boldsymbol{R}\,{}^{B}\boldsymbol{p}_B$$

3. <u>**Propagarea vitezei**</u>

Propagarea vitezei se referă la modul în care vitezele unghiulare și vitezele liniare din cuplele de rotație respectiv de translație influențează (determină) vitezele efectorului. Acest fenomen este modelat cu ajutorul Jacobianului.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

Unde $\dot{\boldsymbol{x}}$ are două componente: $\boldsymbol{v}$ și $\boldsymbol{\omega}$.

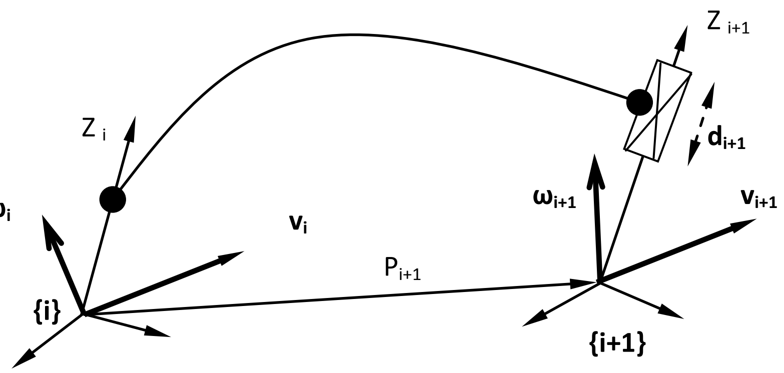


Fig. 6 Doua cuple succesive cupla *i* este de translatie

Propagarea vitezei poate fi studiată și cu ajutorul relațiilor de compunere a vitezei. Mai precis se dorește caluculul vitezei liniare și unghiulare a reperului *i+1,* față de *i* ,atunci cand se cunoște mișcarea reperului *i* și mișcarea relatvă *i+1.* Mișcarea relativă menționată poate fi (în cazul unui lanț cinematic al manipulatoarelor) de două tipuri: translație și rotație.

În cazul translației (v.fig.6):

$$\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{P}_{i+1} + \dot{\boldsymbol{d}}_{i+1} \cdot \boldsymbol{Z}_{i+1} \quad (13)$$

$\boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i$ (cupla e de translație)

unde: $\boldsymbol{v}_{i+1}$ este viteza $\{i+1\}$; $\boldsymbol{v}_i$ este viteza $\{i\}$;$\boldsymbol{\omega}_i$ este viteza unghiului a cuplei $i$

$\boldsymbol{P}_{i+1}$ este vectorul de poziție a lui $O_{i+1}$;$\boldsymbol{d}_{i+1}$ este viteza de translație a lui $i+1$
$\boldsymbol{Z}_{i+1}$ axa lui $\{i+1\}$.

În cazul rotației:

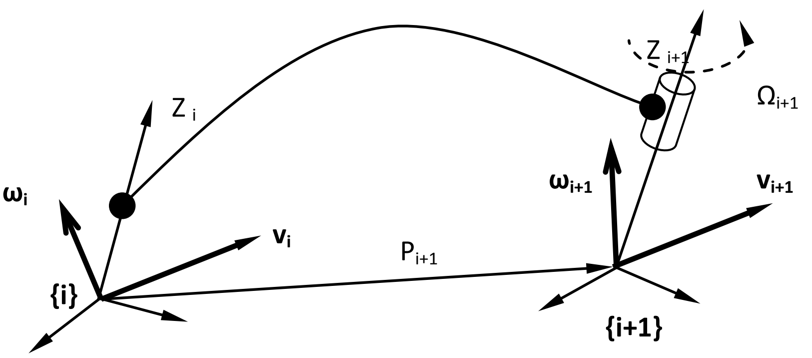


Fig. 7. Doua cuple succesive cupla *i* este de rotație

$$\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{P}_{i+1} \qquad (14)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\Omega}_{i+1}$$

unde $\boldsymbol{\Omega}_{i+1} = \dot{\theta}_{i+1} \cdot \boldsymbol{Z}_{i+1}$;

În sens general, care reunește relațiile obținute la cuplele de translație și la cele de rotație, se poate scrie:

$$\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{P}_{i+1} + \dot{d}_{i+1} \cdot \boldsymbol{Z}_{i+1}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot \boldsymbol{Z}_{i+1}$$

Această relație se reduce la una din relațiile menționate pentru-ca la manipulatoare cuplele sunt de rotație sau de translație.

Relativ la relațiile (13-14) se fac următoarele observații asuprea compunerii vitezelor:

- Compunerea vitezei liniare: Viteza liniară a reperului trebuie țelească ca viteza originii reperului și a tuturor punctelor fixe din acel reper.

  $$\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{P}_{i+1} + d_{i+1} \cdot \boldsymbol{Z}_{i+1}$$

  unde: $\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{P}_{i+1}$ – componente datorate mișcării liniare și rotației lui $\{i\}$;

  $\dot{d}_{i+1} \cdot \boldsymbol{Z}_{i+1}$ – componente datorate unei eventuale translații pe $z_{i+1}$;

  $\dot{d}_{i+1}$ – este un scalar;

  $\boldsymbol{Z}_{i+1}$ – este un vector.

- Compunerea vitezei unghiulare: viteza unghiulară trebuie țelească ca viteza tuturor punctelor fixe din acel reper.

  $$\boldsymbol{\omega}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\Omega}_{i+1}$$

unde: $\boldsymbol{\Omega}_{i+1} = \dot{\theta}_{i+1} \cdot \boldsymbol{Z}_{i+1}$;

$\dot{\theta}_{i+1}$ – viteza de rotație (scalară) din cupla $i+1$;

$\boldsymbol{Z}_{i+1}$ – vectorul axei $i+1$.

Deoarece nu au fost menționate transformări de coordonate, în ambele situații vitezele au fost scrise relativ la sistemul din bază.

Putem utilizăm relațiile (13) și (14), pe tot lanțul cinematic dar de această data le vom scriem in sistemul de referință din amonte (cupla *i+1*) se obțin următoarele relații recurente (de la 1 la n):

**Cupla {1}**

${}^{1}\boldsymbol{v}_1,\ {}^{1}\boldsymbol{\omega}_1$

........................................

**Cupla $\{\boldsymbol{i+1}\}$**

$${}^{i+1}\boldsymbol{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\boldsymbol{Z}_{i+1} \qquad (14)'$$

$${}^{i+1}\boldsymbol{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}\boldsymbol{R}\left( {}^{i}\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times {}^{i}\boldsymbol{P}_{i+1}\right) + \dot{d}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\boldsymbol{Z}_{i+1} \qquad (13)'$$

........................................

**Cupla $\{\boldsymbol{n}\}$**

${}^{n}\boldsymbol{\omega}_n$

${}^{n}\boldsymbol{v}_n$

Pentru o mai mare claritate se fac următoarele observații:

1) Relațiile (13)' și (14)' sunt echivalente relațiilor (13) și (14) (apar în plus matricele de rotație care fac posibilă suma);
2) Dacă se dorește ca în final cele două viteze ale efectorului să fie exprimate în $\{O\}$ se utilizează transformata:

$$\begin{bmatrix} {}^{O}\boldsymbol{v}_n \\ {}^{O}\boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{O}_{n}\boldsymbol{R} & 0 \\ 0 & {}^{O}_{n}\boldsymbol{R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{n}\boldsymbol{v}_n \\ {}^{n}\boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

***Exemplul3*** *Propagarea vitezelor pentru un manipulator plan (RRR)*

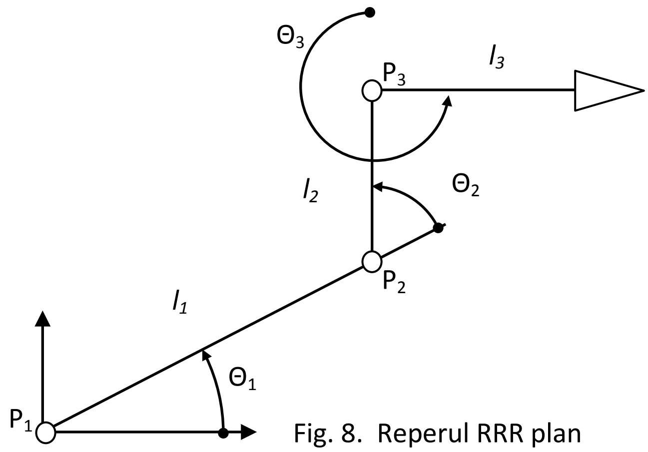


Fig. 8. Reperul RRR plan

Utilizăm relația:

$$\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{P}_{i+1} + \dot{d}_{i+1} \cdot \boldsymbol{Z}_{i+1} \quad (d_{i+1} \cdot \boldsymbol{Z}_{i+1} = 0 \text{ – cuplele sunt de rotație})$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_{P_1} = 0 \\ \boldsymbol{v}_{P_2} = \boldsymbol{v}_{P_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{P}_2 \,;\, \boldsymbol{\omega}_1 \equiv \boldsymbol{\Omega}_1 = \dot{\theta}_1 \cdot {}^{O}\boldsymbol{Z}_1; \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \dot{\theta}_2 \cdot {}^{O}\boldsymbol{Z}_2 \\ \boldsymbol{v}_{P_3} = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{P}_3 \end{cases}$$

$${}^{O}\boldsymbol{v}_{P_2} = \boldsymbol{0} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1$$

Vectorul $P_2$ în reperul 0 se calculează cu relația: $\begin{bmatrix} l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix} = {}^{O}_{1}\boldsymbol{R} \cdot [l_1 \quad 0 \quad 0]^T$

$${}^{O}\boldsymbol{v}_{P_3} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 + \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Următoarele observații sunt necesare pentru o mai bună înțelegere:

- $\begin{bmatrix} -l_1 s_1 \\ l_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 = {}^{O}\boldsymbol{v}_{P_2}$ (deja calculat)
- $\begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = {}^{O}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_2; \quad {}^{O}\boldsymbol{\omega}_2 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cdot {}^{O}\boldsymbol{Z}_O$
- $\begin{bmatrix} l_2 c_{12} \\ l_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = {}^{O}_{2}\boldsymbol{R} \cdot [l_2 \quad 0 \quad 0]^T$

$${}^{O}\boldsymbol{\omega}_3 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cdot {}^{O}\boldsymbol{Z}_O$$

Compunerea vitezei unghiulare ușurată de faptul că axele sunt paralele.

$$Z_O \equiv Z_1 \equiv Z_2 \equiv Z_3$$

Dacă se utilizează ${}^{O}\boldsymbol{v}_{P_3}$ și ${}^{O}\boldsymbol{\omega}_3$ avem:

$${}^{O}\boldsymbol{v}_{P_3} = \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -l_2 s_{12} & 0 \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12}) & l_2 c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} -(l_1 s_1 + l_2 s_{12}) & -l_2 s_{12} & 0 \\ (l_1 c_1 + l_2 c_{12}) & l_2 c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J_v$$

$${}^{O}\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = J_\omega$$

## 4. Forma explicită a Jacobianului

Ne propunem să evidențiem efectul fiecărei cuple asupra vitezelor liniare și unghiulare ale efectorului. Se utilizează principiul surapunerii de efecte. Mai precis vitezele mentionate sunt in fapt suma fiecarei contribuții particulare.

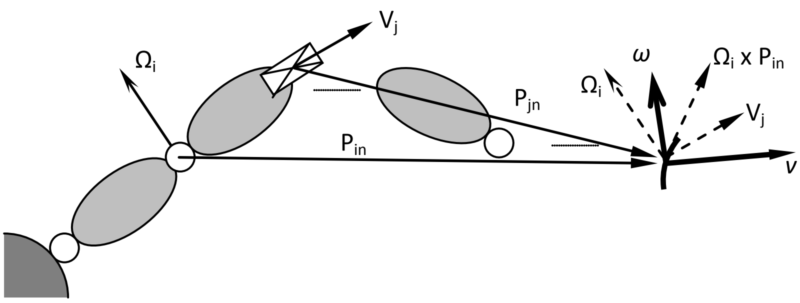


Fig. 9. Efectul cuplelor asupra vitezelor efectorului

Efectele cuplelor de rotație și a celor de translație asupra vitezei liniare și unghiulare a efectorului este prezentată în tabelul 1. Se observa faptul ca o cupla de translatie are un singur efect: cel asupra vitezei liniare a eleftorului. Din contră o cuplă de rotație are efect nu numai asupra vitezei de translație ci și asupra celei de rotațiea efectorului.

Tab. 1

| | Cuplă translație | Cuplă rotație |
|---|---|---|
| Viteză liniară | $\boldsymbol{v}_j$ | $\boldsymbol{\Omega}_i \times \boldsymbol{P}_{in}$ |
| Viteză unghiulară | - | $\boldsymbol{\Omega}_i$ |

Compunerea vectorială a vitezelor este în corespondență cu principiul suprapunerii de efecte. Atunci când însumăm efectele tuturor celor *n* cuple vitezele (liniare și unghiulare) ale efectorului devin

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} [\varepsilon_i \boldsymbol{v}_i + \bar{\varepsilon}_i (\boldsymbol{\Omega}_i \times \boldsymbol{P}_{in})] \\ \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\varepsilon}_i \boldsymbol{\Omega}_i \end{cases} \tag{16}$$

unde: $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{Z}_i \cdot \dot{q}_i$; $\boldsymbol{\Omega}_i = \boldsymbol{Z}_i \cdot \dot{q}_i$; $\varepsilon_i$ este dat de (3) și are utilitatea de a modela unitar cele două posibilități trnslația și rotația.

Relația (16) permite dezvoltarea (similara Jacobianului) în funcție de gradele de coordonatele generalizate ale robotului (17).

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} [\epsilon_i \boldsymbol{Z}_i + \bar{\epsilon}_i (\boldsymbol{Z}_i \times \boldsymbol{P}_{in})] \cdot \dot{q}_i \\ \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{\epsilon}_i \boldsymbol{Z}_i] \cdot \dot{q}_i \end{cases}$$

(17)

În aceste condiții definirea Jacobianului devine:

$$\boldsymbol{v} = [\epsilon_1 \boldsymbol{Z}_1 + \bar{\epsilon}_1 (\boldsymbol{Z}_1 \times \boldsymbol{P}_{1n}) \quad \epsilon_2 \boldsymbol{Z}_2 + \bar{\epsilon}_2 (\boldsymbol{Z}_2 \times \boldsymbol{P}_{2n}) \quad \ldots] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}_v \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\bar{\epsilon}_1 \boldsymbol{Z}_1 \quad \bar{\epsilon}_2 \boldsymbol{Z}_2 \quad \ldots] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{J}_\omega \cdot \dot{\boldsymbol{q}}$$

În final Jacobianul poate fi exprimat astfel:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_v \\ \hline \boldsymbol{J}_\omega \end{bmatrix}$$

Putem să facem următoarele observații:

1) $\boldsymbol{J}_v$ poate fi însă calculat mai ușor prin diferențierea vectorului de poziție al efectorului;

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{x}}_P = \frac{\partial \boldsymbol{x}_P}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{x}_P}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n$$

$$\boldsymbol{J}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{x}_P}{\partial q_1} & \frac{\partial \boldsymbol{x}_P}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial \boldsymbol{x}_P}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

2) $\boldsymbol{J}_\omega$ este mai ușor de calculat cu relația $\bar{\epsilon}_i \boldsymbol{Z}_i$.

În final, Jacobianul în $\{O\}$:

$${}^{O}\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\, {}^{O}\boldsymbol{x}_P}{\partial q_1} & \frac{\partial\, {}^{O}\boldsymbol{x}_P}{\partial q_2} & \ldots & \frac{\partial\, {}^{O}\boldsymbol{x}_P}{\partial q_n} \\ \bar{\epsilon}_1\, {}^{O}\boldsymbol{Z}_1 & \bar{\epsilon}_2\, {}^{O}\boldsymbol{Z}_2 & \ldots & \bar{\epsilon}_n\, {}^{O}\boldsymbol{Z}_n \end{bmatrix}$$

(18)

Unde: ${}^{O}\boldsymbol{Z}_i = {}^{O}_{i}\boldsymbol{R}\; {}^{i}\boldsymbol{Z}_i$.

**<u>Singularități cinematice</u>**

Jacobianul modelează influența fiecărei mișcări din cuplele robotului (fiecărei cuple) asupra vitezelor liniare și unghiulare ale efectorului.

Singularitatea Jacobianului înseamnă pierderea mobilității pe anumite direcții.

$$|J| = 0 \tag{19}$$

Deoarece ${}^{B}\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} {}^{B}_{A}\boldsymbol{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{B}_{A}R \end{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{J} \qquad \Rightarrow$

$\left|{}^{B}\boldsymbol{J}\right| = \left|{}^{A}\boldsymbol{J}\right|$ adică determinantul Jacobianului este același indiferent de sistemul de referință în care este reprezentat.

---

***Exemplu4*** *Singularitățile structurii RR (plan)*

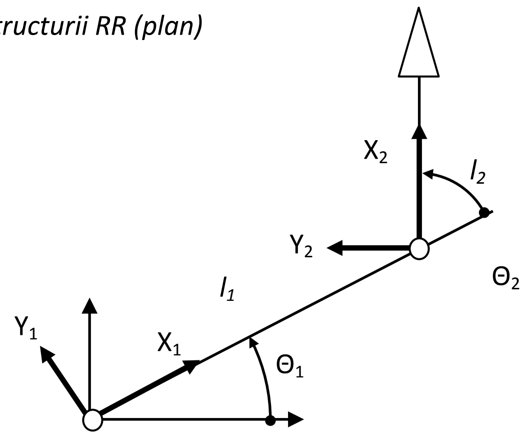


Fig. 10 Structura RR

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 + l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$(\boldsymbol{J} \rightarrow \boldsymbol{J}_v)$; $det\boldsymbol{J} = l_1 l_2 s_2$; $det\boldsymbol{J} = 0 \Leftrightarrow \theta_2 = k\pi$

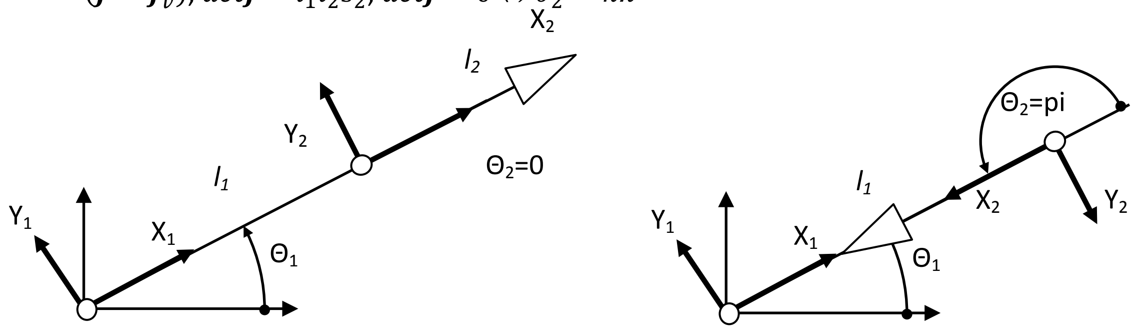


Fig. 11. Singularitățile structurii RR

$$\Delta \boldsymbol{q} = \boldsymbol{J}^{-1} \cdot \Delta \boldsymbol{x}$$

Pentru $\theta_2$ mici:

$$\boldsymbol{J}^{-1} \cong \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1\theta_2} & \frac{1}{l_1} \\ -\frac{l_1+l_2}{l_1 l_2 \theta_2} & -\frac{1}{l_1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta q_1 = \frac{\Delta x_1}{l_1} \cdot \frac{1}{\theta_2} + \frac{\Delta y_1}{l_1}$$

$$\Delta q_2 = -\frac{(l_1 + l_2)}{l_1 l_2} \cdot \Delta x_1 \cdot \frac{1}{\theta_2} - \frac{\Delta y_1}{l_1}$$

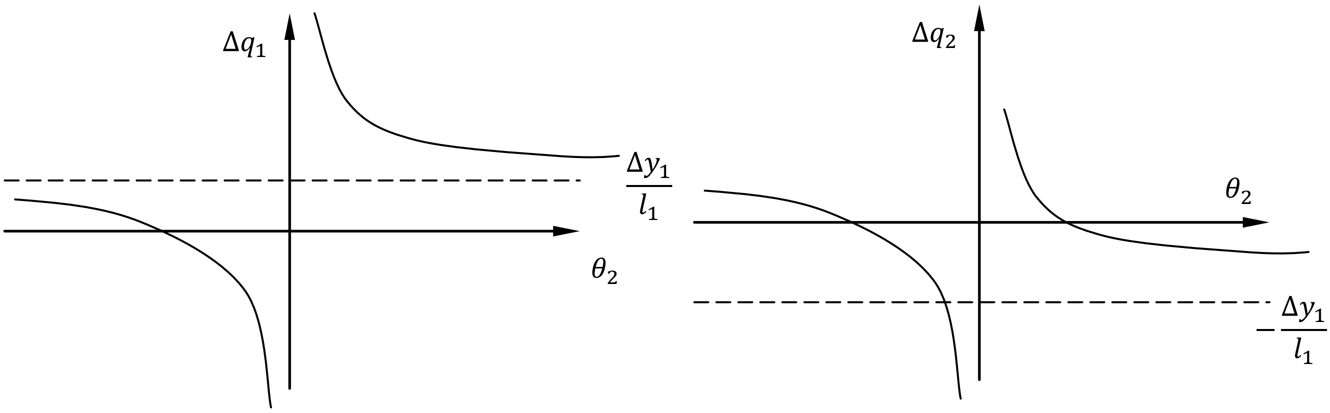


Fig. 12. Variația deplasărilor in vecinătatea punctelor singulare

**<u>Problema efectorului</u>**

Jacobianul a fost calculat în cupla $n$ și nu în sistemul efectorului. Se știe că formalismul DH utilizează această cuplă ca ultima pentru a poziționa efectorul.

Pentru a trece de la cupla $n$ la sistemul efectorului este necesară utilizarea unor transformări suplimentare.

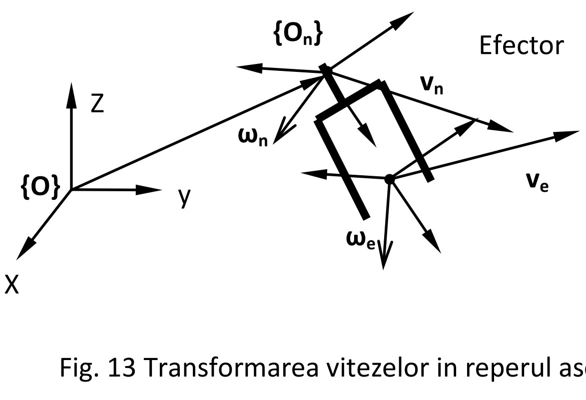


Fig. 13 Transformarea vitezelor in reperul asociat prehensorului

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{\omega}_n \times \boldsymbol{P}_{ne} \quad \text{(nu mai sunt cuple de la } n \text{ la } e\text{)}$$

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{P}_{ne} \times \boldsymbol{\omega}_n$$

$$\boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega}_n$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\widetilde{\boldsymbol{P}}_{ne} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_n \\ \boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix}$$

$$J_e = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} J_n \dot{q} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\widetilde{\boldsymbol{P}}_{ne} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \boldsymbol{J}_n$$

**Obs.**

${}^{O}\widetilde{\boldsymbol{P}} = {}^{O}_{n}\boldsymbol{R} \cdot {}^{n}\widetilde{\boldsymbol{P}} \cdot {}^{O}_{n}\boldsymbol{R}^{T}$ modul de a transforma tensorii dintr-un sistem de coordonate în altul.

În final, avem transformările:

$${}^{i}\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} {}^{i}_{j}\boldsymbol{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{i}_{j}\boldsymbol{R} \end{bmatrix} {}^{j}\boldsymbol{J} \Longrightarrow {}^{O}\boldsymbol{J}_e = \begin{bmatrix} {}^{O}_{n}\boldsymbol{R} & -{}^{O}_{n}\boldsymbol{R} \cdot \widetilde{{}^{n}\boldsymbol{P}_e} \cdot {}^{O}_{n}\boldsymbol{R}^{T} \\ \mathbf{0} & {}^{O}_{n}\boldsymbol{R} \end{bmatrix} {}^{n}\boldsymbol{J}_n$$

***Exemplul 5 Jacobianul prehensorului pentru structura RRR***

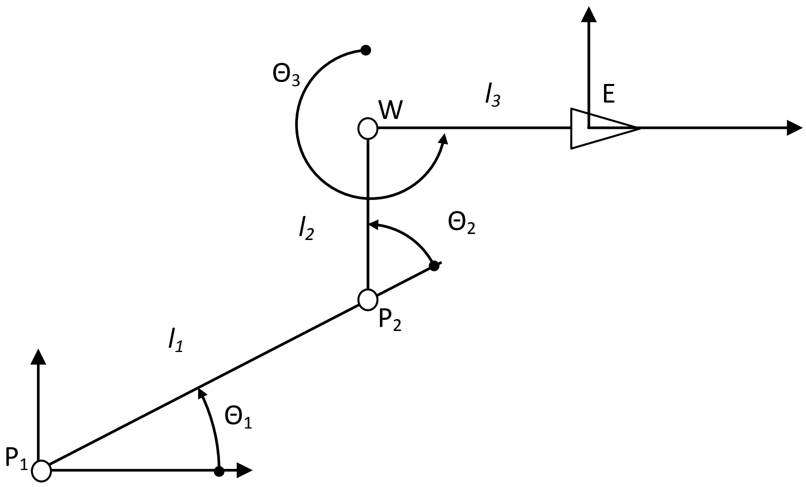


Fig. 14 Structura RR, Jacobianul prehensorului

$${}^{0}\boldsymbol{J}_W = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} & 0 \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{O}\boldsymbol{P}_{WE} = \begin{bmatrix} l_3c_{123} \\ l_3s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}; \widetilde{\boldsymbol{P}}_{WE} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_3s_{123} \\ 0 & 0 & -l_3c_{123} \\ -l_3s_{123} & l_3c_{123} & 0 \end{bmatrix}$$

$$^{O}\boldsymbol{J}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -{}^{O}\widetilde{\boldsymbol{P}}_{WE} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} {}^{O}\boldsymbol{J}_W$$

$$\Rightarrow \qquad {}^{O}J_E = \begin{bmatrix} -l_1s_1 - l_2s_{12} - l_3s_{123} & -l_2s_{12} - l_3s_{123} & -l_3s_{123} \\ l_1c_1 + l_2c_{12} + l_3c_{123} & l_2c_{12} + l_3c_{123} & l_3c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## 5. <u>Utilizarea Jacobianului pentru control</u> (Whitney 72)

Pornind de la relația:

$$\delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \delta\boldsymbol{\theta}$$

Se obține în afara singularităților:

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \delta\boldsymbol{x}$$

Problema de control se definește astfel: Cunoscând variabilele de referință (dorite) se cere determinarea legii de control care permite obținerea acestora.

$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{\theta})$ (cinematica directă)

$\delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_d - \boldsymbol{x}$

unde: $\boldsymbol{x}_d$ este deplasarea dorită a efectorului;

$\boldsymbol{x}$ este deplasarea curentă a efectorului obținută cu ajutorul relațiilor de cinematică directă

$\delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{J}^{-1}\delta\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{\theta}^{+} = \boldsymbol{\theta} + \delta\boldsymbol{\theta}$

În concluzie, rezolvarea problemei de control necesită următoarele etape:

- Măsurarea unghiurilor din cuple ($\boldsymbol{q}$);
- Calculul poziției și orientării efectorului cu ajutorul relațiilor de cinematică directă ($\boldsymbol{x}$);
- Determinarea erorii ca diferență dintre postura dorită și cea obținută ($\delta\boldsymbol{x}$)
- Calculul deplasărilor unghiulare corespunzătoare acestei erori ($\delta\boldsymbol{\theta}$);
- Controlul pe baza deplasărilor unghiulare ($\boldsymbol{\theta}^{+}$).

Figura 15 ilustrează etapele menționate.

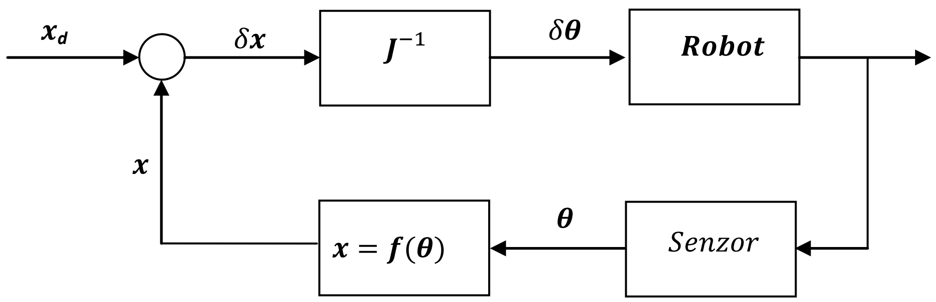


Fig. 15 Schema de control care utilizează Jacobianul

## Forțele statice

Pornim de la relația de calcul a forțelor – momentelor, respectiv a vitezelor – vitezelor unghiulare.

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{p}$

Unde: $\boldsymbol{v}$ este viteza liniară;

$\boldsymbol{\omega}$ este viteza unghiulară;

$\boldsymbol{p}$ este vectorul de poziție al punctului în care se calculează viteza liniară.

$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{F}$

Unde: $\boldsymbol{\tau}$ este momentul forței $\boldsymbol{F}$;

$\boldsymbol{F}$ este forța care acționează;

$\boldsymbol{p}$ este vectorul de poziție al punctului în care acționează forța $\boldsymbol{F}$.

Matriceal, relațiile anterioare pot fi scrise:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v} = -\widetilde{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{\omega} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\tau} = \widetilde{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{\tau} = (-\widetilde{\boldsymbol{p}})^T \cdot \boldsymbol{F} \end{matrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \boldsymbol{v} = (-\widetilde{\boldsymbol{p}}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \\ \boldsymbol{\tau} = (-\widetilde{\boldsymbol{p}})^T \cdot \boldsymbol{F} \end{matrix} \right| \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T \cdot \boldsymbol{F}$$

În final, avem relațiile ce evidențiează dualitatea viteză/forță:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\theta}}$$
$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{F}$$