LOCUL RĂDĂCINILOR ŞI DESCRIEREA ÎN SPAȚIUL STĂRILOR A SISTEMELOR CONTINUE

1.1. Locul rădăcinilor

Metoda locului rădăcinilor elaborată de W.R Evans constă în trasarea locului rădăcinilor ecuației caracteristice a sistemului închis în funcție de variația unui parametru din această ecuație, parametru care în majoritatea cazurilor este factorul de amplificare al sistemului deschis. Aceasta deoarece multe performanțe ale sistemului depind direct de factorul de amplificare.

1.1.1. Rezumatul paşilor algoritmului de trasare a locului rădăcinilor

1) Se determină numărul ramurilor locului rădăcinilor care este egal cu n (numărul polilor funcției de transfer a sistemului deschis). Se plasează, în planul complex, polii şi zerourile funcției $G(s)H(s)$. Locul rădăcinilor începe în polii sistemului deschis şi se termină în zerouri (cu valoarea finită sau la infinit).
2) La stânga unui număr impar de poli reali plus zerouri reale, se deseanză locul rădăcinilor de pe axa reală.
3) Se trasează asimptotele ramurilor locului rădăcinilor
   - Numărul asimptotelor este egal cu $n - m$;
   - Unghiurile asimptotelor $= \varphi_k = \dfrac{\pm 180^o (2k+1)}{n-m}$, $(k = 0,1,2,....)$;
   - Abscisa punctului de intersecție a asimptotelor $\sigma_a = -\dfrac{\sum p_i - \sum z_j}{n-m}$.

4) Se detrmină unghiul de plecare (unghiul de sosire) al locului rădăcinilor dintr-un pol complex (într-un zero complex).

   – $\text{Unghiul de plecare dintr-un pol complex} = \varphi_p = 180^\circ - \sum \theta_i + \sum \Phi_j$;
   – $\text{Unghiul de sosire într-un zero complex} = \varphi_s = 180^\circ - \sum \Phi_i + \sum \theta_j$.

Φ sunt unghiuri ale vectorilor care încep în zerouri, iar θ snt unghiurile vectorilor complexi care pleacă din poli.

5) Se găsesc punctele de ramificație (de sosire şi de plecare).
6) Se determină punctele în care locul rădăcinilor intersectează axa imaginară. Aceste puncte pot fi găsite folosind criteriul de stabilitate Routh, sau rezolvând pentru ω şi K ecuația complexă:

$$1+\frac{KB(j\omega)}{A(j\omega)}=1+\frac{K(j\omega+z_1)(j\omega+z_2)\ldots(j\omega+z_m)}{(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)\ldots(j\omega+p_n)}=0$$

7) Luându-se o serie de puncte suficiente de departe de originea planului complex se schițează locul rădăcinilor. Se localozează polii sistemului în circuit închis şi se determină, folosindu-se condiția modulului, valorile corespunzătoare ale lui K, sau se determină poziția polilor sistemului închis pentru o valoare dată a amplificării K.

Funcțiile:

```
rlocus (num,den,K ), sau
rlocus (num,den),
```

unde
`num` =numărătorul funcției de transfer;
`den` = numitorul funcției de transfer;
K = factorul de amplificare al sistemului deschis), din Control System Toolbox permit trasarea locului rădăcinilor. În primul caz locul rădăcinilor este gradat după valorile lui K iar în al doilea caz acesta este detrminat automat. Aceasta permite şi trasarea locului rădăcinilor după introducerea unor poli şi zerouri suplimentare pentru ca acest loc să corespundă unor performanțe impuse.

În cazul în care sistemul este reprezentat în spațiul stărilor, funcția **rlocus** poate fi apelată prin una din următoarele sintaxe:

```
rlocus (A,B,C,D,K ), sau
rlocus (A,B,C,D).
```

unde

`A,B,C,D` reprezintă matricele ce definesc spațiul stărilor.

Apelând funcția `rlocus` prin una din sintaxele:

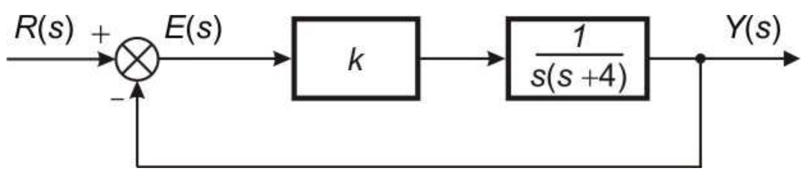
```
[r,k]=rlocus(num,den,K ),
[r,k]=rlocus(num,den),
[r,k]=rlocus(A,B,C,D,K ),
[r,k]=rlocus(A,B,C,D),
```

se poate obține matricea `r` şi vectorul `k` ce conține toate valorile corespunzătoare factorului de amplificare. Fiecare linie din matricea `r` corespunde unui factor de amplificare din vectorul `k`. Locul rădăcinilor în această situație se poate trasa cu autorul funcției `plot`, astfel:

```
plot(r).
```

`Exemplu:`

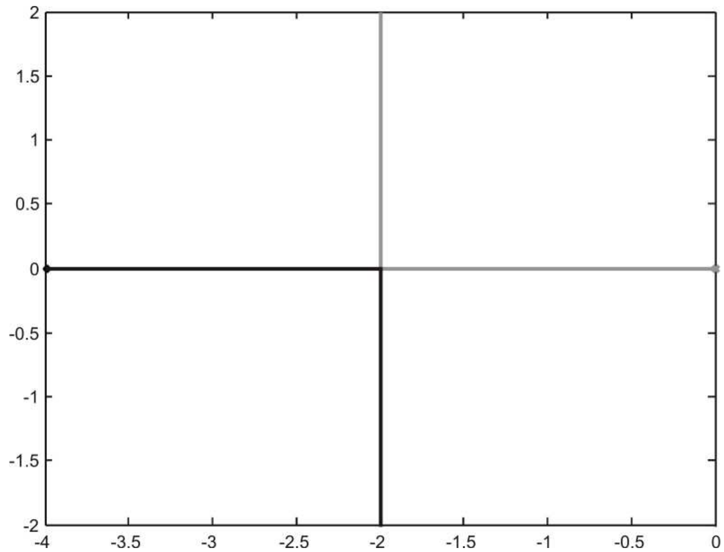
Fie sistemul din figură:



Pentru trasarea locului rădăcinilor a sistemului deschis, în MATLAB s-a realizat următorul program:

```
k=[0:0.5:12];
num=[1];
den=[1 4 0];
rlocus(num,den,k)
```

Se obținut următorul grafic:



Se observă în figura de mai sus că locul rădăcinilor pe axa reală este segmentul [-4,0]; $n - m = 2$, deci două ramuri se termină la infinit; asimptotele au unghiurile cu axa reală $\theta = \pm 90^o$; intersecția asimptotelor pe axa reală se face în: $\sigma_a = \frac{-4-0}{2} = -2$.

1.2. Descrierea intrare - stare - ieşire

În această descriere sistemul liniar continuu este reprezentat de ecuația matricială a stărilor:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ . \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & ... & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{1.1}$$

unde:
$x(t)$ - matricea (vector) stărilor;
$y(t)$ -matricea intrărilor;
A -matricea sistemului (constantă);
B -matricea de intrare (constantă).

Această descriere are avantajul că soluția sistemului poate fi obținută destul de uşor atât prin metode analogice cât şi numerice. De asemenea această metodă poate fi extinsă şi la sistemele neliniare.

Pentru a exemplifica un mod de alegere a variabilelor de stare considerăm un sistem descris de ecuația diferențială de ordinul n cu o singură intrare:

$$a_0 \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n\text{-}1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n\text{-}1}} + \ldots + a_{n\text{-}1} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_n y(t) = b_0 u(t) \qquad (1.2)$$

unde $y(t)$ este mărimea de ieşire (răspunsul sistemului) şi $u(t)$ este mărimea de intrare. Modelul de stare pentru acest sistem nu este unic ci el depinde de modul cum se aleg variabile de stare. Un set de variabile de stare, întâlnit foarte des, este setul variabilelor de fază în care se alege prima variabilă de stare x_1(care poate fi mărimea de ieşire, eroarea etc) iar celelalte (n - 1) mărimi de stare care completează setul sunt derivatele succesive pînă la (n - 1) ale marimii x_1 adică:

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, ..., x_n = y^{n-1} \qquad (1.3)$$

Cu această alegere ecuația (1.1) se poate scrie sub forma (1.3):

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2 \\
&\dot{x}_2 = x_3 \\
&\vdots \\
&\dot{x}_{n\;\;1} = x_n \\
&\dot{x}_n = \text{-}a_n x_1 \text{-} a_{n-1} x_2 \quad .... \text{-} a_1 x_n + u(t)
\end{aligned} \qquad (1.4)$$

Sistemul (1.4) poate fi scris sub forma matricială:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ . \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ \text{-}a_n & \text{-}a_{n-1} & \text{-}a_{n-2} & ... & \text{-}a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad (1..5)$$

iar ecuația ieşirii este:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} x \qquad (1.6)$$

1.2.1. Trecerea de la funcția de transfer la spațiul stărilor

MATLAB conține un set de funcții care fac trecerea de la funcția de transfer la matricile A,B,C,D. Acest lucru se realizează cu funcția:

```
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)
```

unde A, B, C şi D sunt matrici dimensiuni nxn, nxm, rxn şi respectiv rxm.

1.2.2. Trecerea de la spațiul stărilor la funcția de transfer

Fiind date ecuațiile matriciale ale stării şi ieşirii:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Aplicând transformata Laplace (în condiții inițiale nule)la aceste ecuații rezultă:

$$\begin{aligned} Y(s) &= C(s\mathrm{I} - A)^{-1}BU(s) + DU(s) \\ &\quad \textit{sau} \\ G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = C(s\mathrm{I} - A)^{-1}B + D = C\Phi(s)B + D \end{aligned} \qquad (1.8)$$

unde I este matricea unitate, iar $\Phi(s) = (s\mathrm{I} - A)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(s\mathrm{I} - A)}{\det(s\mathrm{I} - A)}$ se numeşte matricea fundamentală a sistemului modelat la stare. Matricea de tranziție a stărilor, $\varphi(t)$, se obține aplicând transformata Laplace inversă matricei fundamentale.

În MATLAB transferul este făcut cu funcția **ss2tf** ce are următoarea sintaxă:

```
ss2tf(A,B,C,D,u)
```

ce converteşte ecuația stării în funcția de transfer pentru intarea u.

Funcția de transfer se poate obține şi sub formă vectorială a zerourilor şi polilor. Pentru acesta se va folosi funcția:

```
ss2zp(A,B,C,D,u),
```

unde A,B,C,D reprezintă matricele din spațiul stărilor, iar u reprezintă intrarea. Matricea de tranziție a stărilor se determină cu funcția:

```
expm(At),
```

unde A este o matrice pătratică iar t reprezintă timpul.
Pentru crearea unor obiecte simbol se va folosi funcția **syms**.

Soluția numerică a ecuației de stare permite simulare numerică a răspunsului unui sistem în reprezentarea variabilei de stare. Pentru sistemele liniare continue funcția este:

```
[y,x]=lsim(A,B,C,D,u,t),
```

şi ea simulează răspunsul sistemului la o intrare oarecare.
În cazul intrărilor impuls Dirac şi treaptă funcțiile sunt:

```
[y,x]=impulse(A,B,C,D,u,t),
```

şi respectiv

```
[y,x]=step(A,B,C,D,u,t).
```

1.2.3. Controlabilitate şi observabilitate

Controlabilitatea unui sistem caracterizează capacitatea de modificare (de control) a întregului set de variabile de stare de către mărimea de intrare. Un sistem descris la stare de către matricele (A,B) se spune că este controlabil dacă există o mărime de intrare u care poate transfera orice stare inițială $x(0)$ în orice altă stare $x(t)$.

Propietatea de controlabilitate se poate verifica analitic cu ajutorul matricei de controlabilitate:

$$P = [B \; AB \; A^2B \ldots A^{n-1}B]$$

Matematic sistemul considerat este controlabil dacă $rangP = n$, condiție care este îndeplinită dacă determinantul matricei de controlabilitate, P este diferit de zero.

Observabilitatea unui sistem caracterizează capacitatea de estimare a unei variabile de stare din valorile mărimii de ieşire. Spunem că un sistem este observabil, dacă mărimea de ieşire are componente determinate (este influenşată) de toate variabilele de stare. Un sistem este observabil dacă şi numai dacă, o stare inițailă $x(0)$ poate fi determinată prin observare, pe un interval de timp finit T, a mărimii de ieşire $y(t)$ şi a mărimii de intrare $u(t)$. Sistemul este observabil dacă determinantul matricei de observabilitate:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

este diferit de zero.
Un sistem care este descris în forma controlabilă cu variabile de fază este întotdeauna şi observabil.
În MATLAB controlabilitatea şi observabilitatea unui sistem se determină cu funcțiile:

```
ctrb(A,B) şi obsv(A,C),
```

unde A, B şi C reprezintă matricele din spațiul stărilor.

1.2.4. Reducerea schemelor bloc în spațiul stărilor

Limbajul MATLAB în cadrul funcțiilor grupate în "Control Toolbok" realizează funcțiile **blkbuild** şi **connect** care convertesc diagramele bloc în modele în spațiul stărilor. Blocurile funcțiilor de transfer sunt numerotate de la 1 la valoarea numărului de blocuri nblocks (numarul total de blocuri) şi converteşte fiecare bloc la o reprezentare în spațiul stărilor.

Funcția:

```
[A,B,C,D] = connect(a,b,c,d,q,iu,iy),
```

conectează blocurile în concordanță cu o matrice predefinită q care specifica interconectarea blocurilor. Primul element ale fiecarei linii a matricei q este numarul blocului. Celelalte elemente indică sursa intrărilor blocurilor de însumare. Când intrarea la sumator este legată negativ numărul blocului apare cu semnul negativ. Vectorii linie `iu` şi `iy` indică blocurile de intrare şi ieşire.
În final se obține funcția de transfer echivalentă pentru intrarea `iu`:

```
[num, den] =ss2tf (A,B,C,D,iu).
```

1.3. Exerciții propuse

Exercițiul 1.

Trasați locul rădăcinilor pentru sistemele reprezentate de următoarele funcții de transfer ($k = [0:12]$ cu pasul 0,5).

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+5)}{(s+1)(s+3)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s^3 + 8s^2 + 19s + 12}$$

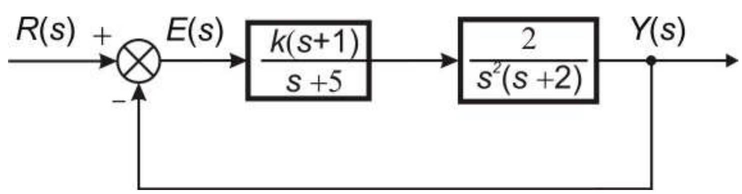
$$G(s)H(s) = \frac{k}{(s+1)(s+3-j)(s+3+j)}$$

Specificați:

- locul rădăcinilor pe axa reală;
- câte ramuri există la infinit;
- unghiul asimptotelor cu axa reală;
- intersecția asimptotelor pe axa reală.

Exercițiul 2.

Să se traseze locul rădăcinilor şi să se determine factorul de amplificare k.



Exercițiul 3.

Fie un sistem reprezentat prin următoarea funcție de transfer:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 7s + 2}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

Determinați matricile stărilor pentru sistemul reprezentat prin funcția de transfer.

Exercițiul 4.

Fie un sistem reprezentat în spațiul stărilor de următoarele matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \;\; 0 \;\; 0] \quad D = [0]$$

Determinați:

- funcția de transfer a sistemului;
- matricea fundamentală;
- matricea de tranziție a stărilor;

– dacă sistemul este controlabil şi observabil.

Exercițiul 5.

Fie sistemul reprezentat în spațiul stărilor ($t=[0:2]$ cu pasul 0,05):

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -0.5\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.5\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

– Simulați răspunsul sistemului la intrare treaptă.
– Simulați răspunsul sistemului la intrare impuls unitar.

Exercițiul 6.

Fie sistemul invariant in timp dat de:

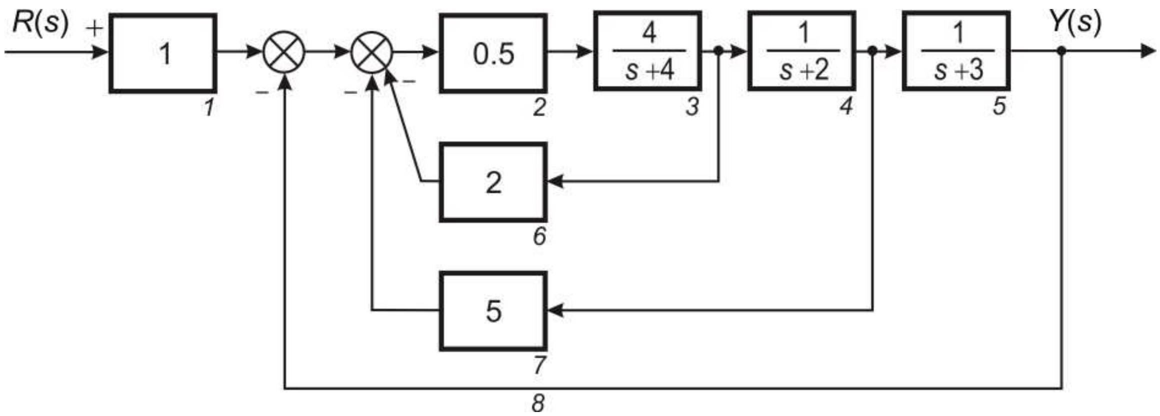
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u(t) \text{ şi } y=[1 \;\; 1 \;\; 0]x$$

Se impun condițiile inițiale $x(0)=\begin{bmatrix}1\\ 0.5\\ -0.5\end{bmatrix}$, $t=[0:4]$ cu pasul 0,05.

– Simulați răspunsul sistemului la intrare treaptă.
– Simulați răspunsul sistemului când la intrarea $\sin(2\pi t)$.

Exercițiul 7.

Realizați programul pentru reducerea schemei bloc din figură:



Exercițiul 8.

Se consideră sistemul definit la stare sub următoarea formă:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -25 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

Sistemul are două intrări şi două ieşiri. Să se determine cele patru funcții de transfer $Y_1(s)/U_1(s)$, $Y_1(s)/U_2(s)$, $Y_2(s)/U_1(s)$, $Y_2(s)/U_2(s)$ (când sistemului i se aplică intrarea u_1 se presupune că intrarea u_2 este zero şi vice-versa).