Osnove matematičke logike

Matematička logika je disciplina koja proučava iskaze, njihovu istinitost i manipulaciju sa iskazima u cilju formiranja složenijih iskaza. Matematička logika se dijeli na **logiku iskaza**, i **logiku predikata**.

1 Osnove logike iskaza

- Pod **iskazom** podrazumjevamo svaki misaoni odraz neke činjenice u obliku izjavne rečenice nekog prirodnog jezika za koji možemo nedvojbeno utvrditi da li je tačna ili ne
  Stoga, iskaze dijelimo na **tačne** (oznaka $\top$, T, 1) i **netačne** (oznaka $\perp$, F, N, 0)
- Primjer tačnih iskaza: "Berlin je glavni grad Njemačke", "Ovo je 21. stoljeće"
  Primjer netačnih iskaza: "2+2=5", "Kiša čita papir"
  Nisu iskazi: "Ko to tamo hoda?" jer nije izjavna rečenica (niti su sve izjavne rečenice iskazi)
  Nisu iskazi: "x je djeljivo sa y" jer su zavisni od varijable i ovo su zapravo predikati
- Složeni iskazi su iskazi sastavljeni od drugih prostijih iskaza koristeći operacije nad iskazima
- Primjenjujući jednu unarnu ili neku od pet binarnih operacija nad iskazima kažemo:

  negacija($\neg A$, A', $\overline{A}$)(č. "ne A" ili "nije A") — je tačan akko[1] A nije tačan

  konjukcija($A \wedge B$ ili AB)(č. "A i B") — je tačan akko su tačna oba iskaza A i B

  disjunkcija($A \vee B$)(č. "A ili B") — je tačan akko je tačan jedan od iskaza

  ekskluzivna disjunkcija($A \veebar B$)(č. "ili A, ili B") — je tačan akko je tačan ili iskaz A ili iskaz B ali ne oba istovremeno

  implikacija($A \Rightarrow B$)(č. "iz A slijedi B", "ako je A onda je B") — je tačan u svim slučajevima osim ako je A tačan a B nije

  ekvivalencija($A \Leftrightarrow B$)(č. "A je ekvivalentno sa B" ili "B je ako i samo ako je A") — je tačan ako i samo ako su oba iskaza A i B istovremeno ili tačna ili netačna
- Iskazi koji su uvijek tačni tj. imaju vrijednost $\top$, nazivamo **tautologija**
  npr. $x = y \vee x \neq y$ ili "ili je lopta zelena ili nije zelena" ili $A \vee \neg A$
- Iskzai koji su uvijek netačni se nazivaju **kontradikcija**
- Redoslijed **prioriteta operacija**: zagrade, negacija, konjukcija, disjunkcija i ekskluzivna disjunkcija (isti prioritet), implikacija i ekvivalencija
  npr. izraz $A \vee B \wedge C$ se interpretira kao $(A \vee (B \wedge C))$

2 Tablica istinitosti

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \veebar B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$

[1]akko se čita: ako i samo ako

3 Pravila logike iskaza

1. Komutativnost: $XY = YX$
   $X \vee Y = Y \vee X$
2. Asocijativnost: $X(YZ) = (XY)Z$
   $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z$
3. Distributivnost: $X(Y \vee Z) = XY \vee XZ$
   $X \vee (YZ) = (X \vee Y)(X \vee Z)$
4. Prva De Morganova teorema: $\overline{XY} = \overline{X} \vee \overline{Y}$
5. Druga De Morganova teorema: $\overline{X \vee Y} = \overline{X} \wedge \overline{Y}$
6. Pravilo dvostruke negacije: $\overline{\overline{X}} = X$

3.1 Istoznačnost logičkih iskaza

Ako imamo dva složena iskaza X i Y čije su tablice istinitosti iste, kažemo da su ta dva iskaza **logički ekvivalentna** ili **istoznačna** i pišemo $X = Y$. Tako npr. iskaz $X = (A\overline{B} \vee \overline{C(\overline{A} \vee B)})$ i iskaz $Y = (A \underline{\vee} B) \vee \overline{C}$ imaju iste tablice istinitosti te možemo reći da su oni istoznačni.

Primjer: Preko tablice istinitosti pokazati da je prva De Morganova teorema tačna.

4 Logički predikati

- Logika iskaza je nedovoljna da se opišu iskazi poput "x je prost broj" ili "x je veće od y" jer istinost iskaza zavisi od samih vrijednosti promjenjivih
- Predikati su iskazi vezani za jednu ili više promjenjivih vrijednosti
  Pišu se sa $P(x)$ ili $Q(x)$ ili $P(x, y)$ ili $R(x, y, z)$, itd...
  npr. $P(x) : x$ je prost broj
  npr. $P(x, y) : x > y$
- **Kvanotri**: $P(x)$ je predikat koji govori neku tvrdnju o x dok korištenjem kvantora tu tvrdnju pretvaramo u iskaz. Npr.:
  - Iskaz: $\forall x P(x)$ čitamo: predikat $P(x)$ vrijedi za svako x.
    Ili radi bolje čitljivosti: $(\forall x)P(x)$
  - Iskaz: $\exists x P(x)$ čitamo: predikat $P(x)$ vrijedi za barem jedno x.
    Ili radi bolje čitljivosti: $(\exists x)P(x)$
  - Iskaz: $\exists! x P(x)$ čitamo: predikat $P(x)$ vrijedi za tačno jedno x.
    Ili radi bolje čitljivosti: $(\exists! x)P(x)$
- Kvantori imaju viši prioritet od ostalih logičkih operatora
  npr. $\forall x P(x) \vee Q(x)$ se interpretira kao $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$
  osim ako nije zagradama drugačije navedeno: $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
- Kvantore i predikate možemo kombinovati
  npr. $\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$ — za svako x postoji barem jedno y za koje vrijedi iskaz $P(x) \wedge Q(y)$
- Npr. $P(x, y) : x^2 + y^2 = 9$
  iskaz: $(\forall x)(\forall y)P(x, y)$ je $\perp$ jer ako je $x = 5$ i $y = 0$, $P(x, y)$ ne vrijedi, dok
  iskaz: $(\exists x)(\exists y)P(x, y)$ je tačan jer možemo pronaći barem jedno x i y za koje vrijedi $P(x, y)$ dok,
  npr. $P(x, y) : x^2 + y^2 = 9$ i $Q(x) : x > 5$
  iskaz $(\exists x)(\exists y)(P(x, y) \wedge Q(x)) = \perp$ jer ne postoji x i y koji odgovaraju traženim kriterijima.

5 Ponavljanje

1. Koja je razlika izmedju operacija konjukcije i ekvivalencije?
2. Koju operaciju možemo koristiti da modeliramo iskaz ”Ako bude sunčano ići ćemo na plažu”?
3. Opisati redoslijed prioriteta operacija u sljedećem iskazu: $\neg X \wedge \neg(Y \Leftrightarrow Z) \Rightarrow \overline{Z} \vee X$
4. Formirati tablicu istinitosti za izraz $A \vee \overline{B} \Rightarrow AB \vee C$
5. Formirati tablicu istinitosti za izraz $(A\overline{B} \vee \overline{C(\overline{A} \vee B)}) \vee C\overline{A \vee \overline{B}C}$
6. Pokazati tačnost druge De Morganove teoreme.
7. Korištenjem kvantora napiši sljedeći predikat: postoji samo jedno x za koje vrijedi $\frac{x}{3} = 6$
8. Ako su dati predikati: $P(x, y) : x > y \quad Q(x, y) : x \leq y \quad R(x) : x - 7 = 2$
   pronaći istinitost sljedećih iskaza:
   (a) $\exists x R(x)$
   (b) $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$
   (c) $(\exists y)(\forall x)Q(x, y)$
   (d) $(\forall x)(\forall y)[P(x, y) \vee Q(x, y)]$