Funkcije

1 Funkcije

- **Preslikavanje** ili **funkcija** f skupa A u skup B u oznaci $f : A \to B$ je relacija $f \subset A \times B$ za koju vrijedi da je svaki elemenat skupa A u relaciji sa tačno jednim elementom skupa B
Tačnije $(\forall x \in A)(\exists! y \in B)(x, y) \in f$
- Umjesto $(x, y) \in f$ može se pisati $y = f(x)$ te se za x kaže da je **orginal**, a y je **slika** funkcije
- Skup A je **domen** funkcije, a skup B je **kodomen** funkcije

Primjer: Neka je skup $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 3\}$ i skup $B = \{a, b, c\}$
onda za neku relaciju $\rho = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ možemo reći da je funkcija jer postoji relacija za svaki elemenat iz A sa nekim elementom iz B.
Ovdje, A je domen, dok je B kodomen.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & a \end{pmatrix}$$

Npr. $\rho = \{(1, a), (2, b), (3, a), (1, b)\}$ nije funkcija jer elemenat 1 ima relaciju sa više od jednog elementa iz skupa B.

Za naredne primjere definisat će se skup nenegativnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$. Analogno tome će se definisati i skup nepozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^- = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 0\}$.

Primjer: Funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad f(x) = \sqrt{x}$ je funkcija koja preslikava skup $\mathbb{R}^+$ u $\mathbb{R}^+$ tako da $\forall x \in \mathbb{R}^+$ postoji tačno jedno preslikavanje u $\mathbb{R}^+$. Tako je $\mathbb{R}^+$ domen, a $\mathbb{R}^+$ kodomen.

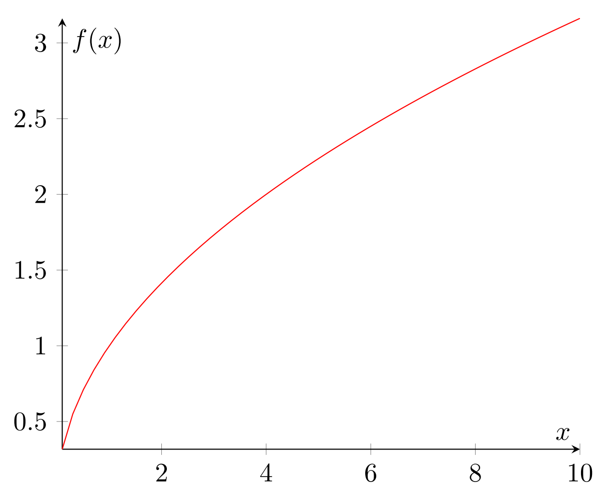


Figure 1: Grafikon funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \ f(x) = \sqrt{x}$

Primjer: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x}$ nije funkcija jer ne postoji korjen za negativni broj u $\mathbb{R}$.

2 Inverzne funkcije

Inverzna funkcija funkcije f je funkcija oznake f^{-1} za koju vrijedi $f^{-1}(f(x)) = x$

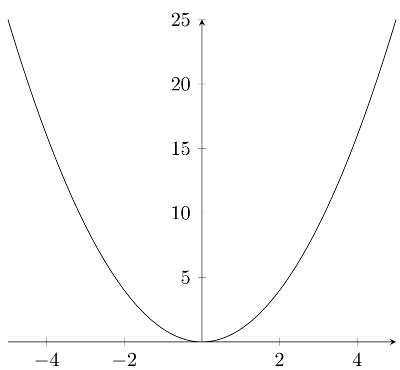
Primjer: Pronaći inverznu funkciju funkcije $f(x) = 2x + 3$

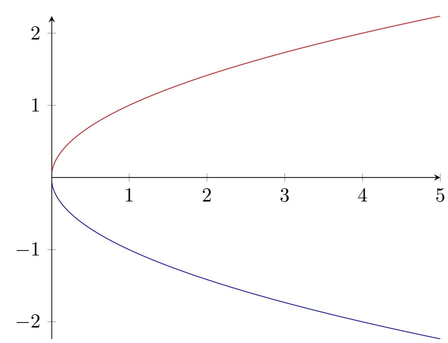
$$f^{-1}(f(x)) = x \implies f^{-1}(2x+3) = x$$
$$\text{uvede se smjena: } a = 2x + 3 \implies x = \frac{a-3}{2}$$
$$f^{-1}(a) = \frac{a-3}{2} \implies f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

Primjer: Pronaći inverznu funkciju funkcije: $f(x) = \dfrac{4x+2}{-2x-5}$

$$f^{-1}(f(x)) = x \implies f^{-1}(\frac{4x+2}{-2x-5}) = x$$
$$\text{uvodi se smjena: } t = \frac{4x+2}{-2x-5} \implies 4x + 2 = (-2x-5)t$$
$$x = \frac{-5t-2}{4+2t}$$
$$f^{-1}(t) = \frac{-5t-2}{4+2t} \implies f^{-1}(x) = \frac{-5x-2}{4+2x}$$

Nemaju sve funkcije inverznu funkciju. Npr. $f(x) = x^2$ je jedan takav primjer. Za takvu funkciju se može reći da ima dvije inverzne funkcije $f_1(x) = -\sqrt{x}$ i $f_2(x) = \sqrt{x}$





Lijevo: $f(x) = x^2$ Desno: $f_1(x)$ (plava), $f_2(x)$ (crvena)

3 Kompozicija funkcija

- Neka su date dvije funkcije f i g.
  Funkcija $h = f \circ g$ je **kompozicija (ili produkt)** funkcija f i g, i vrijedi $h(x) = f(g(x))$.
- Ukoliko je $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ onda za $h = f \circ g$ vrijedi $h : X \to Z$
- Kompozicija više funkcija je $f \circ g \circ h = f(g(h(x)))$

Primjer: $f(x) = 5x - 2$, $g(x) = 2x + 5$
$f \circ g = f(g(x)) = f(2x + 5) = 5(2x + 5) - 2 = 10x + 23$

Primjer: $f(x) = 5x - 2$, $g(x) = 2x + 5$
$g \circ f = g(f(x)) = g(5x - 2) = 2(5x - 2) + 5 = 10x + 1$

4 Ponavljanje

1. Definisati pojam funkcije.
2. Definisati pojam orginala i slike funkcije.
3. Definisati pojmove domen i kodomen funkcije.
4. Definisati inverznu funkciju.
5. Definisati kompoziciju funkcija.
6. Označiti da li su sljedeće relacije funkcije:

    -

7. Pronaći inverzne funkcije funkcija:
8. pronaci kompoziciju funkcija
9. kombinacija kompozicije i inverzne