

# Osnove kombinatorike

## 1 Faktorijel

- **Faktorijel** je proizvod prvih  $n$  brojeva i piše se  $n!$

$$n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$$

- Faktorijel od 0 je 1 tj.  $0! = 1$

## 2 Permutacije

- Neka je dat skup  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  **permutacija** je bilo koji raspored svih elemenata  $A$ .  
npr.  $A = \{1, 2, 3\}$  onda su sve permutacije:  $P = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$
- **Broj permutacija** skupa od  $n$  elemenata iznosi:

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

- Simbol  $n!$  se čita kao  $n$  **faktorijel** i predstavlja proizvod brojeva od 1 do  $n$ .  
Faktorijel od 0 je 1 tj.  $0! = 1$

**Primjer:** Na koliko načina se mogu rasporediti 6 različitih knjiga na policu?

$$P(6) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

## 3 Varijacije

- Neka je dat skup  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . **Varijacija** bez ponavljanja klase  $k$  od  $n$  elemenata je bilo koja  $k$ -torka različitih elemenata skupa  $A$  gdje vrijedi  $k \leq n$ .
- Prilikom odabira varijacija vrijedi  $a_1, a_2 \neq a_2, a_1$  tj. poredak elemenata je bitan
- **Broj varijacija** iznosi:

$$V_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \quad \text{ili} \quad V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Primjer:** Pronaći sve varijacije od dva ponavljanja elemenata skupa  $A = \{a, b, c\}$ .

To su:  $ab, ac, ba, bc, ca, cb$  tj.  $V_2^3 = (3-0) \cdot (3-1) = 3 \cdot 2 = 6$

**Primjer:** Pronaći na koliko različitih načina možemo posložiti 6 knjiga iste debljine na policu ako na polici ima mjesta za 3 knjige.  $V_3^6 = (6-0) \cdot (6-1) \cdot (6-2) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

## 4 Kombinacije

- Neka je dat skup  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . **Kombinacija** bez ponavljanja klase  $k$  od  $n$  elemenata je bilo koja neuređena  $k$ -torka različitih elemenata skupa  $A$  gdje  $k \leq n$ .
- Prilikom odabira kombinacija vrijedi:  $a_1, a_2 = a_2, a_1$   
tj. poredak odabranih elemenata u izlazu nije bitan.
- Npr. kombinacije klase 2 u skupu  $A = \{a, b, c\}$  su:  $ab, ac, bc$
- **Broj kombinacija** iznosi:

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad \text{ili} \quad C_k^n = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

**Napomena:** Osnovna razlika između permutacija, varijacija, i kombinacija je u tome što kod permutacija koristimo i raspoređujemo sve elemente zadatog skupa, dok kod varijacija i kombinacija koristimo podskupove zadatog skupa. Sa druge strane, razlika između varijacija i kombinacija je u tome što kod varijacija je bitno mjesto elemenata u rasporedu, a kod kombinacija nije.

## 5 Ponavljanje

1. Na koliko načina 5 osoba mogu da sjednu na 5 stolica?
2. Koliko različitih petocifrenih brojeva se mogu napisati pomoću cifara 0, 1, 2, 3, 4 a da se cifre ne ponavljaju?
3. Na koliko se načina mogu izabrati četiri osobe na četiri različite dužnosti, od devet prijavljenih kandidata?
4. Koliko se različitih 4-cifrenih brojeva može formirati od 10 različitih cifara?
5. Koliko ima telefona sa petocifrenim brojevima ako se cifre ne ponavljaju?
6. Pet učenika treba rasporediti na pet stolica. Na koliko načina je to moguće uraditi?
7. Od pet cifara 1, 2, 3, 4, 5 treba sastaviti sve trocifrene brojeve kod kojih se cifre ne ponavljaju. Koliko ima tih brojeva?
8. Od pet učenika treba izabrati 3 za učešće u kvizu. Na koliko načina se to može uraditi?
9. Koliko se trocifrenih prirodnih brojeva može napisati u kojima se cifre ne ponavljaju, tako da su:
  - (a) manji od 675
  - (b) djeljivi sa 5
  - (c) djeljivi sa 4 (Rezultat: 160)
10. Koliko ima permutacija cifara 1, 2, 3..., 9 u kojima 1 nije ispred 2?
11. Na koliko se načina mogu poredati elementi  $a, b, c, d, e$  tako da  $a$  bude na prvom a  $e$  na posljednjem mjestu ako se elementi ne ponavljaju?
12. Dat je skup cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Odrediti:
  - (a) Koliko se petocifrenih brojeva može formirati ako se cifre ne ponavljaju?
  - (b) Koliko se četverocifrenih parnih brojeva može formirati?
  - (c) Koliko trocifrenih brojeva djeljivih sa 5 se može formirati?
  - (d) Koliko ima permutacija bez ponavljanja u kojima se između 0 i 1 nalazi tačno jedan element?