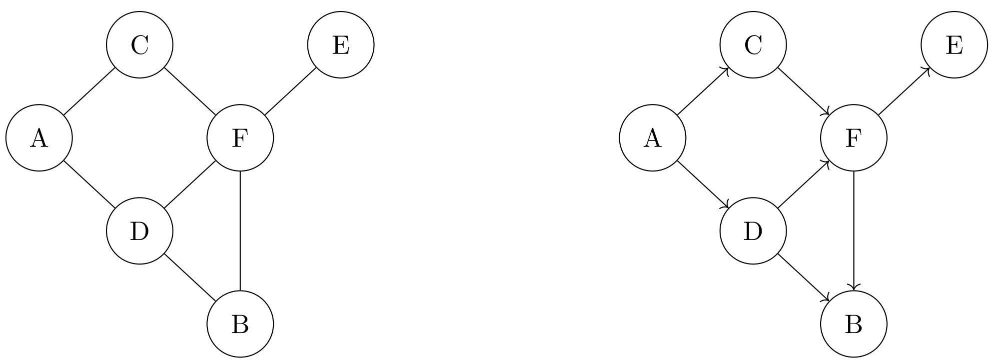
Grafovi

Grafovi su strukture pomoću kojih se mogu modelirati razne pojave, te vršiti njihova analiza. Npr. GPS aplikacija za proračunavanje najboljih ruta između gradova, pronalazak puta unutar igre za umjetnu inteligenciju, pronalazak najboljeg puta paketa u internet saobraćaju.

1 Osnove

Graf $\boldsymbol{G = (V, E)}$ je struktura koja se sastoji od **čvorova grafa $\boldsymbol{V}$** koji su međusobno povezani **granama grafa $\boldsymbol{E}$**. Grana $e \in E$ se piše u formi $e = \{x, y\}$ gdje su čvorovi $x, y \in V$.

Primjer:



Lijevo – neusmjereni graf, desno – usmjereni graf.

- Kod **neusmjerenog grafa** (lijevo) grane između čvorova su dvosmjerne.
- Kod **usmjerenog grafa** (desno) grane između čvorova su jednosmjerne.
- Kod neusmjerenog grafa:
  - ako su dva čvora povezani granom, onda su oni **susjedni** čvorovi
  - **stepen čvora** je broj grana koje su spojene na taj čvor
- Kod usmjerenih grafova, **ulazni stepen** čvora je broj grana koje ulaze u taj čvor, a **izlazni stepen** čvora je broj grana koje izlaze iz tog čvora.
- Grafovi čije sve grane povezuju dva različita čvora zovu se **jednostavni grafovi** i oni se ovdje analiziraju.

2 Zapis grafova

- Neusmjereni graf se može zapisati kao skup grana i čvorova. Npr. G: $V = \{A, B, C, D, E, F\}$, $E = \{\{A, C\}, \{A, D\}, \{B, D\}, \{B, F\}, \{C, F\}, \{D, F\}, \{F, E\}\}$
- Za zapisivanje usmjerenog grafa se koriste uređeni parovi. Npr. G: $V = \{A, B, C, D, E, F\}$, $E = \{(A, C), (A, D), (B, D), (B, F), (C, F), (D, F), (F, E)\}$

Osim kroz popis čvorova i grana, grafovi se mogu zapisati koristeći **matricu susjedstva**.

	A	B	C	D	E	F
A	0	0	1	1	0	0
B	0	0	0	1	0	1
C	1	0	0	0	0	1
D	1	1	0	0	0	1
E	0	0	0	0	0	1
F	0	1	1	1	1	0

	A	B	C	D	E	F
A	0	0	1	1	0	0
B	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	1
D	0	1	0	0	0	1
E	0	0	0	0	0	0
F	0	1	0	0	1	0

Matrica susjedstva za neusmjereni graf (lijevo), i za usmjereni graf (desno).

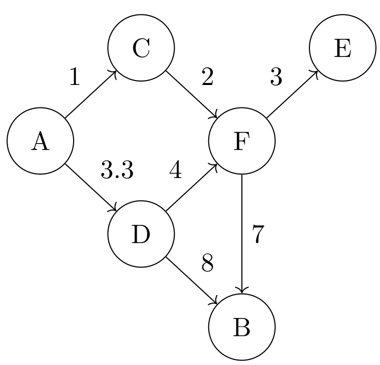
Još jedan način na koji se grafovi mogu zapisati je u obliku **liste susjedstva**.

$$
\begin{aligned}
A &\Longrightarrow [C, D] \\
B &\Longrightarrow [D, F] \\
C &\Longrightarrow [A, F] \\
D &\Longrightarrow [A, B, F] \\
E &\Longrightarrow [E] \\
F &\Longrightarrow [B, C, D, E]
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
A &\Longrightarrow [C, D] \\
B &\Longrightarrow [\,] \\
C &\Longrightarrow [F] \\
D &\Longrightarrow [B, F] \\
E &\Longrightarrow [E] \\
F &\Longrightarrow [B, E]
\end{aligned}
$$

Lista susjedstva za neusmjereni graf (lijevo), i za usmjereni graf (desno).

3 Težinski graf

Težinski graf je graf kod kojeg se svakoj grani može dodijeliti neki realan broj.
Težinski grafovi mogu biti usmjereni ili neusmjereni.



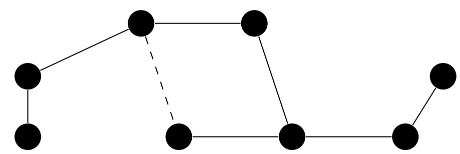
	A	B	C	D	E	F
A	0	0	1	3,3	0	0
B	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	2
D	0	8	0	0	0	4
E	0	0	0	0	0	0
F	0	7	0	0	3	0

Lijevo – težinski graf, desno – njegova matrica susjedstva

4 Putevi i povezanost

- Čvor A i B su **povezani** ako postoji niz čvorova i grana spojenih tako da možemo krenuti od čvora A i doći do čvora B. Za graf se kaže da je **povezan** ako su svaka dva njegova čvora povezana.
- Ako se može pronaći put takav da se krene iz nekog čvora i posjeti svaki čvor u grafu tačno jednom, i završi na početnom čvoru, onda se graf zove **Hamiltonov graf**.

- Ako se može pronaći put takav da se krene iz nekog čvora i posjeti svaka grana u grafu tačno jednom, i završi na početnom čvoru, onda se graf zove **Eulerov graf**.
- Ako možemo pronaći niz čvorova i grana u kojem se može krenuti iz jednog čvora i doći u isti čvor prolazeći tačno jednom kroz svaku granu u toj listi, onda se taj niz grana zove **ciklus**. Ako graf nema ciklusa on se zove **aciklični** graf.
- Povezani aciklični graf zove se **stablo**.



- Npr. na slici iznad, ako bi na mjestu isprekidane linije postojala grana, onda se taj graf ne bi mogao nazvati stablom, a ako na tom mjestu nema grane, onda se taj graf može nazvati stablom.
- Dvije grane koje imaju jedan zajednički čvor se zovu **susjedne grane**.
- Stablo S koje sadrži sve čvorove grafa G je **razapinjujuće stablo** grafa G.
- Za težinski graf G, **najmanje razapinjujuće stablo** je ono stablo grafa G kod kojeg je ukupan zbir težina najmanji od svih ostalih razapinjujućih stabala.
- Graf G je **planarni graf** ukoliko ga je moguće nacrtati tako da mu se grane ne presjecaju. U suprotnom se kaže da je graf **neplanaran**.
- **Bojenje grafa** nazivamo označavanje svakog čvora bojom tako da dva susjedna čvora nemaju istu boju.