

Funkcije

1 Funkcije

- **Preslikavanje** ili **funkcija** f skupa A u skup B u oznaci $f : A \rightarrow B$ je relacija $f \subset A \times B$ za koju vrijedi da je svaki element skupa A u relaciji sa tačno jednim elementom skupa B
Tačnije $(\forall x \in A)(\exists! y \in B)(x, y) \in f$
- Umjesto $(x, y) \in f$ može se pisati $y = f(x)$ te se za x kaže da je **original**, a y je **slika** funkcije
- Skup A je **domen** funkcije, a skup B je **kodomen** funkcije

Primjer: Neka je skup $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 3\}$ i skup $B = \{a, b, c\}$
onda za neku relaciju $\rho = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ možemo reći da je funkcija jer postoji relacija za svaki element iz A sa nekim elementom iz B .
Ovdje, A je domen, dok je B kodomen.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & a \end{pmatrix}$$

Npr. $\rho = \{(1, a), (2, b), (3, a), (1, b)\}$ nije funkcija jer element 1 ima relaciju sa više od jednog elementa iz skupa B .

Za naredne primjere definisat će se skup nenegativnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$.
Analogno tome će se definisati i skup nepozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^- = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 0\}$.

Primjer: Funkcija $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad f(x) = \sqrt{x}$ je funkcija koja preslikava skup \mathbb{R}^+ u \mathbb{R}^+ tako da $\forall x \in \mathbb{R}^+$ postoji tačno jedno preslikavanje u \mathbb{R}^+ . Tako je \mathbb{R}^+ domen, a \mathbb{R}^+ kodomen.

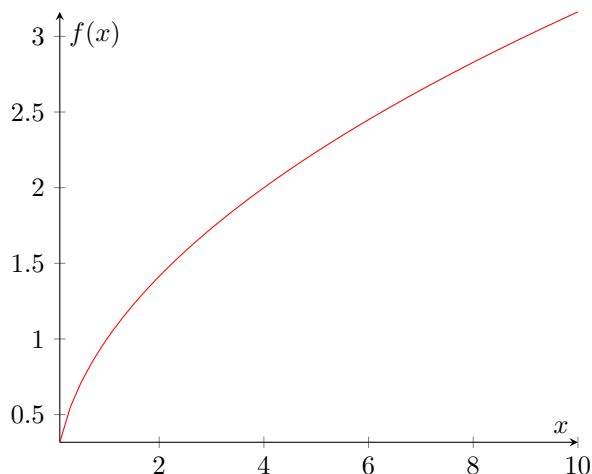


Figure 1: Grafikon funkcije $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad f(x) = \sqrt{x}$

Primjer: $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x}$ nije funkcija jer ne postoji korijen za negativni broj u \mathbb{R} .

U matematici vrijednosti svih funkcija implicitno su realni brojevi osim ako to nije drugačije definisano.

2 Inverzne funkcije

Inverzna funkcija funkcije f je funkcija oznake f^{-1} za koju vrijedi $f^{-1}(f(x)) = x$

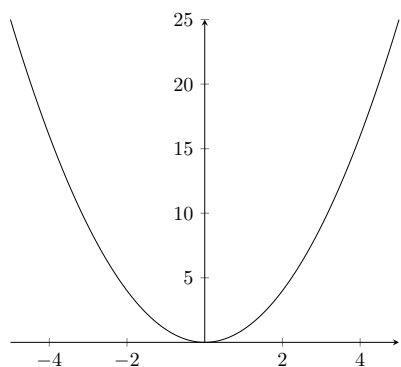
Primjer: Pronaći inverznu funkciju funkcije $f(x) = 2x + 3$

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) = x &\implies f^{-1}(2x + 3) = x \\ \text{uvede se smjena: } a = 2x + 3 &\implies x = \frac{a - 3}{2} \\ f^{-1}(a) = \frac{a - 3}{2} &\implies f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2} \end{aligned}$$

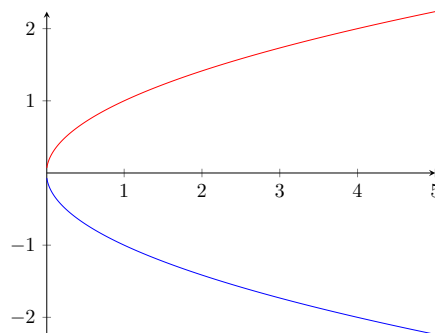
Primjer: Pronaći inverznu funkciju funkcije: $f(x) = \frac{4x + 2}{-2x - 5}$

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) = x &\implies f^{-1}\left(\frac{4x + 2}{-2x - 5}\right) = x \\ \text{uvodi se smjena: } t = \frac{4x + 2}{-2x - 5} &\implies 4x + 2 = (-2x - 5)t \\ x &= \frac{-5t - 2}{4 + 2t} \\ f^{-1}(t) = \frac{-5t - 2}{4 + 2t} &\implies f^{-1}(x) = \frac{-5x - 2}{4 + 2x} \end{aligned}$$

Nemaju sve funkcije inverznu funkciju. Npr. $f(x) = x^2$ je jedan takav primjer. Za takvu funkciju se može reći da ima dvije inverzne funkcije $f_1(x) = -\sqrt{x}$ i $f_2(x) = \sqrt{x}$



Lijevo: $f(x) = x^2$



Desno: $f_1(x)$ (plava), $f_2(x)$ (crvena)

3 Kompozicija funkcija

- Neka su date dvije funkcije f i g .
Funkcija $h = f \circ g$ je **kompozicija (ili produkt)** funkcija f i g , i vrijedi $h(x) = f(g(x))$.
- Ukoliko je $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$ onda za $h = f \circ g$ vrijedi $h : X \rightarrow Z$
- Kompozicija više funkcija je $f \circ g \circ h = f(g(h(x)))$

Primjer: $f(x) = 5x - 2$, $g(x) = 2x + 5$
 $f \circ g = f(g(x)) = f(2x + 5) = 5(2x + 5) - 2 = 10x + 23$

Primjer: $f(x) = 5x - 2$, $g(x) = 2x + 5$
 $g \circ f = g(f(x)) = g(5x - 2) = 2(5x - 2) + 5 = 10x + 1$

4 Ponavljanje

1. Definisati pojam funkcije.
2. Definisati pojmove original i slika funkcije.
3. Definisati pojmove domen i kodomen funkcije.
4. Definisati inverznu funkciju.
5. Neka je dat skup $A = \{1, 2, 3, 4\}$, skup $B = \{a, b, c\}$. Da li je $\rho \subseteq A \times B$ funkcija ako je:

(a) $\rho = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a)\}$

(b) $\rho = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d), (4, a), (4, b), (4, c), (4, d)\}$

(c) $\rho = \{(1, c), (2, c), (3, c), (4, c)\}$

(d) $\rho = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

6. Koji je domen i kodomen funkcije:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(d) $f(x) = \sqrt{x} - 2$

(e) $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$

(f) $f(x) = \sqrt{7-x}$

7. Definisati pojam inverzne funkcije.
8. Definisati pojam kompozicije funkcija.
9. Pronaći inverzne funkcije funkcija:

- $f(x) = 5 - 9x$

- $f(x) = \frac{x}{2} + 7$

- $f(x) = \frac{4x}{5-x}$

10. Neka je data funkcija $f(x) = 5 - 9x$ i funkcija $g(x) = \frac{x}{2} - 7$ pronaći $f^{-1} \circ g$

11. Neka je data funkcija $f(x) = \frac{4x}{5-x}$ i funkcija $g(x) = 4x + 3$ pronaći $f \circ g^{-1}$