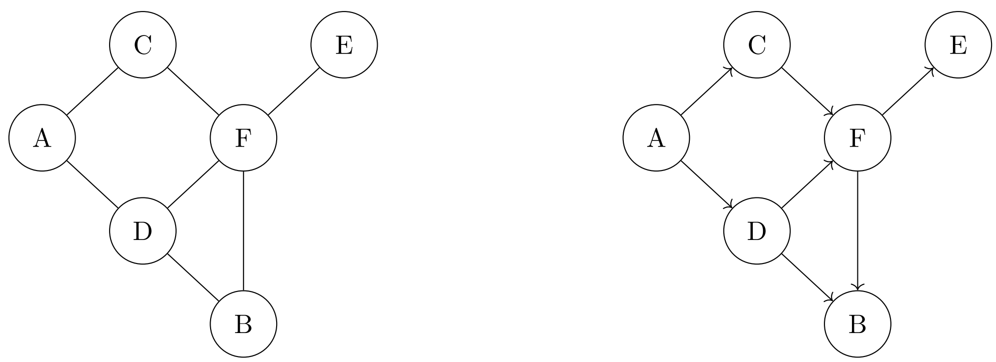
# Grafovi

Grafovi su strukture pomoću kojih se mogu modelirati razne pojave, te vršiti njihova analiza. Npr. GPS aplikacija za proračunavanje najboljih ruta između gradova, pronalazak puta unutar igre za umjetnu inteligenciju, pronalazak najboljeg puta paketa u internet saobraćaju.

## 1 Osnove

**Graf $\boldsymbol{G = (V, E)}$** je struktura koja se sastoji od **čvorova grafa $\boldsymbol{V}$** koji su međusobno povezani **granama grafa $\boldsymbol{E}$**. Grana $e \in E$ se piše u formi $e = \{x, y\}$ gdje su čvorovi $x, y \in V$.

**Primjer:**




Lijevo – neusmjereni graf, desno – usmjereni graf.

- Kod **neusmjerenog grafa** (lijevo) grane između čvorova su dvosmjerne.
- Kod **usmjerenog grafa** (desno) grane između čvorova su jednosmjerne.
- Kod neusmjerenog grafa:
  - ako su dva čvora povezani granom, onda su oni **susjedni** čvorovi
  - **stepen čvora** je broj grana koje su spojene na taj čvor
- Kod usmjerenih grafova, **ulazni stepen** čvora je broj grana koje ulaze u taj čvor, a **izlazni stepen** čvora je broj grana koje izlaze iz tog čvora.
- Grafovi čije sve grane povezuju dva različita čvora zovu se **jednostavni grafovi** i oni se ovdje analiziraju.

## 2 Zapis grafova

- Neusmjereni graf se može zapisati kao skup grana i čvorova. Npr. $G$: $V = \{A, B, C, D, E, F\}$, $E = \{\{A, C\}, \{A, D\}, \{B, D\}, \{B, F\}, \{C, F\}, \{D, F\}, \{F, E\}\}$
- Za zapisivanje usmjerenog grafa se koriste uređeni parovi. Npr. $G$: $V = \{A, B, C, D, E, F\}$, $E = \{(A, C), (A, D), (B, D), (B, F), (C, F), (D, F), (F, E)\}$

Osim kroz popis čvorova i grana, grafovi se mogu zapisati koristeći **matricu susjedstva**.

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $C$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $D$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $E$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $F$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $B$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $C$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $D$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $E$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $F$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Matrica susjedstva za neusmjereni graf (lijevo), i za usmjereni graf (desno).

Još jedan način na koji se grafovi mogu zapisati je u obliku **liste susjedstva**.

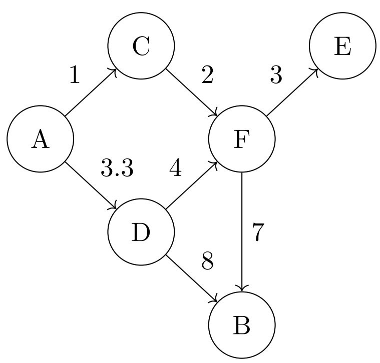
$$\begin{array}{l} A \Longrightarrow [C, D] \\ B \Longrightarrow [D, F] \\ C \Longrightarrow [A, F] \\ D \Longrightarrow [A, B, F] \\ E \Longrightarrow [E] \\ F \Longrightarrow [B, C, D, E] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \Longrightarrow [C, D] \\ B \Longrightarrow [] \\ C \Longrightarrow [F] \\ D \Longrightarrow [B, F] \\ E \Longrightarrow [E] \\ F \Longrightarrow [B, E] \end{array}$$

Lista susjedstva za neusmjereni graf (lijevo), i za usmjereni graf (desno).

# 3 Težinski graf

**Težinski graf** je graf kod kojeg se svakoj grani može dodijeliti neki realan broj.
Težinski grafovi mogu biti usmjereni ili neusmjereni.




| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | 0 | 1 | 3,3 | 0 | 0 |
| $B$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $C$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| $D$ | 0 | 8 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| $E$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $F$ | 0 | 7 | 0 | 0 | 3 | 0 |

Lijevo – težinski graf, desno – njegova matrica susjedstva

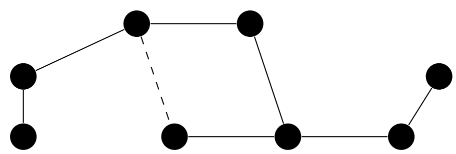
# 4 Putevi i povezanost

- **Šetnja** u oznaci $W$ je niz $v_0e_1v_1e_2...e_kv_k$ u kojem se naizmjenično smjenjuju čvorovi i grane, pri čemu su $v_{i-1}$ i $v_i$ krajnji čvorovi grane $e_i$, te je $v_0$ početni, a $v_k$ završni čvor šetnje $W$.
- **Dužina šetnje** je broj njenih grana.
  **Staza** je šetnja u kojoj se grane ne ponavljaju.
  **Put** je staza u kojoj su svi čvorovi različiti.

- Čvor $A$ i $B$ su **povezani** ako postoji put od $A$ do $B$.
  Graf je **povezan** ako su svaka dva njegova čvora povezana.

- **Ciklus** je staza čiji su svi čvorovi osim prvog i zadnjeg međusobno različiti.
  Ciklus koji koristi sve čvorove u grafu tačno jednom se zove **Hamiltonov ciklus**.
  Ciklus koji koristi sve grane u grafu tačno jednom se zove **Eulerov ciklus**.
  Graf koji ne sadrži cikluse se zove **aciklični graf**.

- Povezani aciklični graf zove se **stablo**.



- Npr. na slici iznad, ako bi na mjestu isprekidane linije postojala grana, onda se taj graf ne bi mogao nazvati stablom, a ako na tom mjestu nema grane, onda se taj graf može nazvati stablom.

- Ako su skupovi čvorova i grana grafa $T$ podskupovi čvorova i grana grafa $G$, onda se za graf $T$ kaže da je **podgraf** grafa $G$.

- Dvije grane koje imaju jedan zajednički čvor se zovu **susjedne grane**.

- Podgraf sastavljen od svih susjednih čvorova nekog čvora $v$ iz grafa $G$ i pripadajućih povezanih grana, se zove **graf susjedstva**.

- Stablo $S$ koje sadrži sve čvorove grafa $G$ je **razapinjujuće stablo** grafa $G$.

- Za težinski graf $G$, **najmanje razapinjujuće stablo** je ono stablo grafa $G$ kod kojeg je ukupan zbir težina najmanji od svih ostalih razapinjujućih stabala.

- Graf $G$ je **planarni graf** ukoliko ga je moguće nacrtati tako da mu se grane ne presjecaju. U suprotnom se kaže da je graf **neplanaran**.

- **Lice planarnog grafa** je bilo koji zatvoreni region unutar grana planarnog grafa.

- **Bojenje grafa** nazivamo označavanje svakog čvora bojom tako da dva susjedna čvora nemaju istu boju.

- Najmanji broj boja potrebnih da se oboji neki graf (po čvorovima) se zove **hromatski broj** grafa.

- Na sličan način se može napraviti **bojenje grana** grafa, tj. granama se dodijeljuje boja tako da ne postoje dvije susjedne grane sa istom bojom.

- U planarnim grafovima, moguće je **bojenje lica** tako da ne postoje dva susjedna lica obojena istom bojom. Ovo se zove **teorema četri boje**.