# Osnove teorije skupova

## 1 Osnove

- Skup je elementarni pojam koji se ne definiše
  neformalno: kolekcija/grupacija elemenata
- Skup se označava sa velikim zagradama: npr. prazan skup $\{\}$, koji se još moze označiti sa ø
- Primjeri skupova su: $\{1,2,3\}$ $\{a,b,c\}$ $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ $\{\diamond,\star,\ddagger\}$ $\{1,\{\}\}$
- Skup još označavamo velikim slovom abecede, npr. $A = \{1,2,3\}$
- Ako je $a$ element skupa $A$, to pišemo $a \in A$ i čitamo $a$ *pripada* skupu $A$
  dok ako $a$ nije element skupa $A$, pišemo $a \notin A$ i kažemo da $a$ *ne pripada* skupu $A$
- Elementi skupa mogu i sami biti skupovi.
  Npr. skup: $\{a,\{a,b\},\{a,b,\{a,c\}\}\}$ je skup sa 3 elementa gdje je prvi elemenat $a$, drugi $\{a,b\}$, a treći $\{a,b,\{a,c\}\}$ ili npr. {{},{1},{a,b}}
- Skupovi ne mogu imati dva ista elementa
- Postoje predefinisani skupovi poput:

  $\mathbb{N}$ — skup prirodnih brojeva, $\{1,2,3,\ldots\}$

  $\mathbb{N}_0$ — skup prirodnih brojeva proširen sa nulom, $\{0,1,2,3,\ldots\}$

  $\mathbb{Z}$ — skup cijelih brojeva, $\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

  $\mathbb{Q}$ — skup racionalnih brojeva — racionalni broj je cijeli broj podijeljen sa prirodnim brojem preciznije napisano: $\{\dfrac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$

  $\mathbb{R}$ — skup realnih brojeva, npr. $\{\ldots,-1.1,\ 1.00001,\ 2.34,\ \sqrt{2},\ 3/4,\ldots\}$

  $\mathbb{C}$ — skup kompleksnih brojeva, npr. $\{\ldots,-1+3i,\ -1-3i,\ldots\}$

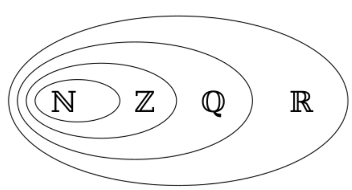



Figure 1: Odnos skupova

## 2 Zadavanje skupova

- Zadavanje **prebrojavanjem**, npr. $\{5,8,10,13,99\}$ $\{\alpha,\beta,\gamma,\pi\}$
- Zadavanje **specifikacijom**:
  $A = \{x | P(x)\}$ — čita se: $x$ *takav da* vrijedi $P(x)$
  npr. $A = \{x | (x \text{ je prost broj}) \wedge (x < 50)\}$

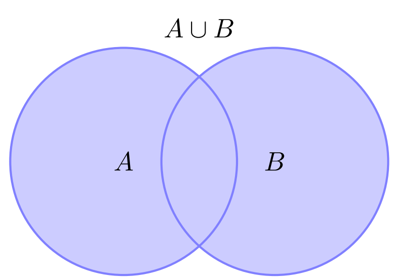
- U specifikaciji se može referirati na postojeći skup
npr. $B = \{x \in X | P(x)\}$ — je skup svih elemenata $x$ skupa $X$ za koje je iskaz $P(x)$ tačan
npr. $B = \{x \in \mathbb{N} | x > 10 \wedge x \leq 15\}$ rezultira skupom {11,12,13,14,15}
- Za specifikaciju je moguće koristiti i funkciju u obliku: $A = \{y | y = f(x) \wedge P(x)\}$
gdje je $f(x)$ neki izraz koji zavisi od promjenjive $x$ npr. skup kvadrata svih prirodnih brojeva možemo zapisati kao: $\{y | y = x^2 \wedge x \in \mathbb{N}\}$ ili kraće $\{x^2 | x \in \mathbb{N}\}$
- Prazan skup definiramo kao $\emptyset = \{x | x \neq x\}$

## 3 Dodatno o skupovima

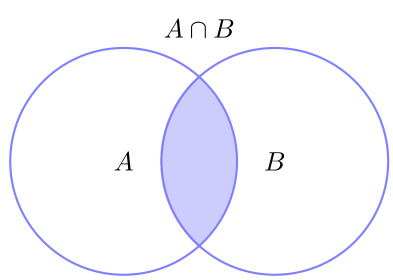
- Akko su svi elementi skupa $A$ ujedno i elementi skupa $B$, kažemo da je skup $A$ **podskup** skupa $B$ i pišemo $A \subseteq B$, dok za skup $B$ u tom slučaju kažemo da je **nadskup** skupa $A$ i pišemo $B \supseteq A$
- Akko za dva skupa $A$ i $B$ vrijedi da su svi elementi jednog, ujedno elementi i onog drugog tj. akko vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, onda kažemo da su **jednaki** ili **ekvivalentni** i pišemo $A = B$
- Akko vrijedi $A \subseteq B$ i $A \neq B$ onda kažemo da je $A$ **pravi podskup** od $B$ i pišemo $A \subset B$ dok za $B$ kažemo da je **pravi nadskup** od $A$ i možemo pisati $B \supset A$
- Akko je $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$ onda vrijedi $A \subseteq C$
- Broj (različitih) elemenata skupa $A$ nazivamo **kardinalni broj** i označavamo sa $\#A$
npr. ako je $A = \{x | (x \text{ je prost broj }) \wedge (x < 10)\}$, onda $\#A = 4$
- Prazan skup je podskup svakog skupa i za bilo koji skup $A$ vrijedi $\emptyset \subseteq A$
- Skup *svih podskupova* nekog skupa $S$ (uključujući i prazan skup) nazivamo **partitivni skup** skupa $S$ i obilježava se sa $\mathcal{P}(S)$
npr. neka je $S = \{a, b, c\}$ tada je $\mathcal{P}(S) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- Za kardinalni broj partitivnog skupa vrijedi: $\#\mathcal{P}(S) = 2^{\#S}$

## 4 Operacije sa skupovima

- **Unija skupova** $A$ i $B$ u oznaci $A \cup B$ je skup koji sadrži sve elemente iz skupa $A$ ili skupa $B$ (i nikoje druge elemente) ili preciznije $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

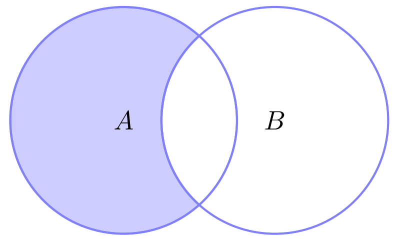



- **Presjek skupova** $A$ i $B$ u oznaci $A \cap B$ je skup koji sadrži samo elemente koji su zajednički za skup $A$ i skup $B$ ili preciznije $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$



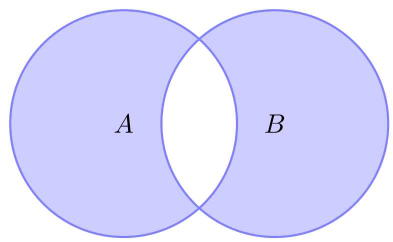
- **Razlika skupova** $A$ i $B$ u oznaci $A \setminus B$ je skup koji sadrži samo elemnte skupa $A$ koji nisu ujedno i elementi skupa $B$ ili preciznije $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

$A \setminus B$




- **Diskrepancija** (razilaženje, simetrična razlika) skupova $A$ i $B$ u oznaci $A \Delta B$ je skup elemenata koji se nalaze bilo u skupu $A$, bilo u skupu $B$ ali ne i u oba ili preciznije $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$A \Delta B$




- Za skupove $A$ i $B$ kažemo da su **disjuktivni** ako vrijedi $A \cap B = \emptyset$

# 5 Dekartov proizvod / Kartezijev proizvod

- Par elemenata $(a, b)$ nazivamo **uređenim parom** ako je tačno određeno koji je element na prvom, a koji na drugom mjestu tj. $(a, b) \neq (b, a)$
  Jednakost dva para: $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$ samo ako vrijedi $a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$
- **Dekartovim proizvodom** skupova $A$ i $B$ naziva se skup: $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$
  npr. $A = \{\ddagger, \star, \diamond\}$, $B = \{a, b\}$ onda je
  npr. $A \times B = \{(\ddagger, a), (\ddagger, b), (\star, a), (\star, b), (\diamond, a), (\diamond, b)\}$
- $A \times B \neq B \times A$
- Osim uređenog para, postoji i **uređena trojka** npr. $(a, b, c) \neq (a, c, b)$
  dok se uređeni niz brojeva naziva **uređena n-torka** npr. $(a, b, c, d)$ ili $(a, b, c, d, e, f)$

## 6 Ponavljanje

1. Nađite partitivni skup za sljedeće skupove:
   a) $A = \{a\}$
   b) $B = \{a, b, c\}$
   c) $C = \{a, \{b, c\}\}$
   d) $D = \{a, b, \{a, b\}\}$
   e) $E = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$
   f) $F = \{\emptyset, a, b, \{a, b\}\}$
2. Ako je zadan skup $A = \{x^2 | x \in \mathbb{N} \wedge x < 20\}$, kako bi taj skup mogao biti zadan prebrojavanjem?
3. Kako bi skup zadan prebrojavanjem $A = \{1, 8, 27, 64, 125\}$ mogli zadati specifikacijom?
4. Koja je razlika izmedju pravog podskupa i nadskupa?
5. Ako je $\#A = 8$, koji je kardinalni broj skupa $\mathcal{P}(A)$?
6. Definiši skup svih neparnih cijelih brojeva