Matrice

1 Osnove

- Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, familija elemenata $a_{ij}(i = 1 \ldots m; j = 1 \ldots n)$ može se zapisati u obliku:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & a_{2n} \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ili } \boldsymbol{A} = (a_{ij})$$

- Ovakav oblik zapisa elemenata se zove **matrica**. Prikazana matrica ima m **redova** i n **kolona**. Matrice se obilježavaju sa velikim slovom npr. $\boldsymbol{A}$ ili $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ dok se $m \times n$ zove **dimenzija matrice**.
- Elemenat a_{ij} je elemenat u i-tom redu i j-toj koloni matrice
  Elementi $(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ čine prvi **red matrice**, a svaki sljedeći je i-ti **red matrice**
  Elementi $(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})$ čine prvu **kolonu matrice**, a svaka sljedeća je j-ta **kolona matrice**
- **Kvadratna matrica** je matrica gdje vrijedi $m = n$ i zove se matricom n-tog reda.
- **Dijagonalu matrice** čine elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Također se zove glavna dijagonala.
  Antidijagonalu matrice čine elementi $a_{n,1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1,n}$
- Matrica kod koje su svi elementi jednaki 0 se zove **nul-matrica** i obiježava se sa **0**.
  Matrica kod koje su svi elementi osim dijagonalnih jednaki 0 zove se **dijagonalna matrica**.
- Kvadratna matrica kod koje su svi elementi dijagonale 1, a svi ostali elementi 0 se zove **matrica identiteta** ili **jedinična matrica** i obilježava se sa $\boldsymbol{I}$.
- Zbir elemenata dijagonale se zove **trag** matrice, te vrijedi $tr(\boldsymbol{A}) = tr\boldsymbol{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$
- **Transponovana matrica** matrice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ tipa $m \times n$ je matrica $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{B} = (b_{ji})$ tipa $n \times m$. gdje vrijedi $b_{ji} = a_{ij}(i = 1 \ldots m; j = 1 \ldots n)$ npr.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ pa je transponovana matrica } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{\tau}} \text{ tj. } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^{\tau} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

- Dvije matrice $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ i $\boldsymbol{B}_{p\times q}$ su **jednake** tj. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ akko[1] $a_{ij} = b_{ij} \wedge m = p \wedge n = q$
- **Podmatrica** matrice $\boldsymbol{A}$ je matrica dobivena brisanjem nekih kolona ili redova matrice $\boldsymbol{A}$.

[1]akko — ako i samo ako

2 Determinanta

Determinanta matrice je elemenat koji govori da li je matrica **regularna**. Determinanta se može primjenjivati samo na kvadratnim matricama:

$$\text{Ako je } \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ onda } det(\boldsymbol{A}) = det\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Za matrice viših dimenzija računa se na način da se odabere jedan red ili jedna kolona, i da se svaki element iz odabranog reda ili kolone množi sa determinantom podmatrice sastavljene od svih elemenata koji ne pripadaju redu i koloni kojoj odabrani element pripada.

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a^{+} & b^{-} & c^{+} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

Koeficijent množenja je odabran formulom $(-1)^{i+j}$ gdje je i red, a j kolona odabranog elementa.

Kratica samo za računanje determinante matrica dimenzije 3×3 je proširivanje matrice za prvih $(n-1)$ kolona. Ovo se još zove **Sarussovo pravilo**. Npr.

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Matrica je **regularna** akko je $det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, inače je **singularna**.

3 Operacije

- **Zbir** dvije matrice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ dimenzija $m \times n$ je zbir svih elemenata tj. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
  Za zbir matrica vrijede sljedeća pravila:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \text{ (komutativnost)} \\ (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) \text{ (asocijativnost)} \\ \boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \\ (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{\tau} = \boldsymbol{A}^{\tau} + \boldsymbol{B}^{\tau} \end{gathered}$$

- **Skalarni proizvod** je proizvod nekog broja x sa matricom $\boldsymbol{A}$ i rezultat je proizvod svakog elementa matrice sa brojem x tj. $a_{ij} = x \cdot a_{ij}$. Neka postoji neki drugi broj y, onda vrijedi:

$$\begin{gathered} y \cdot (x \cdot \boldsymbol{A}) = (x \cdot y) \cdot \boldsymbol{A} \\ (x + y) \cdot \boldsymbol{A} = x \cdot \boldsymbol{A} + y \cdot \boldsymbol{A} \end{gathered}$$

- **Množenje** dvije matrice $\boldsymbol{A}_{m \times n} \cdot \boldsymbol{B}_{p \times q}$ je moguće akko $n = p$ tj. broj kolona lijeve matrice je jednak broju redova desne matrice. tj. vrijedi: $\boldsymbol{C}_{m \times q} = \boldsymbol{A}_{m \times n} \cdot \boldsymbol{B}_{n \times q}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} (1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1) & (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0) \\ (-1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1) & (-1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- Prilikom množenja matrica vrijedi:

$$\begin{gathered} (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) \text{ (asocijativnost)} \\ \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} \text{ (nije komutativno)} \\ \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \text{ (distributivnost)} \end{gathered}$$

4 Inverzna matrica

- Kao i nad brojevima, inverzna operacija se može definisati i za kvadratne matrice. Npr. $1 = \frac{8}{8} = 8^{-1} \cdot 8$ tako i za $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A^{-1}} \cdot \boldsymbol{A}$

- Računanje inverzne matrice je potrebno jer ako postoje matrice $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ i nepoznata matrica $\boldsymbol{X}$ onda se može reći $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$, te je $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A^{-1}B}$ i inverzna matrica dimenzija 2×2 se računa:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}_{2\times 2} = \frac{1}{det(\boldsymbol{A})} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

tj. a i d zamjene mjesta, b i c se negira, te sve podijeli sa determinantom

- Inverzna matrica postoji akko $det(\boldsymbol{A}) \neq 0$

- Pronalazak inverznih matrica većih od 2×2 je van opsega ovih bilješki.

- Korištenjem matrica, može se elegantno riješiti **sistem linearnih jednačina**. Npr.

$$\begin{gathered} 3x - y = -3 \\ 2x + 3y = 6 \end{gathered}$$

se u matričnom obliku može napisati kao:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Što liči na $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ tj. $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A^{-1}B}$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.27272\ldots \\ 2.181818\ldots \end{bmatrix}$$

I zaista, uvrštavanjem ovih vrijednosti u x i y se vidi da su jednakosti tačne.

5 Kramerova metoda (metoda determinanti)

Ukoliko postoji sistem linearnih jednačina, poput:

$$\begin{gathered} -2x + 5y + 4z = 3 \\ 5x + 2y - 2z = 8 \\ 2y - z = 1 \end{gathered}$$

onda se u matričnom obliku to može napisati kao:

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ako bi se ovaj sistem rješavao koristeći inverznu matricu onda bi prethodni izraz mogao biti tretiran kao: $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, te bi rezulat bio izračunat koristeći inverznu matricu $\boldsymbol{A}^{-1}$. Tj. $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

5.1 Kramerova metoda

Kramerova metoda rješavanja sistema linearnih jednačina koristi determinante i to na sljedeći način (koristeći primjer iznad):

1. Proračunati determinantu matrice:

$$D = det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 61$$

2. Potom se za svaku nepoznatu varijablu kreiraju nove matrice i proračunaju njihove determinante tako da se zamjene kolone nepoznate sa rezultatom jednačine:

$$D_x = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & 5 & 4 \\ \mathbf{8} & 2 & -2 \\ \mathbf{1} & 2 & -1 \end{vmatrix} = 92 \qquad D_y = \begin{vmatrix} -2 & \mathbf{3} & 4 \\ 5 & \mathbf{8} & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \end{vmatrix} = 47 \qquad D_z = \begin{vmatrix} -2 & 5 & \mathbf{3} \\ 5 & 2 & \mathbf{8} \\ 0 & 2 & \mathbf{1} \end{vmatrix} = 33$$

3. Rezultat nepoznatih se dobija dijeljenjem determinanti:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{92}{61} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{47}{61} \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{33}{61}$$

6 Inverzne matrice višeg reda

- Kao što je moguće pronaći inverzne matrice drugog reda, tako je moguće pronaći inverzne matrice višeg reda.
- Generalna formula za pronalazak inverzne matrice je:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A)$$

gdje je $adj(A)$ **adjungovana matrica** matrice A, koja se računa na sljedeći način. Npr. matrica 3×3:

$$\mathbf{adj}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\tau}$$

- Koraci za računanje adjungovane matrice su:
  1. Napravi se matrica čiji su elementi rezultati računanja determinante svih podmatrica orginalne matrice, sastavljenih od svih elemenata osim onih u redovima i kolonama u kojima se gledani element nalazi.
  2. Dodijele se kofaktori $(+ - + - + \cdots)$ formulom $(-1)^{i+j}$ gdje je i red a j kolona elementa
  3. Na kraju se dobivena matrica transponuje

Npr. pronaći inverznu matricu matrice $\boldsymbol{A}$ ako je: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

1. Pronaći determinantu svake podmatrice:
   $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 2$ $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -2$ $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$
   $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = -4$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -11$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6$
   $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$
   tako se sada može formirati matrica: $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -4 & -11 & -6 \\ -3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$
2. Nakon primjene kofaktora $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$ dobija se: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$
3. Ovako dobivena matrica se **transponuje** te je dobivena adjungovana matrica: $adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$
4. Pošto je $\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A)$ potrebno je izračunati determinantu: $det(A) = -3$

   te je inverzna matrica $\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} -2/3 & -4/3 & 1 \\ -2/3 & 11/3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, što se može provjeriti računajući $\boldsymbol{A^{-1}} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$

7 Ponavljanje

1. Koja je razlika između nul i jedinične matrice?
2. Koja je razlika između jedinične i dijagonalne matrice?
3. Definisati transponovanu matricu.
4. Množenje matrica je (zaokruži tačne odgovor/e): a) asocijativno b) komutativno c) distributivno
5. Dopuniti:
   (a) Matrica je singularna ______________________
   (b) Matrica je regularna ______________________
6. Riješiti:
   (a) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}^\tau = ?$ $\quad \begin{bmatrix} 2 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\tau = ?$
   (b) Neka je $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, koliko je $2\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^\tau$?
   (c) Neka je $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$, koliko je $3\boldsymbol{A}^\tau + 2\boldsymbol{B}^\tau$?
   (d) Neka je $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, koliko je $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, koliko je $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$?
   (e) Neka je $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, koliko je $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, koliko je $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$?
   (f) $\boldsymbol{detA} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = ?$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = ?$ $\quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = ?$
   (g) $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = ?$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = ?$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = ?$
7. Riješiti sisteme jednačina pomoću matrica (kramerovom i metodom inverzne matrice):
   (a) $3x + y = 3$
   $4x - 3y = 17$
   (b) $2x + 3y = 11$
   $-3x - 4y = -13$
   (c) $3x - y = -11$
   $2x + 3y = 11$
   (d) $3x + 2y = -9$
   $-5x - 7y = -7$
   (e) $x + 2y - z = 7$
   $2x - 3y - 4z = -3$
   $x + y + z = 0$
   (f) $5x - 2y + 4x = 0$
   $2x - 3y + 5z = 8$
   $3x + 4y - 3z = -11$
   (g) $x + 2y + 2z = 5$
   $3x - 2y + z = 6$
   $2x + y - z = -1$