

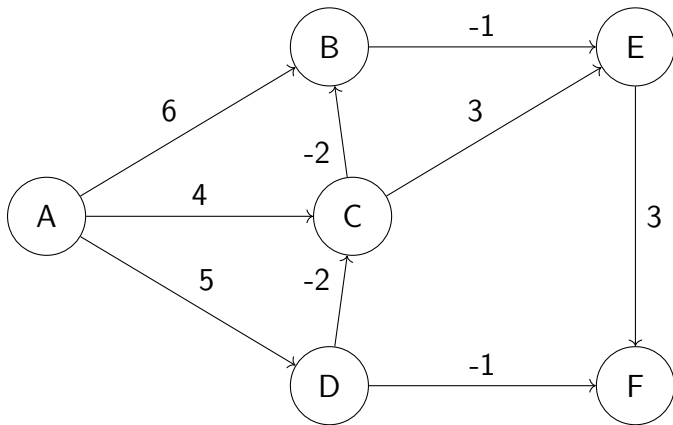
# Pronalazak najkraćeg puta u grafovima sa negativnim težinama

Bellman-Ford algoritam

## Bellman-Ford algoritam

- ▶ Za razliku od Dijkstrinog algoritma Bellman-Ford algoritam funkcionira i sa granama sa negativnim težinama
- ▶ Nazvan je po naučnicima Richard Bellman i Lester Ford
- ▶ Rezultat algoritma je najkraći put od određenog čvora do bilo kojeg drugog čvora u grafu
- ▶ Spada u klasu algoritama dinamičkog programiranja
- ▶ Obično se koristi u usmjerenim grafovima

Koji je najkraći put od čvora A do svih ostalih čvorova?



## Algoritam je:

Napravi se lista svih grana i potencijala čvorova.

U svakoj iteraciji:

- ▶ Uzima se u obzir svaka grana i osvježavaju se potencijali čvorova.
- ▶ Povoljna težina puta se zadržava, a nepovoljna se križa
- ▶ Ponavlja se dok god ima izmjene u potencijalima čvorova

## Tokom izvršavanja algoritma bitno je:

- ▶ Pratiti trenutnu granu na kojoj se nalazi
- ▶ Održavati listu potencijala čvorova

- Tabela težina grana:

$AB$	$AC$	$AD$	$BE$	$CB$	$CE$	$DC$	$DF$	$EF$
6	4	5	-1	-2	3	-2	-1	3

Analiziraju se grane jedna po jedna i osvježavaju potencijali čvorova. Potencijal početnog čvora, čvora  $A$  je 0.

Tabela potencijala čvorova:

$A$	0 (A)
$B$	
$C$	
$D$	
$E$	
$F$	

- Tabela težina grana:

<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>AD</i>	<i>BE</i>	<i>CB</i>	<i>CE</i>	<i>DC</i>	<i>DF</i>	<i>EF</i>
6	4	5	-1	-2	3	-2	-1	3

Tabela potencijala čvorova (iteracija 1):

<i>A</i>	0 (A)
<i>B</i>	6 (A)
<i>C</i>	4 (A)
<i>D</i>	5 (A)
<i>E</i>	
<i>F</i>	

- Tabela težina grana:

$AB$	$AC$	$AD$	$BE$	$CB$	$CE$	$DC$	$DF$	$EF$
6	4	5	-1	-2	3	-2	-1	3

Tabela potencijala čvorova (iteracija 1):

$A$	0 (A)
$B$	6 (A)
$C$	4 (A)
$D$	5 (A)
$E$	5 (B)
$F$	

Potencijal čvora  $B$  je 6, a grana  $BE$  rezultira potencijalu čvora  $E$  u vrijednosti:  $6 - 1 = 5$

► Tabela težina grana:

$AB$	$AC$	$AD$	$BE$	$CB$	$CE$	$DC$	$DF$	$EF$
6	4	5	-1	-2	3	-2	-1	3

Tabela potencijala čvorova (iteracija 1):

A	0 (A)
B	<del>6 (A)</del> 2 (C) jer $4 - 2 = 2$
C	4 (A)
D	5 (A)
E	5 (B) <del>7 (C)</del> jer $5 < 7$
F	

Potencijal čvora  $C$  je 4. Analizirajući granu  $CB$ , za potencijal čvora  $B$  se dobije  $4 - 2 = 2$ . Slično za čvor  $E$ , i granu  $CE$ ,  $4 + 3 = 7$  što je lošiji rezultat od postojećeg te se ignoriše.



- Tabela težina grana:

$AB$	$AC$	$AD$	$BE$	$CB$	$CE$	$DC$	$DF$	$EF$
6	4	5	-1	-2	3	-2	-1	3

Tabela potencijala čvorova (iteracija 1):

$A$	0 (A)
$B$	<del>6 (A)</del> 2 (C)
$C$	<del>4 (A)</del> 3 (D) jer $5 - 2 = 3$
$D$	5 (A)
$E$	5 (B)
$F$	4 (D) jer $5 - 1 = 4$

- Tabela težina grana:

<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>AD</i>	<i>BE</i>	<i>CB</i>	<i>CE</i>	<i>DC</i>	<i>DF</i>	<i>EF</i>
6	4	5	-1	-2	3	-2	-1	3

Tabela potencijala čvorova (iteracija 1):

<i>A</i>	0 (A)	
<i>B</i>	<del>6 (A)</del>	2 (C)
<i>C</i>	<del>4 (A)</del>	3 (D)
<i>D</i>	5 (A)	
<i>E</i>	5 (B)	
<i>F</i>	4 (D)	<del>8 (E)</del>

- Tabela težina grana:

<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>AD</i>	<i>BE</i>	<i>CB</i>	<i>CE</i>	<i>DC</i>	<i>DF</i>	<i>EF</i>
6	4	5	-1	-2	3	-2	-1	3

Tabela potencijala čvorova (iteracija 2):

<i>A</i>	0 (A)	
<i>B</i>	<del>6 (A)</del> 2 (C)	
<i>C</i>	<del>4 (A)</del> 3 (D)	
<i>D</i>	5 (A)	
<i>E</i>	<del>5 (B)</del>	1 (B)
<i>F</i>	4 (D)	

- Tabela težina grana:

<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>AD</i>	<i>BE</i>	<i>CB</i>	<i>CE</i>	<i>DC</i>	<i>DF</i>	<i>EF</i>
6	4	5	-1	-2	3	-2	-1	3

Tabela potencijala čvorova (iteracija 2):

<i>A</i>	0 (A)	
<i>B</i>	<del>6 (A)</del> <del>2 (C)</del>	1 (C)
<i>C</i>	<del>4 (A)</del> <del>3 (D)</del>	
<i>D</i>	5 (A)	
<i>E</i>	<del>5 (B)</del>	1 (B) <del>6 (C)</del>
<i>F</i>	4 (D)	

- Tabela težina grana:

<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>AD</i>	<i>BE</i>	<i>CB</i>	<i>CE</i>	<i>DC</i>	<i>DF</i>	<i>EF</i>
6	4	5	-1	-2	3	-2	-1	3

Tabela potencijala čvorova (iteracija 2):

<i>A</i>	0 (A)	
<i>B</i>	<del>6 (A)</del> <del>2 (C)</del>	1 (C)
<i>C</i>	<del>4 (A)</del> <del>3 (D)</del>	
<i>D</i>	5 (A)	
<i>E</i>	<del>5 (B)</del>	1 (B)
<i>F</i>	4 (D)	

Analizirane grane se ignorišu jer ne doprinose boljem potencijalu čvorova.

- Tabela težina grana:

<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>AD</i>	<i>BE</i>	<i>CB</i>	<i>CE</i>	<i>DC</i>	<i>DF</i>	<i>EF</i>
6	4	5	-1	-2	3	-2	-1	3

Tabela potencijala čvorova (iteracija 2):

<i>A</i>	0 (A)	
<i>B</i>	<del>6 (A)</del> <del>2 (C)</del>	1 (C)
<i>C</i>	<del>4 (A)</del> 3 (D)	
<i>D</i>	5 (A)	
<i>E</i>	<del>5 (B)</del>	1 (B)
<i>F</i>	4 (D)	4 (E)

- Tabela težina grana:

<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>AD</i>	<i>BE</i>	<i>CB</i>	<i>CE</i>	<i>DC</i>	<i>DF</i>	<i>EF</i>
6	4	5	-1	-2	3	-2	-1	3

Tabela potencijala čvorova (iteracija 3):

<i>A</i>	0 (A)		
<i>B</i>	<del>6 (A)</del>	<del>2 (C)</del>	1 (C)
<i>C</i>	<del>4 (A)</del>	3 (D)	
<i>D</i>	5 (A)		
<i>E</i>	<del>5 (B)</del>	<del>1 (B)</del>	0 (B)
<i>F</i>	4 (D)	4 (E)	

- Tabela težina grana:

<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>AD</i>	<i>BE</i>	<i>CB</i>	<i>CE</i>	<i>DC</i>	<i>DF</i>	<i>EF</i>
6	4	5	-1	-2	3	-2	-1	3

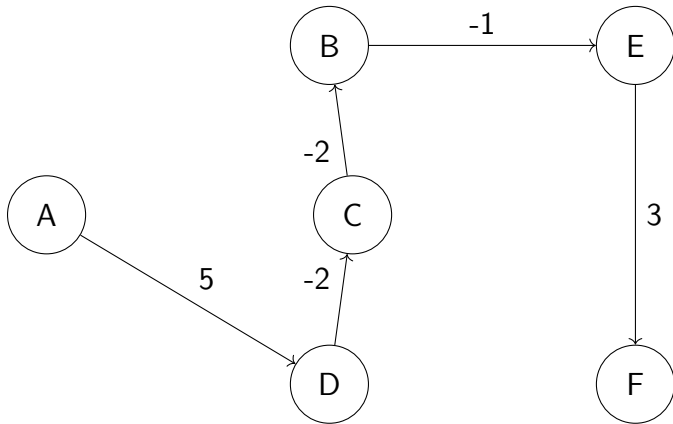
Sve ostale grane ne prave izmjene pa su preskočene.

Tabela potencijala čvorova (iteracija 3):

<i>A</i>	0 (A)		
<i>B</i>	<del>6 (A)</del>	<del>2 (C)</del>	1 (C)
<i>C</i>	<del>4 (A)</del>	3 (D)	
<i>D</i>	5 (A)		
<i>E</i>	<del>5 (B)</del>	<del>1 (B)</del>	0 (B)
<i>F</i>	<del>4 (D)</del>	<del>4 (E)</del>	3 (E)



Kao rezultat se dobije najkraći put od početnog čvora  $A$  do svih ostalih čvorova u grafu. Na prethodnom primjeru to je:  
 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F$



Primjer: Pronaći najkraći put od čvora A do svih ostalih čvorova koristeći Bellman-Ford algoritam?

