Clase **22/12/2020**

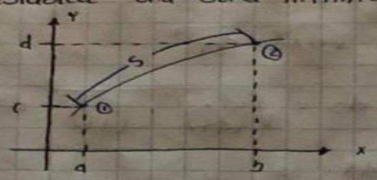
Clase 12/01/2021

Plan

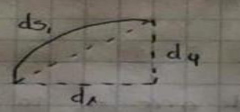
- → Repaso
- → Longitud del arco
- → Tarea → Deducir de la pag 88 la formula ds cartesiano

LONGITUD DE ARCO

- Siguiendo el esquema de procedimientos para determinar áreas de regiones planas y volúmenes de sólidos de revolución se hacen infinitas particiones de la curva y se establece una suma infinita



Una partición diferencial tendrá la forma:



Y su longitud esta dada por: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

Si $y = f(x)$ entonces se usa el diferencial de arco de la forma

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\, dx \therefore ds = \sqrt{\left((dx^2) + (dy^2)\right)\left(\frac{dx^2}{dx^2}\right)}$$

$$ds = \sqrt{\left(\left(\frac{dx^2}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)\right)(dx^2)} = ds = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)\right) dx^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)}\, dx = \int_0^s ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$1 - \cos(t) = 2\,\text{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$s = \sqrt{2}\int_0^{4\pi}\sqrt{2\,\text{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \sqrt{4}\int_0^{4\pi}\sqrt{\text{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} =$$

$$s = 2\left(\int_0^{2\pi}\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)dt + \int_{2\pi}^{4\pi} -\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)dt\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)dt \qquad u = \frac{t}{2} \qquad du = \frac{1}{2}\,dt \;;\; dt = 2du$$

$$x = 0 \quad u = 0 \;;\; x = 2\pi \quad u = \pi$$

$$\int_0^{2\pi}\text{sen}\,u \cdot 2du = 2\int_0^{2\pi}\text{sen}(u)\,du =$$

$$2\left[-\cos(u)\right]_0^{\pi} = 2(2) = 4$$

$$-\int_{2\pi}^{4\pi}\text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)dt \;;\; u = \frac{t}{2} \qquad du = \frac{1}{2}\,dt \;;\; dt = 2du$$

$$x = 2\pi \qquad u = \pi$$
$$x = 4\pi \qquad u = 2\pi$$

$$-\int_{2\pi}^{4\pi}\text{sen}(u)\cdot 2du = -2\int_{\pi}^{2\pi}\text{sen}(u)\,du$$

$$-2\left[-\cos(u)\right]_{\pi}^{2\pi} = -2(-2) = 4$$

$$s = 2(4+4) = 2(8) = 16$$

③ Determine la longitud de arco $\begin{cases} x = a\cos t + at\,\text{sen}\,t \\ y = a\,\text{sen}\,t - at\cos t \end{cases}$

en el intervalo $-1 \leq t \leq 1$

$$\frac{dx}{dt} : a\cos t + \frac{dx}{dt}\,a\,t\,\text{sen}\,t \qquad \frac{dx}{dt}\,t\,\text{sen}(t) = \text{sen}(t) + t\cos t$$

$$a\frac{dx}{dt}\cos t + a\frac{dx}{dt}\,t\,\text{sen}\,t$$

$$-a\,\text{sen}(t) \qquad + a(\text{sen}(t) + t\cos(t))$$

Si $x = f(y)$ entonces se utiliza el diferencial de arco de la forma

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \therefore ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

es decir $$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Finalmente si $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ entonces se utiliza el diferencial de arco de la forma: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)\left(\frac{dt^2}{dt^2}\right)} \therefore ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\int_0^s ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Ejercicios 4.4

1. Determine la longitud de arco de la curva

$$y = 1 - \ln(\cos(x)) \quad ; 0 \, |x| \leq \pi/4$$

$$y' = 1' - y' = \ln(\cos(x))$$

$$u = \cos(x) \qquad y' = 1 = 0$$

$$y' = \ln(u) \qquad y' = \cos(x)$$

$$\frac{1}{u} y' \cos(x) \qquad y' = \cos(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

$$\frac{1}{\cos(x)} y' \cos(x) = \frac{1}{\cos(x)} - \operatorname{sen}(x)$$

$$-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -\operatorname{tg}(x)$$

$$y' = 0 - (-\operatorname{tg}(x))$$

$$y' = \operatorname{tg}(x)$$

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = tg(x)$$

$$S = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (tg(x))^2}\, dx$$

$$1 + tg^2(x) = sec^2(x)$$

$$S = \int_0^{\pi/4} \sqrt{sec^2(x)}\, dx = \int_0^{\pi/4} sec(x)\, dx$$

$$S = \left[\ln(tg(x) + sec(x)) \right]_0^{\pi/4}$$

$$S = \ln(1 + \sqrt{2})$$

② Determine la longitud de arco de la curva

$$\begin{cases} x = t - sen\, t \\ y = 1 - cos\, t \end{cases}$$ en el intervalo $0 \leq t \leq 4\pi$

$$\frac{dx}{dt} = t - sen\, t \quad \therefore \quad \frac{dt}{dt} = 1 = 1 - \frac{dx}{dt} sen\, t = cos\, t$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - cos(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - cos\, t \quad \therefore \quad \frac{dy}{dt} 1 = 0 - \frac{dy}{dt} cos\, t = - sen\, t$$

$$\frac{dy}{dt} = sen(t)$$

$$S = \int_0^{4\pi} \sqrt{(1 - cos(t))^2 + (sen(t))^2}\, dt$$

$$S = \int_0^{4\pi} \sqrt{1 - 2cos(t) + cos^2(t) + sen^2(t)}$$

$$cos^2(t) + sen^2(t) = 1$$

$$S = \int_0^{4\pi} \sqrt{-2cos(t) + 2}\, dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{2(1 - cos(t))}\, dt$$

$$S = \int_0^{4\pi} \sqrt{2} \sqrt{-cos(t) + 1}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{4\pi} \sqrt{-cos(t) + 1}\, dt$$

Si $x = f(y)$ entonces se utiliza el diferencial de arco de la forma

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \therefore \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

es decir $s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

Finalmente si $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ entonces se utiliza el diferencial de arco de la forma: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)\left(\frac{dt^2}{dt^2}\right)} \quad \therefore \quad ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\int_0^s ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Ejercicios 4.4

1. Determine la longitud de arco de la curva

$$y = 1 - \ln(\cos(x)) \quad ; 0 \leq x \leq \pi/4$$

$$y' = 1' - y' = \ln(\cos(x))$$

$$u = \cos(x) \qquad y' = 1 = 0$$

$$y' = \ln(u) \qquad y' = \cos(x)$$

$$\frac{1}{u} y' \cos(x) \qquad y' = \cos(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{1}{\cos(x)} y' \cos(x) = \frac{1}{\cos(x)} - \operatorname{sen}(x)$$

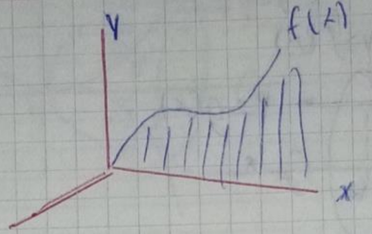
$$-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -\operatorname{tg}(x)$$

$$y' = 0 - (-\operatorname{tg}(x))$$

$$y' = \operatorname{tg}(x)$$

Plan 22/12/2020.

1. Solido de revolución
2. Tarea



Tarea

Nombre: Walter Fernando Nieves Cedillo

Fecha: 22/12/2020.

Docente: Ing. Luis Enrique Gonzáles

Solido de Revolución

Es cuando una función gira respecto a un eje. Hay varios casos.

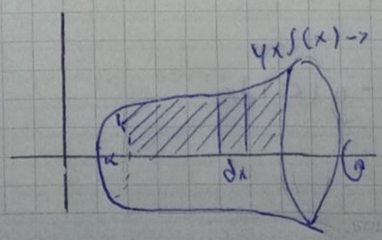
Caso 1

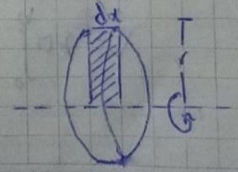
Primero se genera un rectángulo y se hace girar
cuando gira el rectángulo se genera un disco y su volumen es

$$dV = \pi r^2 dx = \pi (f(x))^2 dx$$

Como es integrales para el area en este caso volumen

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

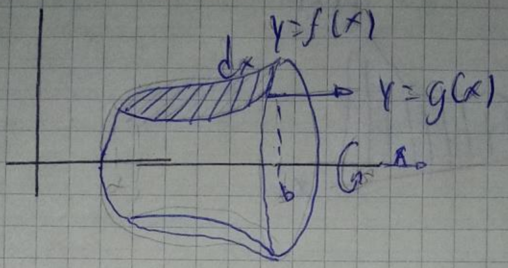




Caso 2

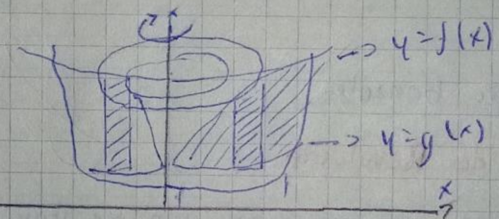
Al girar la region alrededor del eje x se genera un solido

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

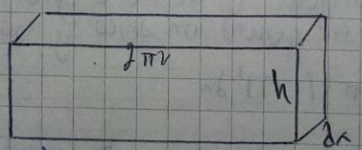


Caso 3

El solido diferencial tendra la forma de una corteza.



Para determinar el elemento estructural diferencial lo cortamos y lo abrimos y se obtiene un prisma rectangular.



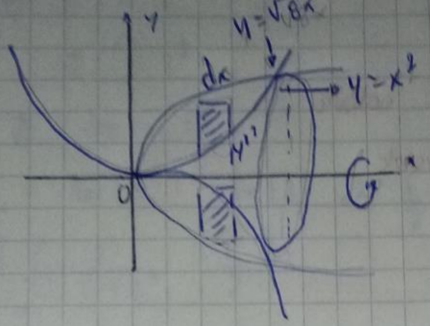
Su volumen

$$dV = 2\pi r h dx$$

Volumen total

$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x)) dx$$

Ejemplo:



$x^2 = \sqrt{8x}$

$x^4 = 8x$

$x(x^3-8)=0$

$x=0 \quad x=2$

Al hacer girar cuyo volumen esta dado

$$dV = \pi(r_2^2 - r_1^2)\,dx \quad y \quad r_2 = \sqrt{8x} \text{ y } r_1 = x^2$$

Entonces:

$$V = \pi\int_0^2 \left((\sqrt{8x})^2 - (x^2)^2\right)dx$$

$$= \pi\int_0^2 (8x - x^4)\,dx$$

$$= \pi\left(8\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2$$

$$= \pi\left(16 - \frac{32}{5}\right)$$

$$V = \frac{48}{5}\pi\, u^3.$$