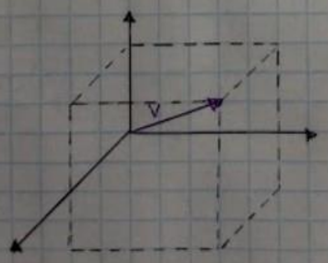
Clase 5

20/10/2021

- Generalización de vectores en R^3.
  - Representación de un vector en n dimensiones.
  - Expresando un vector en 3D de forma matricial se tiene:



$$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]\begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} = [a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}]$$

- Tarea 3
  - Qué es la identidad de Euler y demostrar.

La identidad de Euler demuestra la unidad de las matemáticas, por demostrar y vincular distintas areas de esa ciencia formal.

> Formula de Euler

$$e^{ix} = \cos(x) + i\ \mathrm{sen}(x)$$

> Identidad de Euler

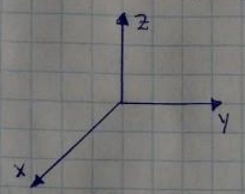
$$e^{ix} + 1 = 0$$

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots$
- $\mathrm{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7} \pm$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm$

- Expandiendo a n dimensiones se tiene que:

$$\vec{a} = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \\ \vdots \\ \vec{n} \end{bmatrix}$$

- Si el vector $a_x\vec{i}, a_y\vec{j}, a_z\vec{k}$ gráficamente es:



$* \ \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} + \ldots a_n\vec{n}$

No se puede graficar en esta realidad pero sí realizar operaciones matemáticas.

- La rotación de un sistema se da como:

$$\begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\vec{i} & \alpha_2\vec{j} & \alpha_3\vec{k} \\ \beta_1\vec{i} & \beta_2\vec{j} & \beta_3\vec{k} \\ \gamma_1\vec{i} & \gamma_2\vec{j} & \gamma_3\vec{k} \end{bmatrix}$$

Como los ángulos α, β y γ se pueden expresar como senos y cosenos, entonces: se puede usar para generar rotaciones y se llama matriz de rotación.

> Demostración:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots$$

$i^2 = -1$

$i^3 = -1i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} \cdots$$

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x); \quad \text{si } x = \pi$$

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \operatorname{sen}(\pi)$$

$$e^{i\pi} = -1 + 0$$

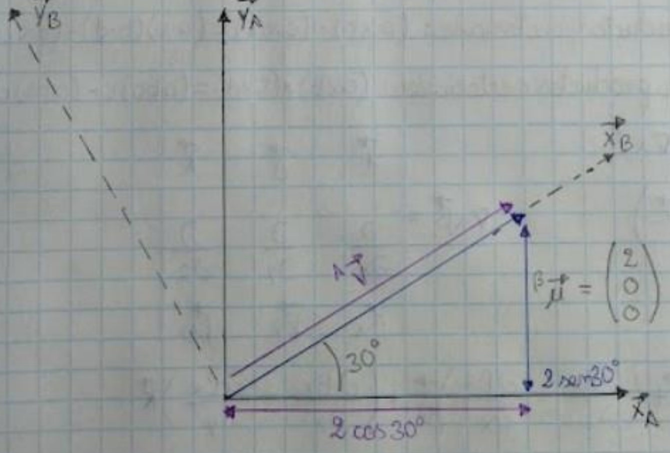
$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0} \ //$$

- Ejemplo de matriz rotacional

- Encuentre las coordenadas del vector $^{B}\vec{\mu} = (2,0,0)^T$ después de sufrir una rotación alrededor del eje $\vec{z}_A$ de 30°.

- $^{A}R_{B} = \mathrm{Rot}(\vec{z}_A, 30°)$

$$^{A}R_{B} = \begin{pmatrix} \cos 30 & -\operatorname{sen} 30 & 0 \\ \operatorname{sen} 30 & \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- $^{A}\vec{v} = {}^{A}R_{B} \cdot {}^{B}\vec{\mu}$

$$^{A}\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(30) & -\operatorname{sen}(30) & 0 \\ \operatorname{sen}(30) & \cos(30) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$^{A}\vec{v} = \begin{pmatrix} 2\cos 30° \\ 2\operatorname{sen} 30° \\ 0 \end{pmatrix}$$