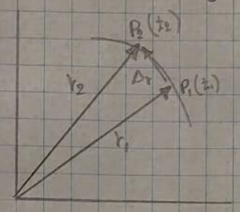
1.6 Movimiento Curvilíneo de Partículas

Se puede estudiar en dos o tres dimensiones, es necesario conocer los sistemas existentes.

La trayectoria es la curva emitida por la partícula al moverse en el tiempo.

La posición de una partícula está generalmente determinada por un vector.



Movimiento de una partícula

En un tiempo t_1 o t_2 la partícula ocupará el punto P_1 o P_2 respectivamente, determinada siempre por un vector r.

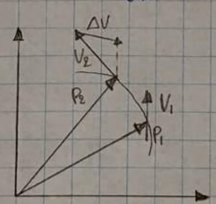
La variación de la posición ($\Delta \vec{r}$) definiendo velocidad media e instantánea:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{V_m} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Variación de la velocidad

La velocidad es un vector tangente a la trayectoria. Al variar cada punto respecto a la velocidad, la aceleración media será:

$$a_m = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta t}$$

$$a_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

la aceleración instantánea:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La aceleración puede tener cualquier dirección y sentido.

Resumiendo:

- La velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

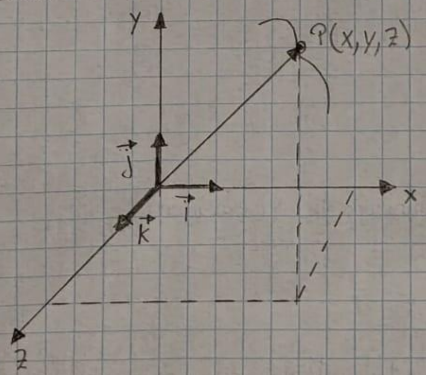
- La aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = v \cdot \frac{dv}{d\vec{r}}$$

1.6.1 Movimiento en coordenadas rectangulares o cartesianas



Movimiento en coordenadas rectangulares.

El vector posición:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

i, j y k son vectores unitarios en los ejes x, y, z.

La velocidad sera:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

aplicando la regla de la cadena, derivamos:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

al derivar se anulan $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ al no variar:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

la velocidad tiene 3 componentes en x, y, z. Se escribe:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{v} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

La aceleración se expresa:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

derivando la velocidad:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt}\vec{k}$$

puede expresarse:

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

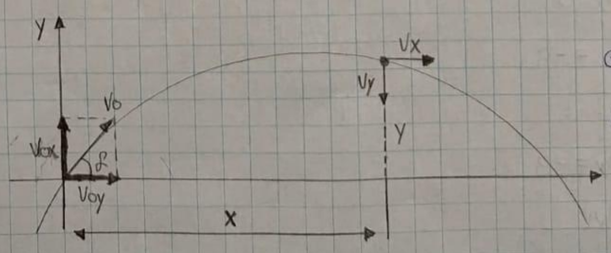
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

Se puede estudiar cada componente x, y, z por separado, obteniendo:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt}$$



Movimiento de un proyectil en dos dimensiones.

Los datos son aceleraciones, velocidad y el ángulo:

$$V_0 = 0$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g \text{ (constante)}$$

el vector posición en cualquier punto:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

una velocidad:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$$

y una aceleración;

$$\vec{a} = -g\vec{j}$$

velocidades iniciales:

$$V_{0x} = V_0 \cdot \cos\alpha$$

$$V_{0y} = V_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Resumiendo y calculando en ambos ejes obtenemos:

- Posición:

$$x = V_{0x}t$$

$$y = V_{0y}t$$

- Velocidad:

$$V_x = V_{0x}$$

$$V_y = V_{0y} - gt$$

- Aceleración:

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

puede usarse también:

$$a_y = -g$$

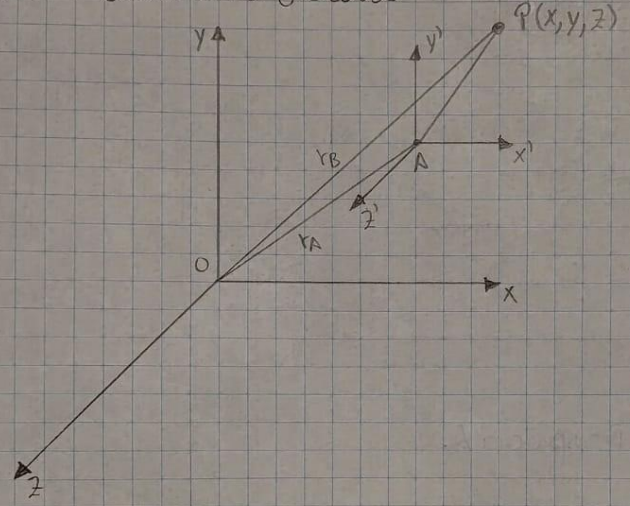
$$v_y \frac{dv}{dy} = -g$$

separando variables e integrando:

$$\int_{V_{0y}}^{V_y} V_y \cdot dV_y = \int_{y_1}^{y_2} -g\,dy$$

$$\frac{V_y^2}{2} - \frac{V_0^2 y}{2} = gy_1 - gy_2$$

1.6.2 Movimiento Relativo



El sistema de coordenadas rectangulares nos sirve para estudiar el movimiento relativo y si se desea calcular velocidad, espacio o aceleración en un sistema diferente:

Se debe relacionar los vectores posición.

De la figura:

$$\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

y derivando;

$$\frac{d\vec{r}_{B/A}}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

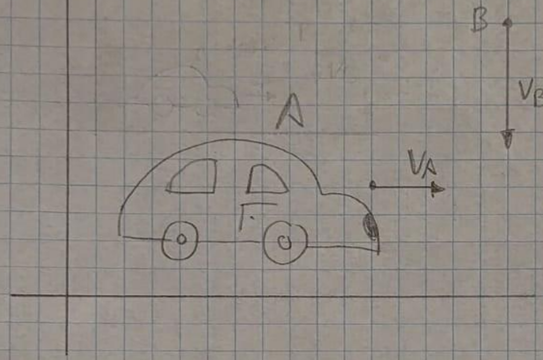
es decir:

$$\vec{v}_{\frac{B}{A}} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

La aceleración igual:

$$\vec{a}_{\frac{B}{A}} = \vec{a}_B - \vec{a}_A$$

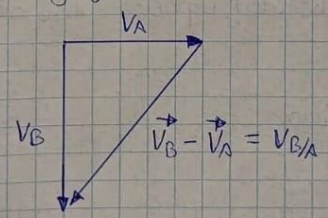
Ejemplo 1. Un carro se mueve en la lluvia con una velocidad V_A y la lluvia cae con velocidad V_B respecto también a la tierra. Calcular la velocidad de la lluvia respecto al carro:



Pide la velocidad de B respecto a A.

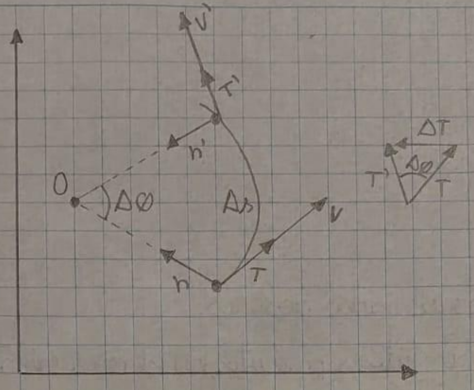
$$\vec{V}_{\frac{B}{A}} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

realizando gráficamente se calcula lo solicitado:



16.3 Coordenadas Normal y Tangencial

Este sistema nos sirve cuando tenemos la velocidad en magnitud y sentido y deseamos la aceleración.



El sistema varía de posición respecto al tiempo:
La variación entre dos puntos muy próximos puede calcularse y graficarse:

$$\Delta T = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta \emptyset}{2}\right)$$

y derivando:

$$\lim_{\Delta \emptyset \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta \emptyset} = \lim \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta \emptyset}{2}\right)}{\frac{\Delta \emptyset}{2}} = 1$$

la dirección es la del vector $\vec{n}$:

$$\frac{d\vec{T}}{d\emptyset} = \vec{n}$$

$\vec{n}$ es el vector que se orienta al centro instantáneo de la curvatura.
Si se conoce la velocidad:

$$\vec{v} = v\vec{T}$$

La aceleración, derivando:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt}$$

el valor de $\frac{d\vec{T}}{dt}$ puede calcularse como:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

aceleración tangencial:

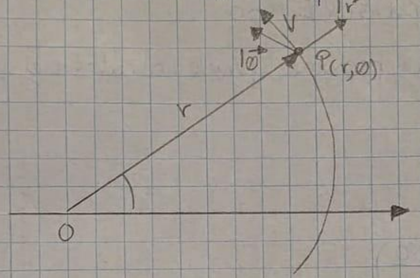
$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

aceleración normal (centrípeta):

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

1.6.4 Movimiento en coordenadas polares.

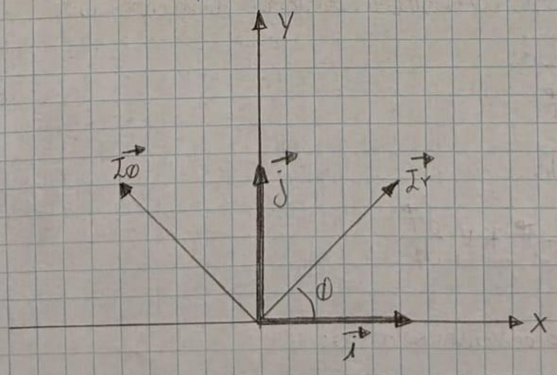
Las coordenadas polares son útiles para utilizar el movimiento en dos dimensiones o movimientos en el plano.



La velocidad y la aceleración tendrán vectores en la dirección de los vectores unitarios:

$\vec{i_r}$ = en la dirección de r (radial)

$\vec{i_\theta}$ = en la dirección perpendicular a r (transversal).



$$\vec{i_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{i_\theta} = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

Luego de derivar respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{d\vec{ir}}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{j\theta}$$

$$\frac{d\vec{i\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{jr}$$

Para el análisis del movimiento partimos del vector posición:

$$r = f(t)$$

$$\theta = f(t)$$

la velocidad;

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{ir} + r\frac{d\vec{ir}}{dt}$$

sustituyendo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\vec{ir} + r\dot{\theta}\vec{j\theta}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{ir} + r\dot{\theta}\,\vec{j\theta}$$

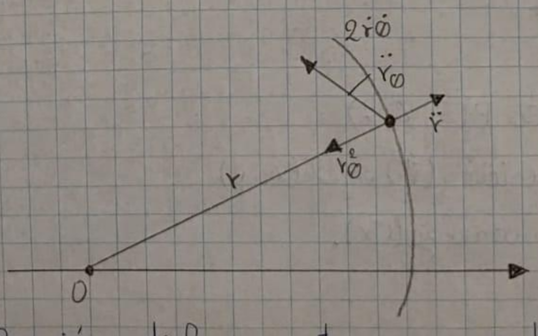
velocidad radical $v_r = \dot{r}$

veloncidad transversal $v_T = r\dot{\theta}$

Aquí se incorpora la velocidad angular:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

Existen dos aceleraciones:



Aceleraciones en coordenadas polares.

la aceleración radial compuesta a su vez por dos aceleraciones:

$a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

$r\dot{\theta}^2$ = centrípeta

como,

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = w$$

la aceleración centrípeta $= rw^2$

y la aceleración transversal $a_T = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

siendo:

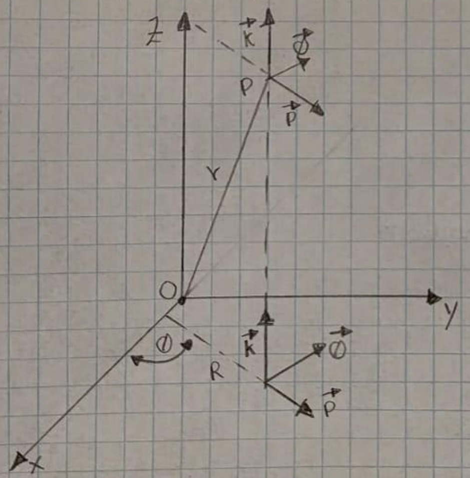
$r\ddot{\theta}$ = aceleración angular.

y

$2\dot{r}\dot{\theta}$ = aceleración de coliorís

1.6.6 Movimiento en coordenada cilíndrica

Las coordenadas cilíndricas pueden ser consideradas polares, ya que aumentan una coordenada a estas.



Las coordenadas del punto $P(R, \theta, z)$

R= proyección del vector posición ($\vec{r}$) en el ($x\,o\,y$)

θ= ángulo de la proyección con el eje(Ox).

z= coordenada cartesiana.

Los vectores unitarios pueden expresarse en coordenadas rectangulares:

$$\vec{\rho} = \cos\phi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\phi\,\vec{j}$$
$$\vec{\phi} = -\operatorname{sen}\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j}$$

El vector posición está dado como,

$$\vec{r} = R\vec{\rho} + z\vec{k}$$

que puede ser dada en forma paramétrica,

$$R = f(t)$$
$$\phi = f(t)$$
$$z = f(t)$$

la velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{R}\vec{\rho} + R\frac{d\vec{\rho}}{dt} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{v} = \dot{R}\vec{\rho} + R\dot{\phi}\vec{\phi} + \dot{z}\vec{k}$$

la aceleración:

$$\vec{a} = \ddot{R}\vec{\rho} + \dot{R}\frac{d\rho}{dt} + \dot{R}\dot{\phi}\vec{\phi} + R\ddot{\phi}\vec{\phi} + R\dot{\phi}\frac{d\vec{\phi}}{dt} + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{R}\vec{\rho} + \dot{R}\dot{\phi}\vec{\phi} + \dot{R}\dot{\phi}\vec{\phi} + R\ddot{\phi}\vec{\phi} - R\dot{\phi}^2\vec{\rho} + \ddot{z}\vec{k}$$

agrupando:

$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi})^2\vec{\rho} + (R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi})\vec{\phi} + \ddot{z}\vec{k}$$