Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ingeniería

61.09 Probabilidad y Estadística B
Curso 27

Método Monte Carlo

Nombre y Apellido
Padrón 100.000

21 de agosto de 2016

Enunciado

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa. Sea $M > 0$ el valor máximo de la función f sobre el intervalo $[a, b]$.

(a) Se elige al azar un punto de coordenadas (X, Y) dentro del rectángulo de vértices $(a, 0)$, $(b, 0)$, (b, M), (a, M). Relacionar la probabilidad del evento $A = \{Y \leqslant f(X)\}$ con el valor de la integral $\int\limits_a^b f(x)dx$.

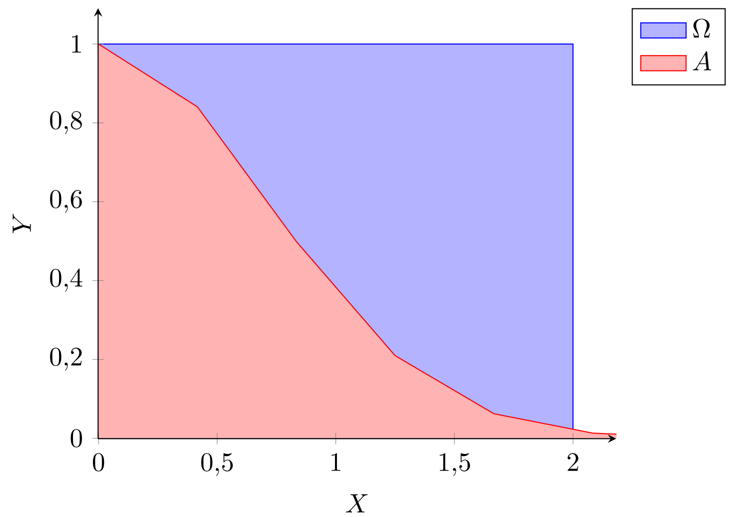
(b) Si se conoce el valor de la probabilidad, $P(A)$, del evento $A = \{Y \leqslant f(X)\}$, ¿cómo se calcula la integral $\int\limits_a^b f(x)dx$?

(c) Obtener un método que permita estimar el valor de la integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ en base a los resultados de n simulaciones del experimento descrito en Inciso (a).

(d) Estimar el valor de la integral $\int\limits_0^2 e^{-x^2}dx$ utilizando el método obtenido en Inciso (c) basándose en los resultados de 10000 simulaciones.

Resolución

Inciso (a)



$$P(A) = P(Y \leqslant f(X)) = \frac{area(A)}{area(\Omega)} = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{(b-a).M}$$

Inciso (b)

Siendo $P(A)$ conocido, se puede estimar el valor de la integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ del siguiente modo

$$\int\limits_a^b f(x)dx = P(A).(b-a).M$$

Inciso (c)

Siendo conocidos los valores de a, b, M y conocida la función $f(x)$, se puede estimar el valor de la integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ obteniendo un valor estimado de $P(A)$, $A = \{Y \leqslant f(X)\}$.

Para ello, se genera un vector aleatorio (X, Y) y se verifica si forma parte del evento A, es decir, si $Y \leqslant f(X)$. Repitiendo varias veces la simulación se puede obtener un mejor valor de $P(A)$.

Siendo n la cantidad de simulaciones, la probabilidad se puede estimar de la siguiente forma:

$$P(A) = \frac{\#\{i \,\epsilon \{1, \ldots, n\} : y_i \leqslant f(x_i)\}}{n}$$

Inciso (d)

Se desea el valor de $\int_{0}^{2} e^{-x^2} dx$ utilizando el método, basándose en resultados de 10000 simulaciones. De la integral se pueden extraer los siguientes datos:

- $a = 0$
- $b = 2$
- $M = 1$
- $f(x) = e^{-x^2}$

Se diseñó el siguiente algoritmo en Octave:

Listing 1: Algoritmo Monte Carlo en Octave

```
% Entrada
a = 0;
b = 2;
M = 1;
cant_simulaciones = 10000;

% Genero los valores de X y de Y
longitud_uniforme_x = b - a;
X = rand(1, cant_simulaciones) * longitud_uniforme_x;
Y = rand(1, cant_simulaciones) * M;

% Aplico la funcion e ^ (- x ^2) y comparo con Y
f_X = exp(-(X .^ 2));
A = Y <= f_X;

% Calculo la probabilidad y finalmente el valor de la integral
probabilidad = sum(A) / cant_simulaciones;
integral = probabilidad * longitud_uniforme_x * M
```

Corriendo el algoritmo, se obtuvo el valor 0.88460. Siendo el valor analítico de la integral 0.88208, se puede concluir que el método Monte Carlo aproxima bastante al valor analítico.