Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ingeniería

75.29 Teoría de Algoritmos

Trabajo Práctico 2

Integrantes

- Arjovsky, Tomás
- Gavrilov, Seva
- Pereira, Fernando
- Pérez Dittler, Ezequiel

Segundo cuatrimestre de 2016

Índice

1. Programación dinámica

1.1. El problema de la mochila (versión 0-1)

En este problema, tenemos una cantidad n de items, cada uno de los cuales posee un peso w y un valor v, ambos no negativos. Con estos items, se requiere llenar una mochila, la cual posee una capacidad máxima determinada.

El problema plantea encontrar los items que se incluirán en la mochila, de tal forma que la suma de todos sus pesos particulares w_i no supere la capacidad máxima de la misma y, además, la suma de todos los valores particulares v_i de los objetos que se incluyen, sea máxima.

Contrario a lo que uno puede intuir, no existe un algoritmo greedy eficiente que lo resuelva, por lo que caemos en la programación dinámica como una nueva técnica para encontrar soluciones óptimas a determinados problemas, como el de la mochila, partiendo el mismo en sub-problemas cada vez más pequeños (los cuales se resolverán mucho más fácilmente), y solapando las soluciones a dichos sub-problemas para llegar a la solución del problema original. Es decir, debemos procurar resolver sub-problemas cada vez más sencillos, los cuales se utilizarán para encontrar la solución al problema mayor.

En este informe se verá un pequeño análisis general del orden de complejidad de la solución encontrada, como así también las diferencias entre los tiempos de ejecución de dos enfoques distintos para implementar la solución (Bottom-up y Top-Down).

1.1.1. Solución

En esta versión del problema de la mochila, podemos entender que un único ítem puede pertenecer a la solución óptima o no. Siendo S nuestro conjunto solución, resumiremos la misma en encontrar el valor máximo $V = \sum v_i$ con $i \in S$ que se puede incluir en la mochila sin superar su capacidad, es decir, restringido a que $\sum w_i \leq W$.

Es trivial ver que, si tenemos un caso hipotético en el que la capacidad de la mochila es $W = 100$ y el peso de un elemento $w_i = 101$, entonces, dicho elemento i queda descartado de la solución óptima. Por otro lado, si el peso del item es menor a la capacidad de la mochila, puede o no pertenecer a la solución óptima. Esto se resuelve comparando entre el valor máximo V que se puede llegar a obtener con una solución óptima *sin* el elemento corriente, y el valor máximo V que se puede obtener con una solución óptima *incluyendo* el elemento corriente. Simplemente, el mayor de estos dos valores, es la solución óptima que se está buscando.

Suponemos que tenemos n elementos $\{1 .. n\}$. Quiero encontrar la solución óptima para n elementos y una capacidad de W. Formalizando lo expresado en los últimos dos párrafos, quiero encontrar el valor máximo V_{max} que puedo obtener cumpliendo las restricciones planteadas ($V_{max} = valor\_optimo(n, W)$).

Comenzando con el elemento n, si $w_n > W \Rightarrow valor\_optimo(n, W) = valor\_optimo(n - 1, W)$, ya que no puedo incluir a mi elemento n, por lo que debo encontrar una solución óptima con los $n-1$ elementos restantes de mi conjunto, y el mismo peso máximo como restricción (no se incluyó el elemento, por lo que no se ocupó espacio).

Ahora bien, si $w_n \leq W \Rightarrow valor\_optimo(n, W) = max(valor\_optimo(n - 1, W), v_n + valor\_optimo(n - 1, W - w_n))$. Como se planteó anteriormente, se debe encontrar el valor máximo entre una solución sin incluir al elemento corriente, y una solución incluyendo al elemento (esto es, encontrar una combinación con los n - 1 elementos restantes, ya habiéndole sumado el valor del elemento n, y habiéndole restado a la capacidad total de la mochila el peso del elemento que incluí). Esta recurrencia es la que se plantea para resolver el problema de la mochila.

1.1.2. Complejidad

Al resolver este problema por programación dinámica, uno de los puntos importantes a destacar es el de la *memoización*. Es decir, debemos utilizar alguna estructura de datos para poder guardar los resultados de cada uno de los sub-problemas, y utilizarlos cuando se los necesite nuevamente. En efecto, nos aseguramos de calcular una solución óptima para un sub-problema en particular solo una vez, y luego tomar ese resultado cuantas veces lo necesitemos en $O(1)$.

Al tomar la recurrencia planteada en la sección anterior, vemos que a nuestros sub-problemas los estamos dividiendo en base a dos parámetros:

- Cantidad de elementos
- Peso restante en la mochila

Es decir, cada cantidad de elementos distinta y peso restante distinto es un sub-problema particular a resolver. Por ende, podemos utilizar una matriz $M[n][W]$, en la cual guardaremos el valor óptimo conseguido para cada sub-problema particular (es decir, para determinada cantidad de elementos $i \in 1 \dots n$ y determinado peso de la mochila $w \in 1 \dots W$).

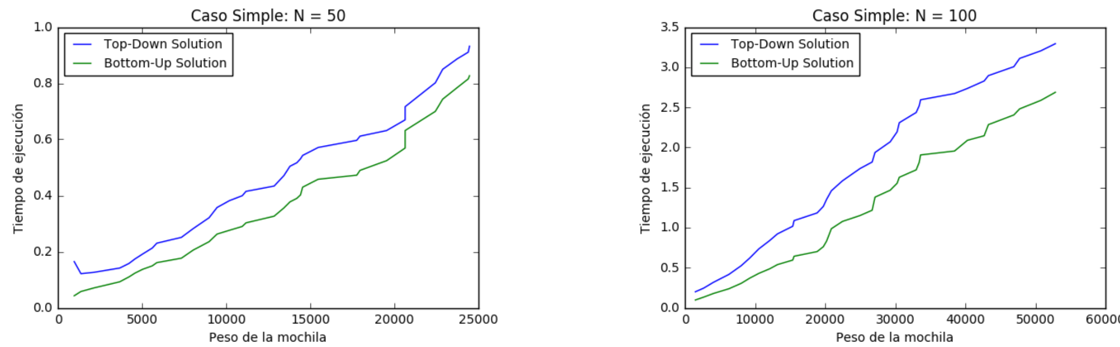
El algoritmo va resolviendo cada sub-problema particular, por lo que irá llenando la matriz planteada con el valor óptimo de cada suproblema. Si necesitamos la solución para un sub-problema ya resuelto, simplemente consultamos la matriz en O(1), por lo que el orden de nuestro algoritmo depende de la cantidad de sub-problemas a resolver, ergo, de la cantidad de elementos que posee la matriz. Por esto, podemos decir que nuestro algoritmo es $O(nW)$.

Ahora bien, es de notar que no es un orden de complejidad polinomial dependiente de n común, ya que también depende de W. Este tipo de algoritmos se los conoce como *pseudo-polinomiales*, los cuales pueden ser eficientes si los valores w_i de los ítems entrada son lo suficientemente pequeños, pero cuya complejidad aumenta muchísimo para valores muy grandes como veremos en los próximos ejemplos.

1.1.3. Tiempos de ejecución

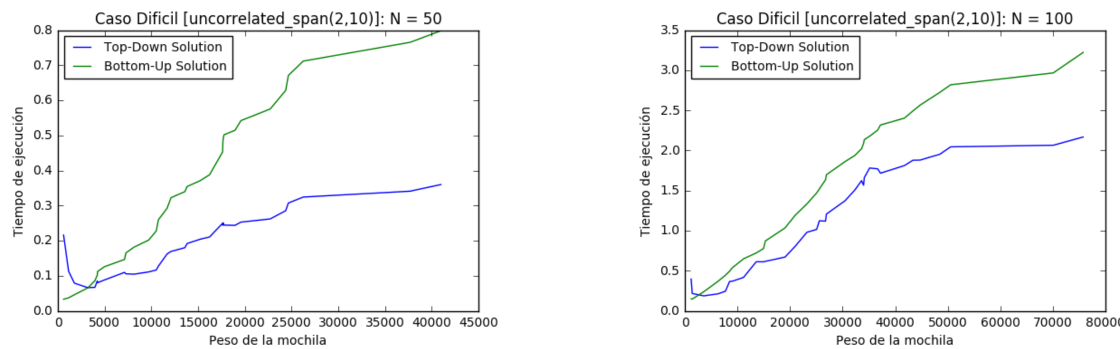
En esta sección se encontrarán tiempos de ejecución alcanzados por las soluciones implementadas para el problema de la mochila. Vale aclarar que se implementó tanto una solución Top-Down como una solución Bottom-Up, con sus respectivas ventajas y desventajas, y justamente, uno de los enfoques de esta sección es mostrar la diferencia de tiempos entre cada una en base a las características de los parámetros de entrada (como ser el peso de la mochila o el peso de cada uno de los ítems de entrada).

Primeramente, mostramos un par de casos básicos, con 50 y 100 elementos, pesos de mochila máximo cerca de los 26000 y 52000 respectivamente, y valores y pesos de los elementos distribuidos uniformemente.



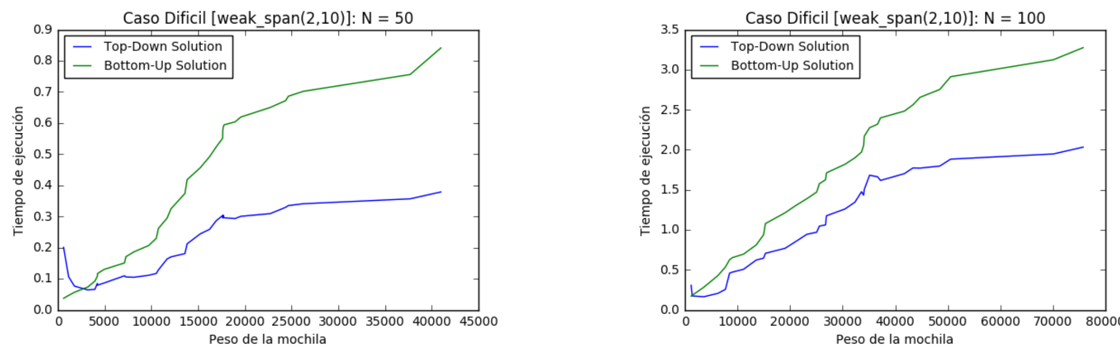
(a) $n = 50$, $W_{max} \approx 26000$ (b) $n = 100$, $W_{max} \approx 52000$

Figura 1: Instancias con pesos y valores desvinculados (uncorrelated)



(a) $n = 50$, $W_{max} \approx 41000$ (b) $n = 100$, $W_{max} \approx 75000$

Figura 2: Instancias con pesos y valores desvinculados difícil ($uncorrelated\_span(2, 10)$)

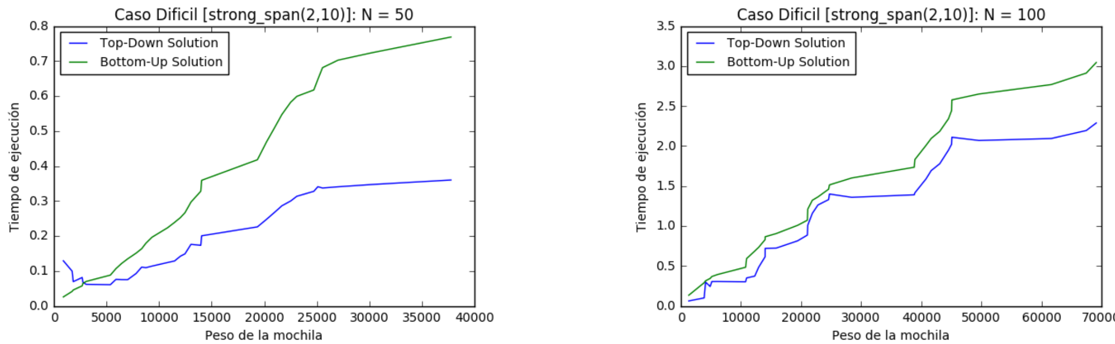


(a) $n = 50$, $W_{max} \approx 41000$ (b) $n = 100$, $W_{max} \approx 75000$

Figura 3: Instancias con pesos y valores debilmente vinculados difícil ($strongly\_correlated\_span(2, 10)$)

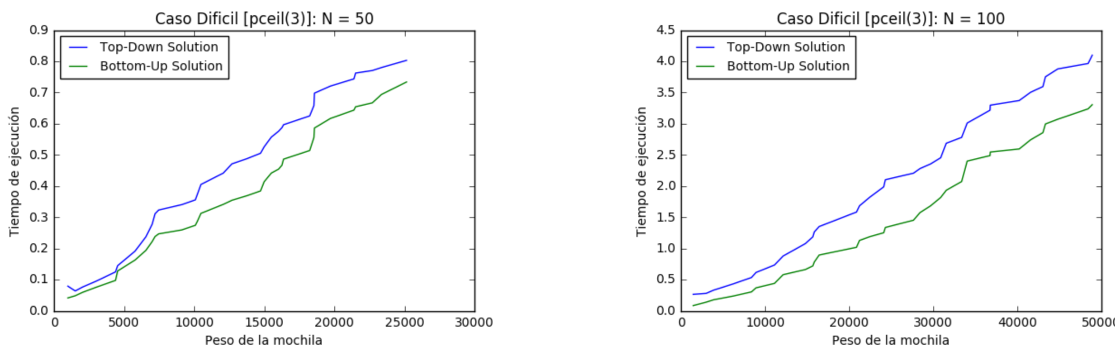
Como podemos ver en el caso básico inicial, los tiempos entre la solución Top-Down y Bottom-Up crecen relativamente en forma similar para esta instancia del problema, siendo la solución Bottom-Up la que mejor se ajusta. Lo que hay que notar de estos dos ejemplos es que el tiempo de ejecución del problema con $n = 100$ (para el mismo peso) es el doble del tiempo encontrado para el problema con $n = 50$. Podemos ver, por ejemplo, con un peso $W = 20000$, que en el gráfico con 50 elementos, la solución Bottom-Up tardó aproximadamente 0.5

[s] y la Top-Down 0.6 [s], mientras que para 100 elementos y mismo peso, los tiempos son aproximadamente de 1 [s] y 1.2 [s] respectivamente. Un comportamiento similar (aunque un tanto más variable, por ser instancias más difíciles), se puede ver en los tiempos de las demás ejecuciones.



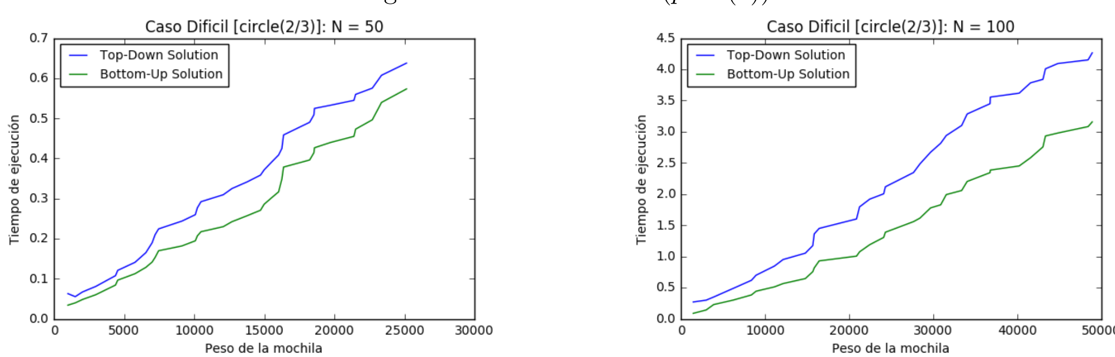
(a) $n = 50$, $W_{max} \approx 37000$ (b) $n = 100$, $W_{max} \approx 75000$

Figura 4: Instancias con pesos y valores fuertemente vinculados difícil ($strongly\_correlated\_span(2, 10)$)



(a) $n = 50$, $W_{max} \approx 25000$ (b) $n = 100$, $W_{max} \approx 49000$

Figura 5: Instancia difícil ($pceil(3)$)



(a) $n = 50$, $W_{max} \approx 25000$ (b) $n = 100$, $W_{max} \approx 49000$

Figura 6: Instancia difícil ($circle(2/3)$)

Ahora pasamos a un caso más particular e interesante. Nos enfocamos en una instancia del problema en la que la capacidad máxima de la mochila es grande y tenemos un set de entrada con pesos w_i similares entre sí y muy altos (tal que solo uno de los elementos entra en la mochila).

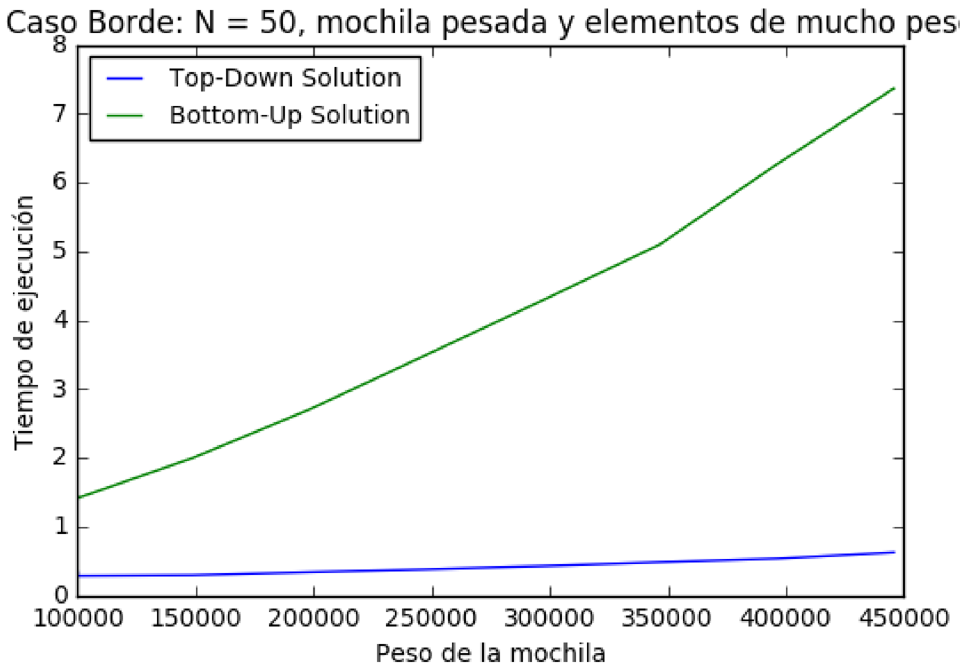


Figura 7: $n = 50$, w_i altos y similares entre sí

Una de las cosas que queríamos remarcar es la diferencia entre los tiempos de ejecución de la implementación Top-Down y la Bottom-Up en este tipo de instancias del problema.

La enorme diferencia se debe básicamente a la forma de resolver el problema que tiene cada técnica. La implementación Bottom-Up va resolviendo desde los sub-problemas más pequeños hasta llegar al problema final deseado iterativamente, obteniendo la solución óptima para absolutamente todos los sub-problemas cuyos parámetros de entrada son menores o iguales al problema original. La desventaja de esta técnica, es que está desperdiciando mucho tiempo en resolver sub-problemas que *podrían no utilizarse* para resolver el problema deseado. En otras palabras, la solución Bottom-Up llena completamente la matriz M de resultados óptimos, cuando hay muchos sub-problemas que no son necesarios.

Por otro lado, la solución Top-Down arranca desde el problema con los parámetros originales que queremos resolver, y recursivamente va partiendo el original en sub-problemas y resolviéndolos hasta obtener todos los resultados deseados. Es decir, la solución Top-Down solo se enfoca en resolver los sub-problemas estrictamente necesarios en los que se divide el problema original, sin gastar tiempo de cómputo en sub-problemas cuya solución jamás utilizaríamos. La desventaja de la solución Top-Down es el overhead que puede traer una solución recursiva, y el espacio en el stack que ésta requiere, el cual se reduce de cierta forma utilizando correctamente variables globales.

Informalmente, podemos decir que la solución Bottom-Up se toma su tiempo en resolver absolutamente todo, mientras que la solución Top-Down va al grano y resuelve lo estrictamente necesario. Es por eso que en este tipo de problemas, la solución Top-Down puede resultar mucho más eficiente que la Bottom-Up.

1.2. El problema del viajante de comercio

El problema del viajante consiste, dado n ciudades a visitar, en encontrar un camino de costo mínimo que recorra una única vez cada ciudad, regresando finalmente al origen. Dirigirse de una ciudad a otra tiene un costo, pudiendo ser simétrico o no.

El problema del viajante de comercio se hizo muy popular en la década del 50 y 60, luego de que se presentara el artículo "Solution of a large-scale traveling-salesman problem" (Dantzig, Fulkerson, and Johnson 1954) donde resuelve el problema para 49 ciudades (una por cada estado de EEUU y Washington). El método propuesto por el artículo usa técnicas de programación lineal, aún cuando siquiera existían los programas informáticos.

En el año 1962 se presentan simultáneamente y en forma independiente los artículos "A dynamic programming approach to sequencing problems" (Held and Karp 1962) y "Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem" (Bellman 1962). Ambos proponen el uso de la programación dinámica como técnica para encontrar la solución del problema del viajante.

1.2.1. Solución

Se define la función $D(v, S)$ la distancia mínima desde v hasta la ciudad de origen, S el conjunto de ciudades a visitar. Si el conjunto S se encuentra vacío, $D(v, S) = d_{v0}$. Se define d_{ij} como la distancia desde la ciudad i hasta la ciudad j. Para el resto de los casos, $D(v, S) = \text{mín}_{u\in S}(d_{vu} + D(u, S - \{u\}))$

$$D(v,S) = \begin{cases} c_{vv0} & \text{si } S = \varnothing \\ \text{mín}_{u\in S}[c_{vu} + D(u, S-u)] & \text{otro caso} \end{cases}$$

Un pseudocódigo para calcular la distancia del ciclo hamiltoniano mínimo es el siguiente:

```
function TSP (M, n)
  for k := 2 to n do
    C({1, k}, k) := M[1,k]
  end for

  for s := 3 to n do
    for all S in {1, 2, . . . , n}, |S| = s do
      for all k in S do
        C(S, k) = min [C(S - {k}, m) + M[m,k]]
      end for
    end for
  end for

  opt := min[C({1, 2, 3, . . . , n}, k) + M[k,1]]
  return (opt)
end
```

1.2.2. Complejidad

Al ser el problema del viajante de complejidad NP-completo, no existen algoritmos que permitan tomar decisiones para encontrar la solución. Esto implica que se deben evaluar todas las soluciones posibles y elegir el valor de menor costo.

El número de ciclos posibles del problema del viajante se puede calcular de la siguiente manera: desde el origen restan $(n-1)$ ciudades para empezar, luego se debe elegir cualquiera de las $(n-2)$ ciudades restantes y así sucesivamente. De esta forma, multiplicando todas las cantidades se obtiene el número total de caminos posibles:

$$(n-1)! = (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por lo tanto, el método directo implica evaluar $(n-1)!$ soluciones posibles, siendo su orden $O((n-1)!)$. En el caso particular de 10 ciudades esto significaría evaluar 362880, es decir, para un problema no excesivamente grande el número de caminos posibles aumenta considerablemente.

La cantidad de operaciones fundamentales empleadas algoritmo de Held–Karp es:

$$\left(\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1) \binom{n-1}{k} \right) + (n-1) = (n-1)(n-2)2^{n-3} + (n-1)$$

Por lo tanto, su orden temporal es $O(n^2 2^n)$. Para el caso particular de $n = 10$ el número de soluciones se reduce de 362880 a 102400.

Si se asigna una unidad de espacio al número $D(v, S)$ la cantidad de espacio requerida es:

$$\left(\sum_{k=2}^{n-1} k \binom{n-1}{k} \right) + (n-1) = (n-1)2^{n-2}$$

Por lo tanto, su orden espacial es $O(n2^n)$.

1.2.3. Tiempos de ejecución

2. Flujo de redes

2.1. Objetivo

Esta sección del trabajo tiene como objetivo la resolución del problema de Selección de Proyectos mediante su modelado como una red de flujo y la aplicación del algoritmo de Ford Fulkerson para maximizar la ganancia esperada.

2.2. Introducción Teórica

Los problemas de flujo de redes parten de un grafo G = (V,E) con las siguientes características:

- G es dirigido.
- Hay un nodo s (fuente/origen) que solo tiene aristas salientes.
- Hay un nodo t (sumidero/destino) que solo tiene aristas entrantes.
- Cada arista $e \in E$ tiene una *capacidad* a la que denominaremos c_e.

Por cada arista puede pasar una cantidad determinada de flujo. Esta es una función $f(e)$ aplicable a las aristas, con dos condiciones:

- Capacidad: $f(e) \leq c_e$.
- Conservación: el flujo entrante total (entre todas las aristas) debe ser el mismo que el total saliente: $\sum_{e \mathrm{in} v} f(e) = \sum_{e \mathrm{out} v} f(e)$.

Este tipo de problemas, si bien tiene aplicaciones directas como redes de transporte de vehículos, de flujo, de comunicaciones y muchas otras directas, también puede utilizarse como modelo para problemas complejos que no son intuitivamente comparables. Un problema de este tipo es el tratado en este trabajo, que es el de *selección de proyectos*.

Por otro lado, también es de interés definir un *corte* (A, B) de la red como una partición de G en dos conjuntos tales que $s \in A$ y $t \in B$. La *capacidad de ese corte* es la suma de las capacidades que lo cruzan: $c(A, B) = \sum_{e \mathrm{out} A} c_e$.

En general, este modelo deviene en problemas de optimización, que son el de *maximización de flujo* y el de *búsqueda de mínimo corte*. En el primer caso, se busca maximizar el *valor del flujo* $v(f)$ definido como el flujo total saliente de s. En el segundo caso se busca un corte tal que su capacidad sea la mínima.

2.2.1. Max-Flow, Min-Cut

El teorema de máximo flujo, mínimo corte muestra que el máximo flujo corresponde a la capacidad del mínimo corte. Este teorema se basa en la importante propiedad de que la capacidad de cualquier corte en una red es cota superior del valor del flujo.

Una demostración común, como la encontrada en el capítulo 7 del Kleinberg-Tardos **(CITAR)** acude a mostrar la situación final del algoritmo de Ford Fulkerson para maximización del flujo.

2.2.2. Algoritmo de Ford Fulkerson

Este algoritmo, que será el utilizado en el trabajo, trabaja con el *Grafo Residual* G_f de la red, con las siguientes características:

- Una arista $e \in E(G)$ tal que $f(e) < c_e$ produce una *arista residual hacia adelante* (foreward edge) $e' \in E(G_f)$ tal que $c_{e'} = c_e - f(e)$. Esto puede verse como lo que aún puede aumentarse de flujo en esa arista.
- Una arista $e \in E(G)$ tal que $f(e) > 0$ produce una *arista residual hacia atrás* (backward edge) $e' \in E(G_f)$ tal que $c_{e'} = f(e)$. Esto puede verse como “lo que puede quitarse de flujo para ser asignado en otro lado”.

La estrategia del algoritmo para maximizar el flujo se basa en buscar caminos de s a t en el grafo residual para aumentar el flujo en un cuello de botella (bottleneck) b correspondiente a la mínima capacidad de ese camino. Finalizará cuando ya no haya caminos $s - t$ en G_f.

La importancia reside en que en cada paso se aumenta $v(f)$ en b (que es mayor a 0), y sabemos que $v(f)$ está acotado, con lo cual **sabemos que el algoritmo termina**. Además, al terminar, hay un corte natural (A, B) donde A es el conjunto de todos los nodos alcanzables por s y B todo el resto. Como la ejecución termina cuando ya no hay caminos $s - t$, sabemos que la capacidad residual de las aristas entre A y B es nula. Entonces, la capacidad de ese corte está saturada hacia adelante (si no, habría forward edges) y no hay flujo de B hacia A (si no, habría backward edges de A a B). De este modo, nos aseguramos de que ese corte está saturado, mostrando que se realiza la desigualdad de capacidad y valor de flujo, y **demostrando Max-Flow Min-Cut** y simultáneamente que **el algoritmo efectivamente obtiene el Máximo flujo**.

Una vez finalizada la ejecución de Ford-Fulkerson, lo único necesario para encontrar el corte mínimo es hacer una búsqueda como BFS para encontrar los nodos alcanzables por t.

2.3. Problema de Selección de Proyectos

2.3.1. Problema

El problema en análisis tiene como objetivo maximizar las ganancias del Ing. F.B. Su empresa tiene:

- Un conjunto $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ de proyectos posibles para tomar. Cada proyecto P_i llevado a cabo provee una ganancia g_i a la empresa.
- Un conjunto $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de áreas de investigación posibles a tomar. Cada área A_k investigada conlleva un costo a_k de inversión para la empresa.
- Cada proyecto requiere para ser ejecutado que se hayan investigado un cierto conjunto de áreas $R_i \subseteq A$ para poder ser efectuados.

El objetivo es elegir los proyectos (y por lo tanto también las áreas de investigación) adecuados para maximizar la ganancia del Ingeniero.

2.3.2. Modelo de Red

Para este modelo creamos la siguiente red de flujo:

- El nodo s simbolizará las ganancias. Por lo tanto, s apuntará a los proyectos. Como en redes de flujo no se utilizan los valores de los nodos, utilizaremos las capacidades de estas aristas, dándoles el valor g_i.
- El nodo t simbolizará las inversiones, con lo cual apuntará a las áreas de investigación. En este caso, las capacidades serán los costos a_k.
- Entre requerimientos y proyectos habrá aristas de dependencia: una arista (i, j) donde i es un proyecto y j es un requerimiento simboliza que i necesita de j para poder llevarse a cabo. Las capacidades de aquellas serán tratadas más adelante.

Esto da grafos como el siguiente: **(DIBUJAR IMAGEN)**

La idea de este modelo es utilizar el algoritmo de Ford-Fulkerson para obtener un corte mínimo de forma tal que el conjunto alcanzable por s sea el conjunto de proyectos a tomar, con sus áreas correspondientes.

2.3.3. Compatibilidad

Si bien este sentido de dependencias es poco intuitivo (uno tendería a decir que (i, j) simboliza que j depende de i), este modelo tiene un beneficio grande, que consiste en la facilidad de implementar la satisfacción de dependencias.

Para asegurarnos de que el corte final (A, B) sea compatible necesitamos que no haya ninguna arista saliente de A, ya que de haberla, significaría que hemos seleccionado un proyecto sin pagar el costo de investigar una de sus dependencias. Con este fin haremos que las aristas de dependencia tengan **capacidad infinita**.

Sabemos que el flujo está acotado aunque sea por la suma de las capacidades salientes de s:

$$v(f) \leq \sum_{i\text{out}s} c_e = C \tag{1}$$

Esto se debe a que $(\{s\}, G - \{s\})$ es un corte válido, y como tal, su capacidad acota al flujo máximo. Como el corte encontrado por el algoritmo es el de mínima capacidad, $c(A, B)$ estará acotada superiormente por C. De este modo entonces nos aseguramos que ninguna de esas aristas de capacidad infinita puede cruzar el corte, ya que si así fuera, la capacidad $c(A, B)$ superaría la cota que hallamos previamente.

2.3.4. Optimalidad

Para comprobar que el córte mínimo es efectivamente el que buscamos, necesitamos ver qué valor tiene la capacidad de un corte. Con este fin resulta útil recordar que queremos maximizar la ganancia $G(A)$, que puede ser escrita de la siguiente manera:

$$G(A) = \sum_{i/P_i \in A} g_i - \sum_{k/A_k \in A} a_k \tag{2}$$

Por otro lado, a la capacidad del corte contribuyen las aristas de las áreas investigadas y las de proyectos no tomados (**IMAGEN**), con lo cual puede ser escrita de la siguiente:

$$c(A, B) = \sum_{k/A_k \in A} a_k + \sum_{i/P_i \notin A} g_i = \sum_{k/A_k \in A} a_k + C - \sum_{i/P_i \in A} g_i = C - G(A) \tag{3}$$

De este modo, ya que C es constante, vemos que minimizar el corte es igual a maximizar la ganancia, con lo cual este modelo resuelve el problema planteado.

Referencias

Bellman, Richard. 1962. "Dynamic Programming Treatment of the Travelling Salesman Problem." *Journal of Association for Computing Machinery.*

Dantzig, George, Delbert Fulkerson, and Selmer Johnson. 1954. "Solution of a Large-Scale Traveling Salesman Problem." *Operations Research 2.*

Held, Michael, and Richard M. Karp. 1962. "A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems." *Journal for the Society for Industrial and Applied Mathematics.*