

Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Крутова Екатерина Дмитриевна, НПИбд-01-21

Содержание

Цель работы	5
Задание	6
Теоретическое введение	7
Выполнение лабораторной работы	8
Выполнение с помощью Julia	8
Выполнение с помощью OpenModelica	14
Выводы	20
Вопросы к лабораторной работе	21
Список литературы	23

Список иллюстраций

1	Выбор варианта	6
1	Решение уравнения для колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы на языке Julia	11
2	Фазовый портрет для колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы на языке Julia	12
3	Решение уравнения для колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы на языке Julia	12
4	Фазовый портрет для колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы на языке Julia	13
5	Решение уравнения для колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы на языке Julia	13
6	Фазовый портрет для колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы на языке Julia	14
7	Решение уравнения для колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы на языке Open Modelica	17
8	Фазовый портрет для колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы на языке Open Modelica	18
9	Решение уравнения для колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы на языке Open Modelica	18
10	Фазовый портрет для колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы на языке Open Modelica	18
11	Решение уравнения для колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы на языке Open Modelica	19
12	Фазовый портрет для колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы на языке Open Modelica	19
1	алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка	21

Список таблиц

Цель работы

Изучить понятие гармонического осциллятора, построить фазовый портрет и найти решение уравнения гармонического осциллятора.

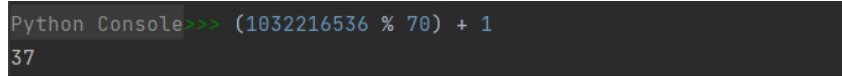
Задание

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $x'' + 18x = 0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $x'' + 18x' + 9x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $x'' + 8x' + 16x = 0.5\cos(t)$

На интервале $t [0; 68]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 1.8$, $y_0 = 0.8$

В соответствии с формулой $(S_n \bmod N) + 1$, где S_n — номер студбилета, N — количество заданий, я взяла вариант 37 (рис. [-@fig:001]).



```
Python Console>>> (1032216536 % 70) + 1
37
```

Рис. 1: Выбор варианта

Теоретическое введение

- Гармонический осциллятор [1] — система, которая при смещении из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы F , пропорциональной смещению x .
- Гармоническое колебание - колебание, в процессе которого величины, характеризующие движение (смещение, скорость, ускорение и др.), изменяются по закону синуса или косинуса (гармоническому закону).

Выполнение лабораторной работы

Выполнение с помощью Julia

Код 1 случая (Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы):

```
#  $x'' + 18x = 0$ 
using DifferentialEquations

function lorenz!(du, u, p, t)
    a = p
    du[1] = u[2]
    du[2] = -a*u[1]
end

const x = 1.8
const y = 0.8
u0 = [x, y]

p = (18)
tspan = (0.0, 68.0)
prob = ODEProblem(lorenz!, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
```



```

using Plots; gr()

#решение системы уравнений
plot(sol)
savefig("lab4_julia_1.png")

#фазовый портрет
plot(sol, vars=(2,1))
savefig("lab4_julia_1_ph.png")

```

Код 2 случая (Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы):

```

#  $x'' + 18x' + 9x = 0$ 
using DifferentialEquations

function lorenz!(du, u, p, t)
    a, b = p
    du[1] = u[2]
    du[2] = -a*du[1] - b*u[1]
end

const x = 1.8
const y = 0.8
u0 = [x, y]

p = (sqrt(18), 9)
tspan = (0.0, 68.0)
prob = ODEProblem(lorenz!, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)

```

```

using Plots; gr()

#решение системы уравнений
plot(sol)
savefig("lab4_julia_2.png")

#фазовый портрет
plot(sol, vars=(2,1))
savefig("lab4_julia_2_ph.png")

```

Код 3 случая (Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы)

```

#  $x'' + 8x' + 16x = 0.5\cos(3t)$ 
using DifferentialEquations

function lorenz!(du, u, p, t)
    a, b = p
    du[1] = u[2]
    du[2] = -a*du[1] - b*u[1] + 0.5*cos(3*t)
end

const x = 1.8
const y = 0.8
u0 = [x, y]

p = (sqrt(8), 16)
tspan = (0.0, 68.0)
prob = ODEProblem(lorenz!, u0, tspan, p)

```

```
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
```

```
using Plots; gr()
```

```
#решение системы уравнений
```

```
plot(sol)
```

```
savefig("lab4_julia_3.png")
```

```
#фазовый портрет
```

```
plot(sol, vars=(2,1))
```

```
savefig("lab4_julia_3_ph.png")
```

Полученные графики (рис. [-@fig:002] - [-@fig:007]).

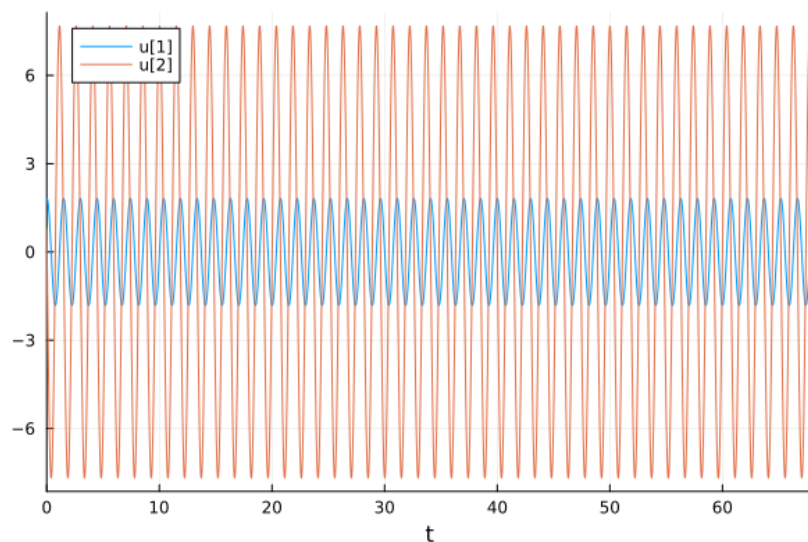


Рис. 1: Решение уравнения для колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы на языке Julia

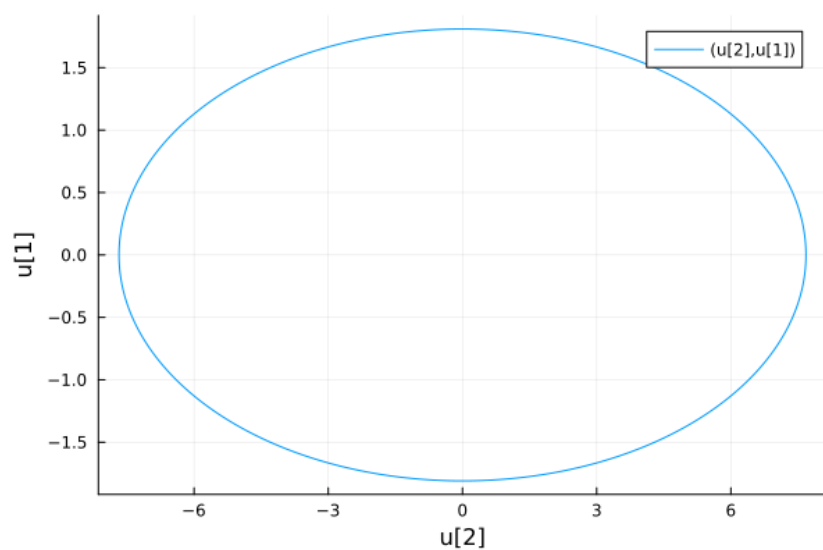


Рис. 2: Фазовый портрет для колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы на языке Julia

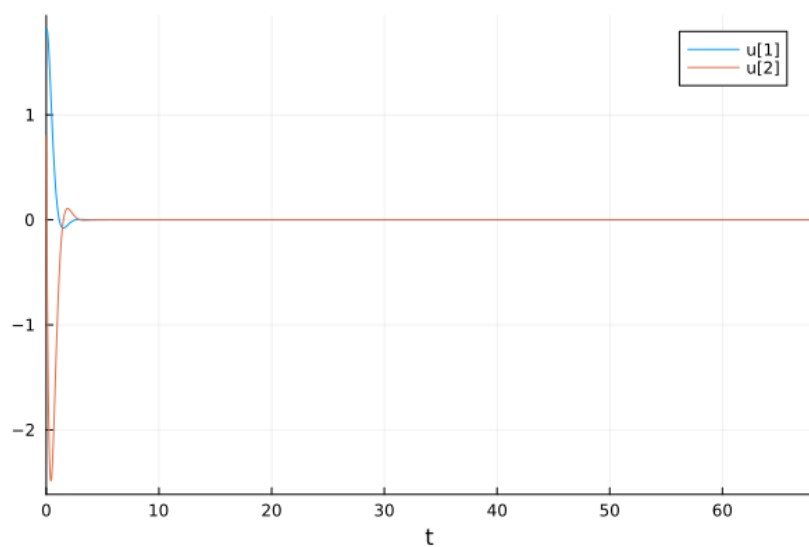


Рис. 3: Решение уравнения для колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы на языке Julia

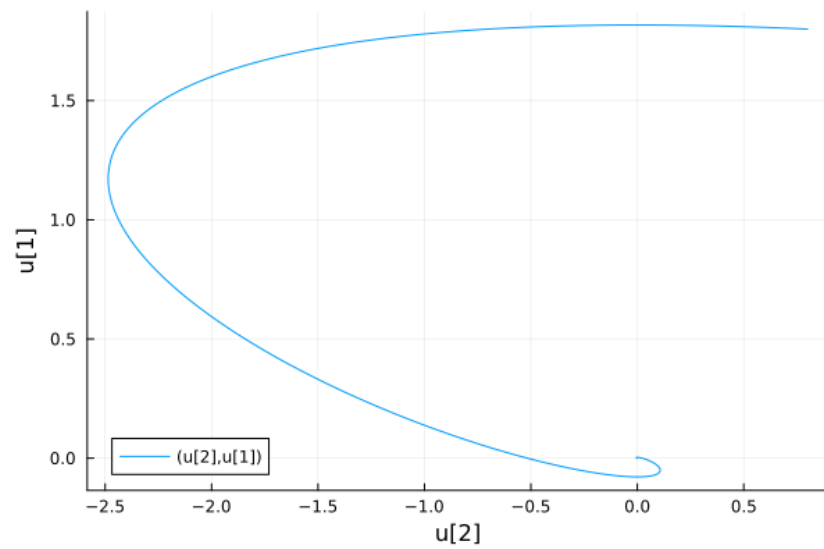


Рис. 4: Фазовый портрет для колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы на языке Julia

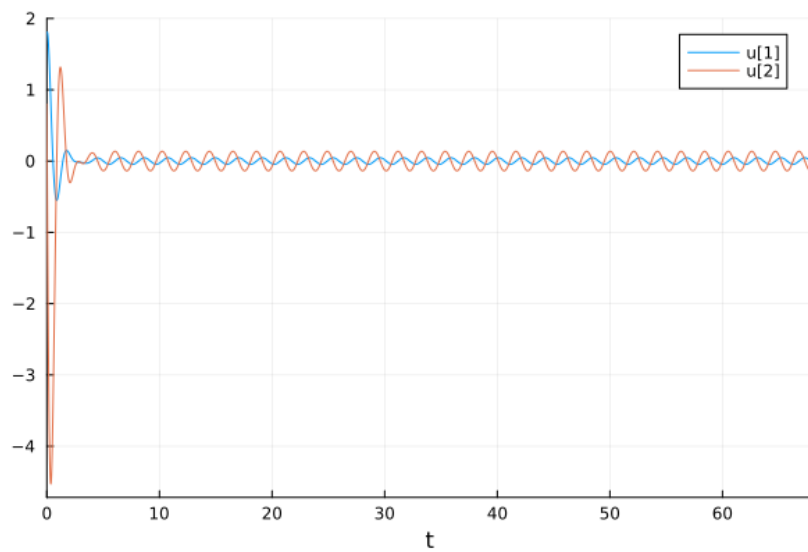


Рис. 5: Решение уравнения для колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы на языке Julia

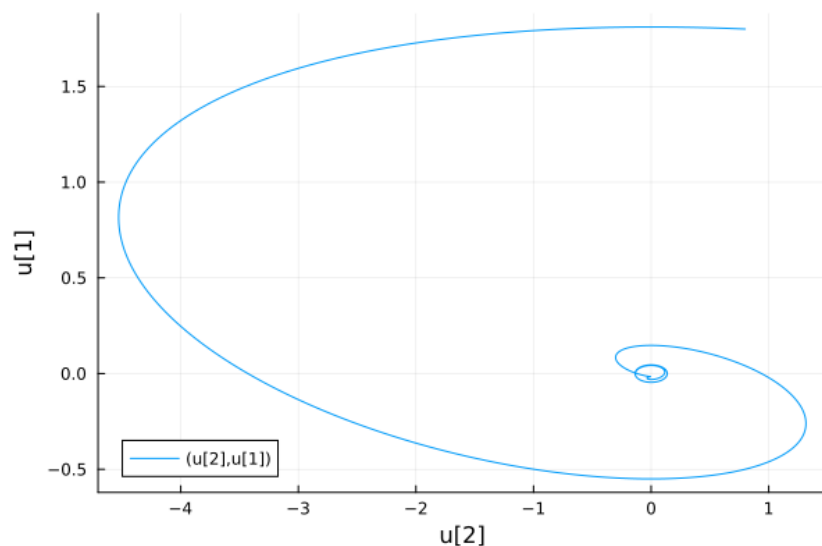


Рис. 6: Фазовый портрет для колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы на языке Julia

Выполнение с помощью OpenModelica

Код 1 случая (Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы):

```
//case1:  $x'' + 18x = 0$ 
model lab4_1
// $x'' + g \cdot x' + w^2 \cdot x = f(t)$ 
//w - частота
//g - затухание
parameter Real w = sqrt(18.00);
parameter Real g = 0;

parameter Real x0 = 1.8;
parameter Real y0 = 0.8;
```

```

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

// f(t)
function f
input Real t ;
output Real res;
algorithm
res := 0;
end f;

equation
der(x) = y;
der(y) = -w*w*x - g*y + f(time);
end lab4_1;

```

Код 2 случая (Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы):

```

//case2:  $x'' + 18x' + 9x = 0$ 
model lab4_2

parameter Real w = sqrt(9.00);
parameter Real g = 18;

parameter Real x0 = 1.8;
parameter Real y0 = 0.8;

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

```

```

// f(t)
function f
input Real t ;
output Real res;
algorithm
res := 0;
end f;

equation
der(x) = y;
der(y) = -w*w*x - g*y + f(time);
end lab4_2;

```

Код 3 случая (Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы)

```

//case3:  $x'' + 8x' + 16x = 0.5\cos(3t)$ 
model lab4_3

parameter Real w = sqrt(16.00);
parameter Real g = 8;

parameter Real x0 = 1.8;
parameter Real y0 = 0.8;

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

// f(t)

```



```

function f
input Real t ;
output Real res;
algorithm
res := 0.5*cos(3*t); // 3 случай
end f;

```

```

equation
der(x) = y;
der(y) = -w*w*x - g*y - f(time);
end lab4_3;

```

Полученные графики (рис. [-@fig:008] - [-@fig:013]).

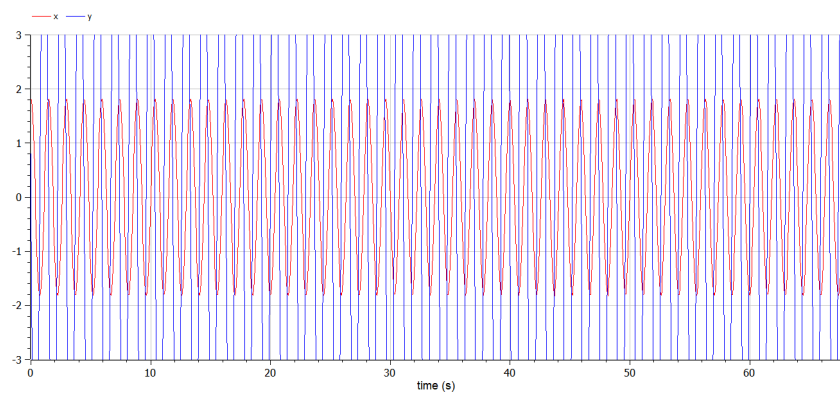


Рис. 7: Решение уравнения для колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы на языке Open Modelica

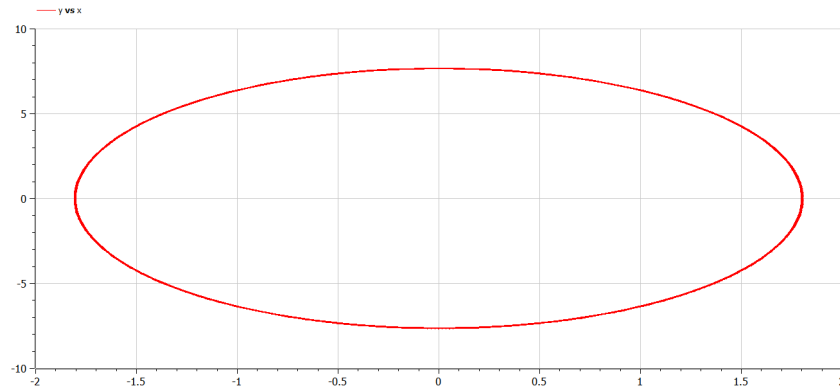


Рис. 8: Фазовый портрет для колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы на языке Open Modelica

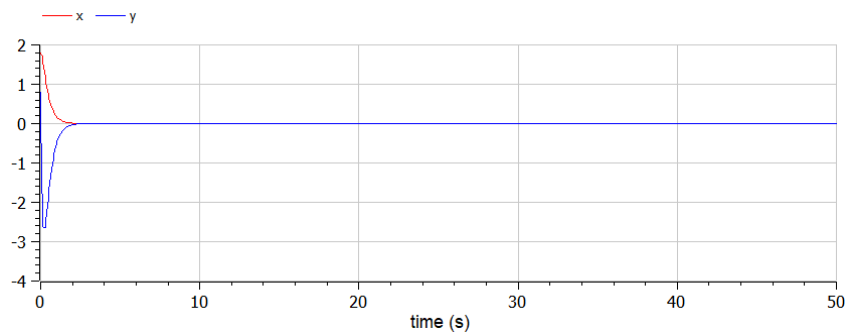


Рис. 9: Решение уравнения для колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы на языке Open Modelica

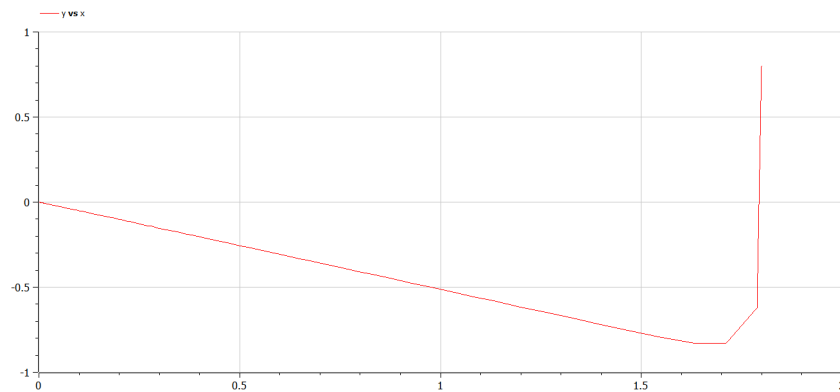


Рис. 10: Фазовый портрет для колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы на языке Open Modelica

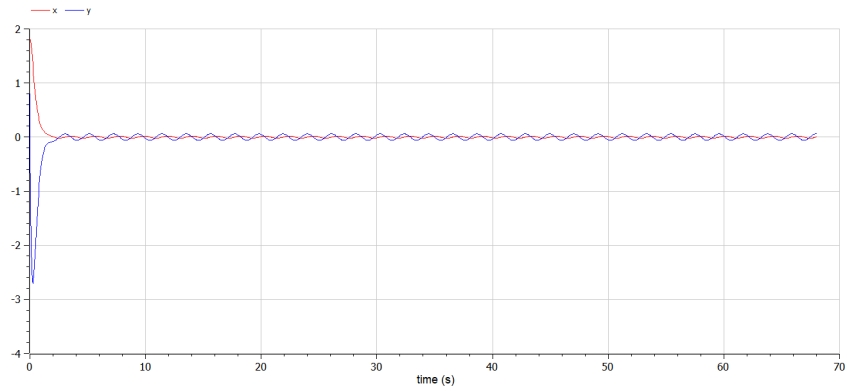


Рис. 11: Решение уравнения для колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы на языке Open Modelica

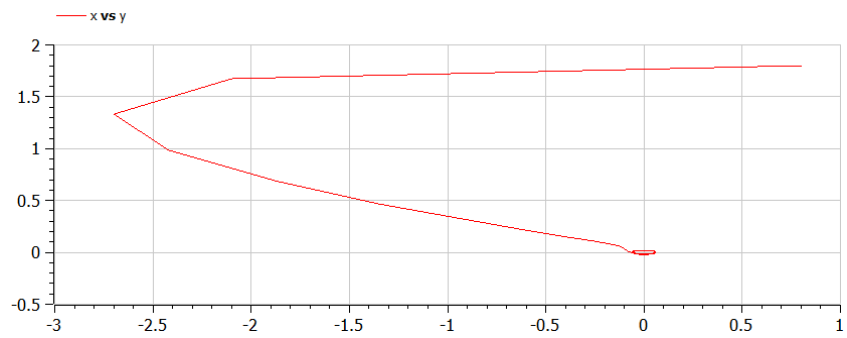


Рис. 12: Фазовый портрет для колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы на языке Open Modelica

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были построены решения уравнения гармонического осциллятора и фазовые портреты гармонических колебаний без затухания, с затуханием и при действии внешней силы на языках Julia и Open Modelica.

Вопросы к лабораторной работе

1. Запишите простейшую модель гармонических колебаний

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

2. Дайте определение осциллятора

Осциллятор — система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени.

3. Запишите модель математического маятника
4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка (2) необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3)$$

Уравнение второго порядка (2) можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases} \quad (4)$$

Начальные условия (3) для системы (4) примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (5)$$

Рис. 1: алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

5. Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Фазовая траектория — след от движения изображающей точки.

Фазовый портрет — это полная совокупность различных фазовых траекторий. Он хорошо иллюстрирует поведение системы и основные ее свойства, такие как точки равновесия.

Список литературы

- [1] Бутиков И. Е. Собственные колебания линейного осциллятора. 2011.
- [2] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [3] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>