

DSCA paper report3

資工四 B03902125 林映廷

問題敘述：

假如有一個人的集合 $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ， P 為線性有序，即前一個元素比後一個元素還小， $P_1 < P_2 < \dots < P_n$ ，以及另一個工作的集合 $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ ， J 為部分有序，即有些元素前者比後者小，但並非全部，例如可能只有 $J_1 < J_2$ ， $J_1 < J_n$ ，但並無 $J_2 < J_n$ 。假如今天有一個函數 f 可以把 P 集合的元素對應到 J 集合，使得 $f(P_i) < f(P_j)$ ，則 $P_i < P_j$ ，且 $i \neq j$ ，則 $f(P_i) \neq f(P_j)$ ，但是要讓代價函數 $\sum_{i,j} C_{ij} X_{ij}$ 最小，其中若 P_i 對應到 J_j ， $X_{ij} = 1$ ，反之為 0。今天就是要找到一個符合上述條件的對應函數 f 。亦即找到一個 cost 和為最小的 topologically sorted sequence。

解題方法：

Step1.

FIGURE 5-21 A partial ordering of jobs.



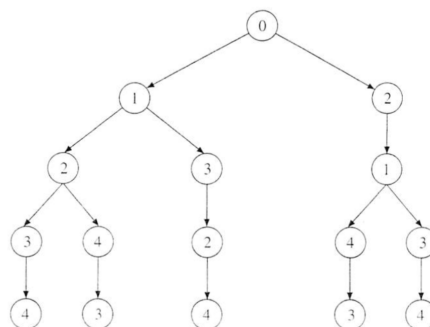
The following are all the topologically sorted sequences:

J_1, J_2, J_3, J_4
 J_1, J_2, J_4, J_3
 J_1, J_3, J_2, J_4
 J_2, J_1, J_3, J_4
 J_2, J_1, J_4, J_3

假設 J 的 partial ordering 的關係如上圖，被箭頭指向者較大，反之則較小，如上是 $J_1 < J_3$ ， $J_1 < J_4$ ， $J_2 < J_4$ 。一個 topologically sorted sequence 是部分元素前者比後者小，並非全部。上圖已列出 J 所有的 topologically sorted sequences。

Step2.

FIGURE 5-22 A tree representation of all topologically sorted sequences corresponding to Figure 5-21.



可以建構一個 tree 列出 J 所有的 topologically sorted sequences。

Step2-1.取一個不會超過其他元素的元素。如圖 5-21，可以選擇 J_1 或 J_2 。

Step2-2.讓他當這個 tree 的一個 node。

Step2-3.從 partial set 刪掉這個元素。

Step3.

先將 cost matrix 每列扣掉該列最小值，再每行扣掉該行最小值，但要注意 matrix 內每個元素不得為負，即該行或該列遇到元素為 0，就不用做扣掉的動作。

TABLE 5-1 A cost matrix for a personnel assignment problem.

Persons \ Jobs				
	1	2	3	4
1	29	19	17	12
2	32	30	26	28
3	3	21	7	9
4	18	13	10	15

TABLE 5-2 A reduced cost matrix.

Persons \ Jobs				
	1	2	3	4
1	17	4	5	0
2	6	1	0	2
3	0	15	4	6
4	8	0	0	5

Total = 54

如 TABLE 5-1，每列最小值 12、26、3、10，之後第二行會有最小值 3。每列、每行都扣完以後把 $12+26+3+10+3=54$ ，該值極為 tree 一開始的下界。

Step4.

FIGURE 5-23 An enumeration tree associated with the reduced cost matrix in Table 5-2.

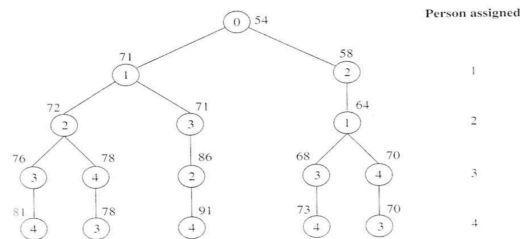
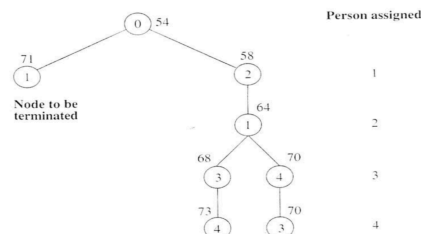


FIGURE 5-24 The bounding of subsolutions.



搜尋整個 tree 找出帶有最小 cost 和的 topologically sorted sequences。如上圖，先往右邊找，cost 會累加，下界也會跟著越來越高，找到 leaf，這個累加的 cost 會變成上界。接著，往左邊找的時候，此時的下界為 71，比上界為 70 還高，故可以提早結束。此時，我們要找的答案為 $J_2J_1J_4J_3$ 。

心得與反思：

如果 cost matrix 沒有變成如 Table 5-2 的 reduced cost matrix，今天這個 **branch and bound** 會在搜尋整棵 tree 上花費更多的時間複雜度，因為下界從 0 開始，則 TABLE 5-23 左邊的下界會變成 29，比此時上界為 70 還要低，故左邊可以繼續搜尋。因此，**branch and bound** 的精髓在於找到一個 reduced cost matrix，且盡可能讓下界越高越好，上界越低越好，才可能縮短搜尋範圍，降低時間複雜度。