

問題敘述：

在 Laguerre geometry 上， n 個有各自圓心和半徑的圓，能在 $O(n \log n)$ 時間複雜度內，建立一個 voronoi diagram。

解題方法：

Step1. 將 n 個圓依照各自的圓心，以 x 座標為主、 y 座標為輔排列。時間複雜度： $O(n \log n)$

Step2. 遞迴下列過程，即可在 Laguerre geometry 上找到完整的 voronoi diagram。(divide and conquer method)

Step2-1. 各自分成左右兩邊兩個集合 L 、 R 。時間複雜度： $O(n)$

Step2-2. 如果 merge 之後新的凸包不共線，可以找到兩條屬於分割線的垂直平分線；但是如果 merge 之後新的凸包共線，先在共線的那條線 l' 上，將 L 、 R 的 voronoi diagram 標示出來，會發現 L 和 R 中，及 merge 後兩圓相交形成的根軸垂直於 l' ，其中 merge 後形成的根軸會是屬於分割線的垂直平分線。時間複雜度： $O(n)$

過程如下圖：

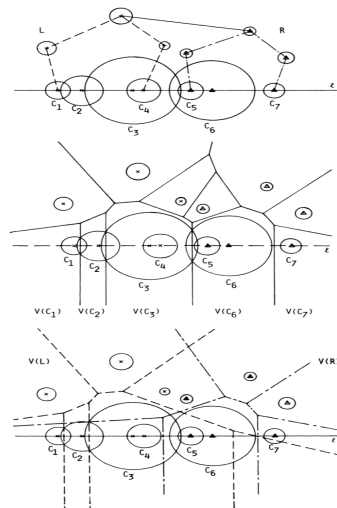


FIG. 5. Finding a ray in a degenerate case. (i) Degenerate new hull edge l' ($L_1 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, $R_1 = \{C_5, C_6, C_7\}$). (ii) $V(L_1 \cup R_1)$. (iii) $V(L_1)$ and $V(R_1)$. (iv) $V(L_1)$ and $V(R_1)$.

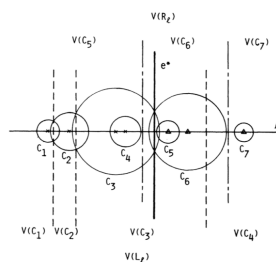


FIG. 5. (cont.)

Step2-3. 可以依照順時針和逆時針的方式，從 Step2 發現的兩條垂直平分線中，找到整條和 L、R 等距的分割線。時間複雜度： $O(n)$

如下圖：

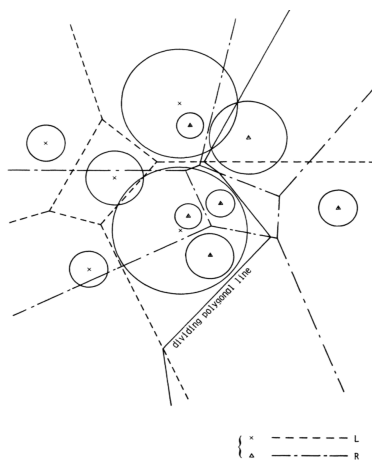


FIG. 4. Merging the Voronoi diagrams in the Laguerre geometry.

Step2-4. 放棄掉 L 和 R 的 voronoi diagram。時間複雜度： $O(n)$

時間複雜度分析：

Time complexity of divide and conquer $T_{d\&c}$:

$$T_{d\&c}(n) = 2T_{d\&c}\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) + O(n) + O(n) + O(n)$$

Time complexity of initial sorting T_{sort} :

$$T_{sort}(n) = O(n \log n)$$

Total time complexity T_{total} :

$$T_{total} = T_{d\&c} + T_{sort} = O(n \log n)$$

心得：

整篇閱讀下來，需要花很多的時間來消化。除了上課提到的用 **divide and conquer** 的技巧建立一個 **voronoi diagram**，這篇很顯然是他的延伸，但要再考慮另一個幾何空間上的性質方能成立。此外，還可以用在其他的應用上，這篇提到三個應用：判斷一個點是否在由一些圓組成的聯集裡、把一些圓分成好幾個連通元件，以及發現由一些圓組成的聯集的輪廓。可見 **voronoi diagram** 的重要性及可應用性。