ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS SUPERIORES UNIDAD MÉRIDA
UNAM

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ENES MÉRIDA
LICENCIATURA EN ECOLOGÍA

MODELACIÓN ESTADÍSTICA
Tema III. Condiciones de aplicación pruebas paramétricas: ANOVA

Prof. Edlin J. Guerra Castro

Dadas las operaciones aritméticas y las propiedades de las variables probabilísticas usadas para las H0 en estadística paramétrica, se espera que los datos de las muestras tengan:

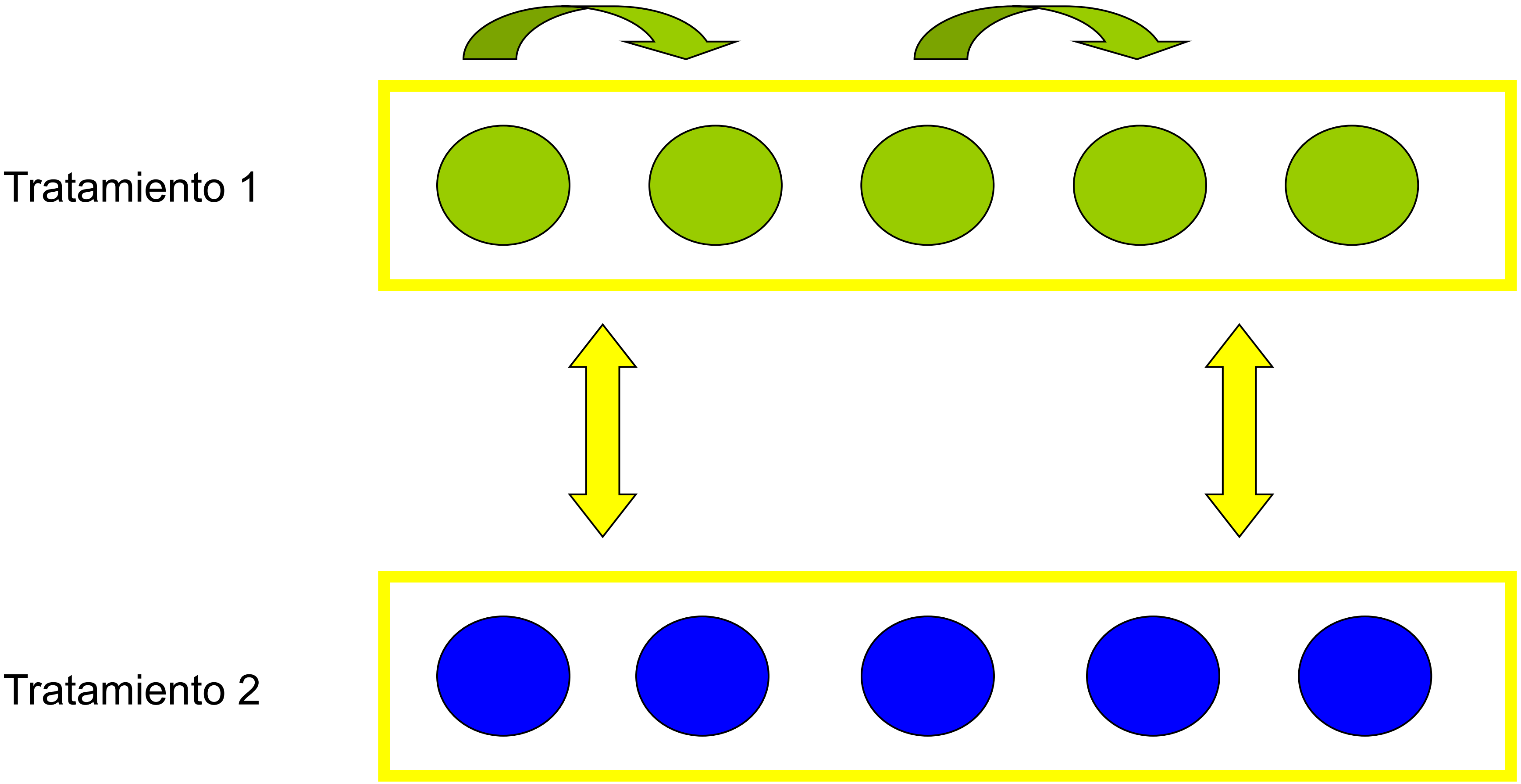
1. Independencia entre réplicas y entre tratamientos.

   Matemáticamente se les llama *i.i.d* (independientes a idénticamente distribuidos)

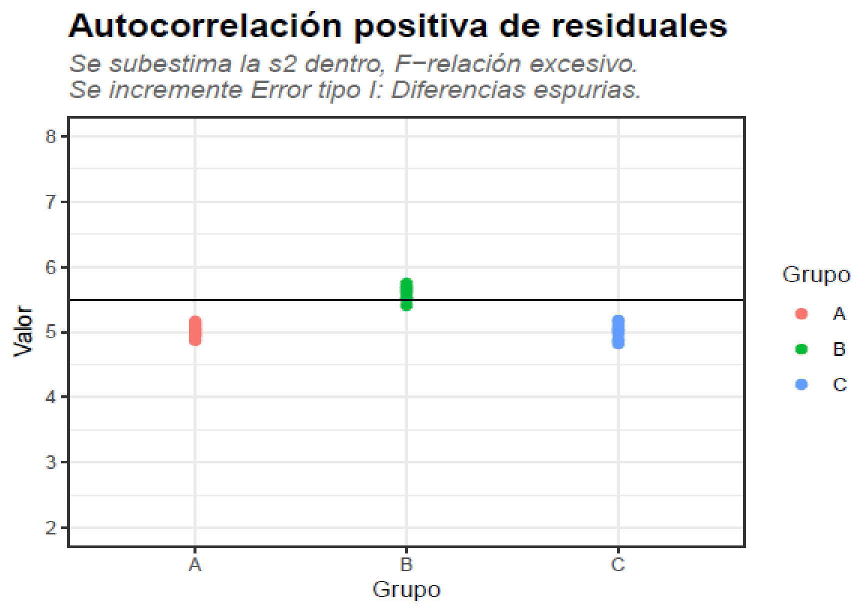
2. Los residuales se deben aproximar a una distribución Normal

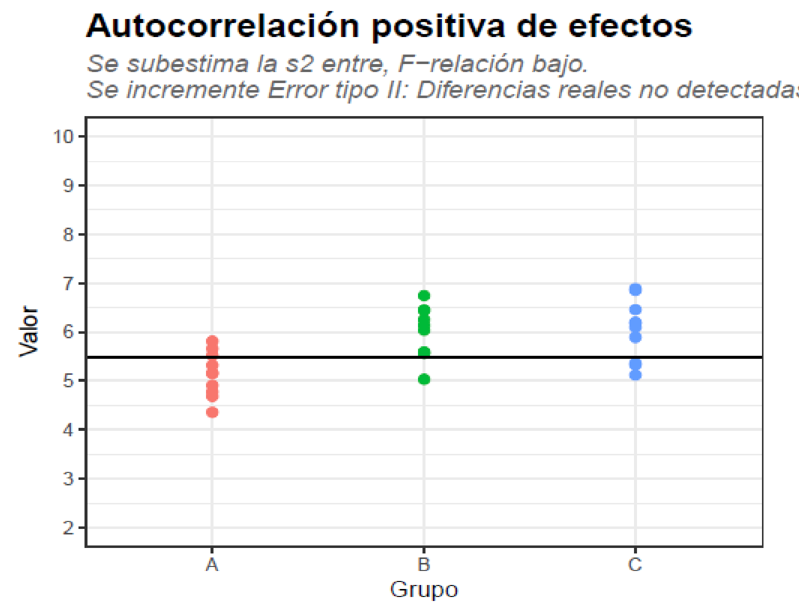
3. Homocedasticidad de las varianzas (dispersión homogénea de los puntos alrededor de la predicción)

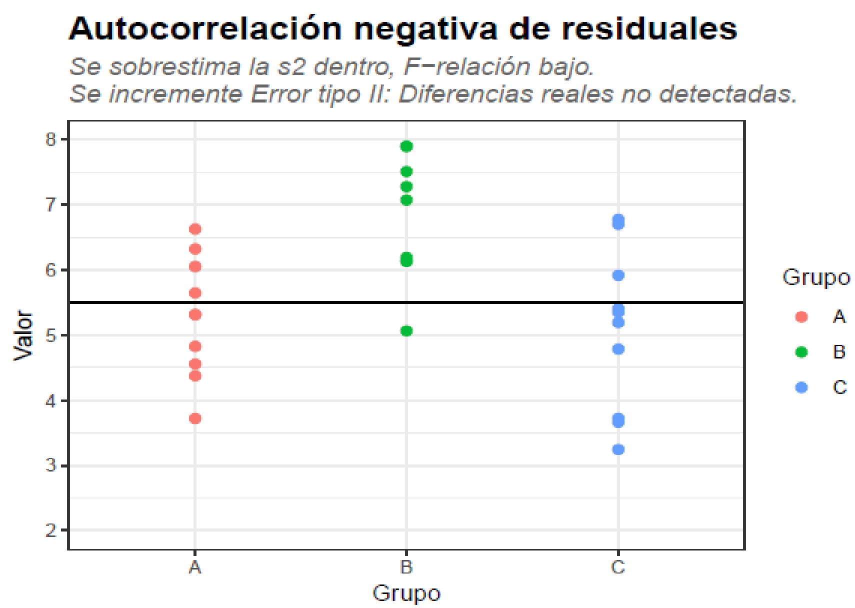
INDEPENDENCIA (*i.i.d*)

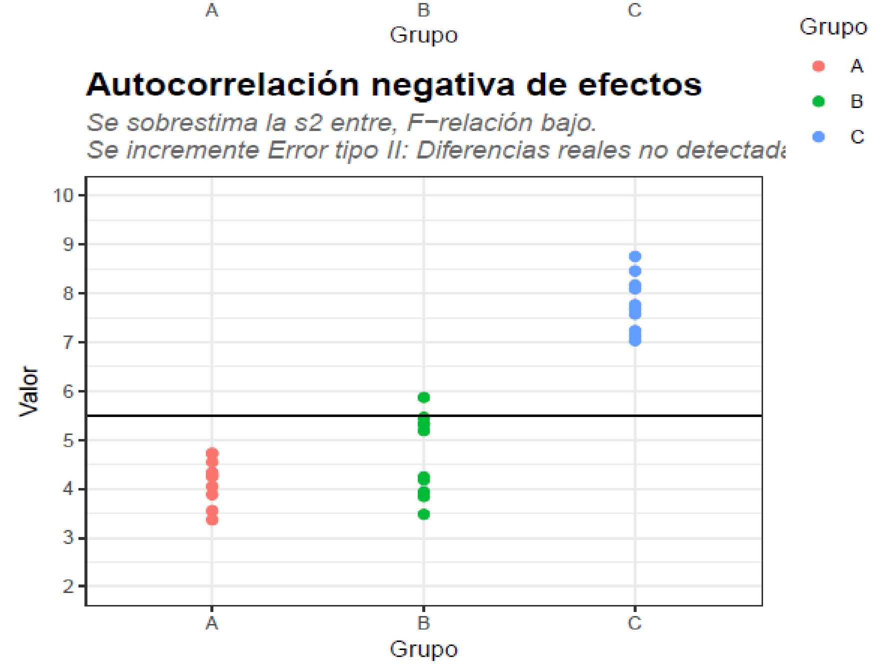


INDEPENDENCIA









NORMALIDAD

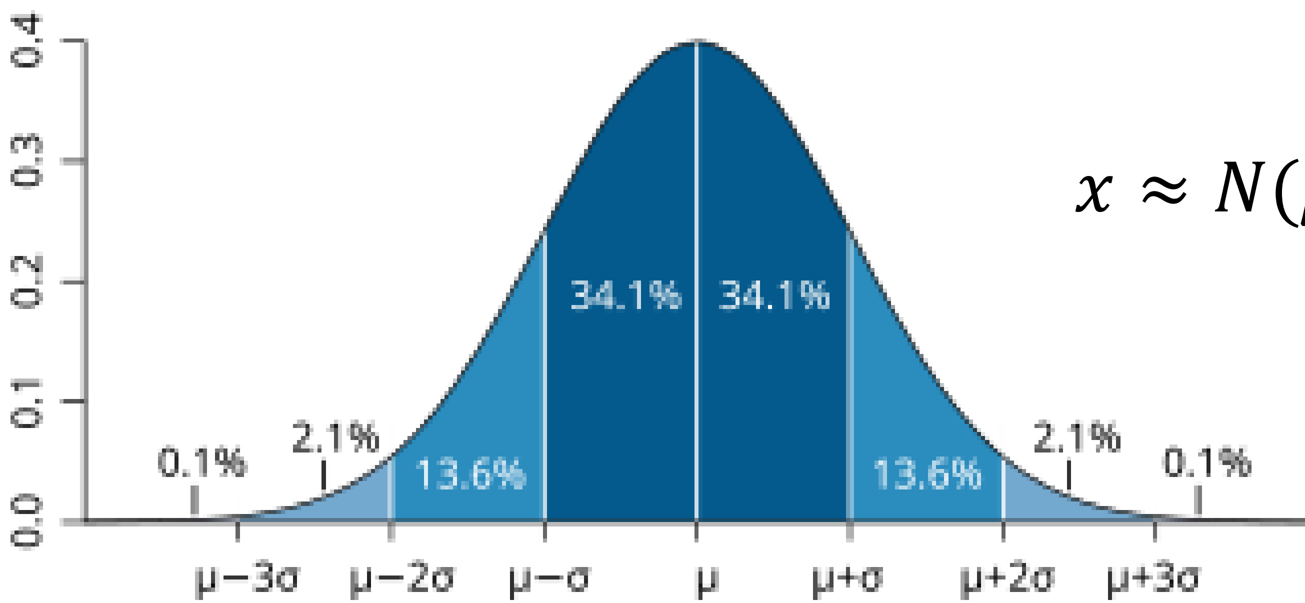
La mayoría de las variables (*t, F, r*) se construyeron con base en una distribución Normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$f(x)$ = función de densidad de probabilidad

σ = desviación típica

μ = media



$$x \approx N(\mu, \sigma^2)$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL

- Propiedades de la distribución normal

La distribución es simétrica alrededor de la media

$\mu \pm \sigma$ contiene 68.27 % de los elementos

$\mu \pm 2\sigma$ contiene 95.45 % de los elementos

$\mu \pm 3\sigma$ contiene 99.73 % de los elementos

DISTRIBUCIÓN NORMAL

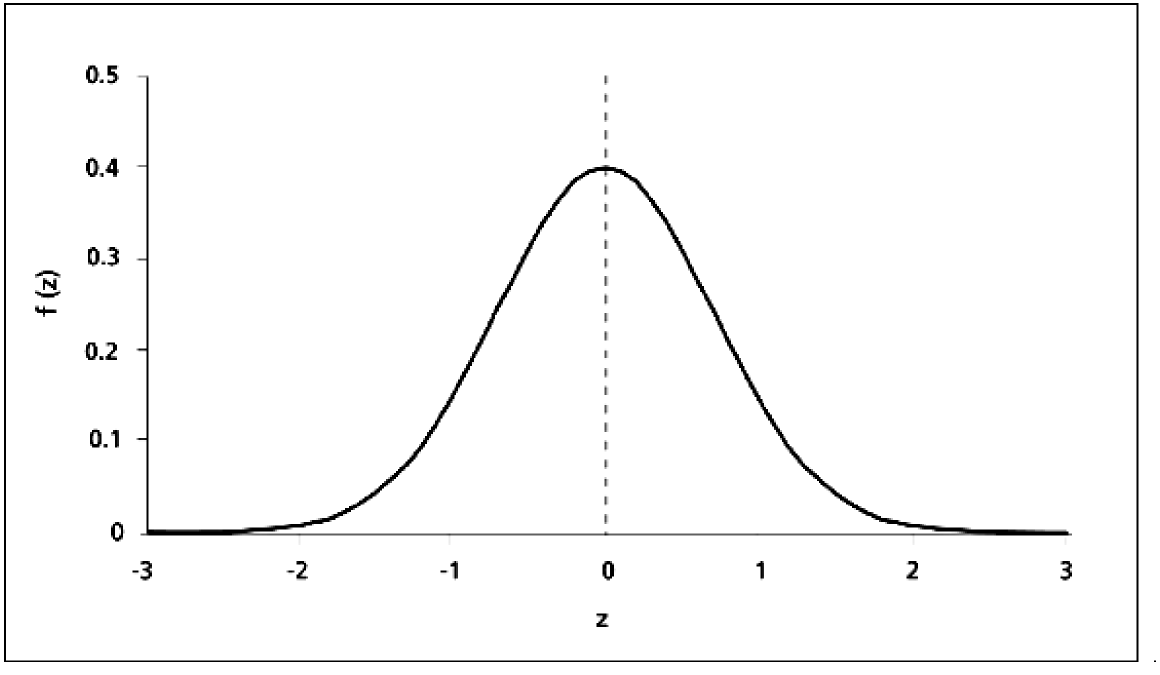
- Propiedades de la distribución normal

Aplica a cualquier unidad, por ello está la forma estandarizada

$$x \approx N(\mu, \sigma^2)$$

$$x \approx N(0,1)$$

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$



DISTRIBUCIÓN NORMAL

- Métodos de detección: Gráficos

  1) Gráfico de probabilidad de Bloom (1958)
  2) Gráfico de residuales estandarizados
  3) Diagrama de cuantiles (Q-Q plot)

- Métodos de detección: Pruebas

  1) Pruebas de Bondad de ajuste (Ji-cuadrada, Kolmogorov-Smirnov)
  2) Prueba de Shapiro-Wilk (1965) ($n<50$)
  3) D'Angostino y Pearson (1973) (cualquier n)

DISTRIBUCIÓN NORMAL

Consideremos una variable Yi donde i = 1, 2, 3,…n muestras y queremos evaluar si se distribuye normalmente

- Métodos de detección: Gráficos

1) Gráfico de Probabilidad Normal de Bloom (1958):

1.-Los datos se ordenan de menor a mayor: $Y_1 \leq Y_2 \leq Y_3 \leq \ldots \leq Y_n$

2.-Este ORDEN DE POSICIÓN se identifica con i = 1, 2, 3,…, n

3.-Para cada i es posible ESTIMAR cuál sería su probabilidad $p(i)$ si perteneciera a una distribución normal con la fórmula propuesta por Bloom (1958)

4-Se grafica Y_i vs Z_i en el orden creciente

$$p(i) = \frac{i - 0.375}{n + 0.25} \longrightarrow \text{Tabla de Bloom (1958)}$$

DISTRIBUCIÓN NORMAL

1) Gráfico de Probabilidad Normal de Bloom (1958): :

Hierro en suelo (mg/kg)	Valor Y ordenado	i	bloom	zi
297	227	1	0.041	-1.7392
340	250	2	0.107	-1.2426
325	277	3	0.172	-0.9463
227	289	4	0.238	-0.7128
277	290	5	0.303	-0.5158
337	291	6	0.369	-0.3345
250	293	7	0.434	-0.1662
290	297	8	0.500	0
293	318	9	0.566	0.1662
291	325	10	0.631	0.3345
289	337	11	0.697	0.5158
430	340	12	0.762	0.7128
510	353	13	0.828	0.9463
353	430	14	0.893	1.2426
318	510	15	0.959	1.7392

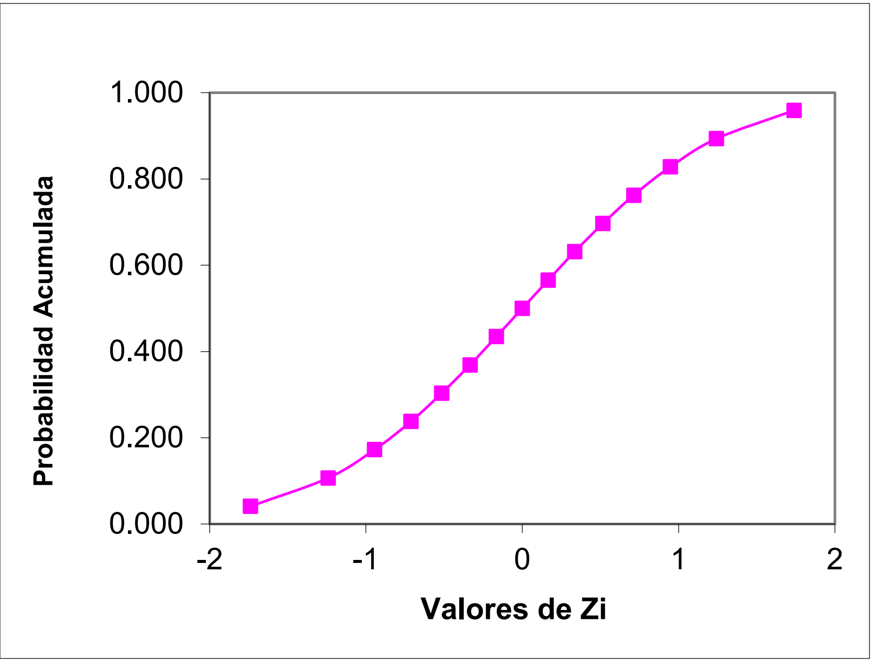
$$p(i) = \frac{i - 0.375}{n + 0.25}$$

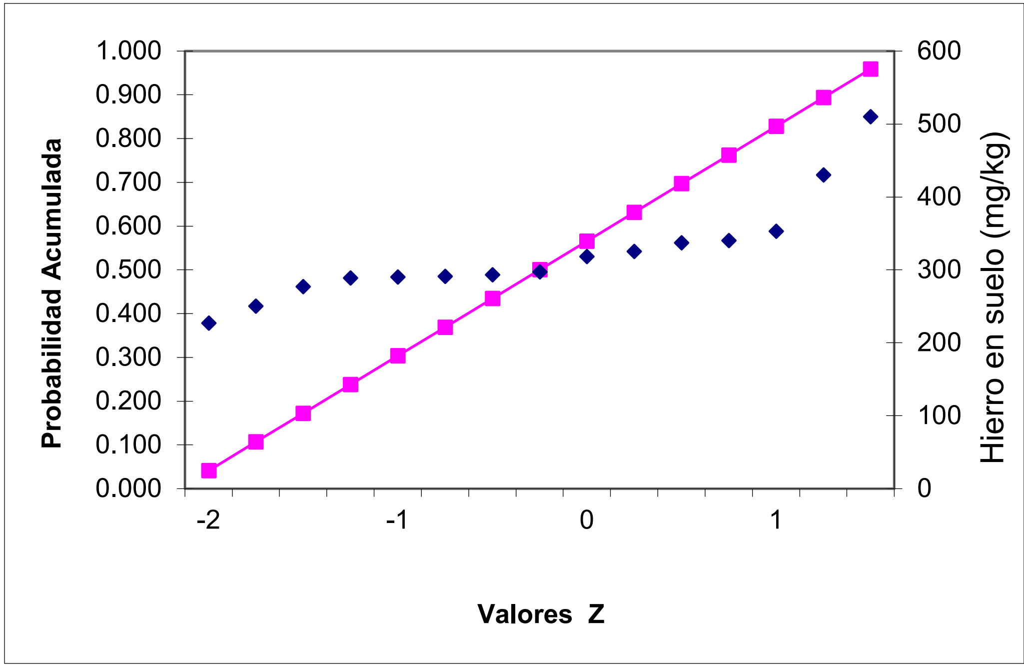
Tabla de Blom (1968)

n = 15

DISTRIBUCIÓN NORMAL

1) Gráfico de Probabilidad Normal de Bloom (1958): :





DISTRIBUCIÓN NORMAL

2) Gráfico de Residuales estandarizados:

1.- Se calculan los residuales de la forma

$$e_{ij} = Y_{ij} - \overline{Y} \longrightarrow es_{ij} = \frac{Y_{ij} - \overline{Y}}{s}$$

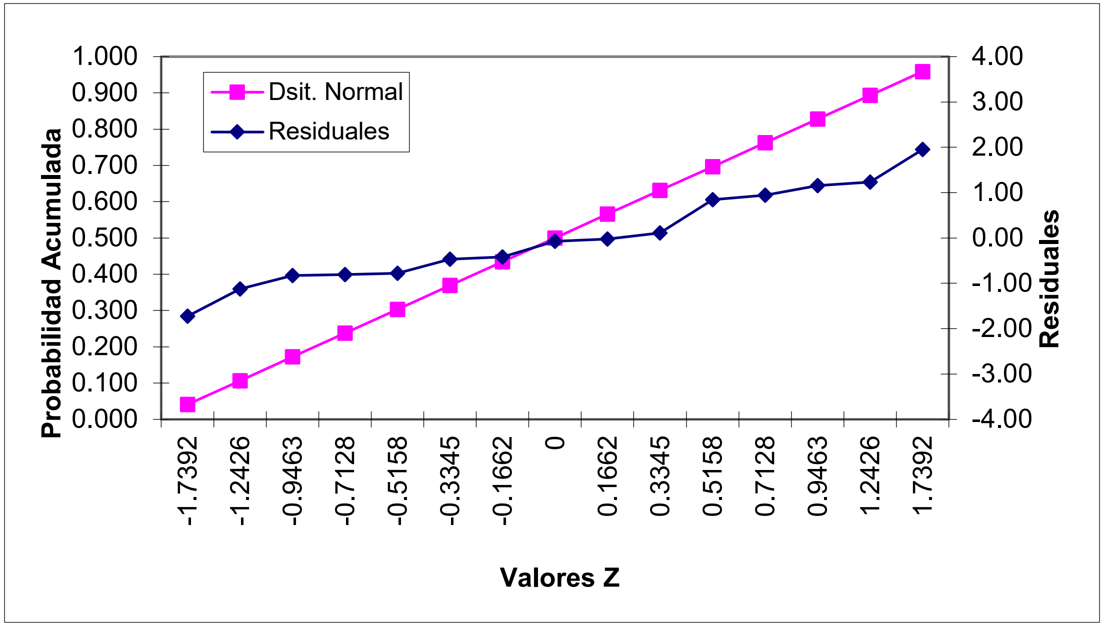
2.-Los datos se ordenan de menor a mayor: $Y_1 \leq Y_2 \leq Y_3 \leq \ldots \leq Y_n$ y se identifican con i = 1, 2, 3,…, n

3.-Para cada i es posible ESTIMAR cuál sería su probabilidad p(i) si perteneciera a una distribución normal con la fórmula propuesta por Blom (1958)

DISTRIBUCIÓN NORMAL

Gráfico de Residuales estandarizados:

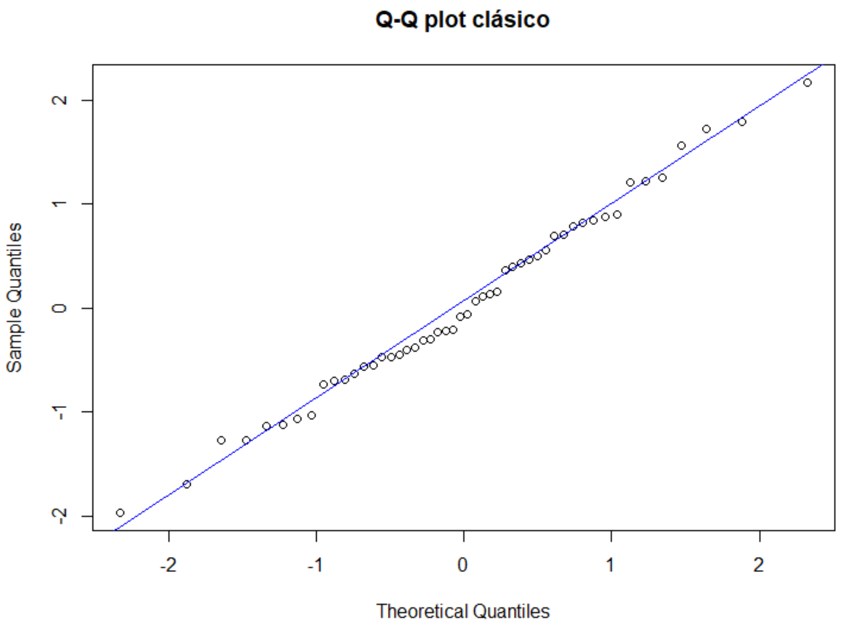
valor	error STAN		e ordenado	i	Blom	z
297	0.10812015		-1.73	1	0.041	-1.7392
340	1.23519082		-1.12	2	0.107	-1.2426
325	0.84202663		-0.83	3	0.172	-0.9463
227	-1.72664605		-0.80	4	0.238	-0.7128
277	-0.41609876		-0.78	5	0.303	-0.5158
337	1.15655798		-0.46	6	0.369	-0.3345
250	-1.1237943		-0.42	7	0.434	-0.1662
290	-0.07535647		-0.08	8	0.500	0
293	-0.77860434		-0.02	9	0.566	0.1662
291	-0.80377867		0.11	10	0.631	0.3345
289	-0.828953		0.84	11	0.697	0.5158
430	0.94583742		0.95	12	0.762	0.7128
510	1.95281071		1.16	13	0.828	0.9463
353	-0.02337437		1.24	14	0.893	1.2426
318	-0.46392518		1.95	15	0.959	1.7392



DISTRIBUCIÓN NORMAL

Gráfico Q-Q (Quantile-Quantile)

- **Propósito:** Diagnóstico gráfico para comparar la distribución de una muestra con una distribución teórica (usualmente normal).
- **Construcción:**
  - Eje X: Cuantiles teóricos de la distribución de referencia.
  - Eje Y: Estadísticos de orden (datos ordenados) de la muestra.
- **Interpretación:**
  - Si los puntos se alinean en una recta, la muestra sigue aproximadamente la distribución teórica.
  - Curvaturas indican desviaciones: colas pesadas, asimetría, etc.
- **Aplicaciones comunes:**
  - Evaluación de normalidad antes de aplicar pruebas paramétricas.
  - Comparación entre dos distribuciones empíricas (Q-Q entre muestras).
- **Diferencias con gráfico de probabilidad (tipo Blom):**
  - Usa cuantiles teóricos directamente, no esperanzas de orden estadístico.
  - En muestras grandes, ambos métodos convergen visualmente.
- **Ventajas:**
  - Intuitivo y ampliamente utilizado.
  - Compatible con cualquier distribución teórica, no solo la normal.



DISTRIBUCIÓN NORMAL

Test de Shapiro-Wilk (1965)

Algoritmo:

1.-Se ordenan los datos de menor a mayor

2.-Se calcula la Sumatoria Cuadrática de los datos

$$SC = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$$

3.-Se calcula b, definido como…

$$b = \sum_{i=1}^{m} a_i (Y_{n-i+1} - Y_i)$$

Si n es par m = n/2

Si n es impar m = n-1/2

a_i : estadístico de orden de una dist. Normal

4.-Se calcula el estadístico

$$W = \frac{b^2}{SC}$$

5.-Si W > Wc la distribución es Normal, si es < no se aproxima a una Normal

DISTRIBUCIÓN NORMAL

- Simetría y Kurtosis

Propiedades de una distribución de frecuencia que nos permite medir la simetría y altura de la distribución. Se pueden someter a prueba hipótesis en función de una distribución esperada.

1) Prueba de D'Agostino y Pearson (1973): Se basa en la simetría y en la curtosis

La H_0 se probada con el estadístico K^2

$$k^2 = Z_{g1}^2 + Z_{g2}^2$$

$$k^2 > \chi_{v,\alpha}^2$$

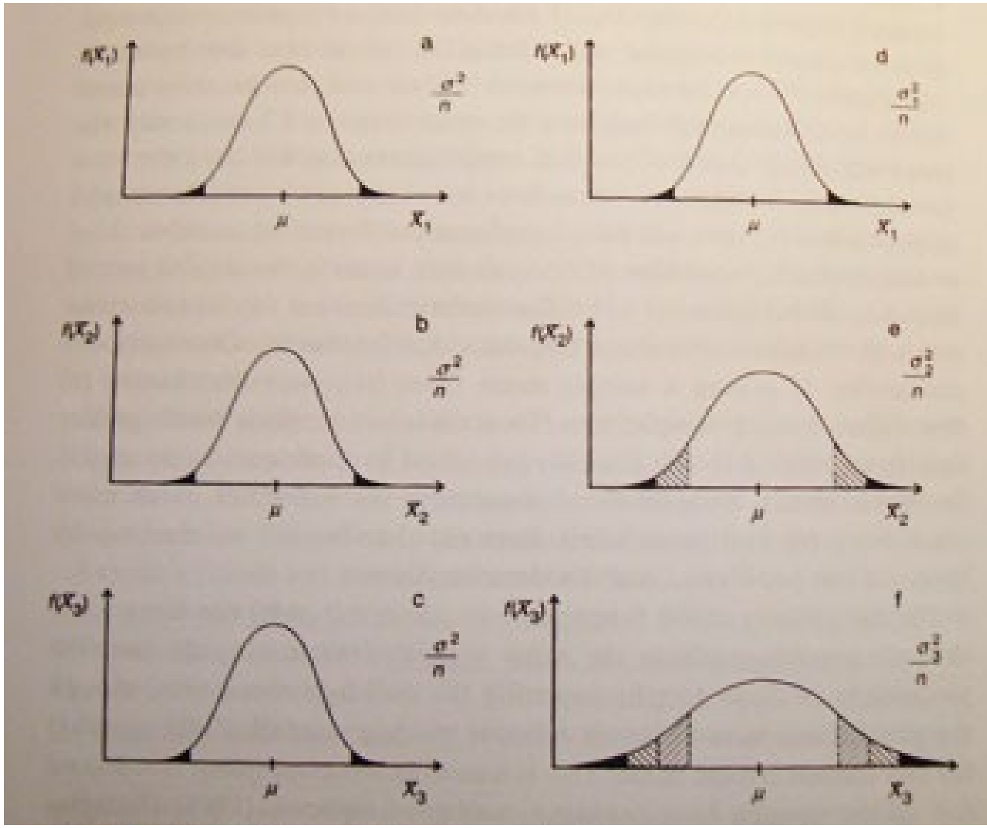
Ver guía para procedimiento…

Homogeneidad : Muestras con varianzas iguales

En datos balanceados… varianzas diferentes tienden a incrementar error tipo I. Por qué?

Esto es realmente un problema cuando una de las varianzas es sustancialmente mayor que las demás

Esto se enreda si los datos son desbalanceados y el menor n corresponde a la muestra con mayor variación



Cómo se detecta Homogeneidad

Diferentes Pruebas:

1. Prueba de Levene: insensible a Normalidad
2. Prueba de Bartlett: Sensible a Normalidad
3. Prueba de Scheffé: Sensible a Normalidad
4. Prueba de Cochran: Sensible a Normalidad
   Identifica el problema

Prueba de Levene: Homogeneidad de varianzas

- **Propósito:** Evaluar si varios grupos tienen varianzas iguales
- **Hipótesis:**
  - *H_0:* Las varianzas poblacionales son iguales.
  - *H_1:* Al menos una varianza difiere.
- **Construcción:**
  - Se calcula la desviación absoluta de cada observación respecto a la media (o mediana) de su grupo.
  - Se aplica un ANOVA sobre estas desviaciones para detectar diferencias entre grupos.
- **Ventajas:**
  - Menos sensible a la no normalidad que otras pruebas como Bartlett.
  - Puede usarse con la mediana como centro, lo que mejora robustez ante outliers.
- **Aplicaciones comunes:**
  - Verificación del supuesto de varianzas iguales antes de aplicar ANOVA.
  - Evaluación de heterogeneidad en estudios experimentales o observacionales.
- **Interpretación:**
  - *$p > 0.05$:* No se rechaza H_0 → varianzas homogéneas.
  - *$p < 0.05$:* Se rechaza H_0 → varianzas heterogéneas.

Cómo se detecta Homogeneidad

Prueba de Cochran:

$$Cochran = \frac{mayor\ S_i^2}{\sum_{i=1}^{a} S_i^2}$$

Si Cochran > $C_{tabulado}$

Hay problemas de heterogeneidad

Sin embargo… lean esto

Austral Ecology (2002) 27, 681–688

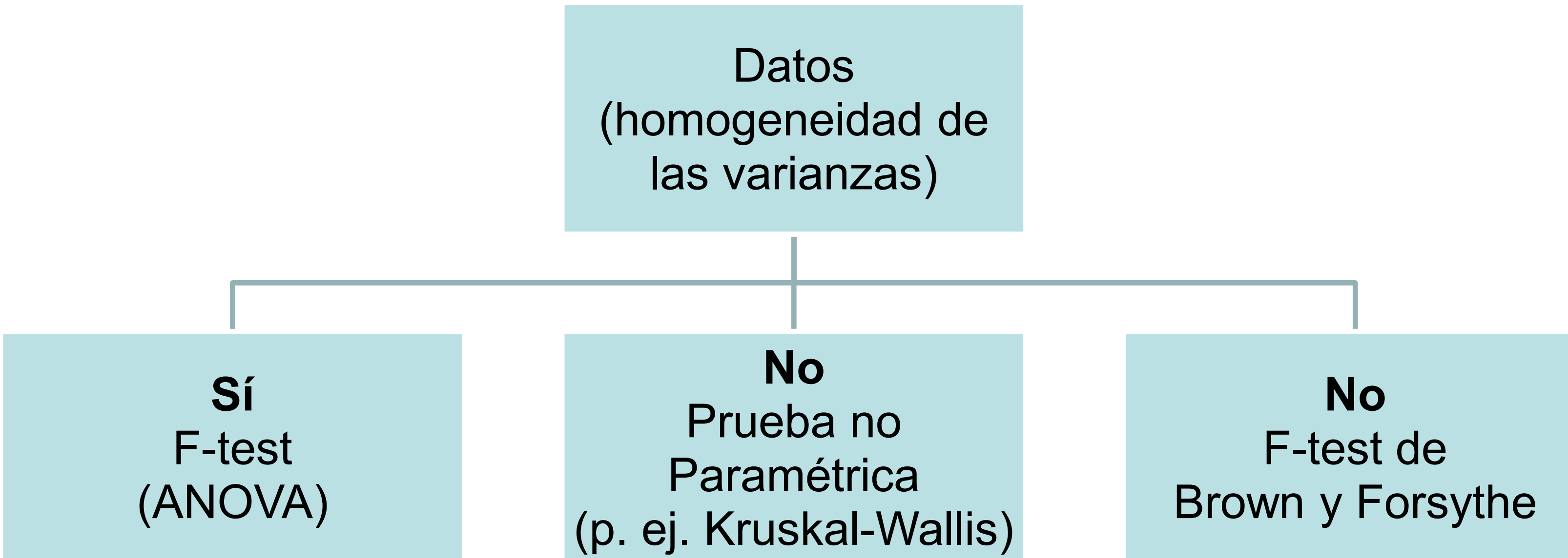
Of rowing boats, ocean liners and tests of the ANOVA homogeneity of variance assumption

KEITH A. McGUINNESS
School of Biological, Environmental and Chemical Sciences, Northern Territory University, Darwin, Northern Territory 0909, Australia (Email: keith.mcguinness@ntu.edu.au)

Abstract One of the assumptions of analysis of variance (ANOVA) is that the variances of the groups being compared are approximately equal. This assumption is routinely checked before doing an analysis, although some workers consider ANOVA robust and do not bother and others avoid parametric procedures entirely. Two of the more commonly used heterogeneity tests are Bartlett's and Cochran's, although, as for most of these tests, they may well be more sensitive to violations of the ANOVA assumptions than is ANOVA itself. Simulations were used to examine how well these two tests protected ANOVA against the problems created by variance heterogeneity. Although Cochran's test performed a little better than Bartlett's, both tests performed poorly, frequently disallowing perfectly valid analyses. Recommendations are made about how to proceed, given these results.

Key words: ANOVA, assumption, homogeneity, Bartlett's, Cochran's, variance, Type I error.

ALTERNATIVAS AL ANOVA DE FISHER



TECHNOMETRICS©, VOL. 16, NO. 1, FEBRUARY 1974

The Small Sample Behavior of Some Statistics Which Test the Equality of Several Means

Morton B. Brown* and Alan B. Forsythe

Department of Biomathematics†
University of California at Los Angeles
Los Angeles, California

Four statistics which may be used to test the equality of population means are compared with respect to their robustness under heteroscedasticity, their power, and the overlap of their critical regions. The four are: the ANOVA F-statistic; a modified F which has the same numerator as the ANOVA but an altered denominator; and two similar statistics proposed by Welch and James which differ primarily in their approximations for their critical values.

The critical values proposed by Welch are a better approximation for small sample sizes than that proposed by James. Both Welch's statistic and the modified F are robust under the inequality of variances. The choice between them depends upon the magnitude of the means and their standard errors. When the population variances are equal, the critical region of the modified F more closely approximates that of the ANOVA than does Welch's.

ANOVA CON *F* DE BROWN-FORSYTE

$$F_{BF} = \frac{SCE}{B}$$

$$B = \sum_{i=1}^{a} \left[(1 - \frac{n_i}{N}) \right] S_i^2$$

$$GLn = a - 1$$

$$GLd = \frac{B^2}{\left\{ \left[\left[1 - (\frac{n_1}{N}) \right] S_i^2 \right] \frac{2}{n_i - 1} \right\}}$$