Examen Quamtun seeds

1) a) Pruebe que dos autovectores de un operador hermitiano con diferentes eigen-valores son necesariamente ortogonales.

* Operador hermitico: $A = A^{+}$

* Autovectores y Autovalores

$$Av = \lambda V \quad y \quad Aw = \mu w$$

* Recordar que el producto interno de dos vectores es ortogonal si

$$\langle v | w \rangle = 0$$

* Propiedad Hermitiana para cualquier par de vectores: $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ y como condición delos Autovectores y autovalores podemos reemplazar A por sus autovalores

$$\langle \lambda v, w \rangle = \langle v, \mu w \rangle =$$

$$\lambda \langle v, w \rangle = \mu \langle v, w \rangle$$

Para que esta condición se cumpla

$$\langle v, w \rangle = 0 \quad y \quad \lambda \neq \mu$$

1.1.b

$$A|v\rangle = |w\rangle$$

$$B|w\rangle = |x\rangle$$

~~todas~~ Esta operación también se puede representar como

$$A \ast B = [AB]$$

$$[AB]\,|v\rangle = |x\rangle$$

Teniendo en cuenta que la multiplicación de matrices no es conmutativa.

1.2

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

a) $\langle\psi|\psi\rangle =$

$$\left(\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|\right)\left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right)$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \alpha^*\alpha\langle 0|0\rangle + \alpha^*\beta\langle 0|1\rangle + \beta^*\alpha\langle 1|0\rangle + \beta^*\beta\langle 1|1\rangle$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \alpha^*\alpha\langle 0|0\rangle + 0 + 0 + \beta^*\beta\langle 1|1\rangle$$

Recordaique

$$|\alpha|^2 = \alpha\alpha^*$$

$$|\beta|^2 = \beta\beta^*$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = |\psi|^2 + |\beta|^2 = 1$$

1.2. b

Coordenadas esfericas en coeficientes α y β

Representar como números complejos

~~α~~ =

$z = a + bi \Rightarrow z = re^{i\theta}$

donde r es el módulo y $e^{i\theta}$ es la fase.

$\alpha = r_1 e^{i\alpha} \qquad \beta = r_2 e^{i\alpha}$

$r_1^2 + r_2^2 = 1 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$

donde $0 \leq r_1, r_2 \leq 1$

Con todo esto podemos expresar para mantener la norma.

$|\psi\rangle = r_1 e^{i\theta_1}|0\rangle + r_2 e^{(i\theta_1 - i\theta_2)}|1\rangle =$

$|\psi\rangle = e^{i\theta}(r_1|0\rangle + r_2 e^{i\theta_1 - i\theta_2}|1\rangle$

$r_1 = \cos\frac{\theta}{2}, \quad r_2 = \sin\frac{\theta}{2}$

$|\psi\rangle = e^{i\theta}(\cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + \sin(\frac{\theta}{2}) e^{i\alpha}|1\rangle)$

1.2.c

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi}|1\rangle\right)$$

1.2.d

En la esfera de Bloch el ángulo θ representa ~~en~~ el ángulo medido desde el eje z desde $|0\rangle$ (polo norte) hasta $|1\rangle$ (polo sur), por ~~tand~~ tanto es la única que tiene propiedades de medición

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}|1\rangle$$

2

2.1. a

$$\langle\psi| = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\langle 0| + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\langle 1|$$

b.

$\langle\psi|\psi\rangle =$

$$\Big[\overbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)}^{\alpha^*}\langle 0| + \overbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)}^{\beta^*}\langle 1|\Big]\Big[\overbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)}^{\alpha}|0\rangle + \overbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)}^{\beta}|1\rangle\Big]$$

$$\frac{1}{2}\langle 0|0\rangle + 0 + 0 + \frac{1}{2}\langle 1|1\rangle = 1$$

Calculo Auxiliar

$$\cancel{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)}$$

$$\alpha = \frac{1}{4} + \cancel{\frac{i}{2}} - \cancel{\frac{i}{2}} - \left(\frac{i}{2}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{1}{4} - \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\beta = \frac{1}{4} - \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$\langle 0|\psi\rangle =$

c)

$$\langle 0|\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)|0\rangle + \left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)|1\rangle\right)$$

$$\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\langle 0|0\rangle + \cancel{\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\langle 0|1\rangle}$$

$$\langle 0|\psi\rangle = \frac{1+i}{2} \;//$$

$\langle 1|\psi\rangle =$

$$\langle 1|\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)|0\rangle + \left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)|1\rangle\right)$$

$$\cancel{\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\langle 1|0\rangle} + \left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right)\langle 1|1\rangle$$

$$\langle 1|\psi\rangle = \frac{1-i}{2} \;//$$

(d)

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$\langle+| = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|$$

$$\langle+|\psi\rangle =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 0| + |1\rangle\right) \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}|1\rangle\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\langle 0|0\rangle + 0 + 0 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\langle 1|1\rangle\right]\right.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{i}{2}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{i}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1$$

$$\langle+|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} //$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle - |1\rangle \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle 0| - \langle 1| \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\langle 0| - \langle 1| \right) \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)|0\rangle + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)|1\rangle \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} + 0 - 0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cancel{\frac{1}{2}} + \frac{i}{2} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{i}{2} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{i + i}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cancel{2} i}{\cancel{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

$$\langle -|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i \quad //$$

c) $\langle +|-\rangle = 0$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)$$

$$\frac{1}{2} + (-0) + 0 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - 0 + 0 - \frac{1}{2} = 0$$

//

$\langle +|+\rangle$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)$$

$$\frac{1}{2} + 0 + 0 + \frac{1}{2} = 1$$

//

22a

$$|\psi\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right)$$

Para hallar la matriz de densidad se debe aplicar el producto externo

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\left(|01\rangle + |10\rangle\right)\left(\langle 01| + \langle 10|\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(|01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle + |10\rangle + |10\rangle\langle 10|\right)$$

Recordar que

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = [0, 1, 0, 0]^T$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = [0, 0, 1, 0]^T$$

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2.2.b

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|0\rangle_B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \Big|$$

$$|1\rangle_B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\rho_A = \frac{1}{2}\left(|0\rangle_B + |1\rangle_B\right)$$

$$\rho_A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.2.c

~~Para~~ Como el estado de bell es simetrico, se realiza el mismo cálculo que el ~~punto~~ punto anterior.

$$\rho_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.d)

La matriz de densidad reducida ρ_A de un qubit en el estado de Bell, se utiliza en la computación cuántica para asegurar que la información no pueda ser accesible para aquel observador que solo tenga acceso a parte del sistema.

Ejercicio 3

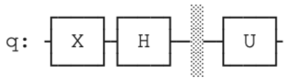
```python
from qiskit import QuantumCircuit,  Aer, execute
from qiskit.quantum_info import Operator
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```python
[16] # punto a
qc = QuantumCircuit(1)
qc.x(0)
qc.h(0)
qc.z(0)
qc.draw()
```


```python
[98] # punto b
u = Operator(qc)
print(u)
```

```
Operator([[ 0.70710678+0.j,  0.70710678+0.j],
          [ 0.70710678+0.j, -0.70710678+0.j]],
         input_dims=(2,), output_dims=(2,))
```

```python
[35] # punto c
U = qc.to_gate()
U.name = "U"
circuito = QuantumCircuit(1)
circuito.x(0)
circuito.h(0)
circuito.barrier()
circuito.append(U, [0])
circuito.draw()
```




```python
[36] # punto d
simulator = Aer.get_backend('statevector_simulator')
result = execute(circuito, simulator).result()
state_vector = result.get_statevector()
print(state_vector)
```

```
Statevector([-2.22044605e-16-6.1232340e-17j,
              1.00000000e+00-1.8369702e-16j],
            dims=(2,))
```