Introducción a la Información Cuántica

QuantumQuipu

17 de enero de 2024

Capítulo 1

Problemas Capítulo 1

1.1 Demuestre que los autovalores de los operadores hermíticos son reales. Si un operador A es hermítico ($A = A^\dagger$) y puede expresarse como $A = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$, entonces se cumple que $A\,|i\rangle = \lambda_i\,|i\rangle$, donde $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Aquí, $\{|i\rangle\}$ representa el conjunto de autovectores y λ_i son los autovalores correspondientes. Demuestra que los autovectores de un operador lineal A hermítico, es decir, $A = A^\dagger$, relacionados a autovalores distintos son linealmente independientes.

1.2 Demuestra que $(A+B)^\dagger = (A^\dagger + B^\dagger)$, $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ y $\left(A^\dagger\right)^\dagger = A$, con A y B operadores lineales.

1.3 Demuestra el teorema de la diagonalización simultánea: Dos operadores hermíticos A y B conmutan si y solo si existe una base orto-normal respecto a la cual ambos A y B son diagonales.

1.4 Considere las matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Encuentre los autovalores y autovectores de A y B. Denote los autovectores de A como $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, |a_3\rangle\}$ y los autovectores de B como $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle, |b_3\rangle\}$. ¿Hay autovalores degenerados?

b) Muestre que cada uno de estos conjuntos forma una base completa, es decir, $\langle a_j|a_k\rangle = \delta_{jk}$ y $\sum_{i=1}^{3} |a_j\rangle\langle a_j| = \mathbb{I}_3$.

c) Encuentre una matriz unitaria U de tal manera que transforme la base $\{|a\rangle\} \to \{|b\rangle\}$, muestre que U es unitaria, esto es, calcule $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}_3$.

d) Ahora muestre cómo la matriz A se transforma con esta unitaria: $A' = U^\dagger A U$.

1.5 Si los estados $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ forman una base orto-normal y si el operador G tiene las propiedades: $G\,|1\rangle = 2\,|1\rangle - 4\,|2\rangle + 7\,|3\rangle$, $G\,|2\rangle = -2\,|1\rangle + 3\,|3\rangle$ y $G\,|3\rangle = 11\,|1\rangle + 2\,|2\rangle - 6\,|3\rangle$. ¿Cuál es la representación matricial de G en la base $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$?

1.6 Demuestre la ciclicidad de la traza: $\mathrm{Tr}\,(ABC) = \mathrm{Tr}\,(CAB) = \mathrm{Tr}\,(BCA)$.

1.7 Demostrar que la norma de la traza de un operador hermítico $||M||_1 = \mathrm{Tr}\left(\sqrt{M^\dagger M}\right)$ es igual a la suma del modulo de sus autovalores.

1.8 a) Muestre que los autovalores de las matrices de Pauli son iguales a ± 1, *i.e.*, el determinante es -1 y la traza es 0. Determine también los autovectores de estas matrices. **b)** Determine las relaciones de conmutación y de anti-conmutación para las matrices de Pauli σ_a y σ_b, con $a,b \in \{x,y,z\}$. **c)** Escriba el producto $\sigma_a\sigma_b$ en términos del tensor de Levi-Civita ϵ_{abc} y del delta de Kronecker δ_{ab}. **d)** Muestre que $\sigma_a^2 = -i\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \mathbb{I}$. **e)** Sean $\vec{a} = [x,y,z]^T \in \mathbb{R}^3$ y $\vec{b} = [x',y',z']^T \in \mathbb{R}^3$, muestre que la inversa del mapa $\vec{a} \to (\vec{a}\cdot\vec{\sigma})$ es $\vec{a} = [x,y,z]^T = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Tr}(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})\sigma_x, \mathrm{Tr}(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})\sigma_y, \mathrm{Tr}(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})\sigma_z\right]^T$. **f)** Escriba $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma})$ en términos del producto escalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ y del producto vectorial $\vec{a}\times\vec{b}$.

1.9 Sea la base $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ del espacio de polarización lineal, dada por un vector horizontal y uno vertical. Escriba 3 estados puros de 1 *qubit*, dados por $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ y $|\psi_3\rangle$ en esta base, de manera que sus polarizaciones difieran en 120° uno del otro.

1.10 Sea $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ una base completa en el espacio de Hilbert. Sea el operador $M = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$. Encuentre la representación matricial de este operador en las bases orto-normales: $M = |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|$, con $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$, y en la base $M = |+\theta\rangle\langle +\theta| + |-\theta\rangle\langle -\theta|$, con $\{|+\theta\rangle, |-\theta\rangle\}$ dada por: $|+\theta\rangle = (\cos(\theta), \sin(\theta))^T$ y $|-\theta\rangle = (-\sin(\theta), \cos(\theta))^T$, y con $\theta \in \mathbb{R}$.

1.11 Sea $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ una base completa en el espacio de Hilbert. La operación unitaria *NOT* está definida como $|0\rangle \to |1\rangle$ y $|1\rangle \to |0\rangle$. Encuentre la representación matricial de la operación unitaria *NOT* en: **a)** La base de la matriz de Pauli σ_z, dada por $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. **b)** La base Hadamard, $\{|\pm\rangle\}$.

1.12 La transformada de Hadamard-Walsh es una transformación unitaria de 1 *qubit* que se denota como H y consiste en la siguiente transformación:

$$|0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right), \tag{1}$$

$$|1\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right). \tag{2}$$

a) Encuentre el operador unitario H en la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Encuentre la forma matricial de este operador unitario con respecto a esta base. **b)** Escriba el operador inverso de Hadamard, que realiza la transformación inversa.

1.13 Sea una función real y analítica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esta función aplicada en un operador hermítico A es definida como: $f(A) = \sum_{i:\lambda_i\neq 0} f(\sqrt{\lambda_i})|i\rangle\langle i|$, adónde $A = \sum_{i:\lambda_i\neq 0}\sqrt{\lambda_i}|i\rangle\langle i|$ es la descomposición espectral del operador A. **a)** Demuestre que $\mathrm{Tr}\left(f(A^\dagger A)\right) = \mathrm{Tr}\left(f(AA^\dagger)\right)$. Ahora sea una otra función analítica g definida en variables complejas $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, sea $\alpha \in \mathbb{C}$ un número y sea $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario, es decir, $|\hat{n}| = 1$. **b)** Demuestre que:

$$g(\alpha\,\hat{n}\cdot\vec{\sigma}) = \left(\frac{g(\alpha) + g(-\alpha)}{2}\right)\mathbb{I} + \left(\frac{g(\alpha) - g(-\alpha)}{2}\right)\hat{n}\cdot\vec{\sigma}. \tag{3}$$

1.14 Sea $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ una base completa en el espacio de Hilbert. **a)** Calcule $|0\rangle\otimes|0\rangle$, $|0\rangle\otimes|1\rangle$, $|1\rangle\otimes|0\rangle$ y $|1\rangle\otimes|1\rangle$. **b)** Calcule $\sigma_x\otimes\sigma_z$ y $\sigma_z\otimes\sigma_x$. ¿Son estas matrices iguales?

1.15 Considere el vector dado por $\langle u| = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4) \in \mathbb{C}^4$ y $\bar{u} = u^*$. Escriba la matriz $\rho_{AB} = |u\rangle\langle u|$. **a)** Calcule la matriz $\rho_B = \mathrm{Tr}_A\left(|u\rangle\langle u|\right)$, usando la base $|0\rangle\otimes\mathbb{I}_2 = |0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ y $|1\rangle\otimes\mathbb{I} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$. **b)** Calcule ahora la matriz $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\left(|u\rangle\langle u|\right)$, usando $\mathbb{I}_2\otimes|0\rangle$ y $\mathbb{I}_2\otimes|1\rangle$.

1.16 Escriba el estado mixto de Werner dado por: $\rho_W = \frac{(1-p)}{4}\mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + p|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|$. Determine cuál es el rango permitido para p para que el estado de Werner sea positivo-semidefinido y tenga traza 1. Calcule la traza parcial en el primer y en el segundo *qubit* para este estado.

1.17 Considere un sistema de dos partes $|\psi\rangle = \sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^N c_{jk}|jk\rangle = \sum_{j=1}^N\sum_{k=1}^N c_{jk}|j\rangle\otimes|k\rangle$. Sea $\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$.

a) Demuestre que la traza parcial en el segundo sistema puede calcularse como $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\left(\rho_{AB}\right) = \Gamma\Gamma^\dagger$, utilizando la matriz $(\Gamma)_{jk} = c_{jk}$.

b) Considere un estado de Bell $|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$. Escriba la matriz $\rho_{AB} = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$. Determine la matriz Γ para este estado y calcule $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\left(\rho_{AB}\right) = \Gamma\Gamma^\dagger$.

1.18 Sea el vector máximamente entrelazado y no-normalizado dado por $|\Lambda\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{d_B}|i\rangle_A\otimes|i\rangle_B$, en que $d_B = dim(\mathcal{H}_B)$. Escriba una forma alternativa para la traza de un operador cuadrado M_B, que actúa en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_B$, es dado por $\mathrm{Tr}\left(M\right) = \langle\Lambda|\,\mathbb{I}_A\otimes M_B\,|\Lambda\rangle$, adonde $\mathbb{I}_A$ es operador identidad que actúa en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}_A$, que es isomorfo al espacio $\mathcal{H}_B$.

1.19 Si A y B son operadores hermitianos, i demuestra que el anti-conmutador $\{A,B\}$ es hermitiano y ii $[A,B]$ no es hermitiano. Explica lo que falta para que el conmutador sea hermitiano.

1.20 Considera cualquier matriz de tamaño 4 escrita en la base estándar en términos de cuatro bloques 2×2: $G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. Además, considera una operación unitaria locale $V_1 = I \otimes U$, donde U es una matriz unitaria arbitraria de tamaño 2×2. Calcula $G_1 = V_1 G V_1^{\dagger}$.

Capítulo 2

Problemas Capítulo 2

2.1 a) ¿Cuál es la fidelidad de las distribuciones de probabilidad $(1,0)$ y $(1/2,1/2)$, y **c)** cuál es la fidelidad de $(1/2,1/3,1/6)$ y $(3/4,1/8,1/8)$? **d)** Explique la interpretación geométrica de la fidelidad. **e)** ¿Cuál es la distancia de la traza de los mismos vectores de probabilidad?

2.2 Demuestre que la distancia de traza entre las distribuciones de probabilidad $(p,1-p)$ y $(q,1-q)$ es $d(\vec{p},\vec{q}) = |p-q|$. Calcule también la distancia euclidiana entre estos dos vectores.

2.3 Se lanza una moneda no justa hasta que ocurra la primera cara. Sea p la probabilidad de que ocurra cara y sea el conjunto X el número de intentos requeridos. **a)** Encuentre la entropía $H(X)$ en bits. **b)** Calcule la entropía $H(X)$, si $p = 1/2$.

2.4 Una distribución de probabilidades $P(X,Y)$ es dada por el Cuadro 1. **a)** Determine si esta distribución de probabilidades es una distribución válida. Hallar: **b)** $H(X)$, $H(Y)$, **c)** $H(X|Y)$, $H(Y|X)$, **d)** $H(X,Y)$, **e)** $H(Y) - H(Y|X)$, **f)** La información mutua $I(X:Y)$, **g)** Dibujar un diagrama de Venn para las cantidades de las partes de **b)** a **f)**.

X \ Y	0	1
0	0.2	0.3
1	0.1	0.4

Cuadro 1: $P(X,Y)$

2.5 Sea la variable aleatoria X con tres posibles resultados: $\{a,b,c\}$. Considera dos distribuciones para esta variable aleatoria: $P(X) = (1/2,1/4,1/4)^T$ y $Q(X) = (1/3,1/3,1/3)^T$. **a)** Calcula $H(P)$, $H(Q)$, $D(P||Q)$ y $D(Q||P)$. **b)** Calcula la fidelidad entre las dos distribuciones. **c)** Calcula la distancia ℓ_1, la distancia euclidiana ℓ_2, la distancia ℓ_∞, la distancia de Bhattacharyya, la divergencia de Jansen-Shannon y calcula también la distancia de Wootters y la distancia de Hellinger entre los dos vectores. La divergencia de Jensen-Shannon es una versión simetrizada y suavizada de la divergencia de Kullback-Leibler.

2.6 El hecho de que la forma matemática de la información también sea la entropía plantea la pregunta de si la entropía de la información es la misma cantidad que aparece en la mecánica estadística. ¡Lo es! Un ejemplo importante y sencillo es cómo podemos obtener la distribución de Boltzmann al maximizar la información (lo que aún tenemos que descubrir) sujeta solo a una restricción en la energía promedio. Sea un sistema cuántico tenga N niveles de energía discretos E_i y esté en equilibrio termodinámico con su entorno. Nuestra tarea es determinar la probabilidad, p_i, de que el sistema se encuentre en cualquiera de sus niveles de energía dados, E_i. Por supuesto, sabemos cómo hacer esto maximizando la entropía, pero la teoría de la información nos ofrece una perspectiva diferente sobre el problema; maximizamos la información del sistema sujeta solo a la restricción de que su energía media esté fija. De esta manera, maximizamos, de manera imparcial, nuestra incertidumbre sobre el estado. La derivación se realiza fácilmente como un cálculo variacional utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange. En este caso, es conveniente trabajar con la base natural de los logaritmos, y así definimos la información como $H(\vec{p}) = H(\{p_1, p_2, \ldots, p_N\}) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i$. Nuestra tarea es maximizar esta cantidad sujeta a una energía promedio fija, es decir, $\langle E \rangle = \sum_{i=1}^{N} p_i E_i$, y las probabilidades sumando a la unidad $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$. Podemos lograr esto al variar, de manera independiente, las probabilidades en la función. Para esto, construimos una función lagrangeana $L(\vec{p},\alpha,\beta) = H(\vec{p}) + \alpha(1 - \sum_{i=1}^{N} p_i) + \beta(\sum_{i=1}^{N} p_i E_i - \langle E \rangle)$, con $\beta = \frac{1}{K_B T}$. Podemos fijar el valor de los multiplicadores indeterminados de Lagrange al imponer la normalización de las probabilidades y el valor de la energía promedio para llegar a la conocida distribución de Boltzmann. **a)** Determine $\delta L = 0 \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \vec{p}} = 0$, con $\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$ y también $\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0$ y demuestre que:

$$p_i = \frac{e^{-E_i/K_B T}}{\sum\limits_{j=1}^{N} e^{-E_j/K_B T}}.$$

Para la distribución de Boltzmann, encuentra el valor del multiplicador de Lagrange β en términos de la energía media $\langle E \rangle$:

b) para un sistema con dos posibles configuraciones con energías E_0 y E_1 y

c) Es posible demostrar que el multiplicador de Lagrange β es realmente $(k_B T)^{-1}$, pero esto es un tema avanzado y no lo abordaremos aquí. Escriba la entropía termodinámica como $S = k_B H(\vec{p})$, donde $\vec{p}$ es el vector de probabilidades encontrado en la letra **a)**, es decir, el vector tal que $H(\vec{p}) = H_{\text{máx}}$.

2.7 Demuestra que si $H(X|Y) = H(X)$, entonces las variables aleatorias X e Y son independientes. Determine $H(Y|X)$ para este caso de independencia.

2.8 Demuestra que $I(X : Y) = \sum_{x,y} P(x,y) \log\left(\frac{P(x,y)}{P(x)P(y)}\right) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$.

2.9 Si tenemos tres eventos A, B y C, muestra que $H(A) + H(B) + H(C) \geq H(A, B, C)$. ¿En qué condiciones se cumplirá la igualdad?

2.10 Demuestra que la entropía de Shannon $H(\vec{P}) = H(p_1, \ldots, p_n)$, con $\vec{P} = (p_1,p_2, \ldots ,p_n)^T$ un vector de probabilidad es máxima cuando $p_1 = \ldots = p_n = 1/n$.

2.11 Usando la fórmula de Stirling, $\log n! = n \log n - \frac{n}{\ln 2} + O(\log n)$, donde ln denota el logaritmo natural (de base e), demuestra que $\frac{n!}{\Pi_{i=1}^{k}(np_i)!} \approx 2^{nH(p_1,p_2,\ldots,p_n)}$.

2.12 La probabilidad de identificar erróneamente una distribución de probabilidad P como Q es aproximadamente $P(Q|P) \approx 2^{-N \cdot D(Q||P)}$. Deseamos determinar si un dado es justo, con probabilidades para cada uno de los números siendo $\frac{1}{6}$, o está sesgado, con $P(6) = \frac{1}{4}$ y $P(1) = P(2) = \ldots = P(5) = \frac{3}{20}$. Estima el número de lanzamientos del dado necesario para que: **a)** Una indicación de que el dado es justo sea correcta con una probabilidad de al menos 0,999999.

Capítulo 3

3 Teoría Cuántica sin Ruido

3.1 ¿Qué es un *qubit*?

3.2 Estados Puros Cuánticos: *Qubits*

3.3 Esfera de Bloch

3.4 Proyectores y matrices de densidad para estados puros

Problemas Capítulo 3

3.1 Considere un estado puro de 1 *qubit* dado por $|\psi\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})\,|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\frac{\theta}{2})\,|1\rangle$.

a) Escriba este estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ en su forma matricial. A partir de este resultado, escriba esta matriz como $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right)$, donde $\vec{\sigma} = (\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)^T$ es el vector de matrices de Pauli. Calcule $|\vec{r}|$ para esta matriz densidad.

b) A través de identidades trigonométricas, muestre que $\hat{r} = (x,y,z)^T$, para un estado puro, es nada más que la representación de coordenadas cartesianas de un vector unitario en coordenadas esféricas con ángulos θ y ϕ.

c) Muestre que el vector $\vec{r}$ es dado por $\vec{r} = (\mathrm{Tr}\,(\sigma_x\rho)\,,\mathrm{Tr}\,(\sigma_y\rho)\,,\mathrm{Tr}\,(\sigma_z\rho))^T$.

d) Como ejemplo de un estado mixto, consideramos el caso de un *qubit*, que puede apuntar en cualquier dirección del espacio con igual probabilidad. Determine este estado en su forma matricial, es decir, $\rho = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin(\theta)\mathrm{d}\theta |\psi\rangle\langle\psi|$. Determine cuál es el estado ρ.

3.2 a) Demuestre los autovalores de la matriz $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right)$ están dados por $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1 + |\vec{r}|\right)$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(1 - |\vec{r}|\right)$. **b)** Muestre que estos autovalores son reales y positivos para cualquier vector $\vec{r}$, siempre y cuando $|\vec{r}|^2 \leq 1$. Atención: estas matrices pueden tener $|\vec{r}| \leq 1$.

3.3 La pureza de un estado cuántico $\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \vec{r}\cdot\vec{\sigma}\right)$ se define como $P(\rho) = \mathrm{tr}\,(\rho^2)$. **a)** Utilice los resultados del Problema **1.1** para demostrar que $P(\rho) = \frac{1}{2}\left(1 + |\vec{r}|^2\right)$. **b)** Muestre que un estado cuántico es puro si y solo si $|\vec{r}| = 1$ (esto significa que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$) y que los estados mixtos tienen un vector de Bloch $\vec{r}$ tal que $0 \leq |\vec{r}| < 1$. Determine cuál estado cuántico obtenemos cuando $|\vec{r}| = 0$.

3.4 Sea el operador $F_{AA'}$ el operador *swap* que actúa en el espacio de Hilbert-Schmidt compuesto por dos estados de Hilbert-Schmidt isomorfos $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{A'}$, es decir, con $dim(\mathcal{H}_A) = dim(\mathcal{H}_{A'})$. **a)** Escribe su forma matricial de este operador. Su acción se describe como sigue:

$$F_{AA'}\,|i\rangle_A \otimes |j\rangle_{A'} = |j\rangle_A \otimes |i\rangle_{A'}\,, \quad \forall\, i,j.$$

Demuestre que la pureza $P(\rho_A)$ de un estado $\rho_A \in \mathcal{H}_A$, con $\rho_{A'} = \rho_A$ y con $\rho_{A'} \in \mathcal{H}_{A'}$, puede expresarse como:

$$P(\rho_A) = \mathrm{Tr}\left[\left(\rho_A \otimes \rho_{A'}\right) F_{AA'}\right].$$

3.5 Sea $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |z_i\rangle\langle z_i|$ la descomposición de Schmidt de la matriz densidad ρ, en que $n = rank(\rho)$, $\lambda_i > 0, \forall i$ y $\langle z_i|z_j\rangle = \delta_{ij}$. Sea también $\rho = \sum_{j=1}^{k} |y_j\rangle\langle y_j|$, con $k > n$ y con ambas descomposiciones válidas para ρ. Escriba una matriz unitaria $(U_{ij})_{i,j=1}^{k}$ tal que $\sum_{j=1}^{k} U_{ij}\,|z_j\rangle = |y_i\rangle$.

3.6 Demuestra que los estados de Bell son mutuamente ortogonales y que forman una base para el espacio de 2 *qubits* dado por $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$. Debes ser capaz de expresar un estado arbitrario de 2 *qubits* $|\psi\rangle = a\,|00\rangle + b\,|01\rangle + c\,|10\rangle + d\,|11\rangle$ como una superposición lineal de los estados de Bell. Encuentra los coeficientes en esta superposición en términos de $\{a,b,c,d\}$, si $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$.

3.7 La noción de la descomposición de Schmidt conduce inmediatamente a una construcción inversa conocida como purificación: dada una matriz de densidad ρ_A para un estado mixto de un sistema A, se puede construir un "supersistema" AB del cual A es un subsistema, de modo que $|\psi_{AB}\rangle$ sea un estado puro y $\rho_A = \mathrm{tr}_B\left(|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|\right)$. Escribe esta purificación y demuestra que la traza parcial es la esperada.

3.8 Demuestra que un proyector P es hermítico y puede invertirse si y solo si $P = \mathbb{I}$.

3.9 Mostré que hay estados $|\psi\rangle = \sum_{a,b,c} |a\rangle\,|b\rangle\,|c\rangle$ que no pueden ser escritos como $|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}\,|i\rangle\,|i\rangle\,|i\rangle$. Esto significa que la descomposición de Schmidt no se puede extender, al menos de manera trivial, a sistemas compuestos por más de dos partes. Consejo: Basta con mostrar un contraejemplo. Trabaje, por ejemplo, con el estado $|\psi\rangle = |\Psi^+\rangle \otimes |0\rangle$.

3.10 Considera el estado entrelazado de dos *qubits* dado por: $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle_A|0\rangle_B + |\psi_2\rangle_A|1\rangle_B)$, donde

$$|\psi_1\rangle_A = \cos\theta|0\rangle_A + \sin\theta|1\rangle_A,$$

$$|\psi_2\rangle_A = \cos\theta|0\rangle_A - \sin\theta|1\rangle_A.$$

a) Obtén la descomposición de Schmidt para el estado $|\Psi\rangle$.