

# Quantum Seeds Módulo 1

Ricardo Quispe - QuantumQuipu

5 de Enero 2024

## 1 Problemas Teóricos-Prácticos

### 1.1 Problema 1:

Considera un sistema cuántico de un solo qubit descrito por el vector de estado  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , donde  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  son los estados de la base canónica para un qubit, y  $\alpha$  y  $\beta$  son números complejos que cumplen la condición de normalización  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

Define el operador de Pauli  $X$  como:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y el operador de Pauli  $Z$  como:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Demuestra que  $X|0\rangle = |1\rangle$  y  $X|1\rangle = |0\rangle$ .
- Calcula  $ZX|\psi\rangle$  y simplifica el resultado.
- Encuentra los autovalores y autovectores del operador  $ZX$ .
- Supongamos que inicialmente el qubit está en el estado  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ . Calcula la evolución temporal del sistema para un tiempo  $t$ , es decir, encuentra  $e^{-iHt/\hbar}|\psi\rangle$ , donde  $H$  es el Hamiltoniano del sistema y  $\hbar$  es la constante reducida de Planck.

### 1.2 Problema 2:

Considera un sistema cuántico compuesto por dos qubits, A y B, descrito inicialmente por el estado puro:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B)$$

El sistema está sujeto a un entorno que induce decoherencia y lleva a una matriz densidad del sistema dada por:

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

- Verifica que la matriz  $\rho(t)$  es una matriz densidad válida.
- Calcula la matriz densidad reducida del qubit A en el instante  $t$ .
- Determina el estado mixto del qubit B en el instante  $t$ .
- Explica cómo la decoherencia afecta la entrelazamiento inicial del sistema y su interpretación física.
- Suponiendo que el observable  $M = |0\rangle\langle 0|_A \otimes I_B$  es medido en el sistema, encuentra la probabilidad de obtener el resultado  $m = 0$  en la medición, y después, el estado del sistema después de la medición.

## 2 Problemas Computacionales:

### 2.1 Problema 1: Creación de un estado entrelazado

Utilizando Qiskit, crea un circuito cuántico que genere el siguiente estado entrelazado de dos qubits:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

- Define un circuito cuántico con dos qubits.
- Aplica las compuertas necesarias para generar el estado entrelazado.
- Muestra el circuito resultante.
- Ejecuta el circuito y muestra el vector de estado resultante.

### 2.2 Problema 2: Implementación de una compuerta cuántica personalizada

Crea un circuito cuántico que implemente una compuerta cuántica personalizada. La compuerta personalizada, denominada  $U$ , se define de la siguiente manera:

$$U = \begin{bmatrix} e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{bmatrix}$$

- Define una compuerta cuántica personalizada en Qiskit que implemente la matriz  $U$ .
- Crea un circuito cuántico con un solo qubit.
- Aplica la compuerta  $U$  al qubit en el circuito.
- Muestra el circuito resultante. e) Ejecuta el circuito y muestra el vector de estado resultante.