



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

材料力学课程研究报告

任意三维应力状态下的正应力

吴思源

2171310846

自动化钱 71

2019 年 5 月 11 日

任意三维应力状态下的正应力

2019 年 5 月 11 日

1 牵引向量和应力分量

为方便描述复杂应力情形下单元体的应力状态，先建立具有基矢量的笛卡尔坐标系，并使基矢量之一是表面的法线，并且坐标系的原点位于牵引作用的点，如图 1。定义牵引矢量 t ，这个矢量表征了在某参考平面上的

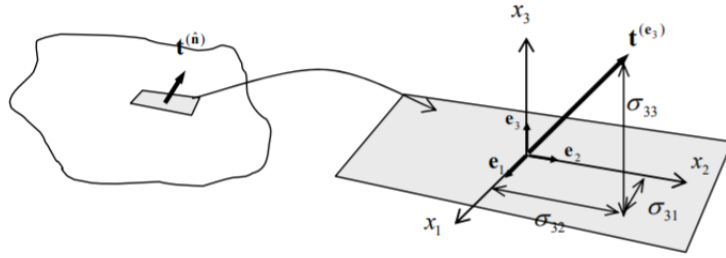


图 1: 牵引向量的分解：应力分量

一个单元体所受的应力和，即此单元体在此表面处所受的牵引应力。在与 e_3 正交的平面上的牵引矢量可以写做

$$\mathbf{t}^{(e_3)} = \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 \quad (1)$$

其中， σ_{33} 代表此平面上的正应力，以外法线方向为正（即 e_3 正方向）， σ_{31} 与 σ_{32} 表示平面上的切应力。写出单元体三个面上的牵引向量为：

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(e_1)} &= \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}^{(e_2)} &= \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}^{(e_3)} &= \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2)$$

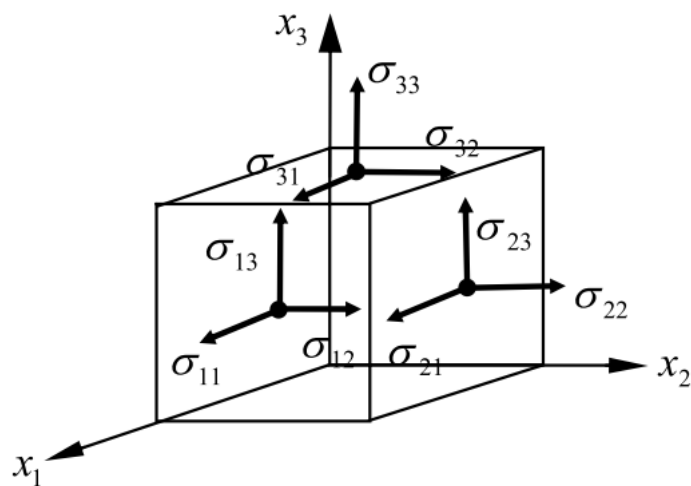


图 2: 九个应力分量的状态示意图

式中的 \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 的方向如图 2 所示。其余各应力的状态也如图??所示

当然，我们可以使用矩阵来表征这九个分量，图 2 状态下的应力矩阵 $[\sigma_{ij}]$ 为

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

结合(2) 式可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}(\mathbf{e}_1) \\ \mathbf{t}(\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{t}(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = [\sigma_{ij}] \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

在同一单元体上，当选取不同的坐标轴时，相应地导出此坐标轴对应的应力矩阵 $[\sigma'_{ij}]$ 为：

$$[\sigma'_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$

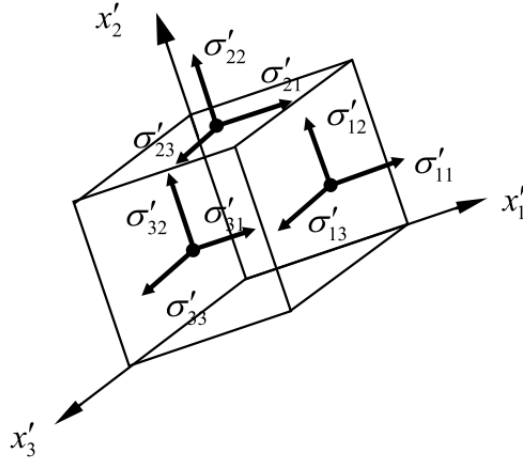


图 3: 不同坐标系下九个应力分量的状态示意图

2 柯西定律

对于更加一般的情况，将上面得到的结论进行推广，即给定了平面和平面上的应力状态，可以根据划分单元体确定平面上的牵引矢量。如图 4 所示。 \mathbf{n} 代表平面上的法向量，应力状态在图中标明。[1]

通过上节推导，可得牵引矢量为

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \quad (6)$$

将上式写成矩阵形式，牵引矢量、应力分量与平面法向量可写为

$$\begin{bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

注意到应力矩阵 $[\sigma_{ij}]$ 为**对称矩阵**。这是因为根据切应力互等定律有如下关系

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \quad (8)$$

根据以上推导，可以求出已知应力状态下任意表面的正应力为

$$\sigma_N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^{(n)} \quad (9)$$

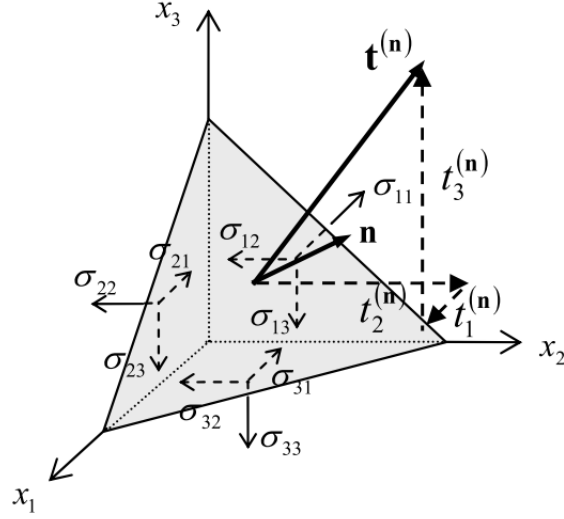


图 4: 柯西定律

其中 \mathbf{n} 代表表面的法向量。此状态下平面上的剪力为

$$\sigma_S = \sqrt{|\mathbf{t}^{(n)}|^2 - \sigma_N^2} \quad (10)$$

此平面上的剪力与正应力关系如图 5所示

3 转换矩阵

对于应力状态已知的情况，当考虑从不同方向取单元体，对于其各个截面的应力不尽相同，而此时应力矩阵也不相同。但是不同方向的应力矩阵之间的关系是很容易推导出来的。因为这里将应力矩阵视为一个张量，根据张量变换和线性代数的知识，应力矩阵 $[\sigma_{ij}]$ 与 $[\sigma'_{ij}]$ 的关系为

$$[\sigma_{ij}] = [Q] [\sigma'_{ij}] [Q^T] \quad (11)$$

式中 $[Q]$ 是一个正交矩阵，此处称为应力转换矩阵。

如 6所示，对于两个不同的右手系坐标轴，写出其应力转换矩阵如下

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos(e_1, e'_1) & \cos(e_1, e'_2) & \cos(e_1, e'_3) \\ \cos(e_2, e'_1) & \cos(e_2, e'_2) & \cos(e_2, e'_3) \\ \cos(e_3, e'_1) & \cos(e_3, e'_2) & \cos(e_3, e'_3) \end{bmatrix} \quad (12)$$

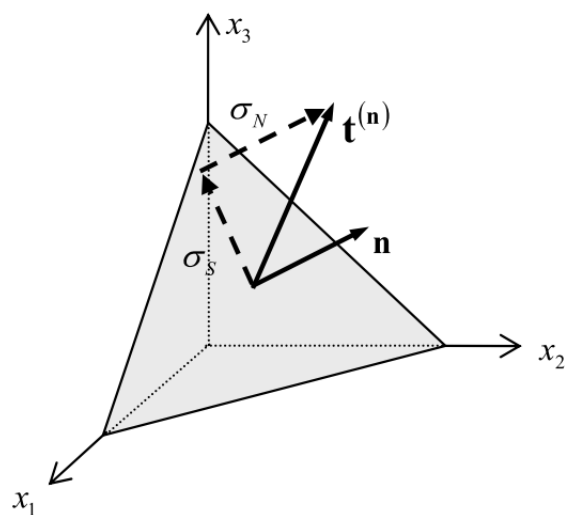


图 5: 已知应力状态下任意平面的正应力与切应力

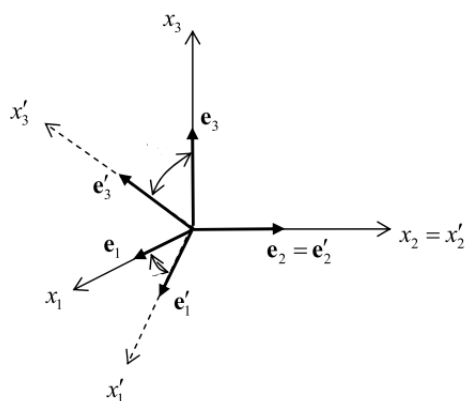


图 6: 两个不同坐标系下

上式中, $\cos(e_i, e'_j)$ 代表两个向量之间夹角的余弦。综上, 通过借助张量分析中的相关知识, 可以实现已知应力状态下任意角度应力矩阵的求解。

4 主应力的求解

通过以上的推导, 只需要找到特定的应力转换矩阵, 就可以很容易的求出主应力。[2] 在截面为主平面时, 牵引矢量与平面法向量共线, 二者成正比, 有如下关系

$$\mathbf{t} = \sigma \mathbf{n} \quad (13)$$

式中的 σ 即为主应力。

根据如上关系, 可以将(7)带入(13), 得到如下关系

$$\sigma \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \quad \sigma_{ij} n_j = \sigma n_i, \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

将等式化为如下方程

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (15)$$

上式也可以写成如下形式

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_j = 0 \quad (16)$$

或

$$\left\{ \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

为了使等式成立, 需要左边的矩阵为奇异矩阵, 即行列式等于零

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

解出 σ 满足如下标量方程，式中

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

通过求解以上行列式，能够得到如下的标量方程

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0 \quad (20)$$

式中各参量为

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \\ I_3 &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} \end{aligned} \quad (21)$$

求解此三次方程便可求出任意三向应力状态下的正应力。三次方程的三个根就是三个主应力。显然，这三个主应力是应力矩阵的三个特征值，对应的截面坐标是应力矩阵的特征向量。

参考文献

- [1] P. Kelly. Analysis of three dimensional stress and strain, 2019. [Online; accessed 10-May-2019].
- [2] David Roylance. Transformation of stresses and strains, 2019. [Online; accessed 10-May-2019].