材料力学课程研究报告

任意三维应力状态下的正应力

吴思源

2171310846

自动化钱 71

2019 年 5 月 9 日

任意三维应力状态下的正应力

2019 年 5 月 9 日

1 牵引向量和应力分量

为方便描述复杂应力情形下单元体的应力状态，先建立具有基矢量的笛卡尔坐标系，并使基矢量之一是表面的法线，并且坐标系的原点位于牵引作用的点，如图??。定义牵引矢量 t，这个矢量表征了在某参考平面上的

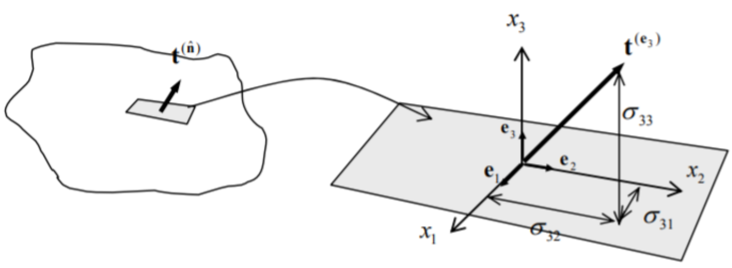

图 1: text

一个单元体所受的应力和，即此单元体在此表面处所受的牵引应力。在与 e_3 正交的平面上的牵引矢量可以写做

$$\mathbf{t}^{(e_3)} = \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3 \tag{1}$$

其中，σ_{33} 代表此平面上的正应力，以外法线方向为正（即 e_3 正方向），σ_{31} 与 σ_{32} 表示平面上的切应力。写出单元体三个面上的牵引向量为：

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_1)} &= \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{t}^{(\mathbf{e}_2)} &= \sigma_{21}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{t}^{(e_3)} &= \sigma_{31}\mathbf{e}_1 + \sigma_{32}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3
\end{aligned} \tag{2}$$

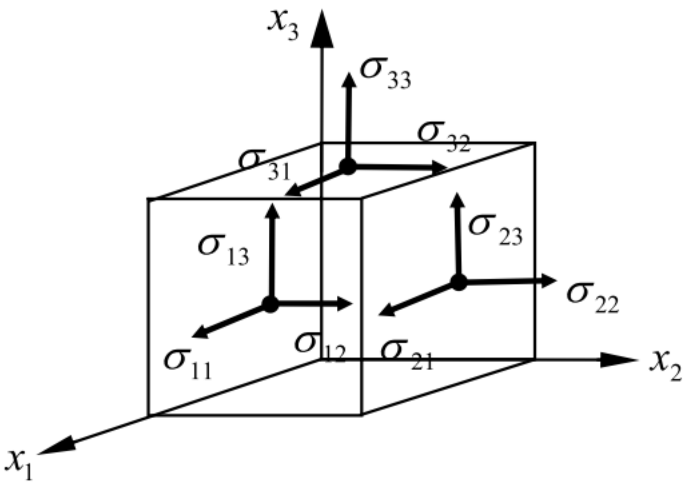

图 2: 九个应力分量的状态示意图

式中的 $\mathbf{e}_1$ ，$\mathbf{e}_2$ ，$\mathbf{e}_3$ 的方向如图 2所示。其余各应力的状态也如图??所示

当然，我们可以使用矩阵来表征这九个分量，图 2状态下的应力矩阵 $[\sigma_{ij}]$ 为

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{3}$$

结合(2) 式可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}^{(\mathbf{e}_1)} \\ \mathbf{t}^{(\mathbf{e}_2)} \\ \mathbf{t}^{(\mathbf{e}_3)} \end{bmatrix} = [\sigma_{ij}] \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

在同一单元体上，当选取不同的坐标轴时，相应地导出此坐标轴对应的应力矩阵 $[\sigma'_{ij}]$ 为：

$$[\sigma'_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'^{1}_{31} & \sigma''_{32} & \sigma'^{3}_{33} \end{bmatrix} \tag{5}$$

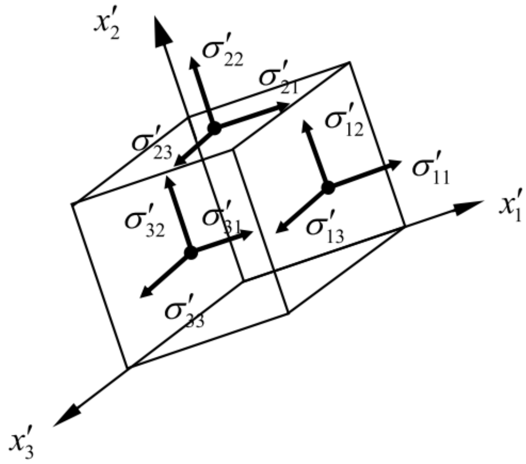

图 3: 不同坐标系下九个应力分量的状态示意图

2 柯西定律

对于更加一般的情况，将上面得到的结论进行推广，即给定了平面和平面上的应力状态，可以根据划分单元体确定平面上的牵引矢量。如图 4所示。$\mathbf{n}$ 代表平面上的法向量，应力状态在图中标明。

通过上节推导，可得牵引矢量为

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \tag{6}$$

将上式写成矩阵形式，牵引矢量、应力分量与平面法向量可写为

$$\left[t_i^{(\mathbf{n})}\right] = \begin{bmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{bmatrix}, \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad [n_i] = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

注意到应力矩阵 $[\sigma_{ij}]$ 为**对称矩阵**。这是因为根据切应力互等定律有如下关系

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \tag{8}$$

根据以上推导，可以求出已知应力状态下任意表面的正应力为

$$\sigma_N = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^{(\mathbf{n})} \tag{9}$$

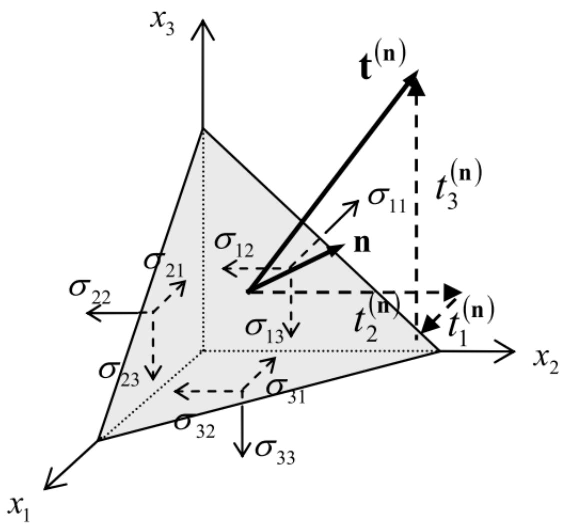

图 4: 柯西定律

其中 $\mathbf{n}$ 代表表面的法向量。此状态下平面上的剪力为

$$\sigma_S = \sqrt{\left|\mathbf{t}^{(\mathbf{n})}\right|^2 - \sigma_N^2} \tag{10}$$

此平面上的剪力与正应力关系如图 5所示

3 转换矩阵

对于应力状态已知的情况，当考虑从不同方向取单元体，对于其各个截面的应力不尽相同，而此时应力矩阵也不相同。但是不同方向的应力矩阵之间的关系是很容易推导出来的。因为这里将应力矩阵视为一个张量，根据张量变换和线性代数的知识，应力矩阵 $[\sigma_{ij}]$ 与 $\left[\sigma'_{ij}\right]$ 的关系为

$$[\sigma_{ij}] = [Q]\left[\sigma'_{ij}\right]\left[Q^T\right] \tag{11}$$

式中 $[Q]$ 是一个正交矩阵，此处称为应力转换矩阵。

如 6所示，对于两个不同的右手系坐标轴，写出其应力转换矩阵如下

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos\left(e_1, e'_1\right) & \cos\left(e_1, e'_2\right) & \cos\left(e_1, e'_3\right) \\ \cos\left(e_2, e'_1\right) & \cos\left(e_2, e'_2\right) & \cos\left(e_2, e'_3\right) \\ \cos\left(e_3, e'_1\right) & \cos\left(e_3, e'_2\right) & \cos\left(e_3, e'_3\right) \end{bmatrix} \tag{12}$$

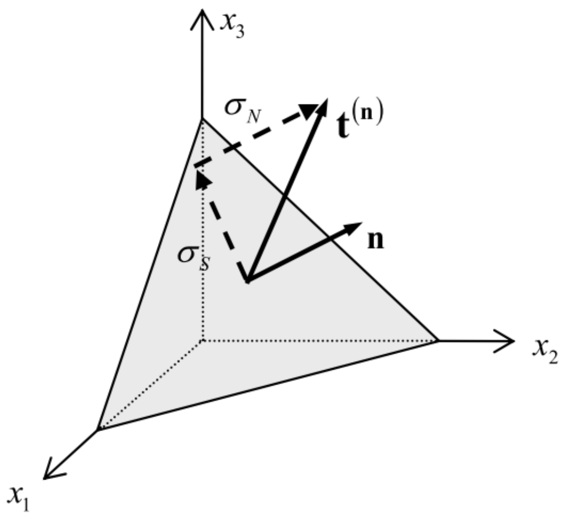

图 5: 已知应力状态下任意平面的正应力与切应力

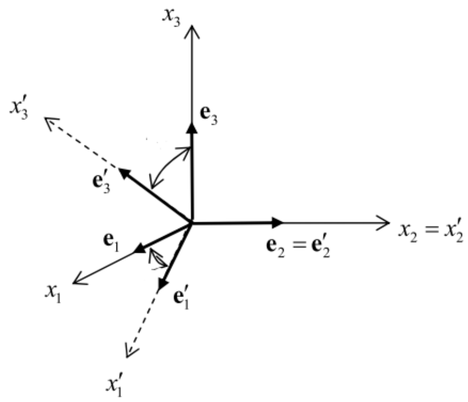

图 6: 两个不同坐标系下

上式中，$\cos\left(e_i, e_j'\right)$ 代表两个向量之间夹角的余弦。综上，通过借助张量分析中的相关知识，可以实现已知应力状态下任意角度应力矩阵的求解。

4 主应力的求解

通过以上的推导，只需要找到特定的应力转换矩阵，就可以很容易的求出主应力。在截面为主平面时，牵引矢量与平面法向量共线，二者成正比，有如下关系

$$\mathbf{t} = \sigma\mathbf{n} \tag{13}$$

式中的 σ 即为主应力。

根据如上关系，可以将(7)带入(13)，得到如下关系

$$\sigma\mathbf{n} = \sigma\mathbf{n}, \quad \sigma_{ij}n_j = \sigma n_i, \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

将等式化为如下方程

$$(\boldsymbol{\sigma} - \sigma\mathbf{I})\mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{15}$$

上式也可以写成如下形式

$$\left(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}\right) n_j = 0 \tag{16}$$

或

$$\left\{ \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

为了使等式成立，需要左边的矩阵为奇异矩阵，即行列式等于零

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

解出 σ 满足如下标量方程，式中

$$\det(\boldsymbol{\sigma}-\sigma\mathbf{I})=\det\begin{bmatrix}\sigma_{11}-\sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma\end{bmatrix}=0 \tag{19}$$

通过求解以上行列式，能够得到如下的标量方程

$$\sigma^3-I_1\sigma^2+I_2\sigma-I_3=0 \tag{20}$$

式中各参量为

$$\begin{aligned}I_1&=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\\ I_2&=\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11}-\sigma_{12}^2-\sigma_{23}^2-\sigma_{31}^2\\ I_3&=\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}-\sigma_{11}\sigma_{23}^2-\sigma_{22}\sigma_{31}^2-\sigma_{33}\sigma_{12}^2+2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31}\end{aligned} \tag{21}$$

求解此三次方程便可求出任意三向应力状态下的正应力。三次方程的三个根就是三个主应力。显然，这三个主应力是应力矩阵的三个特征值，对应的截面坐标是应力矩阵的特征向量。