大物答案

作者：钱院学辅大物编写小组

April 24, 2019

钱学森书院学业辅导中心

QIAN YUAN XUE FU

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

版本：April 24, 2019

更新：此版本为试用版

目录

1 第一章

1.1 选择题

1.A

如图 1.1，对 M，在 x 方向上:

$$N\cos\theta = Ma_a(\text{M 对地}) \qquad (1)$$

如图 1.2，对 m，以 M 为参考系，m 受一惯性力，合加速度沿二者接触面。沿 x，y 方向分解：

$$mg - N\cos\theta = ma_r\sin\theta \qquad (2)$$

$$ma_a + N\sin\theta = ma_r\cos\theta \qquad (3)$$

(1) 代入 (2)，(2)(3) 联立解得：

$$a_r = \frac{(M+m)g\sin\theta}{M+m\sin\theta^2}$$

2.B

如图 1.3，$u = v\cos\theta$，v 不变而 θ 增大，需要 u 减小。

3.A

匀速圆周运动的速度、加速度（受力）均是大小不变、方向时刻变化。注意一个矢量为常量包括大小和方向两个方面。否则就是变化的量。

4.B

以前面的货车为参考系，货车静止，火车速率为 $v_1 - v_2$，加速度为 a（反向），那么火车最多前进 $s = \frac{(v_1-v_2)^2}{2a}$。要求 $d > s$，故选 B。或采用地面参考系的追逐问题法，计算从 v_1减速到v_2 两车走过的距离之差：$s = \frac{{v_1}^2 - {v_2}^2}{2a} - v_2\cdot\frac{v_1-v_2}{a} = \frac{(v_1-v_2)^2}{2a}$

5.C

两次求导得：$a = 30t \neq$ 常数而大于零。

6.B

求导得：$v = 8t - 6t^2, a = 8 - 12t$

令$y = 0 \Rightarrow t = 0$（舍去）或2，代入得结果。

7.B

物体做匀加速直线运动。

$$s = \frac{b}{\cos\alpha}, a = g\sin\alpha$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{4b}{g\sin(2\alpha)}}$$

t 最小时，$\sin(2\alpha)$ 最大，$\alpha = 45°$。

8.B

类比从静止出发的匀加速直线运动。$t = \frac{2\cdot 2\pi}{\beta}$

9.B

曲线的定义："动点运动方向连续变化的轨迹"[1]。A,C 的反例：匀速圆周运动。

10.D

反例：平抛运动

1.2 填空题

11. 0　　2g

设 A、B 质量为 m。抽走 C 之前，弹簧中的弹力大小为 mg。撤去 C 时，弹簧长度未突变，弹力不变,A 受合力为 0；支持力则消失。

故 $a_A = 0 a_B = \frac{mg+mg}{m} = 2g$, 竖直向下。

12. $\frac{25}{12}\pi\ rad/s^2$　　$\frac{24}{5}s$

简单公式应用。$\theta = 60\times 2\pi = 120\pi$

$$\beta = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\theta} = \frac{25}{12}\pi\ rad/s^2$$

$$\delta t = \frac{\omega_2-\omega_1}{\beta} = \frac{24}{5}s$$

13. $m(\sin\theta - \omega^2 l\sin\theta\cos\theta)$

如图 1.4，在 x，y 方向上分解受力，得：

$$T\sin\theta - N\cos\theta = m\omega^2 l\sin\theta$$

$$T\cos\theta + N\sin\theta = mg$$

联立可解得 T、N 的大小。

[1]来源：汉典网 http://www.zdic.net/c/2/111/299079.htm

14. $2\sqrt{\frac{r}{g}}$　　$2\sqrt{\frac{r}{g}}$

设弦与 PC 的夹角为θ, 则有

$$s = 2r\cos\theta, a = g\cos\theta$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$$

15. $4\sqrt{5}m/s$　　$16m/s^2$

抛物线的切线方向即为质点的速度方向，且$x = 4t$

$$\therefore \frac{v_y}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x \Rightarrow v_y = 4x = 16t$$

$\therefore t = 2$时，$v_y = 8\mathrm{m/s}, v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 4\sqrt{5}\mathrm{m/s}$

$$v_x\text{不变，}\ a = a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 16\mathrm{m/s}^2$$

16. 长度、质量、时间

见课本，解答略。

17. 3　3　6

x 分别对 t 求一阶两阶导即是 v、a，由图像即可判断其正负号。

18. $y = (x+5)^3$

$$\text{由题，}x = 2t - 5 \Rightarrow 2t = x + 5$$

$$\text{代入}y = 8t^3 = (2t)^3\text{, 消去 t 即可}$$

19. $\frac{1}{2}g$　　竖直向下

初始时受力平衡，两根弹簧上力均为$\frac{1}{2}mg$；一根断掉后，向上的力减半，则小球受的合力是 $\frac{1}{2}mg$，竖直向下。

20. 9m/s

$$(\mathrm{SI})x = 3t + 6t^2 - 2t^3 \xrightarrow{\text{求导}} v = 3 + 12t - 6t^2$$

$$\xrightarrow{\text{求导}} a = 12 - 12t$$

$$a = 0\ \text{解得}\ t = 1 \xrightarrow{\text{代入得}} v(1) = 9\mathrm{m/s}$$

1.3　计算题

21.

由图知：

$$\tan\alpha = \frac{|\vec{a}_n|}{|\vec{a}_\tau|} = \frac{\frac{v^2}{R}}{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{1}{v^2} = \frac{1}{R\tan\alpha}$$

$$\text{积分得：}-\frac{1}{v} = \frac{1}{R\tan\alpha}t + C$$

$$\text{代入}t = 0, v = v_0$$

$$\therefore \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = \frac{1}{R\tan\alpha}t\ \text{即}v = \frac{v_0 R\tan\alpha}{\tan\alpha - v_0 t}$$

22.

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} = (c + 2dt)\vec{\tau}$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n} = \frac{(c+2dt)^2}{R}\vec{n}$$

$$\vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} = 2d\vec{\tau}$$

$$\text{令}|\vec{a}_n| = |\vec{a}_\tau|\text{, 则}\frac{(c+2dt)^2}{R} = 2d$$

$$\therefore t_1 = \frac{\sqrt{2dR} - c}{2d}\left(t_2 = \frac{-\sqrt{2dR} - c}{2d} < 0\text{, 舍去}\right)$$

$\therefore$ 要使 t $\geqslant 0$，条件为$\sqrt{2dR} - c \geqslant 0$, 即$2dR \leqslant c^2$

23.

$$-kx = a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot v$$

$$\text{分离变量，积分得：}-\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}v^2 + C_1$$

$$\text{令}C = 2C_1\text{, 则} - kx^2 = v^2 + C$$

$$\text{代入}x = x_0, v = v_0\ \text{得：}C = -(kx_0^2 + v_0^2)$$

$$\text{整理得：}v = \pm\sqrt{kx_0^2 + v_0^2 - kx^2}$$

24.

$$(1)v = 10\left(1 - \frac{t}{5}\right)$$

$$= -2t + 10$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2t + 10$$

$$积分得：x = -t^2 + 10t + c$$

$$代入t = 0, x = 0, \quad \therefore x = -t^2 + 10t$$

$$代入t = 10s$$

$$\therefore x = 0. \quad \therefore 坐标为0$$

$$(2)令x = 10m, \therefore t^2 - 10t + 10 = 0$$

$$\therefore t = 5 \pm \sqrt{15}s$$

$$令x = -10m, \therefore t^2 - 10t + 10 = 0$$

$$\therefore t = 5 + \sqrt{35}(5 - \sqrt{35} < 0, 舍去)$$

$$\therefore 时刻为5 - \sqrt{15}\ s, 5 + \sqrt{15}\ s或5 + \sqrt{35}\ s$$

$$(3)令v = 0, \therefore t = \ 5s$$

$$\therefore t \in [0, 5], \quad s = x = -t^2 + 10t$$

$$t \in [5, +\infty), \quad s = s(5) + [s(5) - x] = 25$$

$$+[25 - (-t^2 + 10t)] = t^2 - 10t + 50$$

$$\therefore s = \begin{cases} -t^2 + 10t, & t \in [0, 5) \\ t^2 - 10t + 50, & t \in [5, +\infty) \end{cases}$$

2 第二章

2.1 选择题

1.C

质点沿力方向位移为零。$\therefore A = 0.$

2.B

B 离开 A 时为弹簧恢复原长的时刻 (该时刻之后，A 受到弹簧拉力，加速度为负，$v_A < v_B$.)

此时 $v_A = v_B$. 由动能定理：

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 - 0 = \frac{1}{2}kd^2$$

$$\therefore E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{4}kd^2$$

3.C

对 $\vec{r}$ 求导：

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{2\pi}{T}A\sin\frac{2\pi t}{T}\vec{i} + \frac{2\pi}{T}B\cos\frac{2\pi t}{T}\vec{j} \end{aligned}$$

$t = 0$ 时，

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} \\ &= \sqrt{0^2 + \left(\frac{2\pi}{T}B\right)^2} = \frac{2\pi}{T}B \end{aligned}$$

$$\therefore E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{2m\pi^2}{T^2}\left(B^2\right)$$

$t = \frac{T}{4}$ 时，

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{v_{x2}^2 + v_{y2}^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{2\pi}{T}A\right)^2 + 0^2} = \frac{2\pi}{T}A \end{aligned}$$

$$\therefore E_{k2} = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{2m\pi^2}{T^2}\left(A^2\right)$$

$$\therefore \Delta E_k = \frac{2\pi^2}{T^2}(B^2 - A^2)$$

4.D

由动量定理：

$$0 = m_1v_1 - m_2v_2$$

$$\therefore v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1$$

由机械能守恒：

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \\ &= \frac{m_1v_1^2 + \frac{m_1^2v_1^2}{m_2}}{2} \\ &= \frac{m_1v_1^2(m_1 + m_2)}{2m_2} \end{aligned}$$

5.B

(2): 既然小车能在水平面上停止，说明水平面是粗糙的，有摩擦力做功。因此不满足机械能守恒。

(4): 重力做正功，摩擦力做负功，符号相反。

6.D

弹簧上任意一点弹力相同，记为 N。截去一半后，伸长量缩短了一半，而弹力不变，因此 k 变为原来的两倍。

并联在一起后，每一根弹簧受力为原先的一半。由 $F = kA$，伸长量为原来的 $\frac{1}{4}$。

写成数学式子如下：

$$
\begin{aligned}
E_k &= 2 \times \left(\frac{1}{2}k'A'^2\right) \\
&= (2k) \times \left(\frac{1}{4}A\right)^2 \\
&= \frac{1}{8}kA^2
\end{aligned}
$$

7.D

物体沿重力方向的位移为负，因此重力做负功。其它选项，物体沿推力方向有位移，因此推力做功，A 错误；推力功与摩擦力做的功和重力做的功之和等值反号，因此 BC 错误。

8.C

若合外力的冲量为 0，则由冲量定义 $\vec{I} = \int_{t1}^{t2} \vec{F}\mathrm{d}t$ 知，$\vec{F} = \vec{0}$，因此合外力做的功为 0。其它选项，AD 可举匀速圆周运动的反例；对于 B，合外力不为 0，必有加速度，而质量不改变，因此 $\vec{v}$ 必然改变，即动量必改变。

9.B

由动能表达式 $E_k = \frac{p^2}{2m}$，在动量相同的情况下，质量越大，动能越小，因此选 B

10.A

设小球重力为 G，弹簧弹性系数为 k，则 $G = kd$，再设最低点时弹簧伸长 h。以弹簧原长的高度为基准，释放前和最低点为始末态，应用机械能守恒：

$$Gh = \frac{1}{2}kh^2$$

解得 $h = 2d$

2.2 填空题

11.31J

$$A = \int_{0.5}^{1} F\mathrm{d}x = \int_{0.5}^{1} (52.8x+38.4x^2)\mathrm{d}x = 31(J)$$

12.24J 4m/s

$$A = \int_{1}^{4} F\mathrm{d}x = \int_{1}^{4} (3+2x)\mathrm{d}x = 24(J)$$

$$\text{由动能定理：} \frac{1}{2}mv^2 = 24, \quad \therefore v = 4(m/s)$$

13.$\frac{GMm}{6R}$ $\qquad -\frac{GMm}{3R}$

$$\text{卫星运动的向心力由万有引力提供，} \therefore m\frac{v^2}{3R} = G\frac{Mm}{(3R)^2}$$

$$\therefore E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{6R}$$

$$\text{由引力势能公式：} E_p = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{3R}$$

14.1296

$$\text{由牛顿第二定律：} F = ma, \qquad t^2 = 2a = 2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$$

$$\text{再由初始条件} t = 0, x = 0 \text{且} v = 0, \text{解得} x = \frac{1}{24}t^4$$

$$\text{由此可知} x = 54m \text{时}, t = 6s$$

$$A = \int_0^6 F\mathrm{d}x = \int_0^6 t^2\mathrm{d}(\frac{1}{24}t^4)$$

$$\therefore A = 1296J$$

15.19.8m/s

（小行星的物理量下标为 1）

向心力由万有引力提供，$\therefore m\frac{v_1^2}{R_1}=G\frac{Mm}{R_1^2}$

将$M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$代入，得$v_1=\sqrt{G\frac{4}{3}\pi\rho R_1^2}$

(4)

由地球上重力为$g=9.8m/s, mg=G\frac{Mm}{R_2^2}$

$$\therefore g=G\frac{4}{3}\pi R_2\rho.\text{则}G\frac{4}{3}\pi\rho=\frac{g}{R_2}$$

代入 (1)，$v_1=\sqrt{\frac{gR_1^2}{R_2}}\approx 19.8(m/s)$

16.$\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}}$ $\frac{m^2gh}{M+m}$

由动量定理：$mv_1=Mv_2$ (5)

由机械能守恒：$mgh=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}Mv_2^2$ (6)

联立 (1)(2) 解得：$v_1=\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}}$

$$v_2=\sqrt{\frac{2m^2gh}{(m+M)M}}$$

由动能定理知，物块对滑道做的功就是滑道动能改变量

即$\frac{1}{2}Mv_2^2=\frac{m^2gh}{M+m}$

17. 第 i 个质点所受合力做的功（类似说法均正确）

18.1m/s 200J

船员用 200N 的力拉绳子，由牛顿第三定律，绳子也给船员（和船）200N 的拉力。以人和船为对象应用牛顿第二定律，解得：

$$a=\frac{F}{m}=0.5m/s^2$$

因此第 2 秒末速率为 1m/s，增加的动能就是

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 400\times 1^2=200(J)$$

19.$\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)GMm$

由机械能守恒，$0+E_{p1}=E_k+E_{p2}$

$$\therefore E_k=E_{p2}-E_{p1}=\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

以两个质点为系统，仅有万有引力（内力）做功，因此由

$$A=E_k=\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)GMm$$

20.0.8$\sqrt{2}$

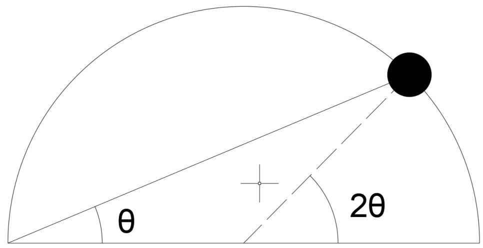


图 1

$$A=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} vecF\cdot \mathrm{d}vecx$$

$$=\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} F\mathrm{d}x\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} k(2R\cos\theta-0.1)\times \mathrm{d}(R\times 2\theta)\times\sin\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(-4R^2k\cos\theta+0.2Rk)\mathrm{d}(\cos\theta)$$

$$=-2R^2k\cos^2\theta+0.2Rk\cos\theta\ |_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-2\times 0.2^2\times 40\times(\frac{\sqrt{2}}{2}^2-1^2)+0.2\times 0.2\times 40\times(\frac{1}{2}-1)$$

$$=0.8\sqrt{2}$$

2.3 计算题

21.(1)

$$\Delta l = \frac{F}{k}$$

$$E_p = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{F^2}{2k}$$

由机械能守恒，$E_{kright} - 0 = E_p - 0$

$$\therefore \frac{1}{2}Mv_{右}^2 = \frac{F^2}{2k}$$

$$\therefore v_{右} = \frac{F}{\sqrt{Mk}}$$

(2)

由受力分析知，$a_{左} = a_{右}$，即$\frac{dv_{左}}{dt} = -\frac{dv_{右}}{dt}$

两边积分：$\therefore v_{左} = -v_{右} + c$

代入刚恢复原长时：$v_{左} = 0, v_{右} = \frac{F}{\sqrt{Mk}}$

$$\therefore v_{左} + v_{右} = \frac{F}{\sqrt{Mk}}$$

$$\therefore 当v_{左} = v_{右}时, v'_{左} = v'_{右} = \frac{F}{\sqrt{2Mk}}$$

由机械能守恒：

$$0 + \frac{1}{2}M(v_{右})^2 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + \frac{1}{2}M(v'_{左})^2 + \frac{1}{2}M(v'_{右})^2$$

$$\therefore \Delta l = \pm\sqrt{\frac{M\left(\frac{F^2}{Mk} - 2\times\frac{F^2}{4Mk}\right)}{k}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{F}{k}$$

即伸长或压缩$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{F}{k}$

22.

记 x 为链条右端的位移，l 为桌边链条的长度。

$$dA = F \cdot dx$$

$$= F dx$$

链条被匀速拉起，可知 $F = G$

$$F = G = M'g$$

$$= \frac{l}{L}Mg$$

由几何意义，$dx = -dl$

$$\therefore A = \int_{\frac{L}{3}}^{0} -\frac{l}{L}Mg\,dl$$

$$= \frac{Mg}{2L}l^2 \,|_0^{\frac{L}{3}}$$

$$= \frac{MgL}{18}$$

如果有摩擦力 f，则

$$dA = F'dx$$

$$F' = G + f = \frac{l}{L}Mg + \mu\left(\frac{L-l}{L}Mg\right)$$

$$= \frac{Mg}{L}[\mu L + (1-\mu)l]$$

$$\therefore A = \int_{\frac{L}{3}}^{0} -\frac{Mg}{L}[\mu L + (1-\mu)l]dl$$

$$= \frac{Mg}{L}\left(\mu Ll + \frac{1-\mu}{2}l^2\right)|_0^{\frac{L}{3}}$$

$$= \frac{Mg}{L}\left(\frac{\mu}{3}L^2 + \frac{1-\mu}{18}L^2\right)$$

$$= MgL\frac{5\mu+1}{18}$$

23.

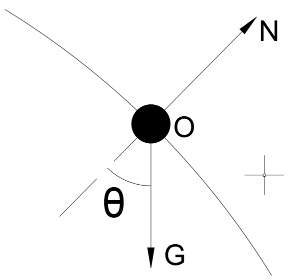


图 2

由图 2，对小球应用牛顿第二定律：

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - N$$

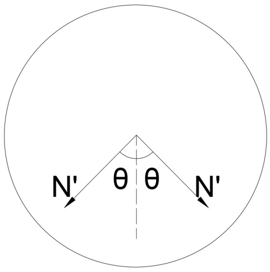


图 3

由受力分析知，圆环竖直方向受力 F 为：

$$F = (N' + N')\cos\theta = 2N\cos\theta \text{当} \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{时}, \cos\theta > 0$$

$$\therefore \text{当} N < 0 \text{时}, F \text{向上，圆环上升}$$

$$\therefore N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{R} < 0$$

由机械能守恒（见图 4）：$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mg(1-\cos\theta)R$

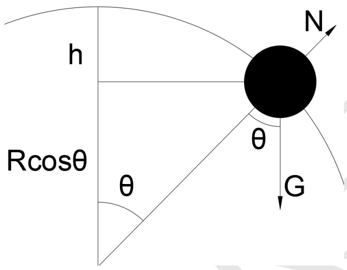


图 4

代入，$\therefore mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) < 0$

$$\therefore 3\cos\theta < 2, \quad \theta > \arccos\frac{2}{3}$$

即当$\theta > \arccos\frac{2}{3}$时，圆环会上升

24.

$$T_1 \text{提供} G1 + G2$$

$$\therefore k_1\Delta l = (m_1 + m_2)g$$

$$\Delta l = \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1}$$

由机械能守恒：

$$-mgx + \frac{1}{2}k_1(\Delta l + x)^2 + \frac{1}{2}m_1v^2 = 0 + \frac{1}{2}k_1(\Delta l)^2 + 0$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{-kx^2 - 2(k_1\Delta l - m_1g)x}{m_1}}$$

$$= \sqrt{-\frac{k_1}{m_1}x^2 - \frac{2m_2g}{m_1}x}$$

利用二次函数最大值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 的性质：

$$v_{max} = \sqrt{\frac{0 - \frac{4m_2^2g^2}{m_1^2}}{4\left(-\frac{k_1}{m_1}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{m_2^2g^2}{m_1k_1}} = \frac{0.3 \times 9.8}{\sqrt{0.5 \times 8.9 \times 10^4}}$$

$$= 0.0139(m/s)$$

3　第三章

3.1　选择题

1.A

小球受到重力和弹簧弹力做的功，动能不守恒。小球受到的合外力不为 0，因此动量不守恒。

2.D

两船在过程中受到了人的摩擦力的作用，合外力不为零，动量不守恒。

3.C

碰撞前后两球动量守恒，因此总动量为 0，说明碰撞前两球动量大小相同，方向相反。

4.D

两球碰撞后一起运动，说明为完全非弹性碰撞，存在机械能损失，因此机械能不守恒。两球还受到了弹簧弹力作用，合外力不为零，动量不守恒。

5.D

运动半周前后小球的速度大小不变，方向相反，因此冲量大小
$I = m\Delta v = 2mv = 2mr\omega$。

6.C

A 人向右跳落入 B 船后，由动量守恒，A 船具有向左的速度，A 人具有向右的速度，落入 B 船后使得 A 人，B 人，B 船都具有了向右的速度。B 人再跳回 A 船后，由动量守恒，B 人获得的动量朝左，A 人和 B 船获得的动量向右，因此最终 B 船的速度向右，$v_B > 0$。B 人和 A 船的动量都向左，因此最终 B 人落入 A 船后，A 船速度向左，$v_A < 0$。

7.A

由公式 $E = \frac{p^2}{2m}$，$p_1 = \sqrt{2mE}$，
$p_2 = \sqrt{2 \times 4m \times E} = 2\sqrt{2mE}$（此处 p_1，p_2 均为大小）。由于两个质点面对面运动，p_1 和 p_2 符号相反，因此系统动量大小为
$p = p_2 - p_1 = \sqrt{2mE}$。

8.A

小球转一周后速度大小和方向都与转前相同，因此动量增量为 0，A 对。由冲量定义式 $I = F\Delta t$，F 和 Δt 均不为 0，因此 I 也不为 0，B 错，同理可知 C 错误。在转动过程中小球速度的方向发生了改变，因此过程中动量不守恒，D 错。

9.C

小球下落直到与板碰撞之前，对小球分析，有 $v = \sqrt{2gh}$，对板和弹簧分析，设此时弹簧的压缩量为 x_0，则由胡克定律有
$x_0 = \frac{Mg}{k}$；此后对球与板的碰撞过程，有动量守恒 $mv = (m + M)v_0$，解得，
$v_0 = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}$；此后，小球与板一起运动，设弹簧最大压缩量为 x，由能量守恒，
$\frac{1}{2}(m+M)v_0^2+(M+m)gx+\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(x+x_0)^2$，
代入数据解得，$x = \frac{mg}{k}(1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{(M+m)g}})$，
所以选择 C 项。

10.A

两球碰撞后以相同速度运动，则为完全非弹性碰撞，必有机械能损失，与完全弹性碰撞矛盾，A 错误；若两球碰撞前速度大小相同，方向相反，则碰撞后速度互换，B 正确；完全弹性碰撞的定义即为机械能守恒的碰撞，C 正确；碰撞过程中动量守恒，D 正确。

3.2 填空题

11. $10m/s$

以人和船为系统，过程中所受外力为 0，因此动量守恒。有

$$(m + M)v = m(v' + \frac{v}{2}) + M\frac{v}{2}$$

代入数据解得 $v' = 10m/s$

12. $m\sqrt{2gh}$　　　竖直向下

(1) 由 $I = \Delta p = F\Delta t$，小球下落时间为 $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$，下落过程所受合外力为 $F = mg$，故动量增量为

$$\Delta p = mg \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = m\sqrt{2gh}$$

(2) 由合外力（重力）方向竖直向下，可得动量增量方向竖直向下。

13.$\frac{5}{3}N \cdot s$，方向与力的方向同向　　$\frac{5}{6}N$

由冲量定义，$I = \int F\mathrm{d}t$，对于本题来说，

F 是时间的函数，所以有

$$I = \int_0^1 2t\mathrm{d}t + \int_1^2 2(2-t)^2\mathrm{d}t = \frac{5}{3}N\cdot s$$

平均冲力为

$$\overline{F} = \frac{I}{t} = \frac{5}{6}N$$

14.$-m\vec{v}$

对全过程，由动量定理，$\vec{I} = \Delta\vec{p} = -m\vec{v}$。

15.$2350kg\cdot m/s$　　与跑弹飞行方向相反

由动量定理，$I = \Delta p = m(v - v_0)$，代入数据得 $I = 2350kg\cdot m/s$，因为炮弹为减速运动，所以冲量方向与炮弹飞行方向相反。

16.$\frac{m+M}{m}\sqrt{2\mu gs}$

设子弹刚发射时的速度为 v_0，子弹射入木块后共速速度为 v。对子弹射入木块的过程，有动量守恒 $mv_0 = (M+m)v$，此后木块和子弹共同运动，由动能定理

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = \mu(m+M)gs$$

代入数据解得

$$v_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2\mu gs}$$

17.$\sqrt{\frac{kMl_0^2}{(M+m)^2}}$　　$\sqrt{\frac{M}{M+nm}}l_0$

分析：每次油滴落入容器等价于油滴与容器发生了一次完全非弹性碰撞，该过程满足动量守恒；此后直到下一滴油滴落入容器之前，整体运动满足能量守恒。

求解：当弹簧第一次达到原长即容器第一次到达滴管下方（第一滴油滴未滴入）时，设容器速度为 v_0，由能量守恒

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}kl_0^2$$

可得

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}l_0$$

再设第 n 滴油滴滴入容器后容器与油滴整体的速度为 v_n; 由动量守恒 $P_0 = P_n$，其中初状态动量 $P_0 = Mv_0$，第 n 滴油滴滴入后动量 $P_n = (M+nm)v_n$，解得

$$v_n = \frac{M}{M+nm}v_0$$

此后容器达到偏离 O 点的最大运动距离 x_n 过程中，由能量守恒，有

$$\frac{1}{2}(M+nm)v_n^2 = \frac{1}{2}kx_n^2$$

成立，从中可解出

$$x_n = \sqrt{\frac{M+nm}{k}}v_n$$

故当 $n=1$ 时，

$$v_1 = \sqrt{\frac{kMl_0^2}{(M+m)^2}}$$

滴入 n 滴油滴后，容器偏离 O 点的最大距离为

$$x_n = \sqrt{\frac{M}{M+nm}}l_0$$

18.$m(\alpha\sin(\omega t)\vec{i} - (\beta\cos(\omega t) - \beta)\vec{j})$

由已知条件

$a_x = \omega\alpha\cos(\omega t)a_y = \omega\beta\sin(\omega t)$，所以 $v_x = \int a_x\mathrm{d}t = \alpha\sin(\omega t) + C_1 v_y = \int a_y\mathrm{d}t = -\beta\cos(\omega t) + C_2$，又由初始条件 $t=0$ 时，$vecv = 0$，可得 $C_1 = 0C_2 = \beta$，所以质点在任一时刻的动量

$\vec{p}(t) = m(\alpha\sin(\omega t)\vec{i} - (\beta\cos(\omega t) - \beta)\vec{j})$。

19.$\frac{mv}{\Delta t}$

由平均力计算公式可得 $\overline{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{mv}{\Delta t}$。

20.$\frac{1}{6}m(2v_B - v_A)^2$

因为发生完全弹性碰撞，结合能量守恒，可得碰撞过程中系统动能最小的时刻为弹性势能最大的时刻，亦即 A、B 共速的时刻，设共速时速度为 v，则设 B 运动的方向为正方向由动量守恒有

$2mv_B - mv_A = 3mv$，此时的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 3mv^2 = \frac{1}{6}m(2v_B - v_A)^2$$

3.3 计算题

21. 分析：(1) 动量定理 (2) 因为 $\overline{F} >> G$，所以可以忽略重力，再由平均力公式可以求解。

解：(1) 由动量定理

$I = \Delta(mv) = m(v_2 - v_1) = 1.0 \times (10+25) = 35kg \cdot m/s$

方向竖直向上

(2) 设球对地面的平均冲力为 F，地面对球的平均冲力为 F_0。

对小球撞击地面的过程分析：

因为 $\overline{F_0} >> G$，所以可以忽略重力

由平均力计算公式得

$$\overline{F_0} = \frac{I}{t} = \frac{35}{0.02}N = 1750N$$

再由牛顿第三定律可得

$$\overline{F} = \overline{F_0} = 1750N$$

方向竖直向下。

22. 分析：全过程可分为两部分：一是子弹嵌入木块过程，动量守恒，二是子弹木块整体沿斜面上滑，能量守恒

解：子弹嵌入木块瞬间动量守恒，有

$$mv = (m + M)v'$$

再由运动分解，木块速度可分解为垂直于斜面的速度和沿斜面方向的速度，因为木块此后被约束在斜面上运动，所以垂直于斜面的速度突变为 0，即木块的运动速度为

$$V = v' \cos\theta$$

对于木块和子弹的沿斜面上滑过程，有能量守恒

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (M + m)gl \sin\theta$$

联立上述三式可解得：

$$V = \frac{mv\cos\theta}{M + m}l = \frac{m^2v^2\cos^2\theta}{2(M + m)^2 g \sin\theta}$$

23. 分析：对于碰撞问题可以从能量守恒动量守恒两方面考虑

证明：设运动的小球为球 1，质量为 m_1，静止的小球为球 2，质量为 m_2，碰撞前球 1 的速度为 $\vec{v}_0$，碰撞后球 1、球 2 的速度分别为 $\vec{v}_1\vec{v}_2$，且有 $\vec{v}_1$ 垂直于 $\vec{v}_2$。

对碰撞过程：

能量守恒

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

即

$$v_0^2 = v_1^2 + \frac{m_2}{m_1}v_2^2 \tag{7}$$

动量守恒

$$m_1\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

因为 $\vec{v}_1$ 垂直于 $\vec{v}_2$ 所以由勾股定理可得

$$m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 = m_1^2v_0^2$$

$$v_0^2 = v_1^2 + \frac{m_2^2}{m_1^2}v_2^2 \tag{8}$$

(2) − (1) 得

$$\frac{m_2}{m_1}(\frac{m_2}{m_1} - 1)v_2^2 = 0$$

因为 $v_2^2 \neq 0$ 且 $m_2 \neq 0$，所以

$$\frac{m_2}{m_1} - 1 = 0$$

即 $m_1 = m_2$

得证。

24. 分析：将尘埃与飞船共同作为研究对象，则系统动量守恒，从而得到通过 m 与 v 的关系，再通过 $\mathrm{d}m$ 的表达式与前式联立可以消去 $\mathrm{d}m$ 再积分得到 v 和 t 的关系

解：设 t 时刻飞船的质量为 m，速度为 v。由初末状态系统动量守恒

$$m_0 v_0 = mv$$

即

$$m = \frac{m_0 v_0}{v}$$

对上式取微分，可得

$$\mathrm{d}m = -\frac{m_0 v_0}{v^2}\mathrm{d}v \tag{9}$$

又有

$$\mathrm{d}m = \rho s v \mathrm{d}t \tag{10}$$

(3)(4) 联立消去 $\mathrm{d}m$ 再求积分，可得

$$-\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v^3} = \int_0^t \frac{\rho s}{m_0 v_0}\mathrm{d}t$$

解得

$$v = \sqrt{\frac{m_0}{\rho s v_0 t + m_0}} v_0$$

4 第四章

注 笔者并不建议按照转动定理等名称记忆刚体运动的公式。实际上这些公式都是质点运动学各定律的延伸（如角动量对应动量，转动惯量对应质量，转动定理和动量矩定理对应牛顿第二定律等），做题的时候只需要认定该问题需要用质点运动学的哪些定律，再将质量，力等物理量换成刚体运动学中的转动惯量，力矩等即可。但为了与课本表述一致，在本解析中仍然按照刚体运动学公式名称引用，但会在其后附注数学表达式以方便对应。

4.1 选择题

1.C

直观地理解，两个系统所受合外力均为 Mg，图 A 要驱动滑轮和重物（他们都获得了加速度），图 B 只需要驱动滑轮，因此 $\beta_A < \beta_B$。驱动滑轮的力为 T_A 和 T_B，因此必有 $T_A < T_B$。

从定量计算来看，显然 $T_B = F = Mg$。对 A 滑轮，对物体应用牛顿第二定律 $F = ma$，对滑轮应用转动定律 $M = J\beta$：

$$Mg - T_A = Ma$$

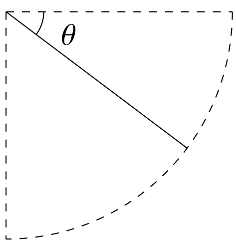
$$T_A \times R = J\beta$$

与 $a = \beta R$ 联立解得：

$$T_A = \frac{Mg}{\frac{MR^2}{J} + 1}$$

则有 $T_A < Mg = T_B$

2.D



首先此题讨论的是细棒对于 O 点的转动惯量。由于细棒对于其一个端点的转动惯量

恒为 $\frac{1}{3}ml^2$，因此转动惯量不变。至于角加速度 β，由转动定律 $M = J\beta$：

$$Mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}ml^2 \times \beta$$

解得：$\beta = \frac{3Mg\sin\theta}{2ml}$，可知 β 随下落过程中 θ 的减少而减少，因此角加速度从大到小。

3.D

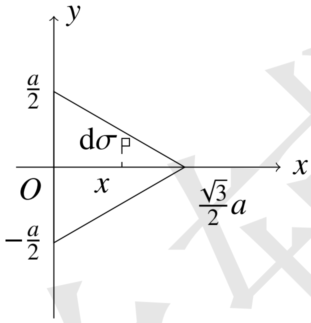
本题默认水平圆盘放在桌子上，力矩均指对轴的力矩。在玻璃球自由滚动的时候，系统受三个力：重力，支持力（与重力抵消，合力矩为 0），还受轴对圆盘的支持力，但由于该力的 $\vec{r} = 0$，因此该力力矩也为 0，合外力矩也为 0。由动量矩定理 $M = \frac{dL}{dt}$ 知，此系统角动量守恒，D 正确。若小球处于滚动状态，则轴对圆盘可能会有支持力的作用，由冲量定理 ($I = \Delta p$)，动量不守恒，A，B 均错误。若小球与轴或者盘边缘碰撞，由于题目中未说明小球与轴或盘边缘的碰撞是否是完全弹性碰撞，因此碰撞可能会产生机械能损失，C 错误。

注 笔者希望同学们对这类圆盘（或细棒）受到固定轴约束转动的问题有更多了解。轴对圆盘的力有且仅有两个，分别是摩擦力和支持力。对于支持力，其垂直于作用面，因此总是指向轴心，$\vec{r} = 0$，该力对转轴的力矩为 0。至于摩擦力，由于其与相对转动速度相反，因此该力与轴相切，由于轴是有半径的（不是一条线），因此 $\vec{r} = R$（R 为转轴的半径，显然摩擦力的力矩不为 0（但在碰撞过程中，由于 $\Delta t \to 0$，由动量矩定理，该力矩导致的角动量变化 $\Delta L \to 0$，因此也可认为角动量守恒）。该题中已经说明忽略轴的摩擦，因此圆盘和小球受到的合外力矩为 0。更多相关内容请参考《力学（物理类）》（舒幼生著）。

4.C

角动量的定义为 $L = \vec{r} \times m\vec{v}$，$m$ 为质点质量，$\vec{v}$ 为质点速度（运动状态），$\vec{r}$ 为质点的向径（与坐标原点有关），C 正确，ABD 均错误。

5.D



微元 $\mathrm{d}\sigma$ 到轴的距离为 x。由于积分域关于 x 轴对称，被积函数关于 y 为偶函数，因此 $J = 2J_1$，J_1 为第一象限部分的转动惯量。

$$\begin{aligned} J &= 2\iint\limits_{\sigma_1}\left(m\frac{\mathrm{d}\sigma}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}\right)x^2 \\ &= \frac{8m}{\sqrt{3}a^2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{3}x}x^2\mathrm{d}y \end{aligned}$$

解得：$J = \frac{1}{8}ma^2$

6.A

直观上理解，$\sigma(\theta)$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时最大，在 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$ 时最小，此即球面质量更多地分布在赤道附近，两极附近质量面密度小。由于赤道附近距离 z 轴距离更大，因此分布不均匀的球面转动惯量更大，A 正确。

通过计算也可以得到相同的结论，此处不再赘述。

7.A

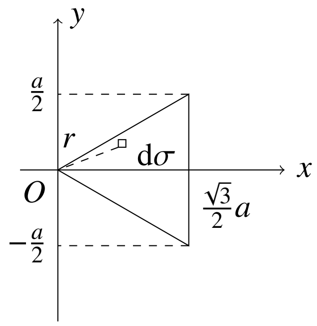
碰撞过程中 $\Delta t \to 0$，小球和系杆组成的系

统受到 4 个力：重力，支持力（与重力相互抵消），O 点对杆的支持力，O 点对杆的摩擦力。因此系统角动量守恒（详细分析可见选择题 3 的“注”部分），有：

$$0 + rmv = (\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right))^2\omega$$

解得：$\omega = \frac{3v}{2l}$

8.C



微元 $d\sigma$ 到轴（就是到原点）的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$。由于积分域关于 x 轴对称，被积函数关于 y 为偶函数，因此 $J = 2J_1$，J_1 为第一象限部分的转动惯量。

$$J = 2\iint\limits_{\sigma_1}\left(m\frac{d\sigma}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}\right)(x^2+y^2)$$
$$= \frac{8m}{\sqrt{3}a^2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}dx\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}x}(x^2+y^2)dy$$

解得：$J = \frac{5}{12}ma^2$

9.A

由动量矩定理易知 A 正确。BCD 均为充分条件。小球在绳子的束缚下绕定点做匀速圆周运动，则所受合外力不为 0（绳子的拉力），B 错误，且小球受到的重力和支持力对定点的力矩均不为 0，因此受到了外力矩的作用，C 错误。对于 D，可令 $J = t, \omega = \frac{1}{t}$，则 $L = J\omega = 1$，角动量守恒，但转动惯量和角速度都在随时间变化，因此 D 错误。

10.A

卫星做匀速圆周运动，则 m, v, r 均不变，$\vec{r}\times\vec{v}$ 的方向也不变，因此角动量守恒。卫星与地球的万有引力与卫星的运动方向恒垂直，因此卫星与地球构成的系统的内力（万有引力）不做功，同时又不受外力作用，因此卫星的动能守恒。

4.2 填空题

11. $\frac{3M}{ma}\qquad \frac{18M^2}{m^2a^3}t^2$

本题中转动方向固定，用标量形式计算即可。

$$\beta = \frac{M}{J} = \frac{6M}{ma^2}$$
$$\text{开始时}\omega = 0,\quad \therefore \omega = \frac{6M}{ma^2}t$$
$$v = \omega r = \frac{6M}{ma^2}t\times\frac{a}{2} = \frac{3M}{ma}t$$
$$\alpha_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{3M}{ma}$$
$$\alpha_n = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{3M}{ma}t\right)^2}{\frac{a}{2}} = \frac{18M^2}{m^2a^3}t^2$$

12. $\frac{1}{12}mR^2\omega_0^2$

圆柱所受合外力为摩擦力 f，效果使得圆柱的质心运动速度 v_c 增大。

圆柱所受合外力矩为摩擦力矩 M_f，效果使得圆柱的角速度 ω 减小。

圆柱做纯滚动的瞬间，即 $v_c = \omega R$。因此求得 v_c 和 ω 对时间的函数，解出 t 即可。

对圆柱使用牛顿第二定律 $F = ma$ 和转动

定律 $M=J\beta$：

$$a_c=\frac{f}{m}=\mu g \quad \therefore v_c=0+\mu gt=\mu gt$$

$$\beta=\frac{M}{J}=\frac{-\mu mgR}{\frac{1}{2}mR^2}=-\frac{2\mu g}{R}$$

$$\therefore \omega=\omega_0+\beta t=\omega_0-\frac{2\mu g}{R}t$$

代入纯滚关系式：$\mu gt=\omega_0R-2\mu gt$

$$\therefore t=\frac{\omega_0R}{3\mu g}$$

$$\text{此时}v_c=\mu g\frac{\omega_0R}{3\mu g}=\frac{\omega_0R}{3}$$

$$\omega=\omega_0-\frac{2\mu g}{R}\frac{\omega_0R}{3\mu g}=\frac{\omega_0}{3}$$

由柯尼希定理：

$$\begin{aligned}E_{总}&=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}J\omega^2\\&=\frac{1}{2}m\left(\frac{\omega_0R}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\omega_0}{3}\right)^2\\&=\frac{1}{12}mR^2\omega_0^2\end{aligned}$$

$$14.\frac{1}{8}Mg$$

物体加速度 a 与滑轮角加速度 β 的关系为：

$$\beta=\frac{a}{R}=\frac{g}{4R}$$

对滑轮应用转动定律 $M=J\beta$：

$$TR=\frac{1}{2}MR^2\beta$$

$$\therefore T=\frac{MR^2}{2R}\frac{g}{4R}=\frac{1}{8}Mg$$

$$15.\frac{1}{2l}\left(\sqrt{\frac{3gl}{2}}+\frac{v_0}{2}\right)$$

首先计算碰撞前杆的角速度，由机械能守恒：

$$0+0=Mg(-\frac{l}{2}\sin 30^\circ)+\frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{Mgl}{4}\frac{2}{\frac{1}{3}Ml^2}}=\sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

以杆和子弹为系统，在碰撞过程中，所受外力里只有 O 点对杆的支持力为无穷大（抵消子弹沿杆方向的速度），但该力产生的力矩为 0，因此碰撞过程中系统角动量守恒，有：

$$l\sin 30^\circ mv_0+J\omega_1=(J+ml^2)\omega$$

$$\therefore \omega=\frac{1}{2l}\left(\sqrt{\frac{3gl}{2}}+\frac{v_0}{2}\right)$$

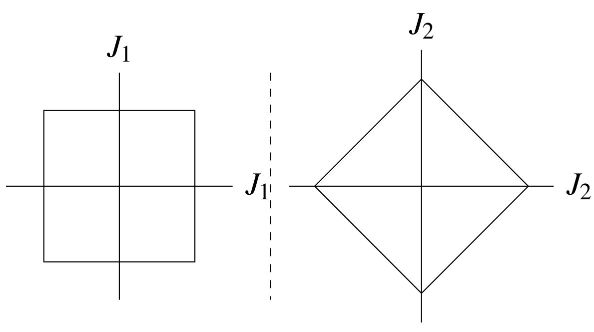
$$16.\frac{1}{4}mR^2$$

均匀圆形薄板对圆心的转动惯量 $J=\frac{1}{2}mR^2$，由垂直轴定理，$J=J_1+J_2$，J_1,J_2 分别为薄板对其自身一条直径的转动惯量（两条相互垂直的直径）。由于圆板为圆对称，对任意一条直径的转动惯量相同，因此 $J_1=J_2$，则 $J_1=\frac{1}{2}J=\frac{1}{4}mR^2$

$$17.J_1=J_2$$

记薄板对垂直于自身并穿过中心的轴的转动惯量为 J。

由对称性，薄板分别相对于两条对角线的转动惯量相等，分别相对过其中心且平行于一边的轴的转动惯量也相等。



由垂直轴定理，$J=2J_1=2J_2$，因此 $J_1=J_2$。

$$18.75rad/s$$

物块受到重力，支持力（相互抵消），绳的拉力。由于绳的向径与拉力的方向在同一

条直线上，因此小物块所受合外力矩为 0，角动量守恒。则：

$$(mR_1^2)\omega_0 = (mR_2^2)\omega$$
$$\therefore \omega = \frac{R_1^2}{R_2^2}\omega_0 = \frac{0.5^2}{0.1^2}\times 3 = 75(rad/s)$$

19.0

棒球沿直线飞行，则速度 $\vec{v}$ 的方向沿该直线，向径 $\vec{r}$ 的方向也沿该直线，因此角动量 $L = \vec{r}\times m\vec{v} = 0$

$$20. 2\sqrt{\frac{g\sin\theta}{3l}}$$

由机械能守恒：

$$2mg\left(\frac{l}{2}\sin\theta\right) + mg\left(-\frac{l}{2}\sin\theta\right) + 0 + 0$$
$$= 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(2m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\left(m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)\omega^2$$
$$\therefore \omega = 2\sqrt{\frac{g\sin\theta}{3l}}$$

4.3 计算题

$$21. \frac{m}{m+\frac{1}{2}M}\frac{Sg}{rl}$$

对左端下垂链条应用牛顿第二定律 $F = ma$，对上端链条和飞轮应用转动定律 $M = J\beta$，右端下垂链条应用牛顿第二定律 $F = ma$：

$$m\frac{l-\pi r+S}{2l}g - T_1 = m\frac{l-\pi r+S}{2l}a \quad (11)$$
$$(T_1 - T_2)r = \left(\frac{1}{2}Mr^2 + m\frac{\pi r}{l}r^2\right)\beta \quad (12)$$
$$T_2 - m\frac{l-\pi r-S}{2l}g = m\frac{l-\pi r-S}{2l}a \quad (13)$$

$$\text{代入}a = \beta r, (1) + \frac{(2)}{r} + (3):$$

$$m\frac{S}{l}g = m\frac{l-\pi r}{l}\beta r + \left(\frac{1}{2}M + \frac{m\pi r}{l}\right)\beta r$$
$$\left(m + \frac{1}{2}M\right)\beta r$$

$$\therefore \beta = \frac{m}{m+\frac{1}{2}M}\frac{Sg}{rl}$$

$$22. a = \frac{2}{7}g$$

$\because$ 人相对绳子加速度为 0，绳子相对地面加速度为 0

$\therefore$ 人相对地面加速度为 a

对人应用牛顿第二定律 $F = ma$，对滑轮应用转动定律 $M = J\beta$，对重物应用牛顿第二定律 $F = ma$：

$$mg - T_1 = ma \quad (14)$$
$$(T_1 - T_2)R = \frac{1}{4}mR^2\alpha \quad (15)$$
$$T_2 - \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}ma \quad (16)$$

$$(1) + \frac{(2)}{R} + (3):$$

$$\frac{1}{2}mg = \frac{3}{2}ma + \frac{1}{4}ma$$
$$= \frac{7}{4}ma$$

$$\therefore a = \frac{2}{7}g$$

$$23. \Delta x = 31.36m, \Delta\theta = 78.4rad.(g = 9.8m/s^2)$$

$$\text{或}\Delta x = 32m, \Delta\theta = 80rad.(g = 10m/s^2)$$

本解析取 $g = 9.8m/s^2$。以物体初始位置为原点，竖直向下为 x 轴建立坐标系。由能

量守恒：

$$0+0+0=mg(-x)+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2$$

$$gx=\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{4}\frac{M}{m}v^2$$

$$\frac{g}{\frac{1}{2}+\frac{M}{4m}}x=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{g}{\frac{1}{2}+\frac{M}{4m}}}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$$

$$\therefore\sqrt{\frac{g}{\frac{1}{2}+\frac{M}{4m}}}t=2\sqrt{x}+C$$

代入 $t=0, x=0, \therefore c=0$

$$\therefore\frac{gt^2}{2+\frac{M}{m}}=x$$

$$\therefore x\mid_{t=4s}=\frac{16g}{2+\frac{15}{5}}=\frac{16}{5}g=31.36(m)$$

$$\theta=\frac{x}{R}=\frac{16g}{5\times0.4}=8g=78.4(rad)$$

24. $\dfrac{3m_2^2(v_1+v_2)^2}{m_1^2l\mu g}$

本题所述力矩，全部指对 O 点的力矩。

撞击前后瞬间，子弹和细棒组成的系统仅受 O 点支持力，因此合外力矩为 0。由角动量守恒：

$$lm_2v_1+0=-lm_2v_2+\frac{1}{3}m_1l^2\omega$$

$$\therefore\omega=\frac{3m_2(v_1+v_2)}{m_1l}$$

摩擦力对 O 点力矩：

$$\begin{aligned}M&=\int_{r=0}^{r=l}fr=\int_{r=0}^{r=l}\mu\mathrm{d}mgr\\&=\int_0^l\mu gr\left(m_1\frac{\mathrm{d}r}{l}\right)\\&=\frac{\mu m_1gl}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{又}\because M&=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\\&=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\omega\end{aligned}$$

$$\therefore\frac{M}{J}\mathrm{d}\theta=\omega\mathrm{d}\omega$$

由$\theta=0$时$\omega=0$

$$\therefore\frac{M}{J}\theta=\frac{1}{2}\omega^2$$

$$\begin{aligned}\therefore\theta&=\frac{\omega^2}{2}\frac{J}{M}\\&=\frac{1}{2}\frac{9m_2^2(v_1+v_2)^2}{m_1^2l^2}\frac{\frac{1}{3}m_1l^2}{\frac{\mu m_1gl}{2}}\\&=\frac{3m_2^2(v_1+v_2)^2}{m_1^2l\mu g}\end{aligned}$$