第二章

一、选择题

1.C

质点沿力方向位移为零。$\therefore A=0.$

2.B

B 离开 A 时为弹簧恢复原长的时刻 (该时刻之后，A 受到弹簧拉力，加速度为负，$v_A<v_B$.)

此时 $v_A=v_B$. 由动能定理:

$$\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2-0=\frac{1}{2}kd^2$$
$$\therefore E_B=\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{4}kd^2$$

3.C

对 $\vec{r}$ 求导:

$$\begin{aligned}\vec{v}&=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\\&=-\frac{2\pi}{T}A\sin\frac{2\pi t}{T}\vec{i}+\frac{2\pi}{T}B\cos\frac{2\pi t}{T}\vec{j}\end{aligned}$$

$t=0$ 时，

$$\begin{aligned}v_1&=\sqrt{v_{x1}^2+v_{y1}^2}\\&=\sqrt{0^2+\left(\frac{2\pi}{T}B\right)^2}=\frac{2\pi}{T}B\end{aligned}$$

$$\therefore E_{k1}=\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{2m\pi^2}{T^2}\left(B^2\right)$$

$t=\frac{T}{4}$ 时，

$$\begin{aligned}v_2&=\sqrt{v_{x2}^2+v_{y2}^2}\\&=\sqrt{\left(-\frac{2\pi}{T}A\right)^2+0^2}=\frac{2\pi}{T}A\end{aligned}$$

$$\therefore E_{k2}=\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{2m\pi^2}{T^2}\left(A^2\right)$$
$$\therefore \Delta E_k=\frac{2\pi^2}{T^2}(B^2-A^2)$$

4.D

由动量定理:

$$0=m_1v_1-m_2v_2$$
$$\therefore v_2=\frac{m_1}{m_2}v_1$$

由机械能守恒:

$$\begin{aligned}E_p&=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\\&=\frac{m_1v_1^2+\frac{m_1^2v_1^2}{m_2}}{2}\\&=\frac{m_1v_1^2\left(m_1+m_2\right)}{2m_2}\end{aligned}$$

5.B

(2): 既然小车能在水平面上停止，说明水平面是粗糙的，有摩擦力做功。因此不满足机械能守恒。

(4): 重力做正功，摩擦力做负功，符号相反。

6.D

弹簧上任意一点弹力相同，记为 N。截去一半后，伸长量缩短了一半，而弹力不变，因此 k 变为原来的两倍。

并联在一起后，每一根弹簧受力为原先的一半。由 $F=kA$，伸长量为原来的 $\frac{1}{4}$。

写成数学式子如下:

$$\begin{aligned}E_k&=2\times\left(\frac{1}{2}k'A'^2\right)\\&=(2k)\times\left(\frac{1}{4}A\right)^2\\&=\frac{1}{8}kA^2\end{aligned}$$

7.D

物体沿重力方向的位移为负，因此重力做负功。其它选项，物体沿推力方向有位移，因此推力做功，A 错误；推力功与摩擦力做的功和重力做的功之和等值反号，因此 BC 错误。

8.C

若合外力的冲量为 0，则由冲量定义 $\vec{I}=\int_{t1}^{t2}\vec{F}\mathrm{d}t$ 知，$\vec{F}=\vec{0}$，因此合外力做的功为 0。其它选项，AD 可举匀速圆周运动的反例；对于 B，合外力不为 0，必有加速度，而质量不改变，因此 $\vec{v}$ 必然改变，即动量必改变。

9.B

由动能表达式 $E_k=\frac{p^2}{2m}$，在动量相同的情况下，质量越大，动能越小，因此选 B

10.A

设小球重力为 G，弹簧弹性系数为 k，则 $G=kd$，再设最低点时弹簧伸长 h。以弹簧原长的高度为基准，释放前和最低点为始末态，应用机械能守恒:

$$Gh=\frac{1}{2}kh^2$$

解得 $h=2d$

二、填空题

11.31J

$$A=\int_{0.5}^{1}F\mathrm{d}x=\int_{0.5}^{1}(52.8x+38.4x^2)\mathrm{d}x=31(J)$$

12.24J $4m/s$

$$A=\int_{1}^{4}F\mathrm{d}x=\int_{1}^{4}(3+2x)\mathrm{d}x=24(J)$$

由动能定理: $\frac{1}{2}mv^2=24,\quad\therefore v=4(m/s)$

13.$\frac{GMm}{6R}$ $\quad -\frac{GMm}{3R}$

卫星运动的向心力由万有引力提供，$\therefore m\frac{v^2}{3R}=G\frac{Mm}{(3R)^2}$

$$\therefore E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{GMm}{6R}$$

由引力势能公式: $E_p=-\frac{GMm}{r}=-\frac{GMm}{3R}$

14.1296

由牛顿第二定律：$F = ma, \qquad t^2 = 2a = 2\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$

再由初始条件$t = 0, x = 0$且$v = 0,$解得$x = \dfrac{1}{24}t^4$

由此可知$x = 54m$时$, t = 6s$

$A = \int_0^6 F\mathrm{d}x = \int_0^6 t^2\mathrm{d}(\frac{1}{24}t^4)$

$\therefore A = 1296J$

15.19.8m/s

（小行星的物理量下标为 1）

向心力由万有引力提供，$\therefore m\dfrac{v_1^2}{R_1} = G\dfrac{Mm}{R_1^2}$

将$M = \dfrac{4}{3}\pi R^3\rho$代入，得$v_1 = \sqrt{G\dfrac{4}{3}\pi\rho R_1^2} \qquad (1)$

由地球上重力为$g = 9.8m/s, mg = G\dfrac{Mm}{R_2^2}$

$\therefore g = G\dfrac{4}{3}\pi R_2\rho.$则$G\dfrac{4}{3}\pi\rho = \dfrac{g}{R_2}$

代入 (1)，$v_1 = \sqrt{\dfrac{gR_1^2}{R_2}} \approx 19.8(m/s)$

16.$\sqrt{\frac{2Mgh}{m+M}} \qquad \frac{m^2gh}{M+m}$

由动量定理：$mv_1 = Mv_2 \qquad (2)$

由机械能守恒：$mgh = \dfrac{1}{2}mv_1^2 + \dfrac{1}{2}Mv_2^2 \qquad (3)$

联立 (1)(2) 解得：$v_1 = \sqrt{\dfrac{2Mgh}{m+M}}$

$v_2 = \sqrt{\dfrac{2m^2gh}{(m+M)M}}$

由动能定理知，物块对滑道做的功就是滑道动能改变量

即$\dfrac{1}{2}Mv_2^2 = \dfrac{m^2gh}{M+m}$

17. 第 i 个质点所受合力做的功（类似说法均正确）

18.1m/s 200J

船员用 200N 的力拉绳子，由牛顿第三定律，绳子也给船员（和船）200N 的拉力。以人和船为对象应用牛顿第二定律，解得：

$$a = \frac{F}{m} = 0.5m/s^2$$

因此第 2 秒末速率为 1m/s，增加的动能就是

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 400 \times 1^2 = 200(J)$$

19.$\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)GMm$

由机械能守恒，$0 + E_{p1} = E_k + E_{p2}$

$\therefore E_k = E_{p2} - E_{p1} = \left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)$

以两个质点为系统，仅有万有引力（内力）做功，因此由质点系

$A = E_k = \left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)GMm$

20.0.8$\sqrt{2}$

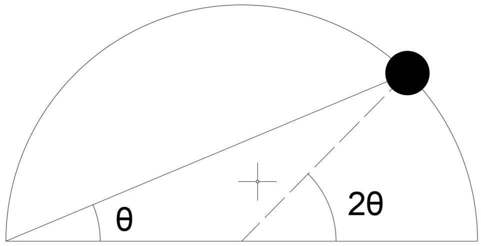

图 1

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} vecF \cdot \mathrm{d}vecx \\
&= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} F\mathrm{d}x\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} k(2R\cos\theta - 0.1) \times \mathrm{d}(R \times 2\theta) \times \sin\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-4R^2k\cos\theta + 0.2Rk)\mathrm{d}(\cos\theta) \\
&= -2R^2k\cos^2\theta + 0.2Rk\cos\theta \,|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= -2 \times 0.2^2 \times 40 \times (\frac{\sqrt{2}}{2}^2 - 1^2) + 0.2 \times 0.2 \times 40 \times (\frac{1}{2} - 1) \\
&= 0.8\sqrt{2}
\end{aligned}$$

三、计算题

21.(1)

$\Delta l = \dfrac{F}{k}$

$E_p = \dfrac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \dfrac{F^2}{2k}$

由机械能守恒，$E_{kright} - 0 = E_p - 0$

$\therefore \dfrac{1}{2}Mv_{右}^2 = \dfrac{F^2}{2k}$

$\therefore v_{右} = \dfrac{F}{\sqrt{Mk}}$

(2)

由受力分析知，$a_{左}=a_{右}$， 即$\dfrac{\mathrm{d}v_{左}}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\mathrm{d}v_{右}}{\mathrm{d}t}$

两边积分：$\therefore v_{左}=-v_{右}+c$

代入刚恢复原长时：$v_{左}=0, v_{右}=\dfrac{F}{\sqrt{Mk}}$

$\therefore v_{左}+v_{右}=\dfrac{F}{\sqrt{Mk}}$

$\therefore$ 当$v_{左}=v_{右}$时$, v'_{左}=v'_{右}=\dfrac{F}{\sqrt{2Mk}}$

由机械能守恒：

$$0+\frac{1}{2}M(v_{右})^2=\frac{1}{2}k(\Delta l)^2+\frac{1}{2}M(v'_{左})^2+\frac{1}{2}M(v'_{右})^2$$

$$\therefore \Delta l=\pm\sqrt{\frac{M\left(\frac{F^2}{Mk}-2\times\frac{F^2}{4Mk}\right)}{k}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{F}{k}$$

即伸长或压缩$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{F}{k}$

22.

记 x 为链条右端的位移，l 为桌边链条的长度。

$$\begin{aligned} dA&=F\cdot\mathrm{d}x\\ &=F\mathrm{d}x \end{aligned}$$

链条被匀速拉起，可知 $F=G$

$$\begin{aligned} F&=G=M'g\\ &=\frac{l}{L}Mg \end{aligned}$$

由几何意义，$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}l$

$$\begin{aligned} \therefore A&=\int_{\frac{L}{3}}^{0}-\frac{l}{L}Mg\mathrm{d}l\\ &=\frac{Mg}{2L}l^2\mid_0^{\frac{L}{3}}\\ &=\frac{MgL}{18} \end{aligned}$$

如果有摩擦力 f，则

$$\mathrm{d}A=F'\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} F'&=G+f=\frac{l}{L}Mg+\mu\left(\frac{L-l}{L}Mg\right)\\ &=\frac{Mg}{L}[\mu L+(1-\mu)l] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore A&=\int_{\frac{L}{3}}^{0}-\frac{Mg}{L}[\mu L+(1-\mu)l]\mathrm{d}l\\ &=\frac{Mg}{L}\left(\mu Ll+\frac{1-\mu}{2}l^2\right)\mid_0^{\frac{L}{3}}\\ &=\frac{Mg}{L}\left(\frac{\mu}{3}L^2+\frac{1-\mu}{18}L^2\right)\\ &=MgL\frac{5\mu+1}{18} \end{aligned}$$

23.

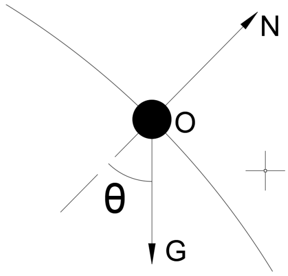

图 2

由图 2，对小球应用牛顿第二定律：

$$m\frac{v^2}{R}=mg\cos\theta-N$$

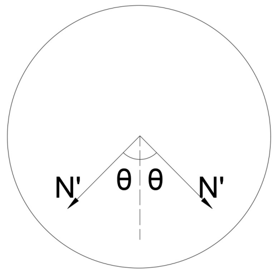

图 3

由受力分析知，圆环竖直方向受力 F 为：

$F=(N'+N')\cos\theta=2N\cos\theta$当$\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$时$,\cos\theta>0$

$\therefore$ 当$N<0$时$,F$向上，圆环上升

$\therefore N=mg\cos\theta-m\dfrac{v^2}{R}<0$

由机械能守恒（见图 4）：$\dfrac{1}{2}mv^2=mgh=mg(1-\cos\theta)R$

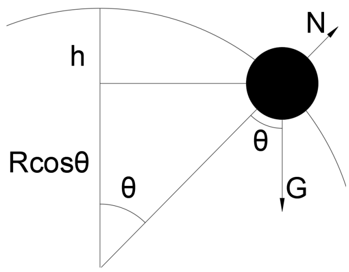

图 4

代入，$\therefore mg\cos\theta-2mg(1-\cos\theta)<0$

$\therefore 3\cos\theta<2,\quad \theta>\arccos\dfrac{2}{3}$

即当$\theta>\arccos\dfrac{2}{3}$时，圆环会上升

24.

T_1提供$G1+G2$

$\therefore k_1\Delta l=(m_1+m_2)g$

$\Delta l=\dfrac{(m_1+m_2)g}{k_1}$

由机械能守恒：

$$-mgx+\frac{1}{2}k_1(\Delta l+x)^2+\frac{1}{2}m_1v^2=0+\frac{1}{2}k_1(\Delta l)^2+0$$

$$\begin{aligned}\therefore v &= \sqrt{\frac{-kx^2 - 2(k_1\Delta l - m_1 g)x}{m_1}} \\ &= \sqrt{-\frac{k_1}{m_1}x^2 - \frac{2m_2 g}{m_1}x}\end{aligned}$$

利用二次函数最大值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ 的性质:

$$\begin{aligned}v_{max} &= \sqrt{\frac{0 - \frac{4m_2^2 g^2}{m_1^2}}{4\left(-\frac{k_1}{m_1}\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{m_2^2 g^2}{m_1 k_1}} = \frac{0.3 \times 9.8}{\sqrt{0.5 \times 8.9 \times 10^4}} \\ &= 0.0139(m/s)\end{aligned}$$