

Complemento de Álgebra Homológica

Edmundo Martins

22 de março de 2023

Este documento contém algumas anotações adicionais referentes à disciplina *Tópicos de Álgebra* ministrada pelo professor Eduardo do Nascimento Marcos durante o primeiro semestre de 2023 como parte do Programa de Pós-Graduação em Matemática do IME-USP. O documento em questão não tem a proposta de servir como notas de aula para o curso, mas apenas como um conjunto de notas adicionais destrinchando algumas coisas que foram discutidas durante as aulas.

1 Aula 1 - 15/03/2023

1.1 Módulos

Nessa subseção relembremos brevemente o significado de módulo sobre um anel. Suponha que A seja um anel não necessariamente comutativo, mas contendo uma unidade 1_A . Intuitivamente, um A -módulo à esquerda é um grupo abeliano juntamente com uma ação de A sobre esse grupo abeliano.

1.1 Definição. Um A -módulo à esquerda é um conjunto M munido de duas operações $+$: $M \times M \rightarrow M$ e \cdot : $A \times M \rightarrow M$ sujeitas às seguintes condições:

1. M é um grupo abeliano com relação à operação $+$;
2. $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$ para quaisquer $a \in A$ e $m, n \in M$;
3. $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$ para quaisquer $a, b \in A$ e $m \in M$;
4. $a \cdot (b \cdot m) = (ab) \cdot m$ para quaisquer $a, b \in A$ e $m \in M$;
5. $1_A \cdot m = m$ para qualquer $m \in M$.

Por vezes, alguns autores consideram módulos sobre anéis sem unidade, de forma que a última condição deve ser omitida. Nesse contexto, os A -módulos que satisfazem a última propriedade são ditos *unitários*.

A definição acima pode ser facilmente alterada para obtermos a noção de um A -módulo à direita, ou seja, com os escalares de A agindo da forma $m \cdot a$ ao invés de $a \cdot m$. Vamos ver agora que, embora os conceitos de módulos à esquerda e à direita não sejam exatamente iguais, existe uma relação próxima entre os dois.

Dado um anel A qualquer, podemos considerar um outro anel A^{op} cuja operação de soma é a mesma, mas cuja operação de multiplicação é a oposta, ou seja, definimos $a \cdot_{\text{op}} b := ba$, onde a justaposição indica a multiplicação já existente em A . O fato de A já ser um anel garante que essa multiplicação oposta também faça de A^{op} um anel.

Suponha agora que M seja um A -módulo à esquerda. Podemos obter um A^{op} -módulo à direita M^{op} considerando a mesma operação de soma, e definido o produto por escalares \cdot : $M \times A^{\text{op}} \rightarrow M$

por meio da fórmula $m \cdot a := a \cdot m$ para todo $a \in A^{\text{op}}$ e $m \in M$. A verificação de que isso define de fato uma estrutura de A^{op} -módulo à direita é tranquila. A parte mais interessante é verificar a “associatividade” do produto por escalares. Dados $a, b \in A^{\text{op}}$ e $m \in M$, temos

$$(m \cdot a) \cdot b = b \cdot (m \cdot a) = b \cdot (a \cdot m) = (ba) \cdot m = (a \cdot_{\text{op}} b) \cdot m = m \cdot (a \cdot_{\text{op}} b).$$

Analogamente, todo A -módulo à direita dá origem a um A^{op} -módulo à esquerda. Combinando essas duas construções, e o fato que $(A^{\text{op}})^{\text{op}} = A$, obtemos a equivalência abaixo.

1.2 Proposição. *Existe um isomorfismo de categorias $A - \text{Mod} \cong \text{Mod} - A^{\text{op}}$.*

Em particular, se A é comutativo, então $A^{\text{op}} = A$, e o resultado acima implica o seguinte:

1.3 Corolário. *Se A é um anel comutativo, existe um isomorfismo de categorias $A - \text{Mod} \cong \text{Mod} - A$.*

Isso explica porque no caso comutativo é comum ignorarmos a distinção entre módulos à esquerda e à direita.

1.2 Módulos como ações de um anel

No início da parte anterior mencionamos que, intuitivamente, um módulo sobre um anel é dado pela ação de um anel sobre um grupo abeliano. Note que a operação de produto por escalares $\cdot : A \times M \rightarrow M$ é análoga à operação $G \times X \rightarrow X$ usada para definir a ação de um grupo G sobre um conjunto X .

Na Teoria de Grupos, um fato interessante é que uma ação de grupo pode ser definida também em termos de um morfismo de grupos $G \rightarrow \text{Sym}(X)$, onde $\text{Sym}(X)$ denota o grupo simétrico de X , ou seja, o grupo formado por todas as bijeções $X \rightarrow X$. Nosso objetivo nessa parte é mostrar que um módulo também pode ser pensado como uma família de transformações de um objeto parametrizada pelos elementos do anel em questão.

Se M é um grupo abeliano qualquer, lembre-se que um *endomorfismo* de M é simplesmente um morfismo de grupos $f : M \rightarrow M$ do grupo para si mesmo. O conjunto de todos esses endomorfismos é denotado por $\text{End}(M)$. A operação de soma em M pode ser estendida pontualmente para uma operação análoga em $\text{End}(M)$: dados $f, g \in \text{End}(M)$, definimos $f + g : M \rightarrow M$ pela fórmula

$$(f + g)(m) := f(m) + g(m) \quad \forall m \in M.$$

Uma verificação rotineira mostra que $f + g$ define realmente um endomorfismo do grupo M , portanto temos de fato uma operação binária $+: \text{End}(M) \times \text{End}(M) \rightarrow \text{End}(M)$. As propriedades algébricas da adição em M garantem que essa operação defina uma estrutura de grupo em $\text{End}(M)$, na qual o elemento neutro é dado pelo endomorfismo constante $\text{ct}_{M,0} : M \rightarrow M$, e na qual o inverso $-f$ de um endomorfismo f é definido pela fórmula

$$(-f)(m) := -f(m) \quad \forall m \in M.$$

O mais interessante é que o conjunto $\text{End}(M)$ possui *outra* operação binária advinda da composição de funções. É fácil mostrar que, dados endomorfismos $f, g \in \text{End}(M)$, sua composição $g \circ f : M \rightarrow M$ define um outro endomorfismo, o que nos permite então definir uma operação binária $\circ : \text{End}(M) \times \text{End}(M) \rightarrow \text{End}(M)$. Fazendo alguns cálculos diretos podemos mostrar que essa operação goza das seguintes propriedades:

1. $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$ para quaisquer $f_1, f_2, g \in \text{End}(M)$;
2. $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$ para quaisquer $f, g_1, g_2 \in \text{End}(M)$;

3. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ para quaisquer $f, g, h \in \text{End}(M)$;
4. $\text{id}_M \circ f = f \circ \text{id}_M = f$ para qualquer $f \in \text{End}(M)$.

Em outras palavras, as operações $+$ e \circ juntas definem uma estrutura de *anel* no conjunto de endomorfismos $\text{End}(M)$. Esse é o ingrediente necessário para definirmos uma ação de um anel sobre um grupo abeliano.

1.4 Definição. Uma **ação** de um anel A sobre um grupo abeliano M é um morfismo de anéis $\varphi : A \rightarrow \text{End}(M)$.

Assim, uma ação de A sobre M define, para cada $a \in A$, um endomorfismo $\varphi_a := \varphi(a) \in \text{End}(M)$, e essa coleção parametrizada de endomorfismos satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\varphi_a + \varphi_b = \varphi_{a+b}$ para quaisquer $a, b \in A$;
2. $\varphi_b \circ \varphi_a = \varphi_{ba}$ para quaisquer $a, b \in A$;
3. $\varphi_{1_A} = \text{id}_M$.

Suponha agora que M seja um A -módulo à esquerda. Dado $a \in A$ qualquer, definimos um mapa $\ell_a : M \rightarrow M$ pela fórmula

$$\ell_a(m) := a \cdot m \quad \forall m \in M.$$

Esse mapa ℓ_a define na verdade um endomorfismo de M , pois por hipótese o produto por escalares distribui sobre a soma em M , de forma que obtemos um elemento $\ell_a \in \text{End}(M)$.

Variando o elemento $a \in A$ em questão define então um mapa $\ell : A \rightarrow \text{End}(M)$ dado pela regra $a \mapsto \ell_a$. As propriedades da operação de produtos por escalares garantem que esse mapa seja um morfismo de anéis:

- a igualdade $(a + b) \cdot m$ implica a igualdade $\ell_{a+b} = \ell_a + \ell_b$;
- a igualdade $(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$ implica a igualdade $\ell_{ab} = \ell_a \circ \ell_b$;
- a igualdade $1_A \cdot m = m$ implica a igualdade $\ell_{1_A} = \text{id}_M$.

Assim, a estrutura de A -módulo em M induz uma ação de A sobre M por meio do morfismo $\ell : A \rightarrow \text{End}(M)$. Em certo sentido, esse morfismo é análogo ao morfismo $G \rightarrow \text{Sym}(G)$ que aparece na demonstração do Teorema de Cayley.

Existe também uma construção inversa. Dada uma ação $\varphi : A \rightarrow \text{End}(M)$ do anel A sobre o grupo abeliano M , considere o produto por escalares $\cdot_\varphi : A \times M \rightarrow M$ definido pela fórmula

$$a \cdot_\varphi m := \varphi_a(m) \quad \forall a \in A, \forall m \in M.$$

O fato de φ ser um morfismo de anéis garante que esse produto \cdot_φ defina juntamente com a soma $+$ uma estrutura de A -módulo à esquerda em M :

- a igualdade $\varphi_{a+b} = \varphi_a + \varphi_b$ implica a igualdade $(a + b) \cdot_\varphi m = a \cdot_\varphi m + b \cdot_\varphi m$;
- o fato de φ_a ser um endomorfismo implica a igualdade $a \cdot_\varphi (m + n) = a \cdot_\varphi m + a \cdot_\varphi n$;
- a igualdade $\varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b$ implica a igualdade $(ab) \cdot_\varphi m = a \cdot_\varphi (b \cdot_\varphi m)$;
- a igualdade $\varphi_{1_A} = \text{id}_M$ implica a igualdade $1_A \cdot_\varphi m = m$.

É possível mostrar que essas duas construções são inversas uma da outra, o que nos leva ao resultado abaixo.

1.5 Teorema. *A noção de A -módulo à esquerda é equivalente à noção de ação de um anel sobre um grupo abeliano.*

Essa equivalência provavelmente pode ser formulada em termos categóricos, mas eu não sei ao certo como fazer isso. É claro que temos a categoria de A -módulos à esquerda $A - \mathbf{Mod}$, mas como interpretar morfismos de anéis do tipo $A \rightarrow \text{End}(M)$ como objetos de alguma categoria?

1.3 Álgebras sobre anéis

Nessa subseção, consideramos outra estrutura algébrica mais rica do que a de módulo sobre um anel. Intuitivamente, uma álgebra sobre um anel consiste de um módulo sobre o anel em questão equipado com uma operação adicional de multiplicação que é compatível com as operações e soma produto por escalares já existentes. As condições exatas de compatibilidade estão formuladas na definição abaixo.

1.6 Definição. Seja A um anel qualquer com unidade. Uma **A -álgebra** consiste de um conjunto M juntamente com três operações $+: M \times M \rightarrow M$, $\cdot: A \times M \rightarrow M$ e $\ast: M \times M \rightarrow M$ sujeitas às seguintes condições:

1. M é um grupo abeliano com relação à operação de soma $+$;
2. as operações $+$ e \cdot juntas fazem de M um A -módulo à esquerda;
3. a operação \ast é A -bilinear.

A operação A -bilinear \ast é comumente chamada de *multiplicação*, e é mais comum denotar seus valores por justaposição, ou seja, escrevemos mn no lugar de $m \ast n$. Levando em conta essa notação, a condição de A -bilinearidade da multiplicação pode ser descrita mais explicitamente em termos das seguintes igualdades:

- (i) $(m_1 + m_2)n = m_1n + m_2n$ para quaisquer $m_1, m_2, n \in M$;
- (ii) $m(n_1 + n_2) = mn_1 + mn_2$ para quaisquer $m, n_1, n_2 \in M$;
- (iii) $(a \cdot m)n = a \cdot (mn)$ para quaisquer $a \in A$ e $m, n \in M$;
- (iv) $m(a \cdot n) = a \cdot (mn)$ para quaisquer $a \in A$ e $m, n \in M$.

As duas primeiras propriedades mostram que a multiplicação distribui sobre a soma em ambos os lados, enquanto as duas últimas mostram que a multiplicação é em algum sentido compatível com o produto por escalares, os quais “transitam livremente por dentro da multiplicação”. Veremos logo mais que existem diferentes “sabores” de A -álgebras caracterizados por propriedades adicionais impostas sobre a operação de multiplicação.

Existe uma definição natural de transformação entre duas álgebras. Formalmente, dadas duas A -álgebras M e N , uma função $f: M \rightarrow N$ é um *morfismo de A -álgebras* se satisfaz as seguintes condições:

1. $f(m + n) = f(m) + f(n)$ para todos $m, n \in M$;
2. $f(a \cdot m) = a \cdot f(m)$ para todo $m \in M$ e $a \in A$;
3. $f(mn) = f(m)f(n)$ para todo $m, n \in M$.

As duas primeiras condições dizem que f é um morfismo de A -módulos, enquanto a terceira diz que f é compatível com as operações de multiplicação existentes em M e N .

É tranquilo mostrar que dois morfismos de A -álgebras podem ser compostos para definir um novo morfismo de A -álgebras, e também que o mapa idêntico $\text{id}_M : M \rightarrow M$ define um morfismo de A -álgebras. Podemos então definir uma categoria $A\text{-Alg}$ cujos objetos são A -álgebras e cujos morfismos são morfismos de A -álgebras.

Agora introduzimos algumas propriedades adicionais que uma álgebra pode ou não satisfazer.

1.7 Definição. Uma A -álgebra M é dita

- **unitária** se existe um elemento $1_M \in M$ tal que as igualdades $1_M m = m = m 1_M$ sejam válidas para todo $m \in M$;
- **comutativa** se a igualdade $mn = nm$ é válida para quaisquer $m, n \in M$;
- **associativa** se a igualdade $(m_1 m_2) m_3 = m_1 (m_2 m_3)$ é válida para quaisquer $m_1, m_2, m_3 \in M$.

Vejamos alguns exemplos interessantes relacionados às propriedades acima.

1.8 Exemplo. Dado um anel com unidade qualquer A , podemos considerar a A -álgebra $M_n(A)$ de matrizes $n \times n$ com entradas em A . Essa é uma A -álgebra associativa e unitária, sendo a unidade dada pela matriz identidade, mas ela só é comutativa quando A é comutativo e n é igual a 1.

1.9 Exemplo. Seja M um A -módulo sobre um anel com unidade. Um endomorfismo de A -módulos de M é por definição um morfismo de A -módulo do tipo $M \rightarrow M$. Considere o conjunto $\text{End}_A(M)$ formado por todos os endomorfismos do A -módulo M . Note que $\text{End}_A(M)$ é *diferente* do conjunto de endomorfismos $\text{End}(M)$ do grupo abeliano M , pois neste último desconsideramos a compatibilidade dos mapas com o produto por escalares. Assim como no caso em que M é apenas um grupo abeliano, a operação de soma em $+$ pode ser estendida para uma operação de soma $+$: $\text{End}_A(M) \times \text{End}_A(M) \rightarrow \text{End}_A(M)$ no conjunto de endomorfismos de A -módulos.

$$(S + T)(m) := S(m) + T(m) \quad \forall m \in M.$$

No contexto atual em que M é também um A -módulo, podemos estender também o produto por escalares para uma operação análoga $\cdot : A \times \text{End}_A(M) \rightarrow \text{End}_A(M)$. Formalmente, dados $a \in A$ e $T \in \text{End}_A(M)$, definimos um novo mapa $a \cdot T : M \rightarrow M$ pela fórmula

$$(a \cdot T)(m) := a \cdot T(m) \quad \forall m \in M.$$

Uma conta tranquila mostra que $a \cdot T$ define de fato um endomorfismo de A -módulos de M , o que nos permite considerar então uma operação de produto por escalares $\cdot : A \times \text{End}_A(M) \rightarrow \text{End}_A(M)$. Veja que essa operação goza das seguintes propriedades:

1. $a \cdot (S + T) = a \cdot S + a \cdot T$, pois em M vale que $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$;
2. $(a + b) \cdot T = a \cdot T + b \cdot T$, pois em M vale que $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$;
3. $a \cdot (b \cdot T) = (ab) \cdot T$, pois em M vale que $a \cdot (b \cdot m) = (ab) \cdot m$;
4. $1_A \cdot T = T$, pois em M vale que $1_A \cdot m = m$.

Em outras palavras, quando M é um A -módulo, o conjunto de endomorfismos (de módulos!) $\text{End}_A(M)$ carrega por si só uma estrutura de A -módulo também.

Até o momento, as operações de soma e produto por escalar tornam $\text{End}_A(M)$ um A -módulo também. O mais interessante é que a operação de composição nos permite definir um tipo de multiplicação em $\text{End}_A(M)$, ou seja, dados dois endomorfismos $S, T : M \rightarrow M$, definindo $ST := S \circ T$ obtemos um novo endomorfismo, e portanto uma operação de multiplicação $\text{End}_A(M) \times \text{End}_A(M) \rightarrow \text{End}_A(M)$. Vejamos algumas das propriedades satisfeitas por essa multiplicação. Dados $R, S, T \in \text{End}_A(M)$, usando as definições anteriores vemos que a igualdade

$$[(R+S)T](m) = (R+S)(T(m)) = R(T(m)) + S(T(m)) = (RT)(m) + (ST)(m) = (RT+ST)(m)$$

é válida para todo $m \in M$, o que significa que temos uma igualdade $(R+S)T = RT+ST$ a nível de endomorfismos. Se considerarmos também um escalar $a \in A$, vale que

$$[(a \cdot S)T](m) = (a \cdot S)(T(m)) = a \cdot S(T(m)) = a \cdot (ST)(m) = [a \cdot (ST)](m)$$

para todo $m \in M$, portanto temos a igualdade $(a \cdot S)T = a \cdot (ST)$.

Os dois argumentos acima mostram que a operação de multiplicação (= composição) de endomorfismos é A -linear no primeiro argumento. É claro que contas totalmente análogas mostram que também vale a A -linearidade no segundo argumento, o que significa que temos na verdade uma multiplicação que é A -bilinear. Concluimos enfim que temos de fato uma A -álgebra de endomorfismos $\text{End}_A(M)$. Como a multiplicação de dois endomorfismos é definida em termos da operação de composição, a qual é sabidamente associativa, $\text{End}_A(M)$ é um exemplo de álgebra associativa. Além disso, a função idêntica $\text{id}_M : M \rightarrow M$ é um endomorfismo que satisfaz as igualdades $\text{id}_M T = T \text{id}_M = T$ para todo endomorfismo T , portanto $\text{End}_A(M)$ é também uma álgebra unitária. Entretanto, em geral não há nenhum motivo que garanta que a igualdade $ST = TS$ seja válida para endomorfismos S e T quaisquer, de forma que a A -álgebra $\text{End}_A(M)$ é em geral *não-comutativa*.

O exemplo anterior pode ser visto como um caso particular desse segundo exemplo. Isso é porque, dado um anel comutativo com unidade A , podemos considerar o produto A^n como um A -módulo com as operações definidas separadamente em cada coordenada, logo temos também a A -álgebra de endomorfismos $\text{End}_A(A^n)$ construída acima. Fixando uma base para A^n visto como A -módulo, temos a construção usual da Álgebra Linear que associa a cada endomorfismo $T : A^n \rightarrow A^n$ uma matriz $[T] \in M_n(A)$. Isso estabelece ao menos uma bijeção entre $\text{End}_A(A^n)$ e $M_n(A)$, e uma conta tediosa mostra que na verdade essa bijeção é compatível com as duas estruturas de A -álgebra presentes, de forma que temos na verdade um *isomorfismo* de A -álgebras $\text{End}_A(A^n) \cong M_n(A)$.

1.10 Exemplo. Seja A um anel comutativo com unidade. Dado um conjunto qualquer X , seja $F(X, A)$ o conjunto de todas as funções de tipo $X \rightarrow A$. As operações existentes em A podem ser estendidas pontualmente para $F(X, A)$:

- dados $f, g \in F(X, A)$, definimos $f + g : X \rightarrow A$ por $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ para todo $x \in X$;
- dados $f \in F(X, A)$ e $a \in A$, definimos $a \cdot f : X \rightarrow A$ por $(a \cdot f)(x) := af(x)$ para todo $x \in X$;
- dados $f, g \in F(X, A)$, definimos $fg : X \rightarrow A$ pela fórmula $(fg)(x) := f(x)g(x)$ para todo $x \in X$.

Novamente, contas rotineiras usando as propriedades algébricas das operações em A nos permitem mostrar que as operações definidas acima munem $F(X, A)$ de uma estrutura de A -álgebra. Como a multiplicação em $F(X, A)$ é definida em termos da multiplicação em A , a qual

é comutativa, $F(X, A)$ é também uma álgebra associativa. Além disso, a função $\text{ct}_{X, 1_A} : X \rightarrow A$ que é constante e igual a 1_A é uma unidade bilateral para a operação de multiplicação em $F(X, A)$, portanto temos uma A -álgebra unitária. Por fim, como o anel A é comutativo por hipótese, o mesmo vale para a multiplicação em $F(X, A)$, portanto esta é uma A -álgebra comutativa.

1.4 Álgebras via anéis e vice-versa

Nessa subseção vamos discutir como certos tipos de álgebras podem ser definidas em termos de anéis e vice-versa. Se quisermos mais precisos, vamos mostrar que existe uma correspondência entre certas A -álgebras e morfismos de anéis cujo domínio é A . Durante esta subseção, consideraremos apenas anéis comutativos e com unidade, e os morfismos de anéis serão unitários, ou seja, mapearão a unidade de um anel para a unidade de outro.

Suponha que M seja uma A -álgebra unitária, comutativa e associativa. Deixando de lado momentaneamente a operação de produto por escalares, as operações de soma e multiplicação juntas definem uma estrutura de anel comutativo no conjunto M . Veja que para que isso seja verdade é essencial que a A -álgebra inicial seja realmente unitária, comutativa e associativa.

E qual é a relevância da operação de produto por escalares nessa estrutura de anel em M ? Usando tal operação podemos definir uma função $\varphi_M : A \rightarrow M$ dada por $\varphi_M(a) := a \cdot 1_M$. Usando as propriedades algébricas da estrutura de A -álgebra em M vemos que valem as seguintes igualdades:

- $\varphi_M(1_A) = 1_A \cdot 1_M = 1_M$;
- $\varphi_M(a + b) = (a + b) \cdot 1_M = a \cdot 1_M + b \cdot 1_M = \varphi_M(a) + \varphi_M(b)$ para quaisquer $a, b \in A$;
- $\varphi_M(ab) = (ab) \cdot 1_M = (a \cdot 1_M)(b \cdot 1_M) = \varphi_M(a)\varphi_M(b)$ para quaisquer $a, b \in A$.

Vemos então que $\varphi_M : A \rightarrow M$ é um *morfismo de anéis* que é normalmente chamado de **morfismo estrutural** da A -álgebra M .

Agora, lembremos que, se \mathbf{CRing} denota a categoria de anéis comutativos e morfismos de anéis, podemos considerar a categoria *co-slice* $A \backslash \mathbf{CRing}$. Os objetos dessa categoria são dados por morfismos de anéis cujo domínio é A , e, dados dois objetos $A \xrightarrow{\varphi} R$ e $A \xrightarrow{\psi} R'$, um morfismo do primeiro para o segundo é por definição um morfismo de anéis $\theta : R \rightarrow R'$ satisfazendo a igualdade $\theta \circ \varphi = \psi$, ou seja, fazendo comutar o triângulo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} & & R \\ & \nearrow \varphi & \downarrow \theta \\ A & & \\ & \searrow \psi & \downarrow \\ & & R' \end{array}$$

Dada uma A -álgebra unitária, comutativa e associativa M , podemos encarar o morfismo estrutural $\varphi_M : A \rightarrow M$ como um objeto da categoria $A \backslash \mathbf{CRing}$. Nosso objetivo é mostrar que essa construção é funtorial.

Suponha então que N seja uma outra A -álgebra unitária, associativa e comutativa, e considere um morfismo *unitário* de A -álgebras $f : M \rightarrow N$, ou seja, a igualdade $f(1_M) = 1_N$ deve ser válida. É imediato então que f pode ser visto também como um morfismo de anéis. Além disso, para qualquer $a \in A$ temos que

$$f(\varphi_M(a)) = f(a \cdot 1_M) = a \cdot f(1_M) = a \cdot 1_N = \varphi_N(a),$$

de forma que f faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ \varphi_M \nearrow & & \downarrow f \\ A & & \\ \varphi_N \searrow & & \\ & & N \end{array}$$

Isso significa que f pode ser visto então como um morfismo do tipo

$$(A \xrightarrow{\varphi_M} M) \xrightarrow{f} (A \xrightarrow{\varphi_N} N)$$

na categoria co-slice $A \backslash \mathbf{CRing}$.