Notas sobre pushouts

Edmundo Martins

9 de fevereiro de 2023

Resumo

Estas notas contêm uma exposição básica do conceito categórico de pushout. O foco principal de estudo são pushqouts na categorias de espaços e funções contínuas, mas isso naturalmente requer o estudo de algumas propriedades gerais de pushouts, assim como o estudo de propriedades particulares de pushouts na categoria de conjuntos. Após isso, aplicamos os resultados obtidos para obter propriedades de algumas construções topológicas que aparecem com frequência na Topologia Algébrica.

Sumário

1 Pushouts gerais

1.1 Definição. Um **span** em uma categoria qualquer C é um diagrama da forma

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \\ y & \end{tikzcd} \tag{1}$$

onde w, x e y são objetos de C, e α e β são morfismos desta mesma categoria.

1.2 Definição. Dizemos que um span

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \\ y & \end{tikzcd}$$

em uma categoria C **admite um pushout** se existem um objeto $z \in \mathsf{C}$ e morfismos $f : x \to z$ e $g : y \to z$ tais que $f \circ \alpha = g \circ \beta$, e se a seguinte propriedade universal é satisfeita: dados um outro objeto $z' \in \mathsf{C}$ e outros dois morfismos $f' : x \to z'$ e $g' : y \to z'$ tais que $f' \circ \alpha = g' \circ \beta$, existe um *único* morfismo $h : z \to z'$ tal que $h \circ f = f'$ e $h \circ g = g'$, ou seja, h fatora os morfismos f' e g' por f e g, respectivamente.

No contexto da definição acima, dizemos também por vezes que a tripla (z, f, g) é um **pushout** para o span inicial em questão. Note que a condição $f \circ \alpha = g \circ \beta$ pode ser expressa graficamente por meio do quadrado comutativo abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "f"] \\
y \arrow[r, "g"'] & z
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

Ao invés de dizermos que a tripla (z, f, g) é um pushout para o span inicial, também é bastante comum dizermos apenas que o diagrama comutativo acima é um pushout.

Também é possível - e altamente vantajoso - interpretar a propriedade universal que caracteriza o pushout em termos de diagramas. Já vimos que um pushout (z, f, g) determina um quadrado comutativo. O outro objeto z' juntamente com os morfismos $f' : x \to z'$ e $g' : y \to z'$ também determinam um quadrado comutativo, já que por hipótese vale a igualdade $f' \circ \alpha = g' \circ \beta$. Os dois quadrados comutativos em questão podem ser combinados em um diagrama único como mostrado abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, bend left, "f'"] & \\
y \arrow[r, "g"'] \arrow[drr, bend right, "g'"'] & z & \\
& & z'
\end{tikzcd}
$$

O único morfismo $h : z \to z'$ induzido pela propriedade universal do pushout pode então ser representado pelo morfismo tracejado abaixo o qual faz o diagrama todo comutar.

$$
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, bend left, "f'"] & \\
y \arrow[r, "g"'] \arrow[drr, bend right, "g'"'] & z \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & z'
\end{tikzcd}
$$

Sendo definido por meio uma propriedade universal, pushouts satisfazem uma certa propriedade de unicidade a menos de isomorfismos.

1.3 Proposição. *Suponha que os dois diagramas abaixo sejam pushouts em uma categoria* C.

$$
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "g"] \\
y \arrow[r, "f"'] & z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "g'"] \\
y \arrow[r, "f'"'] & z'
\end{tikzcd}
$$

Então existe um único *isomorfismo* $\theta : z \to z'$ *satisfazendo as igualdades* $\theta \circ g = g'$ *e* $\theta \circ f = f'$.

Demonstração. Começamos com uma observação simples mas de extrema importância. Note que o morfismo $\mathrm{id}_z : z \to z$ faz o diagrama abaixo comutar.

$$
\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
y \arrow[r, "f"'] \arrow[drr, bend right, "f"'] & z \arrow[dr, dashed, "\mathrm{id}_z"] & \\
& & z
\end{tikzcd}
$$

A propriedade universal do pushout no entanto garante que id_z é na verdade o *único* morfismo do tipo $z \to z$ que faz tal diagrama comutar. Assim, se $\varphi : z \to z$ é um morfismo que satisfaz as igualdades $\varphi \circ g = g$ e $\varphi \circ f = f$, então necessariamente devemos ter $\varphi = \mathrm{id}_z$.

Vamos agora obter o isomorfismo em questão. A propriedade universal do pushout garante a existência de um único morfismo $\theta : z \to z'$ fazendo o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left, "g'"] & \\
y \arrow[r, "f"] \arrow[drr, bend right, "f'"'] & z \arrow[dr, dashed, "\theta"] & \\
& & z'
\end{tikzcd}$$

Veja que θ satisfaz as duas igualdades impostas pelo enunciado. Resta então mostrarmos que esse morfismo é na verdade um isomorfismo, e para isso vamos exibir explicitamente o morfismo inverso. Usando novamente a propriedade universal do pushout obtemos o único morfismo $\theta' : z' \to z$ fazendo o diagram abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "g'"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
y \arrow[r, "f'"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & z' \arrow[dr, dashed, "\theta'"] & \\
& & z
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que θ e θ' são inversos. O truque para mostrarmos a igualdade $\theta' \circ \theta = \mathrm{id}_z$ é usar a caracterização do morfismo idêntico id_z dada no primeiro parágrafo. Por um lado,

$$\theta' \circ \theta \circ f = \theta' \circ f' = f,$$

e analogamente,

$$\theta' \circ \theta \circ g = \theta' \circ g' = g.$$

S Segue então da conclusao do primeiro parágrafo que $\theta' \circ \theta = \mathrm{id}_z$. A demonstração da validade da igualdade $\theta \circ \theta' = \mathrm{id}_{z'}$ é similar, pois, analogamente ao que ocorre com id_z, o morfismo $\mathrm{id}_{z'}$ é caracterizado unicamente por satisfazer as igualdades $\mathrm{id}_{z'} \circ g' = g'$ e $\mathrm{id}_{z'} \circ f' = f'$. Assim, as sequências de igualdades

$$\theta \circ \theta' \circ g' = \theta \circ g = g'$$

e

$$\theta \circ \theta' \circ f' = \theta \circ f = f'$$

implicam imediatamente a igualdade desejada. ■

Veremos diversos exemplos concretos de pushouts ao longo do texto, mas desde já podemos estudar um exemplo geral que pode ser especializado para diferentes contextos.

1.4 Exemplo. Seja C uma categoria contendo um objeto inicial $0 \in \mathsf{C}$. Dados dois objetos quaisquer x, $y \in \mathsf{C}$, temos os morfismos únicos $!_x : 0 \to x$ e $!_y : 0 \to y$ associados ao objeto inicial em questão. Suponha que o diagrama de pré-pushout

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "!_x"] \arrow[d, "!_y"'] & x \\
y &
\end{tikzcd}$$

admita um pushout como abaixo.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "!_x"] \arrow[d, "!_y"'] & x \arrow[d, "i"] \\ y \arrow[r, "j"'] & z \end{tikzcd}$$

Afirmamos que nesse caso z é um *coproduto* dos objetos x e y, sendo i e j as injeções canônicas. Podemos mostrar isso simplesmente verificando que a propriedade universal do coproduto é satisfeita. Seja z' um outro objeto de C equipado com morfismos $i' : x \to z'$ e $j' : y \to z'$. Como existe um único morfismo do tipo $0 \to z'$, os morfismos compostos $i' \circ !_x$, $j' \circ j' \circ !_y : 0 \to z'$ são iguais, ou seja, o "quadrado externo" no diagrama abaixo é comutativo. A propriedade universal do coproduto implica então a existência de um único morfismo $h : z \to z'$ fazendo o diagrama todo comutar.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "!_x"] \arrow[d, "!_y"'] & x \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, "i'"] & \\ y \arrow[r, "j"'] \arrow[drr, bend right, "j'"'] & z \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & & z' \end{tikzcd}$$

Em outras palavras, os morfismos i' e j' podem ser unicamente fatorados pelos morfismos i e j, respectivamente, o que significa precisamente que a triple (z, i, j) é um coproduto dos objetos x e y.

Esse exemplo mostra que, em uma categoria que tenha um objeto inicial, coprodutos podem ser vistos como pushouts. Dito de outra forma, um pushout pode ser visto como uma generalização de um coproduto. Mais adiante, veremos inclusive que, em categorias suficientemente ricas, pushouts podem ser construídos *a partir* de coprodutos usando um certo tipo de quociente.

1.1 Propriedades gerais

O objetivo dessa seção é demonstrar algumas propriedades de pushouts que são válidas em qualquer categoria. Posteriormente, estudaremos pushouts em exemplos particulares de categorias e teremos a oportunidade de aplicar tais resultados a exemplos concretos.

O primeiro resultado oferece uma receita para a construção de pushouts em categorias suficientemente ricas relacionando-o com coprodutos e coequalizadores.

1.5 Teorema. *Considere o diagrama abaixo em uma categoria* C.

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \\ y & \end{tikzcd}$$

Suponha que os objetos x e y admitam um coproduto $x+y$ com injeções canônicas $i_1 : x \to x+y$ e $i_2 : y \to x+y$. Nesse contexto, o diagrama acima admite um pushout se, e somente se, o par de morfismos paralelos

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, shift left, "i_1 \circ \alpha"] \arrow[r, shift right, "i_2 \circ \beta"'] & x+y \end{tikzcd}$$

admite um coequalizador.

Demonstração. Suponha inicialmente que exista um pushout como abaixo.

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "g"] \\ y \arrow[r, "f"'] & z \end{tikzcd}$$

Os morfismos g e f induzem um morfismo $\langle g, f\rangle : x + y \to z$ por meio da propriedade universal do coproduto. Vamos mostrar que esse morfismo induzido é o coequalizador desejado. Note, em primeiro lugar, que ele coequaliza os morfismos necessários, pois

$$\begin{aligned} \langle g, f\rangle \circ i_1 \circ \alpha &= g \circ \alpha \\ &= f \circ \beta \\ &= \langle g, f\rangle \circ i_2 \circ \beta. \end{aligned}$$

Em outras palavras, temos o diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, shift left, "i_1 \circ \alpha"] \arrow[r, shift right, "i_2 \circ \beta"'] & x + y \arrow[r, "\langle g, f\rangle"] & z \end{tikzcd}$$

Precisamos mostrar que, se $p : x + y \to z'$ é outro morfismo coequalizando $i_1 \circ \alpha$ e $i_2 \circ \beta$, então existe um único morfismo $h : z \to z'$ tal que $h \circ \langle g, f\rangle = p$.

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, shift left, "i_1 \circ \alpha"] \arrow[r, shift right, "i_2 \circ \beta"'] & x + y \arrow[r, "\langle g, f\rangle"] \arrow[dr, "p"'] & z \arrow[d, dashed, "h"] \\ & & z' \end{tikzcd}$$

Note que, como os morfismos p e $h \circ \langle g, f\rangle$ têm como domínio o coproduto $x + y$, a propriedade universal do produto garante a seguinte equaivalência:

$$p = h \circ \langle g, f\rangle \iff \begin{cases} p \circ i_1 = h \circ \langle g, f\rangle \circ i_1 \\ p \circ i_2 = h \circ \langle g, f\rangle \circ i_2. \end{cases}$$

Usando as igualdades que definem o morfismo induzido $\langle g, f\rangle$, a equivalência acima pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$p = h \circ \langle g, f\rangle \iff \begin{cases} p \circ i_1 = h \circ g \\ p \circ i_2 = h \circ f. \end{cases}$$

Vamos então construir o morfismo desejado. Como por hipótese p satisfaz a igualdade $p \circ i_1 \circ \alpha = p \circ i_2 \circ \beta$, o "quadrado exterior" no diagrama abaixo é comutativo, portanto a propriedade universal do pushout garante a existência de um único morfismo $h : z \to z'$ fazendo o diagrama todo comutar.

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left, "p \circ i_1"] & \\ y \arrow[r, "f"'] \arrow[drr, bend right, "p \circ i_2"'] & z \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ & & z' \end{tikzcd}$$

Segue da comutatividade do diagrama que esse único morfismo h é exatamente o morfismo procurado.

Reciprocamente, suponha agora que os morfismos $i_1 \circ \alpha, i_2 \circ \beta : w \to x + y$ admitam um coequalizador $p : x + y \to z$. Vamos mostrar então que o diagrama abaixo é um pushout.

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "p\circ i_1"] \\
y \arrow[r, "p\circ i_2"'] & z
\end{tikzcd}$$

Seja z' um outro objeto juntamente com morfismos $j_1 : x \to z'$ e $j_2 : y \to z'$ satisfazendo a igualdade $j_1 \circ \alpha = j_2 \circ \beta$. Isso garante que o morfismo $\langle j_1, j_2 \rangle : x + y \to z'$ induzido pela propriedade universal do coproduto coequaliza os morfismos paralelos $i_1 \circ \alpha$ e $i_2 \circ \beta$; portanto a propriedade universal do coequalizador garante a existência de um único morfismo $h : z \to z'$ fazendo o diagram abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, shift left, "i_1\circ\alpha"] \arrow[r, shift right, "i_2\circ\beta"'] & x+y \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\langle j_1, j_2\rangle"'] & z \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & & z'
\end{tikzcd}$$

Vemos então que

$$h \circ p \circ i_1 = \langle j_1, j_2 \rangle \circ i_1 = i_1,$$

e analgoamente também podemos mostrar que $h \circ p \circ i_2 = j_2$; portanto h é exatamente o morfismo desejado. ■

Nosso próximo resultado mostra quais propriedades de um morfismo são preservadas em um diagrama de pushout.

1.6 Teorema. *Considere o diagrama de pushout abaixo em uma categoria qualquer* C.

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "g"] \\
y \arrow[r, "f"'] & z
\end{tikzcd}$$

As seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) se β é um epimorfismo, então g é um epimorfismo;

(b) se β é um isomorfismo, então g é um isomorfismo.

Demonstração. (a) Dados dois morfismos $\varphi, \psi : z \to z'$ tais que $\varphi \circ g = \psi \circ g$, precismos mostrar que $\varphi = \psi$. Note que, como $(\varphi \circ g) \circ \alpha = (\varphi \circ f) \circ \beta$, a propriedade universal do pushout garante que φ é o único morfismo do tipo $z \to z'$ que faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi\circ g"] & \\
y \arrow[r, "f"'] \arrow[drr, bend right, "\varphi\circ f"'] & z \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\
 & & z'
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Analogamente, o morfismo ψ é o único que faz o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left, "\psi\circ g"] & \\
y \arrow[r, "f"'] \arrow[drr, bend right, "\psi\circ f"'] & z \arrow[dr, dashed, "\psi"] & \\
& & z'
\end{tikzcd} \tag{4}$$

Perceba que os diagramas (3) e (4) não são tão diferentes assim, já que por hipótese os morfismos $\varphi \circ g$ e $\psi \circ g$ são iguais. Se mostrarmos que os morfismos $\varphi \circ f$ e $\psi \circ g$ também são iguais, então φ e ψ serão ambos induzidos pela propriedade universal de um mesmo diagrama de pushout, o que implica a igualdade $\varphi = \psi$. Usando a comutatividade do diagrama de pushout do enunciado vemos que

$$\begin{aligned}
\varphi \circ f \circ \beta &= \varphi \circ g \circ \alpha \\
&= \psi \circ g \circ \alpha \\
&= \psi \circ f \circ \beta,
\end{aligned}$$

e sendo β um epimorfismo por hipótese, segue da igualdade acima que $\varphi \circ f = \psi \circ f$ como desejávamos mostrar.

(b) Considere o morfismo inverso $\beta^{-1} : y \to w$. Como $(\alpha \circ \beta^{-1}) \circ \beta = \mathrm{id}_x \circ \alpha$, o quadrado externo no diagram abaixo é comutativo, e a propriedade universal do pushout implica então a existência de um único morfismo $h : z \to x$ fazendo comutar o diagrama todo.

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & x \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}_x"] & \\
y \arrow[r, "f"'] \arrow[drr, bend right, "\alpha\circ\beta^{-1}"'] & z \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & x
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que h é o morfismo inverso de g. Perceba que a igualdade $h \circ g = \mathrm{id}_x$ segue imediatamente da comutatividade do diagrama acima, restando apenas mostrarmos a igualdades $g \circ h = \mathrm{id}_z$. Lembre agora que, como discutido no primeiro parágrafo da demonstração da Proposição 1.3, o morfismo idêntico id_z é o único do tipo $z \to z$ que satisfaz as igualdades $\mathrm{id}_z \circ f = f$ e $\mathrm{id}_z \circ g = g$. Note, entretanto, que por um lado

$$\begin{aligned}
g \circ h \circ f &= g \circ \alpha \circ \beta^{-1} \\
&= f \circ \beta \circ \beta^{-1} \\
&= f \circ \mathrm{id}_y \\
&= f,
\end{aligned}$$

e por outro

$$g \circ h \circ g = g \circ \mathrm{id}_x = g.$$

Segue então dessas duas igualdades e da observação anterior que $g \circ h = \mathrm{id}_z$. ■

O próximo resultado mostra como pushouts podem ser combinados para obtermos novos pushouts.

1.7 Teorema (Lei de colagem para pushouts)**.** *Considere o diagrama comutativo abaixo em uma categoria qualquer* C*,*

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & v \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & w \arrow[d, "h"] \\ x \arrow[r, "\gamma"'] & y \arrow[r, "\delta"'] & z \end{tikzcd} \tag{5}$$

e considere também o diagrama abaixo obtido pela "colagem" dos dois quadrados comutativos acima.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "\beta\circ\alpha"] \arrow[d, "f"'] & w \arrow[d, "h"] \\ x \arrow[r, "\delta\circ\gamma"'] & z \end{tikzcd} \tag{6}$$

Se no diagrama (5) *o quadrado da esquerda é um pushout, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *o quadrado da direita no diagrama* (6) *é um pushout;*
2. *o diagrama* (6) *é um pushout.*

Demonstração. Suponhamos primeiro que o quadrado da direita no diagrama (5) seja um pushout. A fim de mostrarmos que o diagrama (6) é também um pushout, considere um outro objeto z' juntamente com morfismos $\varphi : w \to z'$ e $\psi : x \to z'$ satisfazendo a igualdade $\varphi \circ \beta \circ \alpha = \psi \circ f$, como mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "\beta\circ\alpha"] \arrow[d, "f"'] & w \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi"] & \\ x \arrow[r, "\delta\circ\gamma"'] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] & z & \\ & & z' \end{tikzcd}$$

Note que a "camada externa" do diagrama abaixo também é comutativa, e como o quadrado esquerdo em (5) é um pushout, obtemos um único morfismo $\lambda : y \to z'$ fazendo comutar todo o diagram abaixo.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & v \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi\circ\beta"] & \\ x \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[drr, bend right, "\psi"'] & y \arrow[dr, dashed, "\lambda"] & \\ & & z' \end{tikzcd}$$

O morfismo λ por sua vez faz comutar a camada externa do diagrama abaixo, e como o quadrado direito em (6) é também um pushout por hipótese, obtemos um único morfismo $\theta : z \to z'$ fazendo comutar todo o diagrama.

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & w \arrow[d, "h"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi"] & \\ y \arrow[r, "\delta"'] \arrow[drr, bend right, "\lambda"'] & z \arrow[dr, dashed, "\theta"] & \\ & & z' \end{tikzcd}$$

Veja que a igualdade $\theta \circ h = \varphi$ segue imediatamente da comutatividade acima. Além disso, também temos

$$\theta \circ \delta \circ \gamma = \lambda \circ \gamma = \psi,$$

onde a primeira igualdade segue da definição de θ, e a segunda segue da definição de λ. Isso significa que o morfismo θ satisfaz as condições de comutatividade necessárias, mas ainda temos que mostrar que ele é o único possuindo tais propriedades. Suponha então que $\theta' : z \to z'$ seja outro morfismo satisfazendo as igualdades $\theta' \circ h = \varphi$ e $\theta' \circ \delta \circ \gamma = \psi$. Usando a forma como θ foi definido, é suficiente mostrarmos que θ' também satisfaz a igualdade $\theta' \circ \delta = \lambda$. O morfismo λ, por sua vez, é unicamente caracterizado pelas igualdades $\lambda \circ \gamma = \psi$ e $\lambda \circ g = \varphi \circ \beta$. Ora, por um lado θ' ja satisfaz a igualdade $\theta' \circ \delta \circ \gamma = \psi$ por hipótese, e por outro

$$\theta' \circ \delta \circ g = \theta' \circ h \circ \beta = \varphi \circ \beta,$$

sendo que a primeira igualdade segue da comutatividade do quadrado direito em (5), enquanto a segunda vale por hipótese. Deduzimos disso que $\theta' \circ \delta = \lambda$, o que juntamente com a igualdade $\theta' \circ h = \varphi$ implica a igualdade $\theta' = \theta$ desejada. ■