

# Teoria de Homotopia Abstrata

Edmundo Martins

9 de novembro de 2023

## 1 Categorias modelo

**1.1 Definição.** Seja  $M$  uma categoria localmente pequena, completa e co-completa. Uma **estrutura modelo** em  $M$  consiste de três classes de morfismos  $\mathcal{W}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \subseteq \text{Mor}(M)$  cujos elementos são chamados, respectivamente, **equivalências fracas**, **fibrações** e **cofibrações**, as quais devem satisfazer as seguintes condições:

- (M1) A categoria  $M$  é bicompleta, ou seja, admite todos os limites e colimites indexados por categorias pequenas.
- (M2) (Propriedade 2-de-3) Dados morfismos  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  em  $M$ , se dois dos morfismos do conjunto  $\{f, g, g \circ f\}$  estiverem em  $\mathcal{W}$ , então o terceiro também deve estar.
- (M3) (Propriedade de retração) Se um morfismo  $f : A \rightarrow X$  é retração de um outro morfismo  $g : B \rightarrow Y$ , ou seja, se existe um diagrama comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_A & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & A \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_X & & \end{array}$$

e  $g$  pertence a  $\mathcal{W}$  (ou a  $\mathcal{F}$ , ou a  $\mathcal{C}$ ), então  $f$  também pertence a  $\mathcal{W}$  (ou a  $\mathcal{F}$ , ou a  $\mathcal{C}$ , respectivamente). Em suma, as classes  $\mathcal{W}, \mathcal{F}$  e  $\mathcal{C}$  são fechadas por retrações.

- (M4) (Propriedade de levantamento) Dado um diagrama comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

onde  $i$  é uma cofibração, e  $p$  é uma fibração; se um dos dois morfismos  $i$  ou  $p$  é também uma equivalência fraca, então o diagrama admite um levantamento, ou seja, existe um morfismo  $f : B \rightarrow X$  que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow f & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

(M5) (Propriedade de fatoração) Qualquer morfismo  $f : X \rightarrow Y$  em  $\mathbf{M}$  pode ser fatorado nas duas formas mostradas abaixo,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow i & \nearrow p \\ & \hat{X} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow j & \nearrow q \\ & \tilde{Y} & \end{array}$$

onde  $p$  é simultaneamente uma fibração e uma equivalência fraca, enquanto  $j$  é simultaneamente uma cofibração e uma equivalência fraca.

Vamos introduzir um pouco de terminologia antes de fazermos alguns comentários sobre a definição acima. Os morfismos de  $\mathbf{M}$  que pertencem à classe  $\mathcal{W} \cap \mathcal{F}$  são chamados de **fibrações triviais** ou **fibrações acíclicas**, enquanto os morfismos que pertencem à classe  $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}$  são chamados de **cofibrações triviais** ou **cofibrações acíclicas**. Usando essa terminologia o axioma de fatoração (M5) pode ser enunciado da seguinte forma: todo morfismo em uma categoria modelo pode ser fatorado como uma cofibração seguido de uma fibração trivial, ou como uma cofibração trivial seguido de uma fibração.

**1.2 Observação.** Lembremos que, dados objetos  $X$  e  $Y$  de uma categoria  $\mathbf{C}$  qualquer, dizemos que  $X$  é um **retrato** de  $Y$  se existem morfismos  $s : X \rightarrow Y$  e  $r : Y \rightarrow X$  tais que  $r \circ s = \text{id}_X$ . Comumente nos referimos ao morfismo  $s$  por **seção** e ao morfismo  $r$  por **retração**. A condição  $r \circ s = \text{id}_X$  garante que  $s$  seja um monomorfismo. De fato, se  $f, g : W \rightarrow X$  são morfismos tais que  $s \circ f = s \circ g$ , então

$$f = \text{id}_X \circ f = r \circ s \circ f = r \circ s \circ g = \text{id}_X \circ g = g.$$

Isso nos permite encarar  $X$  como um subobjeto de  $Y$ , e o morfismo  $r$  então intuitivamente deforma  $Y$  para esse subobjeto, mas de forma a mantê-lo fixado. Note que a condição  $r \circ s = \text{id}_X$  garante também que o morfismo  $r$  seja um epimorfismo.

A noção de retração que aparece no axioma (M3) de uma estrutura modelo enunciado acima pode ser interpretada nesse sentido em uma categoria adequada. Lembremos que toda categoria  $\mathbf{C}$  dá origem a uma categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{C})$ . Os objetos dessa categoria são precisamente morfismos  $f : A \rightarrow B$  na categoria inicial  $\mathbf{C}$ , e dados dois tais objetos  $f : A \rightarrow B$  e  $g : X \rightarrow Y$ , um morfismo do tipo  $(f : A \rightarrow B) \rightarrow (g : X \rightarrow Y)$  na categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  é dado por um par de morfismos  $(\alpha : A \rightarrow X, \beta : B \rightarrow Y)$  satisfazendo a igualdade  $\beta \circ f = g \circ \alpha$ . Podemos então visualizar esse morfismo em  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  na forma de um quadrado comutativo como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

A composição de morfismos é definida “colando” quadrados comutativos adjacentes. Mais precisamente, dados três objetos  $f : X_1 \rightarrow Y_1$ ,  $g : X_2 \rightarrow Y_2$  e  $h : X_3 \rightarrow Y_3$  na categoria  $\text{Arr}(\mathbf{C})$ , e dados também dois morfismos componíveis

$$(\alpha_1 : X_1 \rightarrow X_2, \beta_1 : Y_1 \rightarrow Y_2) \quad (\alpha_2 : X_2 \rightarrow X_3, \beta_2 : Y_2 \rightarrow Y_3),$$

sua composição é o morfismo

$$(\alpha_2, \beta_2) \circ (\alpha_1, \beta_1) : (f : X_1 \rightarrow Y_1) \rightarrow (h : X_3 \rightarrow Y_3)$$

em  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  definido pelo par

$$(\alpha_2, \beta_2) \circ (\alpha_1, \beta_1) := (\alpha_2 \circ \alpha_1 : X_1 \rightarrow X_3, \beta_2 \circ \beta_1 : Y_1 \rightarrow Y_3).$$

Essa composição pode também ser visualizada como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & X_3 \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Y_3 \end{array} \implies \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_2 \circ \alpha_1} & X_3 \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta_2 \circ \beta_1} & Y_3 \end{array}$$

A associatividade dessa composição via colagem segue diretamente da associatividade da composição na categoria inicial  $\mathbf{C}$ . Por fim, dado um objeto  $f : X \rightarrow Y$  qualquer, o morfismo idêntico associado a ele é dado pelo par  $\text{id}_f := (\text{id}_X, \text{id}_Y)$ , conforme mostrado no quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \end{array}$$

Note agora que, se o objeto  $f : A \rightarrow B$  é um retrato do objeto  $g : X \rightarrow Y$  na categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{M})$ , então por definição existem morfismos  $s_1 : A \rightarrow X$ ,  $s_2 : B \rightarrow Y$ ,  $r_1 : X \rightarrow A$  e  $r_2 : Y \rightarrow B$  tais que  $(r_1, r_2) \circ (s_1, s_2) = \text{id}_f$ , o que também pode ser expresso pelo diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_A & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ A & \xrightarrow{s_1} & X & \xrightarrow{r_1} & A \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{s_2} & Y & \xrightarrow{r_2} & B \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_B & & \end{array}$$

Esse é precisamente o diagrama que aparece no axioma de retração na definição de uma estrutura modelo. Podemos então reformular tal axioma dizendo que as classes de equivalências fracas, fibrações e cofibrações são todas fechadas por *retrações na categoria de setas*  $\text{Arr}(\mathbf{C})$ .

**1.3 Observação.** Quando trabalhamos com categorias modelo, no lugar de dizermos explicitamente que um morfismo é uma equivalência fraca, ou uma cofibração, ou uma fibração, simplesmente adornarmos de alguma forma a seta que representa o morfismo em questão. A convenção notacional que seguiremos nesse aspecto é a seguinte:

- uma equivalência fraca será denotada por  $\xrightarrow{\sim}$ ;
- uma cofibração será denotada por  $\twoheadrightarrow$ ;
- uma fibração será denotada por  $\rightarrowtail$ .

Também denotaremos cofibrações ou fibrações triviais por uma combinação dos símbolos acima:

- uma cofibração trivial será denotada por  $\xrightarrow{\sim}\twoheadrightarrow$ ;
- uma fibração trivial será denotada por  $\rightarrowtail\sim$ .

Seguindo essa convenção notacional, podemos, por exemplo, enunciar o axioma de levantamento (M4) da seguinte forma: em uma categoria modelo, todo quadrado comutativo da forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow \wr & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

admite um levantamento  $f : B \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow \wr & \nearrow f & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

e todo quadrado comutativo da forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \wr \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

admite um levantamento  $f : B \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow f & \wr \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

Usando a mesma convenção, o axioma de fatoração (M5) pode ser enunciado da seguinte maneira: em uma categoria modelo, todo morfismo  $f : X \rightarrow Y$  possui duas fatorações como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \swarrow i & & \nearrow p \\ & \hat{X} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \swarrow j & & \nearrow q \\ & \tilde{Y} & \end{array}$$

## 1.1 Fatorações em categorias

Antes de investigarmos mais a fundo as propriedades de categorias modelo, vamos investigar parte de sua estrutura sob uma perspectiva mais geral. O ponto central da discussão é que a definição de uma categoria modelo pode ser encapsulada totalmente pela existência de fatorações em cofibrações e fibrações que estão relacionadas por condições de levantamento.

Inicialmente, definimos a noção de levantamento de forma mais geral.

**1.4 Definição.** Sejam  $\mathbf{C}$  uma categoria e  $\mathcal{A} \subseteq \text{Mor}(\mathbf{C})$  uma classe qualquer de morfismos. Dizemos que um morfismo  $f : A \rightarrow B$  em  $\mathbf{C}$  **satisfaz a propriedade de levantamento à esquerda com relação a  $\mathcal{A}$**  se todo quadrado comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

onde  $p : X \rightarrow Y$  pertence a  $\mathcal{A}$ , admite um levantamento, ou seja, existe um morfismo  $h : B \rightarrow X$  que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Dualmente, dizemos que um morfismo  $g : X \rightarrow Y$  **satisfaz a propriedade de levantamento à direita com relação a  $\mathcal{A}$**  se todo quadrado comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

onde  $i : A \rightarrow B$  pertence a  $\mathcal{A}$ , admite um levantamento  $h : B \rightarrow X$  como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Tendo a definição acima em mãos, podemos formular uma noção categórica de fatoração geral o suficiente para englobar a situação que aparece no estudo de categorias modelo.

**1.5 Definição.** Um **sistema de fatoração fraco** em uma categoria  $\mathbf{C}$  consiste de um par  $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ , onde  $\mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq \text{Mor}(\mathbf{C})$  são duas classes de morfismos, satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Todo morfismo  $f \in \text{Mor}(\mathbf{C})$  pode ser escrito na forma  $f = f_L \circ f_R$  com  $f_L \in \mathcal{L}$  e  $f_R \in \mathcal{R}$ ;

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f_L \in \mathcal{L}} & Y & \xrightarrow{f_R \in \mathcal{R}} & Z \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & f & & \end{array}$$

- (ii)  $\mathcal{L}$  consiste precisamente dos morfismos de  $\mathbf{C}$  que satisfazem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a  $\mathcal{R}$ ;
- (iii)  $\mathcal{R}$  consiste precisamente dos morfismos de  $\mathbf{C}$  que satisfazem a propriedade de levantamento à direita com relação a  $\mathcal{L}$ .

Os principais exemplos de sistemas de fatoração fracos nos quais estaremos interessados envolvem as cofibrações e fibrações triviais em uma categoria modelo, embora talvez ainda não seja claro como essas classes dão origem a um sistema de fatoração. Antes de detalharmos esse exemplo, entretanto, vamos demonstrar algumas propriedades gerais de sistemas de fatoração fracos.

**1.6 Proposição.** *Suponha que  $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$  seja um sistema de fatoração fraco em uma categoria  $\mathbf{C}$ . Valem as seguintes propriedades:*

1. *Ambas as classes contêm todos os isomorfismos de  $\mathbf{C}$ .*
2. *Ambas as classes são fechadas por composição.*
3. *Ambas as classes são fechadas por retratos na categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{C})$ .*
4.  *$\mathcal{L}$  é fechada pela formação de pushouts, enquanto  $\mathcal{R}$  é fechada pela formação de pullbacks.*

5.  $\mathcal{L}$  é fechada por coprodutos, enquanto  $\mathcal{R}$  é fechada por produtos.

*Demonstração.* 1. Suponha que  $f : A \rightarrow B$  seja um isomorfismo. Sabemos da definição de sistema de fatoração fraco que  $\mathcal{L}$  consiste precisamente dos morfismos de  $\mathcal{C}$  que satisfazem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a  $\mathcal{R}$ . Considere então um quadrado comutativo como abaixo, onde  $g : X \rightarrow Y$  é um morfismo pertencente à classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Sendo  $f$  um isomorfismo por hipótese, podemos considerar o morfismo inverso  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , e definir então um morfismo  $h : B \rightarrow X$  por meio da composição  $h := \alpha \circ f^{-1}$ . Note então que por um lado

$$h \circ f = \alpha \circ f^{-1} \circ f = \alpha \circ \text{id}_A = \alpha,$$

e por outro

$$g \circ h = g \circ \alpha \circ f^{-1} = \beta \circ f \circ f^{-1} = \beta \circ \text{id}_B = \beta;$$

mostando que  $h$  faz comutar o diagrama abaixo, definindo então um levantamento para o quadrado comutativo original.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

A demonstração de que  $\mathcal{R}$  contém todos os isomorfismos é análoga. Se  $g : X \rightarrow Y$  é um isomorfismo, considere o quadrado comutativo abaixo onde  $f : A \rightarrow B$  pertence à classe  $\mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Dessa vez definimos um morfismo  $h : B \rightarrow Y$  pela composição  $h := g^{-1} \circ \beta$ , e notamos que esse morfismo satisfaz a igualdade

$$g \circ h = g \circ g^{-1} \circ \beta = \text{id}_Y \circ \beta = \beta,$$

e também a igualdade

$$h \circ f = g^{-1} \circ \beta \circ f = g^{-1} \circ g \circ \alpha = \text{id}_X \circ \alpha = \alpha;$$

portanto  $h$  define um levantamento neste caso também.

2. Suponha que  $f_1 : A \rightarrow B$  e  $f_2 : B \rightarrow C$  sejam dois morfismos pertencentes à classe  $\mathcal{L}$ . A fim de mostrarmos que sua composição  $f_2 \circ f_1 : A \rightarrow C$  também pertence a  $\mathcal{L}$ , vamos mostrar que essa composição satisfaz a condição de levantamento à esquerda com relação a  $\mathcal{R}$ . Considere então um quadrado comutativo como abaixo, onde  $g : X \rightarrow Y$  pertence à classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f_2 \circ f_1 \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

A partir do quadrado acima podemos obter o quadrado comutativo mostrado abaixo, o qual admite um levantamento  $h_1 : B \rightarrow Y$  pois  $f_1 \in \mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f_1 \downarrow & \nearrow h_1 & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta \circ f_2} & Y \end{array}$$

Usando o levantamento  $h_1$  obtemos um terceiro quadrado comutativo como mostrado abaixo, o qual admite um levantamento  $h_2 : C \rightarrow X$  pois  $f_2 \in \mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h_1} & X \\ f_2 \downarrow & \nearrow h_2 & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Afirmamos que  $h_2 : C \rightarrow X$  define também um levantamento para o quadrado comutativo considerado inicialmente. De fato, por um lado a igualdade  $g \circ h_2 = \beta$  segue diretamente da comutatividade do último quadrado acima, e por outro temos a sequência de igualdades

$$h_2 \circ f_2 \circ f_1 = h_1 \circ f_1 = \alpha;$$

portanto  $h_2$  satisfaz as condições de comutatividades necessárias.

A demonstração da segunda parte é análoga. Suponha que  $g_1 : X \rightarrow Y$  e  $g_2 : Y \rightarrow Z$  sejam dois morfismos pertencentes à classe  $\mathcal{R}$ , e considere o quadrado comutativo abaixo, onde  $f : A \rightarrow B$  pertence à classe  $\mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g_2 \circ g_1 \\ B & \xrightarrow{\beta} & Z \end{array}$$

Considere então o quadrado comutativo abaixo, o qual admite um levantamento  $h_2 : B \rightarrow Y$  pois  $g_2$  pertence a  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g_1 \circ \alpha} & Y \\ f \downarrow & \nearrow h_2 & \downarrow g_2 \\ B & \xrightarrow{\beta} & Z \end{array}$$

Usando  $h_2$  consideramos então o quadrado comutativo abaixo, o qual também admite um levantamento  $h_1 : B \rightarrow X$  pois  $g_1 \in \mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & \nearrow h_1 & \downarrow g_1 \\ B & \xrightarrow{h_2} & Y \end{array}$$

O morfismo  $h_1$  é precisamente o procurado, já que por um lado a igualdade  $h_1 \circ f = \alpha$  segue diretamente da comutatividade acima, e por outro temos a sequência de igualdades

$$g_2 \circ g_1 \circ h_1 = g_2 \circ h_2 = \beta;$$

mostrando então que  $h_1$  define um levantamento para o quadrado comutativo inicial.

3. Suponha que o morfismo  $f : A \rightarrow B$  seja um retrato do morfismo  $g : X \rightarrow Y$  o qual pertence à classe  $\mathcal{L}$ . Temos então por definição o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_A & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 A & \xrightarrow{s_1} & X & \xrightarrow{r_1} & A \\
 f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 B & \xrightarrow{s_2} & Y & \xrightarrow{r_2} & B \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \text{id}_B & & 
 \end{array}$$

A fim de mostrarmos que  $f$  também pertence a  $\mathcal{L}$ , considere o quadrado comutativo abaixo onde  $p : P \rightarrow Q$  é um morfismo qualquer da classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\alpha} & P \\
 f \downarrow & & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{\beta} & Q
 \end{array}$$

A partir deste quadrado e do diagrama anterior produzimos o quadrado comutativo, o qual admite um levantamento  $h : Y \rightarrow P$  já que  $g \in \mathcal{L}$  por hipótese.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\alpha \circ r_1} & P \\
 g \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\
 Y & \xrightarrow{\beta \circ r_2} & Q
 \end{array}$$

Afirmamos então que o morfismo  $H : B \rightarrow P$  dado pela composição  $H := h \circ s_2$  define um levantamento para o quadrado inicial. De fato, por um lado temos

$$H \circ f = h \circ s_2 \circ f = h \circ g \circ s_1 = \alpha \circ r_1 \circ s_1 = \alpha \circ \text{id}_A = \alpha,$$

e por outro temos também

$$p \circ H = p \circ h \circ s_2 = \beta \circ r_2 \circ s_2 = \beta \circ \text{id}_B = \beta.$$

Supondo ainda que  $f$  seja um retrato de  $g$ , considere agora o caso em que  $g$  pertence à classe  $\mathcal{R}$ . A fim de mostrarmos que  $f$  também pertence a  $\mathcal{R}$ , considere o quadrado comutativo abaixo onde  $j : M \rightarrow N$  é um morfismo qualquer da classe  $\mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\varphi} & A \\
 j \downarrow & & \downarrow f \\
 N & \xrightarrow{\psi} & B
 \end{array}$$

A partir disso obtemos o quadrado comutativo abaixo, o qual admite um levantamento  $h : N \rightarrow X$  pois  $g$  pertence à classe  $\mathcal{R}$  por hipótese.

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{s_1 \circ \varphi} & X \\
 j \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\
 N & \xrightarrow{s_2 \circ \psi} & Y
 \end{array}$$



Afirmamos então que  $H : N \rightarrow A$  definido por  $H := r_1 \circ h$  é o levantamento procurado para o quadrado considerado inicialmente. De fato, por um lado temos as igualdades

$$H \circ j = r_1 \circ h \circ j = r_1 \circ s_1 \circ \varphi = \text{id}_A \circ \varphi = \varphi,$$

e por outro temos também as igualdades

$$f \circ H = f \circ r_1 \circ h = r_2 \circ g \circ h = r_2 \circ s_2 \circ \psi = \text{id}_B \circ \psi = \psi.$$

4. Suponha que  $f : X_1 \rightarrow Y_1$  pertença a  $\mathcal{L}$  e que o quadrado comutativo abaixo seja um pushout em  $\mathbf{C}$ .

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array}$$

Nosso objetivo é mostrar que então  $g$  também pertence a  $\mathcal{L}$ , e com esse intuito consideramos o problema de levantamento abaixo, onde  $p : P \rightarrow Q$  é um morfismo qualquer na classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{\varphi} & P \\ g \downarrow & & \downarrow p \\ Y_2 & \xrightarrow{\psi} & Q \end{array}$$

Note primeiro que o quadrado comutativo abaixo admite um levantamento  $h : Y_1 \rightarrow P$  pois  $f \in \mathcal{L}$  por hipótese.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\varphi \circ \alpha} & P \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ Y_1 & \xrightarrow{\psi \circ \beta} & Q \end{array}$$

A igualdade  $h \circ f = \varphi \circ \alpha$  nos permite então usar a hipótese de que temos um pushout para obtermos um morfismo  $H : Y_2 \rightarrow P$  que faz comutar todo o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \varphi \\ \vdots H \\ \swarrow h \end{array} \quad \begin{array}{c} P \\ \downarrow p \\ Q \end{array}$$

Afirmamos que o morfismo  $H$  obtido dessa maneira é o levantamento procurado. Note primeiro que a igualdade  $H \circ g = \varphi$  segue imediatamente da comutatividade acima. Já a igualdade  $p \circ H = \psi$  requer um pouco mais de trabalho. Repare com carinho que estes dois morfismos fazem comutar o diagrama abaixo,

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow p \circ \varphi \\ \vdots p \circ H \\ \swarrow \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} P \\ \downarrow p \\ Q \end{array}$$

mas como o quadrado que aparece neste diagrama é um pushout, sua propriedade universal garante que existe um único morfismo do tipo  $Y_2 \rightarrow Q$  que faça tudo comutar, portanto deve valer a igualdade  $p \circ H = \psi$ .

A demonstração de que morfismos em  $\mathcal{R}$  são preservados por pullbacks é novamente análoga. Suponha agora que o quadrado comutativo abaixo seja um pullback e que o morfismo  $g : X_2 \rightarrow Y_2$  seja pertence a  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array}$$

A fim de mostrarmos que  $f$  também pertence a  $\mathcal{R}$ , consideramos o problema de levantamento abaixo, onde  $j : M \rightarrow N$  é um morfismo qualquer pertencente à classe  $\mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & X_1 \\ j \downarrow & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{\psi} & Y_1 \end{array}$$

Colando estes dois quadrados obtemos o quadrado comutativo abaixo, o qual admite um levantamento  $h : N \rightarrow X_2$  pois  $g \in \mathcal{R}$  por hipótese.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\alpha \circ \varphi} & X_2 \\ j \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{\beta \circ \psi} & Y_2 \end{array}$$

A estratégia para obtermos um morfismo do tipo  $N \rightarrow X_1$  é usarmos a propriedade universal do pullback. A igualdade  $h \circ j = \alpha \circ \varphi$  implicada pela comutatividade acima diz que a “camada externa” do diagrama abaixo comuta, portanto segue da propriedade universal do pullback que existe um único morfismo do tipo  $H : N \rightarrow X_1$  fazendo comutar o diagrama todo.

$$\begin{array}{ccccc} N & & \xrightarrow{h} & & X_2 \\ & \searrow H & & \nearrow \alpha & \\ & & X_1 & & \\ & \searrow \psi & \downarrow f & & \downarrow g \\ & & Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array}$$

Resta mostrarmos que  $H$  é o levantamento procurado para o quadrado comutativo inicial. A igualdade  $f \circ H = \psi$  segue imediatamente da comutatividade acima. Analogamente ao que ocorreu no caso do pushout, a fim de mostrarmos que a igualdade  $H \circ j = \varphi$  também vale, precisamos utilizar a unicidade na propriedade universal do pullback. Ambos os morfismos  $H \circ j$  e  $\varphi$  fazem comutar o diagrama abaixo,

$$\begin{array}{ccccc} M & & \xrightarrow{\alpha \circ \varphi} & & X_2 \\ & \searrow H \circ j & & \nearrow \alpha & \\ & \searrow \varphi & X_1 & & \\ & \searrow f \circ \varphi & \downarrow f & & \downarrow g \\ & & Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array}$$

mas a propriedade universal do pullback garante a existência de um único morfismo do tipo  $M \rightarrow X_1$  fazendo comutar o diagrama acima, de onde podemos concluir enfim que a igualdade  $H \circ j = \varphi$  deve ser verdadeira.

5. Suponha que  $f : A_1 \rightarrow B_1$  e  $g : A_2 \rightarrow B_2$  sejam dois morfismos que pertençam a  $\mathcal{L}$ . A fim de mostrarmos que seu coproduto  $f \sqcup g : A_1 \sqcup A_2 \rightarrow B_1 \sqcup B_2$  também pertence a  $\mathcal{L}$ , basta mostrarmos que o problema de levantamento abaixo admite uma solução, onde  $p : X \rightarrow Y$  é um morfismo qualquer na classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} A_1 \sqcup A_2 & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \sqcup g \downarrow & & \downarrow p \\ B_1 \sqcup B_2 & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Se  $i_1 : A_1 \rightarrow A_1 \sqcup A_2$ ,  $i_2 : A_2 \rightarrow A_1 \sqcup A_2$ ,  $j_1 : B_1 \rightarrow B_1 \sqcup B_2$  e  $j_2 : B_2 \rightarrow B_1 \sqcup B_2$  denotam as várias inclusões canônicas nos respectivos coprodutos, lembre-se que  $f \sqcup g$  é por definição o único mapa do tipo  $A_1 \sqcup A_2 \rightarrow B_1 \sqcup B_2$  que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f} & B_1 \\ i_1 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ A_1 \sqcup A_2 & \xrightarrow{f \sqcup g} & B_1 \sqcup B_2 \\ i_2 \uparrow & & \uparrow j_2 \\ A_2 & \xrightarrow{g} & B_2 \end{array}$$

A partir do quadrado comutativo inicial obtemos o quadrado comutativo abaixo o qual admite um levantamento pois  $f \in \mathcal{L}$  por hipótese.

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha \circ i_1} & X \\ f \downarrow & \nearrow h_1 & \downarrow p \\ B_1 & \xrightarrow{\beta \circ j_1} & Y \end{array}$$

Veja que o quadrado é realmente comutativo pois

$$\beta \circ j_1 \circ f = \beta \circ (f \sqcup g) \circ i_1 = p \circ \alpha \circ i_1.$$

Analogamente, temos também o quadrado comutativo abaixo que admite um levantamento pelo fato que  $g \in \mathcal{L}$  também.

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{\alpha \circ i_2} & X \\ g \downarrow & \nearrow h_2 & \downarrow p \\ B_2 & \xrightarrow{\beta \circ j_2} & Y \end{array}$$

Combinando estes dois levantamentos obtemos por meio da propriedade universal do coproduto um morfismo  $\langle h_1, h_2 \rangle : B_1 \sqcup B_2 \rightarrow X$  o qual afirmamos ser o levantamento procurado para o quadrado original. Por um lado, a fim de mostrarmos a igualdade

$$p \circ \langle h_1, h_2 \rangle = \beta,$$

pela unicidade na propriedade universal do coproduto basta mostrarmos as duas igualdades abaixo,

$$\begin{cases} p \circ \langle h_1, h_2 \rangle \circ j_1 = \beta \circ j_1, \\ p \circ \langle h_1, h_2 \rangle \circ j_2 = \beta \circ j_2; \end{cases}$$

mas pelas propriedades dos morfismos envolvidos vemos que

$$p \circ \langle h_1, h_2 \rangle \circ j_1 = p \circ h_1 = \beta \circ j_1,$$

sendo que a segunda igualdade segue de uma sequência análoga de igualdades.

Já a igualdade  $\langle h_1, h_2 \rangle \circ (f \sqcup g) = \alpha$  seguirá também da unicidade na propriedade do coproduto se mostrarmos as igualdades

$$\begin{cases} \langle h_1, h_2 \rangle \circ (f \sqcup g) \circ i_1 = \alpha \circ i_1, \\ \langle h_1, h_2 \rangle \circ (f \sqcup g) \circ i_2 = \alpha \circ i_2. \end{cases}$$

No primeiro caso basta vermos que

$$\langle h_1, h_2 \rangle \circ (f \sqcup g) \circ i_1 = \langle h_1, h_2 \rangle \circ j_1 \circ f = h_1 \circ f = \alpha \circ i_1,$$

enquanto no segundo caso temos uma sequência análoga de igualdades.

A demonstração para o produto de morfismos na classe  $\mathcal{R}$  é dual. Suponha que  $f : X_1 \rightarrow Y_1$  e  $g : X_2 \rightarrow Y_2$  sejam dois morfismos da classe  $\mathcal{R}$ . A fim de mostrarmos que o produto  $f \times g : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$  também pertence a  $\mathcal{R}$ , consideramos um morfismo  $i : A \rightarrow B$  qualquer na classe  $\mathcal{L}$ , e procuramos uma solução para o problema de levantamento mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X_1 \times X_2 \\ i \downarrow & & \downarrow f \times g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y_1 \times Y_2 \end{array}$$

Se  $p_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ ,  $p_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_2$ ,  $q_1 : Y_1 \times Y_2 \rightarrow Y_1$  e  $q_2 : Y_1 \times Y_2 \rightarrow Y_2$  denotam as projeções canônicas dos respectivos produtos, lembre-se que o morfismo  $f \times g$  é por definição o único morfismo do tipo  $X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$  que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & Y_1 \\ p_1 \uparrow & & \uparrow q_1 \\ X_1 \times X_2 & \xrightarrow{f \times g} & Y_1 \times Y_2 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow q_2 \\ Y_1 & \xrightarrow{g} & Y_2 \end{array}$$

Usando o quadrado comutativo inicial obtemos os dois problemas de levantamento indicados abaixo, os quais possuem soluções  $h_1$  e  $h_2$  pois  $f$  e  $g$  pertencem à classe  $\mathcal{R}$  por hipótese.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p_1 \circ \alpha} & X_1 \\ i \downarrow & \nearrow h_1 & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{q_1 \circ \beta} & Y_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p_2 \circ \alpha} & X_2 \\ i \downarrow & \nearrow h_2 & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{q_2 \circ \beta} & Y_2 \end{array}$$

Os morfismos  $h_1$  e  $h_2$  combinados induzem o morfismo  $(h_1, h_2) : B \rightarrow X_1 \times X_2$ , o qual afirmamos ser uma solução para o problema de levantamento considerado inicialmente. De fato, temos as igualdades

$$p_1 \circ (h_1, h_2) \circ i = h_1 \circ i = p_1 \circ \alpha,$$

e também as igualdades

$$p_2 \circ (h_1, h_2) \circ i = h_2 \circ i = p_2 \circ \alpha,$$

e juntas essas duas implicam a igualdade  $(h_1, h_2) \circ i = \alpha$  desejada. Por fim, usando a comutatividade do diagrama que caracteriza o produto  $q_1 \times q_2$  vemos que também valem as igualdades

$$q_1 \circ (f \times g) \circ (h_1, h_2) = f \circ p_1 \circ (h_1, h_2) = f \circ h_1 = q_1 \circ \beta$$

e as igualdades

$$q_2 \circ (f \times g) \circ (h_1, h_2) = g \circ p_2 \circ (h_1, h_2) = g \circ h_2 = q_2 \circ \beta;$$

e juntas essas igualdades implicam  $(f \times g) \circ (h_1, h_2) = \beta$  como desejado. ■

Agora mostramos como podemos usar a estrutura de uma categoria modelo para construirmos enfim exemplos um pouco mais concretos de sistemas de fatoração fracos.

**1.7 Proposição.** *Suponha que  $(M, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  seja uma categoria modelo. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1.  $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$  define um sistema de fatoração fraco em  $M$ ;
2.  $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$  define um sistema de fatoração fraco em  $M$ .

*Demonstração.* 1. O axioma de fatoração (M5) garante que, dado qualquer morfismo  $f : X \rightarrow Y$  em  $M$ , existe uma cofibração trivial  $j : X \xrightarrow{\sim} \tilde{Y}$  e uma fibração  $q : \tilde{Y} \twoheadrightarrow Y$  que fatoram  $f$  como indicado abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j} & \tilde{Y} & \xrightarrow{q} & Y \\ & \searrow \sim & & \nearrow & \\ & & f & & \end{array}$$

Isso significa que o par de classes de morfismos  $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$  satisfaz a primeira condição de um sistema de fatoração fraco.

Resta mostrarmos que  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$  e  $\mathcal{F}$  definem um ao outro por meio de propriedades de levantamento. Note que o axioma de levantamento (M4) garante que toda fibração satisfaz a propriedade de levantamento à direita com relação à classe  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$  das cofibrações triviais. Reciprocamente, suponha que  $f : X \rightarrow Y$  satisfaça a propriedade de levantamento à direita com relação à classe das cofibrações triviais. Queremos mostrar que isso garante que  $f$  seja uma fibração, e como o únicos axiomas que temos para lidar com fibrações são os de retração e fatoração, não é surpresa que a estratégia da demonstração seja combinarmos esses dois axiomas com a hipótese de levantamento sobre  $f$ .

Usando o axioma de fatoração podemos obter uma cofibração trivial  $j : X \xrightarrow{\sim} \tilde{Y}$  e uma fibração  $q : \tilde{Y} \twoheadrightarrow Y$  tais que  $f = q \circ j$ . Essa igualdade também pode ser expressa em termos do quadrado comutativo abaixo, o qual admite um levantamento  $h : \tilde{Y} \rightarrow X$  já que  $f$  satisfaz a propriedade de levantamento à direita com relação às cofibrações triviais.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ j \downarrow \wr & \nearrow h & \downarrow f \\ \tilde{Y} & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

Podemos organizar estes morfismos todos no diagrama comutativo mostrado abaixo,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_X & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow[\sim]{j} & \tilde{Y} & \xrightarrow{h} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow q & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \text{id}_Y & & 
 \end{array}$$

o qual mostra que  $f$  é uma retração da fibração  $q$  na categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{M})$  e, portanto, uma fibração também.

Vejamos agora a descrição das cofibrações triviais em termos das fibrações. Note inicialmente que o axioma de levantamento (M4) mais uma vez já garante que toda cofibração trivial satisfaz a propriedade de levantamento à esquerda com relação à classe de fibrações, a questão aqui é mostrar que essa propriedade de levantamento *caracteriza* as cofibrações triviais. Suponha então que  $f : X \rightarrow Y$  satisfaça a propriedade de levantamento à esquerda com relação às fibrações. Como a classe  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$  é fechada por retrações, pois tanto  $\mathcal{C}$  quanto  $\mathcal{W}$  o são, basta mostrarmos que  $f$  é uma retração de uma cofibração trivial. Novamente consideramos a fatoração abaixo em termos de uma cofibração trivial seguida de uma fibração.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow[\sim]{j} & \tilde{Y} & \xrightarrow[q]{\twoheadrightarrow} & Y
 \end{array}$$

A condição  $f = q \circ j$  pode ser expressa em termos do quadrado comutativo abaixo, e tal quadrado admite um levantamento  $h : Y \rightarrow \tilde{Y}$  pois  $f$  por hipótese satisfaz a condição de levantamento à esquerda com relação às fibrações.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow[\sim]{j} & \tilde{Y} \\
 f \downarrow & \nearrow h & \downarrow q \\
 Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y
 \end{array}$$

Os morfismos todos em questão podem então ser combinados no diagrama comutativo abaixo que expressa  $f$  como uma retração da cofibração trivial  $j$  como queríamos.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_X & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{h} & \tilde{Y} & \xrightarrow[q]{\twoheadrightarrow} & Y \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \text{id}_Y & & 
 \end{array}$$

2. Novamente pelo axioma de fatoração (M5) podemos fatorar um morfismo  $f : X \rightarrow Y$  qualquer de  $\mathbf{M}$  da forma indicada abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{i} & \hat{X} & \xrightarrow[p]{\sim} & Y
 \end{array} \tag{1}$$

Em outras palavras, o par  $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$  satisfaz a primeira condição na definição de sistema de fatoração fraco. Resta verificarmos que as classes se definem mutuamente em termos de propriedades de levantamento.

Inicialmente, sabemos do axioma de levantamento (M4) que toda cofibração satisfaz a propriedade de levantamento à esquerda com relação à classe das fibrações triviais. Suponha agora que  $f : X \rightarrow Y$  satisfaça tal propriedade de levantamento, e vamos então mostrar que  $f$  é necessariamente uma cofibração trivial também, o que como nos dois casos anteriores será feito por meio do axioma de retração. A condição  $f = p \circ i$  pode ser expressa pela comutatividade do quadrado abaixo, e a condição de levantamento sobre  $f$  nos permite obter o mapa  $h : Y \rightarrow \widehat{X}$  indicado.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \widehat{X} \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \end{array}$$

Usando os morfismos à disposição construímos o diagrama abaixo expressando  $f$  como uma retração da cofibração  $i$ , de onde concluímos que  $f$  é também uma cofibração.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_X & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ f \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{h} & \widehat{X} & \xrightarrow[\sim]{p} & Y \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_Y & & \end{array}$$

Por fim, resta apenas mostrarmos que as fibrações triviais são precisamente os morfismos satisfazendo a condição de levantamento à direita com relação às cofibrações. O axioma de levantamento (M4) nos diz que toda fibração trivial satisfaz tal propriedade de levantamento, a questão é justamente a recíproca. Suponha então que  $f : X \rightarrow Y$  satisfaça essa propriedade também, e seguindo a notação da fatoração em (1), considere o quadrado comutativo abaixo, e o mapa  $h : \widehat{X} \rightarrow X$  obtido da hipótese feita sobre  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ \widehat{X} & \xrightarrow[\sim]{p} & Y \end{array}$$

Como o leitor já há muito deve ter previsto, combinando todos esses ingredientes obtemos o diagrama comutativo abaixo exibindo  $f$  como uma retração da fibração trivial  $p$ , o que nos permite concluir enfim que  $f$  é também uma fibração trivial.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_X & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ X & \xrightarrow{i} & \widehat{X} & \xrightarrow{h} & X \\ f \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_Y & & \end{array}$$

■

**1.8 Observação.** É comum dizer que os resultados da Proposição 1.7 mostram que a estrutura de uma categoria modelo é *sobredeterminada*, pois o conhecimento de duas das três classes de morfismos  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{F}$  nos permite determinar totalmente a terceira. De fato, se conhecemos as classes  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{C}$ , então conhecemos também a classe das cofibrações triviais  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ , e da proposição anterior sabemos que  $\mathcal{F}$  pode ser descrita então como a classe dos morfismos que satisfazem a propriedade de levantamento à direita cmo relação a  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ . Analogamente, se conhecemos as classes  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{F}$ , então conhecemos a classe das fibrações triviais  $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ , e pelo resultado anterior recuperamos  $\mathcal{C}$  como a classe dos morfismos que satisfazem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a  $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ . Fica a pergunta se as equivalências fracas podem ser recuperadas a partir das fibrações e cofibrações. A resposta é que em certo sentido sim, como mostra o próximo resultado, embora mais precisamente tenhamos que conhecer as fibrações e cofibrações triviais.

Essa propriedade de sobredeterminação é por vezes utilizada para *definirmos* uma estrutura modelo completa partindo apenas de alguns componentes de sua estrutura. Um exemplo onde esse fenômeno ocorre, e que abordaremos em detalhes mais tarde, é no estudo das categorias modelo *cofibrantemente geradas*, onde uma estrutura modelo é gerada a partir de uma coleção de morfismos que queremos considerar como cofibrações triviais. Um exemplo concreto é a estrutura modelo usual na categoria **Top**, onde a classe de cofibrações triviais inicial usada para gerar o resto das estruturas é o dos mapas  $D^n \hookrightarrow D^n \times I$  incluindo o disco  $D^n$  na base inferior do cilindro associado.

Aplicando as propriedades gerais demonstradas na Proposição 1.6 aos sistemas explícitos construídos na Proposição 1.7 obtemos as propriedades abaixo a respeito dos vários tipos de morfismos em uma categoria modelo.

**1.9 Corolário.** *Em uma categoria modelo qualquer valem as seguintes propriedades:*

1. *Um isomorfismo é simultaneamente uma cofibração trivial e uma fibração trivial.*
2. *Cofibrações, cofibrações triviais, fibrações e fibrações triviais são todas preservadas por composições.*
3. *Cofibrações e cofibrações triviais são preservadas por pushouts, enquanto fibrações e fibrações triviais são preservadas por pullbacks.*
4. *Cofibrações e cofibrações triviais são preservadas por coprodutos, enquanto fibrações e fibrações triviais são preservadas por produtos.*

Por fim, temos o resultado simples abaixo mostrando como “detectar” equivalências fracas usando outras classes de morfismos.

**1.10 Lema.** *Em uma categoria modelo, um morfismo  $f : X \rightarrow Y$  é uma equivalência fraca se, e somente se, ele pode ser fatorado como uma cofibração trivial seguida de uma fibração trivial.*

*Demonstração.* Uma das implicações é simples: se  $f$  pode ser fatorado na forma descrita no enunciado, então  $f$  é em particular a composição de duas equivalências fracas e, portanto, uma equivalência fraca também. Reciprocamente, se  $f$  é uma equivalência fraca, pelo axioma de fatoração podemos encontrar uma cofibração trivial  $i : X \xrightarrow{\sim} \hat{X}$  e uma fibração  $p : \hat{X} \twoheadrightarrow Y$  tais que  $f = p \circ i$ . Ora, como  $f$  e  $i$  são equivalências fracas, segue do axioma 2-de-3 que  $p$  também o é, ou seja,  $p$  é uma fibração trivial, e a fatoração  $f = p \circ i$  exhibe  $f$  como uma cofibração trivial seguida de uma fibração trivial. ■

Encerramos essa subseção mostrando como os axiomas de uma categoria modelo também pode ser enunciados apenas em termos de sistemas de fatoração fracos.



**1.11 Proposição.** *Sejam  $\mathbf{M}$  uma categoria bicompleta e  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{F}$  três classes de morfismos em  $\mathbf{M}$ . Suponha ainda que a classe  $\mathcal{W}$  satisfaça as seguintes condições:*

- (i)  $\mathcal{W}$  contém todos os isomorfismos;
- (ii)  $\mathcal{W}$  satisfaz a propriedade 2-de-3.

*Nessas condições, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $(\mathbf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  é uma categoria modelo;
2.  $(\mathcal{W} \cap \mathcal{C}, \mathcal{F})$  e  $(\mathcal{C}, \mathcal{W} \cap \mathcal{F})$  são sistemas de fatoração fracos em  $\mathbf{M}$ .

*Demonstração.* A implicação  $1 \implies 2$  é precisamente o conteúdo da Proposição 1.7.

Reciprocamente, suponha que os pares de classes  $(\mathcal{W} \cap \mathcal{C}, \mathcal{F})$  e  $(\mathcal{C}, \mathcal{W} \cap \mathcal{F})$  definam sistemas de fatoração fracos em  $\mathbf{M}$ , e vamos verificar então que os axiomas de uma categoria modelo são satisfeitos.

O axioma de completude (M1) e o axioma 2-de-3 (M2) seguem das hipóteses impostas no enunciado. Os axiomas de levantamento (M4) e de fatoração (M5) seguem diretamente das duas propriedades que definem um sistema de fatoração fraco. Resta apenas verificarmos então o axioma de retração (M3). Note que a validade deste para as classes de cofibrações e fibrações segue de uma aplicação direta do item (c) da Proposição 1.6 aos dois sistemas de fatoração fracos em questão. Falta então mostrarmos que a classe das equivalências fracas é também fechada por retrações, e isso será um tanto mais emocionante. Suponha que o morfismo  $f : X \rightarrow Y$  seja retração de uma equivalência fraca  $g : A \rightarrow B$  como mostrado no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_X & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{s_1} & A & \xrightarrow{r_1} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{s_2} & B & \xrightarrow{r_2} & Y \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \text{id}_Y & & 
 \end{array}$$

Suponha inicialmente que  $f$  seja uma fibração. O morfismo  $g$  pode ser fatorado na forma  $g = p \circ i$ , onde  $i : A \xrightarrow{\sim} C$  é uma cofibração trivial, e  $p : C \rightarrow B$  é uma fibração. Note que, na verdade, a propriedade 2-de-3 garante que  $p$  é também uma equivalência fraca e, portanto, uma fibração trivial. Nosso primeiro objetivo é mostrar que  $f$  é uma retração de  $p$ , o que garante que  $f$  seja também uma fibração trivial pelo item (c) da Proposição 1.6 e em particular uma equivalência fraca. Como temos a sequência de igualdades

$$r_2 \circ p \circ i = r_2 \circ g = f \circ r_1,$$

o quadrado indicado abaixo é comutativo, e o fato de  $i$  ser uma cofibração trivial e  $f$  ser uma fibração garantem a existência do levantamento  $r : C \rightarrow X$ .

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{r_1} & X \\
 i \downarrow & \nearrow r & \downarrow f \\
 C & \xrightarrow{r_2 \circ p} & Y
 \end{array}$$

Usando esse morfismo  $r$  construímos o diagrama comutativo abaixo, o qual expressa  $f$  como uma retração da fibração trivial  $p$ , conforme desejado.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_X & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{i \circ s_1} & C & \xrightarrow{r} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow p \\
 Y & \xrightarrow{s_2} & B & \xrightarrow{r_2} & Y \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \text{id}_Y & & 
 \end{array}$$

Voltemos agora ao caso geral onde  $f : X \rightarrow Y$  é um morfismo qualquer. Sabemos da definição de um sistema de fatoraão fraca que podemos escrever  $f = q \circ j$ , onde  $j : X \rightarrow Z$  é uma cofibração trivial, e  $q : Z \rightarrow Y$  é uma fibração. Lembrando que a categoria  $\mathcal{C}$  em questão é por hipótese bicompleta, podemos em particular formar o pushout do diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{s_1} & A \\
 j \downarrow & \wr & \\
 Z & & 
 \end{array}$$

de forma a obtermos o quadrado comutativo mostrado abaixo. Note que a propriedade (d) da Proposição 1.6 aplicado ao sistema de fatoraão fraco  $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$  garante que o morfismo  $J$  que aparece no pushout abaixo seja de fato uma cofibração trivial.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{s_1} & A \\
 j \downarrow & \wr & \downarrow J \\
 Z & \xrightarrow{s} & P
 \end{array}$$

Uma primeira aplicação da propriedade universal do pushout fornece um morfismo  $R : P \rightarrow Z$  fazendo comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{s_1} & A & & \\
 j \downarrow & \wr & \downarrow J & & \\
 Z & \xrightarrow{s} & P & \xrightarrow{R} & Z \\
 & \searrow & \text{id}_Z & & 
 \end{array}$$

Agora, uma segunda aplicação da propriedade universal do pushout nos fornece o morfismo  $Q : P \rightarrow B$  fazendo comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{s_1} & A & & \\
 j \downarrow & \wr & \downarrow J & & \\
 Z & \xrightarrow{s} & P & \xrightarrow{Q} & B \\
 & \searrow & s_2 \circ q & & 
 \end{array}$$

Os morfismos envolvendo o pushout construídos acima podem então ser combinados no diagrama comutativo mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_X & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 X & \xrightarrow{s_1} & A & \xrightarrow{r_1} & X \\
 \downarrow j \wr & & \downarrow \wr J & & \downarrow j \\
 Z & \xrightarrow{S} & P & \xrightarrow{R} & Z \\
 \downarrow q & & \downarrow \wr Q & & \downarrow q \\
 Y & \xrightarrow{s_2} & B & \xrightarrow{r_2} & Y \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\
 & & \text{id}_Y & & 
 \end{array}$$

Veja que a propriedade 2-de-3 garante que o morfismo  $Q$  é realmente uma equivalência fraca como indicado acima, pois  $J$  e  $g$  o são, e por construção temos a igualdade  $Q \circ J = g$ .

Temos que justificar ainda de alguma forma a comutatividade do quadrado inferior direito, mas vamos assumir isso momentaneamente e dar continuidade ao argumento. Como o morfismo  $R$  por construção satisfaz a igualdade  $R \circ S = \text{id}_Z$ , os dois quadrados comutativos inferiores exibem a fibração  $q : Z \rightarrow Y$  como uma retração da equivalência fraca  $Q : P \xrightarrow{\sim} B$ , e o caso demonstrado anteriormente nos permite concluir então que  $q$  é na verdade uma fibração trivial, sendo em particular uma equivalência fraca também. Ora, segue da igualdade  $f = q \circ j$  que  $f$  é a composição de duas equivalências fracas, sendo portanto uma equivalência fraca também conforme queríamos mostrar.

A fim de fecharmos a lacuna restante no argumento acima, note que a comutatividade do quadrado inferior direito segue imediatamente da unicidade na propriedade universal do pushout, já que os morfismos  $q \circ R, r_2 \circ Q : P \rightarrow Y$  ambos fazem comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{s_1} & A \\
 \downarrow j \wr & & \downarrow \wr J \\
 Z & \xrightarrow{S} & P \\
 & \searrow q & \nearrow f \circ r_1 \\
 & & Y
 \end{array}$$

■

## 1.2 Fatorações funtoriais

Nessa subseção formalizamos a noção de uma fatoração funtorial de morfismos em uma categoria. O conceito de fatoração funtorial é um tanto peculiar: na teoria ele oferece uma vantagem para descrevermos certas construções, mas na prática o processo de fatoração funtorial pode não ser necessariamente o mais simples ou o mais vantajoso em uma dada situação.

Antes de definirmos uma fatoração propriamente dita, precisamos introduzir um outro tipo de categoria de setas relacionado à categoria  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  introduzida anteriormente. Dada então uma categoria  $\mathbf{C}$  qualquer, considere a categoria  $\mathbf{C}^{[2]}$  cujos objetos são pares  $(g, f)$  de *setas componíveis* em  $\mathbf{C}$ , ou seja, morfismos satisfazendo a condição  $\text{dom} g = \text{cod} f$ , situação esta que

também representaremos pelo diagrama da forma abaixo.

$$\begin{array}{c} X \\ f \downarrow \\ Y \\ g \downarrow \\ Z \end{array}$$

Os morfismos em  $\mathbf{C}^{[2]}$ , como esperado, são triplas de morfismos horizontais fazendo comutar os dois quadrados evidentes. Mais precisamente, dados dois pares de setas componíveis  $(g, f)$  e  $(g', f')$ , um morfismo do tipo  $(g, f) \rightarrow (g', f')$  em  $\mathbf{C}^{[2]}$  é dado por uma tripla de morfismos  $(\alpha : \text{dom } f \rightarrow \text{dom } f', \beta : \text{cod } f \rightarrow \text{cod } f', \gamma : \text{cod } g \rightarrow \text{cod } g')$  fazendo comutar o diagrama a seguir.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Y' \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ Z & \xrightarrow{\gamma} & Z' \end{array}$$

A composição de morfismos é análoga àquela existente na categoria  $\text{Arr}(\mathbf{C})$ : colamos os dois pares de quadrados comutativos ao longo da “aresta” comum para obtermos um terceiro par de quadrados comutativos representando a composição dos dois morfismos.

**1.12 Observação.** A notação  $\mathbf{C}^{[2]}$  escolhida para denotar a categoria introduzida acima não é por acaso. Lembre-se que todo conjunto parcialmente ordenado pode ser encarado como uma categoria. Quando fazemos isso com o conjunto parcialmente ordenado  $\{0 \leq 1 \leq 2\}$ , obtemos uma categoria comumente denotada por  $[2]$ , e que pode ser visualizada pictoricamente da forma abaixo (omitindo os morfismos identidade).

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \xrightarrow{0 \leq 1} & 1 & \xrightarrow{1 \leq 2} & 2 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 0 \leq 2 & & \end{array}$$

A variante da categoria de setas que introduzimos anteriormente é então *precisamente* a categoria de funtores do tipo  $[2] \rightarrow \mathbf{C}$ , o que justifica o uso da notação  $\mathbf{C}^{[2]}$ . Note também que, se no lugar de  $[2]$  considerarmos a categoria  $[1]$  obtida a partir do conjunto parcialmente ordenado  $0 \leq 1$ , a qual está representada abaixo,

$$0 \xrightarrow{0 \leq 1} 1$$

então a categoria  $\mathbf{C}^{[1]}$  formada por funtores do tipo  $[1] \rightarrow \mathbf{C}$  é exatamente a categoria de setas usual  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  introduzida anteriormente.

Lembremos que a categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  vem equipada com os funtores domínio e codomínio  $\text{dom}, \text{cod} : \text{Arr}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$ . Analogamente, a categoria de setas componíveis  $\mathbf{C}^{[2]}$  vem equipada com três funtores  $d_0, d_1, \text{comp} : \mathbf{C}^{[2]} \rightarrow \text{Arr}(\mathbf{C})$  que vamos agora definir. O funtor  $d_0$  nos objetos registra o primeiro morfismo de um par componível, ou seja,  $d_0(g, f) := f$ , o que

podemos visualizar da forma indicada a seguir.

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ f \downarrow & \xrightarrow{d_0} & f \downarrow \\ Y & & Y \\ g \downarrow & & \\ Z & & \end{array}$$

Já nos morfismos, dado um morfismo  $(\alpha, \beta, \gamma) : (g, f) \rightarrow (g', f')$ , temos por definição  $d_0(\alpha, \beta, \gamma) := (\alpha, \beta)$ . Visualmente,  $d_0$  seleciona o primeiro quadrado comutativo do par de quadrados comutativos que representa o morfismo  $(\alpha, \beta, \gamma)$  em  $\mathbf{C}^{[2]}$ .

$$\begin{array}{ccc} X \xrightarrow{\alpha} X' & & X \xrightarrow{\alpha} X' \\ f \downarrow & \xrightarrow{\beta} & f \downarrow \\ Y \xrightarrow{\beta} Y' & \xrightarrow{d_0} & Y \xrightarrow{\beta} Y' \\ g \downarrow & & g \downarrow \\ Z \xrightarrow{\gamma} Z' & & Z \xrightarrow{\gamma} Z' \end{array}$$

O funtor  $d_1$  é análogo: nos objetos ele seleciona o segundo morfismo do par componível, logo  $d_1(g, f) := g$ , e nos morfismos ele seleciona o segundo quadrado comutativo, de forma que  $d_1(\alpha, \beta, \gamma) := (\beta, \gamma)$ . Já o funtor  $\text{comp} : \mathbf{C}^{[2]} \rightarrow \text{Arr}(\mathbf{C})$ , como o nome muito sugere, é dado exatamente pela composição das setas componíveis. Dessa forma, nos objetos temos  $\text{comp}(g, f) := g \circ f$ ,

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ f \downarrow & \xrightarrow{\text{comp}} & g \circ f \downarrow \\ Y & & Z \\ g \downarrow & & \\ Z & & \end{array}$$

enquanto nos morfismos temos  $\text{comp}(\alpha, \beta, \gamma) := (\alpha, \gamma)$ .

$$\begin{array}{ccc} X \xrightarrow{\alpha} X' & & X \xrightarrow{\alpha} X' \\ f \downarrow & \xrightarrow{\beta} & f \downarrow \\ Y \xrightarrow{\beta} Y' & \xrightarrow{\text{comp}} & Y \xrightarrow{\beta} Y' \\ g \downarrow & & g \downarrow \\ Z \xrightarrow{\gamma} Z' & & Z \xrightarrow{\gamma} Z' \end{array}$$

Tendo introduzido a categoria  $\mathbf{C}^{[2]}$ , podemos enfim falar de fatorações functoriais.

**1.13 Definição.** Uma **fatoração functorial** em uma categoria  $\mathbf{C}$  é um funtor  $\text{fac} : \text{Arr}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}^{[2]}$  que é uma seção do funtor de composição  $\text{comp} : \mathbf{C}^{[2]} \rightarrow \text{Arr}(\mathbf{C})$ , ou seja, que satisfaz a equação  $\text{comp} \circ \text{fac} = \text{id}_{\text{Arr}(\mathbf{C})}$ .

Vamos procurar entender o significado prático da existência de fatorações functoriais em uma categoria. O funtor  $\text{fac}$  associa a um morfismo  $f : X \rightarrow Z$  em  $\mathbf{C}$  um par de morfismos  $(f_1, f_0)$

cuja composição  $f_1 \circ f_0$  deve ser igual ao morfismo  $f$ . Essa última igualdade garante então que tenhamos  $\text{dom} f_0 = \text{dom} f = X$  e  $\text{cod} f_1 = \text{cod} f = Z$ . Se denotarmos  $Y := \text{cod} f_0 = \text{dom} f_1$ , temos a situação indicada abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ f \downarrow & \xrightarrow{\sim} \text{fac} & f_0 \downarrow \\ Z & & Y \\ & & f_1 \downarrow \\ & & Z \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ f_1 \circ f_0 = f \end{array}$$

Dado outro morfismo  $f' : X' \rightarrow Z'$ , e um morfismo  $(\alpha : X \rightarrow X', \gamma : Z \rightarrow Z')$  de  $f$  para  $f'$  em  $\text{Arr}(\mathbf{C})$ , a fatoração funtorial  $\text{fac}$  associa a esse morfismo do tipo  $(f_1, f_0) \rightarrow (f'_1, f'_0)$  em  $\mathbf{C}^{[2]}$ , ou seja, uma tripla de morfismos  $(\varphi : X \rightarrow X', \psi : Y \rightarrow Y', \theta : Z \rightarrow Z')$  fazendo comutar os dois quadrados adjacentes. Note que, como  $\text{fac}$  é uma seção de  $\text{comp}$ , devemos ter  $(\alpha, \beta) = \text{comp}(\text{fac}(\alpha, \beta)) = \text{comp}(\varphi, \psi, \theta) = (\varphi, \theta)$ , de forma que os morfismos  $\alpha$  e  $\beta$  são em certo sentido preservados na fatoração funtorial, conforme indicado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Z & \xrightarrow{\beta} & Z' \end{array} \quad \xrightarrow{\sim} \text{fac} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f'_0 \\ Y & \xrightarrow{\psi} & Y' \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f'_1 \\ Z & \xrightarrow{\beta} & Z' \end{array}$$

Por fim, introduzimos a noção de um sistema de fatoração fraco funtorial, a noção que será de fato de nosso interesse no estudo de categorias modelo.

**1.14 Definição.** Um sistema de fatoração fraco  $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$  uma categoria  $\mathbf{C}$  é dito **funtorial** se existe um funtor  $\text{fac} : \text{Arr}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}^{[2]}$  satisfazendo as seguintes condições:

1.  $\text{comp} \circ \text{fac} = \text{id}_{\text{Arr}(\mathbf{C})}$ ;
2.  $d_0(\text{fac}(f)) \in \mathcal{L}$  e  $d_1(\text{fac}(f)) \in \mathcal{R}$  para todo  $f \in \text{Arr}(\mathbf{C})$ .

A primeira condição acima diz simplesmente que o funtor  $\text{fac}$  define uma fatoração funtorial em  $\mathbf{C}$ , mas a segunda condição impõe que os morfismos que aparecem nessa fatoração interajam adequadamente com o sistema de fatoração fraco existente: o primeiro morfismo da fatoração deve necessariamente pertence à classe  $\mathcal{L}$ , enquanto o segundo deve necessariamente pertencer à classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ f \downarrow & \xrightarrow{\sim} \text{fac} & f_0 \in \mathcal{L} \downarrow \\ Z & & Y \\ & & f_1 \in \mathcal{R} \downarrow \\ & & Z \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ f_1 \circ f_0 = f \end{array}$$

Muitos autores exigem que os sistemas de fatoração fracos  $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$  e  $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$  de uma categoria modelo sejam funtoriais no sentido acima. Isso nem sempre é estritamente necessário, mas é algo que facilita a nossa vida em alguns momentos. É importante comentar que, embora nem toda estrutura modelo admita fatorações funtoriais, uma grande parte delas admite, incluindo aquelas obtidas por meio do famigerado Argumento do Objeto Pequeno que estudaremos mais adiante.

## 2 Exemplos bobos e construções

O objetivo dessa seção é dar alguns exemplos de categorias modelo e descrever também algumas construções que podem ser feitas com tais categorias. Todos os exemplos que podemos dar por hora são extremamente simples e essencialmente inúteis. Em todos os exemplos úteis e relevantes de categorias modelo, a verificação dos axiomas é bastante trabalhosa.

**2.1 Exemplo.** Seja  $\mathcal{M}$  uma categoria bicompleta qualquer, considere  $\mathcal{W}$  como sendo a classe dos isomorfismos em  $\mathcal{C}$ , e considere  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{F}$  como sendo a classe de todos os morfismos. Afirmamos que nesse caso a tupla  $(\mathcal{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  define uma categoria modelo.

A validade do axioma (M1) segue da hipótese que fizemos sobre  $\mathcal{C}$ . Considere agora dois morfismos  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  em  $\mathcal{C}$ . Se  $f$  e  $g$  pertencem a  $\mathcal{W}$ , ou seja,  $f$  e  $g$  são isomorfismos, então  $g \circ f$  também pertence a  $\mathcal{W}$ , já que isomorfismos são preservados por composição. Agora, se  $f$  e  $g \circ f$  pertencem a  $\mathcal{W}$ , a igualdade  $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$  expressa  $g$  como composição de dois isomorfismos, logo  $g \in \mathcal{W}$ . Por fim, se  $g$  e  $g \circ f$  pertencem a  $\mathcal{W}$ , então  $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$  expressa  $f$  como composição de dois isomorfismos, portanto  $f \in \mathcal{W}$ . Isso mostra que  $\mathcal{W}$  satisfaz a propriedade 2-de-3.

A validade do axioma de retração é imediata para as classes  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{F}$  já que elas consistem de todos os morfismos. Suponha agora que  $f : X \rightarrow Y$  seja uma retração do isomorfismos  $g : A \rightarrow B$ , de forma que tenhamos um diagrama comutativo como abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_X & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{s_1} & A & \xrightarrow{r_1} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{s_2} & B & \xrightarrow{r_2} & Y \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \text{id}_Y & & 
 \end{array}$$

Afirmamos que, nesse caso, o morfismo  $r_1 \circ g^{-1} \circ s_2$  é o inverso de  $f$ . De fato, por um lado temos

$$r_1 \circ g^{-1} \circ s_2 \circ f = r_1 \circ g^{-1} \circ g \circ s_1 = r_1 \circ \text{id}_A \circ s_1 = r_1 \circ s_1 = \text{id}_X,$$

enquanto por outro temos

$$f \circ r_1 \circ g^{-1} \circ s_2 = r_2 \circ g \circ g^{-1} \circ s_2 = r_2 \circ \text{id}_B \circ s_2 = r_2 \circ s_2 = \text{id}_Y.$$

Isso mostra que  $f$  é um isomorfismo também, portanto a classe  $\mathcal{W}$  é fechada por retrações.

Vamos checar agora o axioma de levantamento. No problema de levantamento abaixo,

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\alpha} & X \\
 i \downarrow \wr & & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{\beta} & Y
 \end{array}$$

dizer que  $i$  é uma cofibração trivial significa apenas dizer que  $i$  é um isomorfismo. Veja então que o morfismo  $h : B \rightarrow X$  dado por  $h := \alpha \circ i^{-1}$  soluciona o problema em questão pois

$$h \circ i = \alpha \circ i^{-1} \circ i = \alpha \circ \text{id}_A = \alpha,$$

e também

$$p \circ h = p \circ \alpha \circ i^{-1} = \beta \circ i \circ i^{-1} = \beta \circ \text{id}_B = \beta.$$

Considere agora o problema de levantamento abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Como no caso anterior, dizer que  $p$  é uma fibração trivial significa simplesmente dizer que  $p$  é um isomorfismo. Podemos então definir  $h : B \rightarrow X$  pela composição  $h := p^{-1} \circ \beta$ , e afirmamos que com essa definição obtemos um levantamento. De fato, por um lado

$$p \circ h = p \circ p^{-1} \circ \beta = \text{id}_Y \circ \beta = \beta,$$

enquanto por outro

$$h \circ i = p^{-1} \circ \beta \circ i = p^{-1} \circ p \circ \alpha = \text{id}_X \circ \alpha = \alpha.$$

Resta agora mostrarmos a existência de fatorações, mas isso é bem simples pela forma como foram definidas as classes  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{F}$ . Dado um morfismo  $f : X \rightarrow Y$  qualquer, lembrando que as cofibrações triviais são os isomorfismos da categoria, e que as fibrações são todos os morfismos, a fatoração

$$f = f \circ \text{id}_X$$

exibe  $f$  como uma cofibração trivial seguida de uma fibração. Analogamente, como todo morfismo é uma cofibração, e todo isomorfismo é uma fibração trivial, a fatoração

$$f = \text{id}_Y \circ f$$

expressa  $f$  como uma cofibração seguida de uma fibração trivial.

### 3 Objetos fibrantes e cofibrantes

Nessa seção introduzimos o conceito de objetos cofibrantes e fibrantes. Estas duas classes de objetos em uma categoria modelo serão de extrema importância em diferentes pontos da teoria, como na construção de um modelo mais simples para a localização de uma categoria modelo e na descrição de uma noção puramente categórica de homotopia.

**3.1 Definição.** Sejam  $\mathbf{M}$  uma categoria modelo,  $\emptyset \in \mathbf{M}$  um objeto inicial qualquer, e  $*$  um objeto final qualquer.<sup>1</sup> Um objeto  $X \in \mathbf{M}$  é dito **cofibrante** se o morfismo único  $!_X : \emptyset \rightarrow X$  é uma cofibração, e é dito **fibrante** se o morfismo único  $!_X : X \rightarrow *$  é uma fibração. Quando um objeto é simultaneamente cofibrante e fibrante, dizemos também que ele é **bifibrante**.

**3.2 Observação.** Veja que a noção de objeto cofibrante não depende do objeto inicial  $\emptyset \in \mathbf{M}$  fixado acima. De fato, se  $\emptyset$  e  $\emptyset'$  são dois objetos iniciais,  $X$  é um objeto qualquer, podemos considerar o diagrama comutativo abaixo onde todos os morfismos são aqueles dados pela propriedade que caracteriza um objeto inicial.

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & & \\ \downarrow !_{\emptyset'} & \searrow !_X & \\ \emptyset' & & X \end{array}$$

<sup>1</sup>O fato de  $\mathbf{M}$  ser cocompleta e completa garante a existência de objetos iniciais e finais.



Como objetos iniciais possuem apenas a identidade como automorfismo,  $!_{\emptyset'}$  e  $!_{\emptyset}'$  são isomorfismos, sendo em particular cofibrações. Segue disso que  $!_X : \emptyset \rightarrow X$  é uma cofibração se, e somente se,  $!_X' : \emptyset' \rightarrow X$  também o é.

É claro que um raciocínio dual mostra que a noção de um objeto ser fibrante também depende do objeto final considerado na categoria modelo.

Vamos mostrar agora algumas propriedades simples a respeito de objetos cofibrantes e fibrantes.

**3.3 Lema.** *Em uma categoria modelo  $M$  qualquer valem as seguintes propriedades:*

- (a) *Se  $X$  é um objeto cofibrante, e  $i : X \rightarrowtail Y$  é uma cofibração, então  $Y$  também é cofibrante.*
- (b) *Se  $Y$  é um objeto fibrante, e  $p : X \twoheadrightarrow Y$  é uma fibração, então  $X$  também é fibrante.*

*Demonstração.* (a) Queremos mostrar que o morfismo  $!_Y : \emptyset \rightarrow Y$  é uma cofibração. Ora, como esse morfismo é *único*, certamente vale a igualdade  $!_Y = f \circ !_X$ , e como  $!_X : \emptyset \rightarrow X$  é por hipótese uma cofibração,  $!_Y$  é a composição de duas cofibrações e, portanto uma cofibração também.

(b) Queremos mostrar que o morfismo  $!_X : X \rightarrow *$  é uma fibração. Ora, como esse morfismo é *único*, certamente vale a igualdade  $!_X = !_Y \circ p$ , e como  $!_Y : Y \rightarrow *$  é por hipótese uma fibração, vemos que  $!_X$  é a composição de duas fibrações e, portanto, uma fibração também. ■

Veremos mais adiante que muitas construções categóricas usuais só se comportam de forma homotopicamente adequada quando aplicadas a objetos que são fibrantes ou cofibrantes. Assim, para que possamos realizar tais construções com objetos quaisquer, precisamos antes *substituí-los* por outros que sejam fibrantes ou cofibrantes, uma noção que tornamos precisa na definição abaixo.

**3.4 Definição.** Sejam  $M$  uma categoria modelo e  $X \in M$  um objeto qualquer.

1. Uma **substituição cofibrante** para  $X$  é um par  $(X_c, \varphi)$ , onde  $X_c$  é um objeto cofibrante, e  $\varphi : X_c \xrightarrow{\sim} X$  é uma equivalência fraca. Quando  $\varphi$  é também uma fibração, ou seja, quando  $\varphi$  é uma fibração trivial, dizemos que o par  $(X_c, \varphi)$  define uma substituição cofibrante forte.
2. Uma **substituição fibrante** para  $X$  é um par  $(X_f, \psi)$ , onde  $X_f$  é um objeto fibrante, e  $\psi : X \xrightarrow{\sim} X_f$  é uma equivalência fraca. Quando  $\psi$  é também uma cofibração, ou seja, quando  $\psi$  é uma cofibração trivial, dizemos que o par  $(X_f, \psi)$  define uma substituição fibrante forte.

**3.5 Observação.** Em alguns trabalhos da Literatura, é comum se referir a uma aproximação cofibrante forte  $X_c \xrightarrow{\sim} X$  como uma *aproximação cofibrante fibrante*. Perceba então que nessa terminologia o adjetivo cofibrante se refere ao objeto  $X_c$ , enquanto o adjetivo fibrante se refere ao morfismo  $X_c \rightarrow X$ . Analogamente, uma aproximação fibrante forte  $X_f \xrightarrow{\sim} X$  é também chamada de uma *aproximação fibrante cofibrante*. Não usarei essa terminologia absolutamente horrível em nenhum outro lugar dessas notas, e na verdade espero muito que meu cérebro a esqueça o quanto antes.

Naturalmente somos levados a nos indagar quanto à existência e à unicidade de substituições cofibrantes e fibrantes, e são essas duas questões que iremos investigar agora.

**3.6 Proposição.** *As seguintes afirmações são válidas em uma categoria modelo  $M$  qualquer:*

1. *Todo objeto possui uma aproximação cofibrante forte e também uma aproximação fibrante forte.*

2. Se  $\varphi : X_c \xrightarrow{\sim} X$  é uma aproximação cofibrante forte, dada qualquer outra aproximação cofibrante  $\psi : X'_c \xrightarrow{\sim} X$ , existe uma equivalência fraca  $\theta : X'_c \xrightarrow{\sim} X_c$ .

3. Se  $\varphi : X \xrightarrow{\sim} X_f$  é uma aproximação fibrante forte, dada qualquer outra aproximação fibrante  $\psi : X \xrightarrow{\sim} X'_f$ , existe uma equivalência fraca  $\theta : X_f \xrightarrow{\sim} X'_f$ .

*Demonstração.* 1. Dado um objeto qualquer  $X \in \mathbf{M}$ , usando o axioma de fatoração (M5) podemos fatorar o morfismo único  $!_X : \emptyset \rightarrow X$  como uma cofibração seguida de uma fibração trivial conforme indicado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{!_{X_c}} & X_c \xrightarrow{\sim} X \\ & \searrow & \nearrow \\ & & !_X \end{array}$$

Note então que o objeto  $X_c$  é cofibrante e que o par  $(X_c, \varphi)$  define uma aproximação cofibrante forte para  $X$ .

Usando novamente o axioma de fatoração podemos reescrever o morfismo único  $!_X : X \rightarrow *$  como uma cofibração trivial seguida de uma fibração conforme indicado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sim} & X_f \xrightarrow{!_{X_f}} * \\ & \searrow & \nearrow \\ & & !_X \end{array}$$

Basta notar então que o objeto  $X_f$  é fibrante e que o par  $(X_f, \psi)$  define uma aproximação fibrante forte para  $X$ .

2. Usando os morfismos dados podemos montar o quadrado comutativo mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{!_{X_c}} & X_c \\ !_{X'_c} \downarrow & & \downarrow \varphi \\ X'_c & \xrightarrow{\sim} & X \end{array}$$

Note que o quadrado é realmente comutativo, já que as composições  $\varphi \circ !_X$  e  $\psi \circ !_X$  ambas definem morfismos do tipo  $\emptyset \rightarrow X$ , mas só existe um único morfismo desse tipo. Como  $!_{X'_c}$  é uma cofibração, e  $\varphi$  é uma fibração trivial, usando o axioma de levantamento (M4) podemos obter um morfismo diagonal  $\theta : X'_c \rightarrow X_c$  fazendo comutar o diagrama todo. Em particular, temos a igualdade  $\varphi \circ \theta = \psi$ , e como  $\varphi$  e  $\psi$  são equivalências fracas, segue do axioma 2-de-3 que  $\theta$  também é uma equivalência fraca.

3. A demonstração é análoga ao que fizemos no item 2. Usando os morfismos dados montamos o quadrado comutativo abaixo,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sim} & X'_f \\ \varphi \downarrow & & \downarrow !_{X'_f} \\ X_f & \xrightarrow{!_{X_f}} & * \end{array}$$

o qual admite um levantamento  $\theta : X_f \rightarrow X'_f$  já que  $\varphi$  é uma cofibração trivial, e  $\psi$  é uma fibração. Esse levantamento satisfaz a equação  $\theta \circ \varphi = \psi$ , portanto pelo axioma 2-de-3 concluímos que  $\theta$  é uma equivalência fraca. ■

Os itens 2 e 3 acima são o mais próximo que temos de uma unicidade para aproximações cofibrantes ou fibrantes. Podemos resumi-lo dizendo que toda aproximação cofibrante ou fibrante

é fracamente equivalente a outra aproximação que é forte. Isso certamente não significa que as duas aproximações sejam *isomorfas*, já que equivalências fracas não são invertíveis em geral. É verdade, entretanto, que aproximações diferentes se tornam isomorfas ao passarmos para a categoria homotópica de  $M$ , já que esta é obtida por localização na classe das equivalências fracas.

**3.7 Observação** (Substituições functoriais). Suponha que a categoria modelo  $M$  admita fatorações functoriais, ou seja, que os dois sistemas de fatoração fracos  $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$  e  $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$  sejam functoriais, sendo  $\text{fac}, \text{fac}' : \text{Arr}(M) \rightarrow M^{[2]}$  os respectivos funtores de fatoração. Usando tais fatorações functoriais podemos obter funtores de substituição cofibrante e fibrante. Considere inicialmente o funtor  $\text{init} : M \rightarrow \text{Arr}(M)$  que associa a um objeto  $X$  o morfismo único  $!_X : \emptyset \rightarrow X$ , e que associa a um morfismo  $f : X \rightarrow Y$  o par de morfismos  $(\text{id}_\emptyset, f)$ , o qual faz comutar o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\text{id}_\emptyset} & \emptyset \\ !_X \downarrow & & \downarrow !_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

e portanto define um morfismo do tipo  $!_X \rightarrow !_Y$  na categoria de setas  $\text{Arr}(M)$ .

Usando o funtor  $\text{init}$  introduzido acima, definirmos um funtor  $\text{SC} : M \rightarrow \text{Arr}(M)$  por meio da composição indicada de funtores indicada abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\text{init}} & \text{Arr}(M) & \xrightarrow{\text{fac}'} & M^{[2]} & \xrightarrow{d_1} & \text{Arr}(M) \\ & & & & \text{SC} & & \end{array}$$

Veja que, ao aplicarmos o funtor de fatoração  $\text{fac}'$  ao morfismo  $!_X : \emptyset \rightarrow X$ , obtemos um objeto  $\hat{X}$  para o qual o morfismo único  $!_{\hat{X}} : \emptyset \rightarrow \hat{X}$  é uma cofibração, ou seja,  $\hat{X}$  é um objeto cofibrante, juntamente com uma fibração trivial  $p_X : \hat{X} \xrightarrow{\sim} X$ ; e aplicando então o funtor  $d_1$  obtemos o morfismo de substituição cofibrante  $p$ . Como o processo todo é feito por meio de funtores, se  $f : X \rightarrow Y$  é um morfismo, deve existir também um morfismo  $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$  entre as substituições cofibrantes que faça comutar o quadrado a seguir.

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow[p_X]{\sim} & X \\ \hat{f} \downarrow & & \downarrow f \\ \hat{Y} & \xrightarrow[p_Y]{\sim} & Y \end{array}$$

É claro que podemos descrever um procedimento análogo para obtermos substituições fibrantes functoriais usando o funtor de fatoração  $\text{fac}$  do sistema  $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$  e o funtor do tipo  $M \rightarrow \text{Arr}(M)$  que associa a um objeto  $X$  o morfismo único  $!_X : X \rightarrow *$  para o objeto terminal da categoria.

## 4 Teoria de Homotopia em categorias modelo

Nessa seção introduzimos enfim noções homotópicas que podem ser descritas em uma categoria modelo qualquer. Veremos, entretanto, que mesmo a noção básica de homotopia entre dois morfismos possui sutilezas que a tornam mais complexa do que a noção clássica de homotopia entre mapas contínuos de espaços topológicos. Felizmente, também veremos que a noção categórica

de homotopia se aproxima muito mais da clássica quando trabalhamos apenas com objetos cofibrantes ou fibrantes, e nesse caso podemos usar a construção usual da categoria homotópica para definirmos uma espécie de localização de uma categoria modelo.

A fim de imitarmos a noção topológica de homotopia, o primeiro passo será darmos uma descrição categórica para a construção do cilindro  $B \times I$  associado a um espaço topológico  $B$  qualquer, onde é claro que  $I$  denota o intervalo unitário da reta.

Lembremos inicialmente que, dado um objeto  $B$  de uma categoria  $\mathbf{C}$  qualquer que admita coprodutos, a propriedade universal dessa construção garante a existência de um único mapa  $\nabla : B \sqcup B \rightarrow B$  fazendo comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
 B & & & \text{id}_B & \\
 & \searrow j_1 & & \searrow & \\
 & & B \sqcup B & \xrightarrow{\nabla} & B \\
 & \nearrow j_2 & & \nearrow & \\
 B & & & \text{id}_B & 
 \end{array}$$

Tal morfismo é comumente chamado de **morfismo codiagonal** ou também de **morfismo de dobra**<sup>2</sup>. Intuitivamente, esse morfismo simplesmente cola duas cópias exatamente uma sobre a outra. Por vezes, se precisarmos distinguir entre os morfismos codiagonais associados a diferentes objetos, utilizaremos também a notação  $\nabla_B$  para o morfismo descrito acima.

**4.1 Definição.** Sejam  $\mathbf{M}$  uma categoria modelo e  $B \in \mathbf{M}$  um objeto qualquer. Um **objeto cilindro** para  $B$  é uma fatoração do morfismo codiagonal  $\nabla : B \sqcup B \rightarrow B$  como uma cofibração seguida de uma equivalência fraca. Mais explicitamente, um objeto cilindro para  $B$  é uma tripla  $(\text{Cyl}(B), i, \varepsilon)$ , onde  $i : B \sqcup B \rightarrow \text{Cyl}(B)$  é uma cofibração e  $\varepsilon : \text{Cyl}(B) \xrightarrow{\sim} B$  é uma equivalência fraca tais que  $\varepsilon \circ i = \nabla$ , conforme mostrado no diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc}
 B \sqcup B & & \\
 \downarrow i & \searrow \nabla & \\
 \text{Cyl}(B) & \xrightarrow[\varepsilon]{\sim} & B
 \end{array}$$

Dizemos que a tripla  $(\text{Cyl}(B), i, \varepsilon)$  define um objeto cilindro **forte** se  $\varepsilon$  é também uma fibração, ou seja, se  $\varepsilon$  é uma fibração trivial.

**4.2 Observação.** O axioma de fatoração (M5) garante que o morfismo  $\nabla : B \sqcup B \rightarrow B$  pode ser fatorado como uma cofibração seguida de uma fibração trivial, portanto todo objeto de uma categoria modelo admite um objeto cilindro forte. Entretanto, por vezes esse modelo para o objeto cilindro forte dado pelo axioma de fatoração pode ser muito complicado, por isso é vantajoso trabalharmos com cilindros fracos também, cuja descrição é por vezes mais simples.

Vamos introduzir mais um pouco de terminologia. Dado um objeto cilindro  $(\text{Cyl}(B), i, \varepsilon)$  para  $B$ , se  $j_1, j_2 : B \rightarrow B \sqcup B$  são as injeções canônicas, frequentemente denotaremos os morfismos do tipo  $B \rightarrow \text{Cyl}(B)$  dados pelas composições  $i \circ j_1$  e  $i \circ j_2$  por  $i_0$  e  $i_1$ , respectivamente. Essa diferença nos índices pode parecer estranho, mas a motivação para tal vem do caso topológico clássico, onde um modelo para o objeto cilindro  $\text{Cyl}(B)$  é o produto  $B \times I$ . Nesse caso, a composição  $i_0 = i \circ j_1$  mapeia  $B$  para a face inferior  $B \times \{0\}$  de  $B \times I$ , enquanto a composição  $i_1 = i \circ j_2$  mapeia  $B$  para a face superior  $B \times \{1\}$  do cilindro  $B \times I$ , o que justifica a razoabilidade dos índices aparecendo em cada uma das composições.

Antes de vermos como a noção de objeto cilindro nos permite definir uma noção categórica de homotopia, vejamos algumas propriedades simples satisfeitas por tais objetos.

<sup>2</sup>Uma tradução direta do inglês *fold map*.

**4.3 Lema.** *Sejam  $\mathbf{M}$  uma categoria modelo,  $B \in \mathbf{M}$  um objeto qualquer, e  $(\text{Cyl}(B), i, \varepsilon)$  um objeto cilindro qualquer para  $B$ .*

- (i) *Os morfismos  $i_0, i_1 : B \rightarrow \text{Cyl}(B)$  são equivalências fracas.*
- (ii) *Se  $B$  é um objeto cofibrante, então os morfismos  $i_0, i_1 : B \rightarrow \text{Cyl}(B)$  são também cofibrações e, portanto, cofibrações triviais.*

*Demonstração.* (i) Note que pela definição de  $i_0$  temos

$$\varepsilon \circ i_0 = \varepsilon \circ i \circ j_1 = \nabla \circ j_1 = \text{id}_B.$$

Ora, como  $\text{id}_B$  é uma equivalência fraca, o mesmo valendo para  $\varepsilon$  pela definição de objeto cilindro, segue da propriedade 2-de-3 que  $i_0$  é também uma equivalência fraca. A demonstração de que  $i_1$  é uma equivalência fraca segue de um raciocínio completamente análogo.

(ii) Lembremos que em qualquer categoria, o coproduto pode ser interpretado também como um pushout sobre o objeto inicial. Mais precisamente, se  $\emptyset$  denota um objeto inicial de  $\mathbf{M}$ , então o quadrado comutativo abaixo é um pushout.

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{!_B} & B \\ !_B \downarrow & & \downarrow j_1 \\ B & \xrightarrow{j_2} & B \sqcup B \end{array}$$

Por hipótese  $B$  é cofibrante, ou seja, o morfismo único  $!_B$  é uma cofibração, mas já sabemos do Corolário 1.9 que cofibrações são preservadas por pushouts, portanto  $j_1$  e  $j_2$  são cofibrações. Mas segue então que os morfismos  $i_0$  e  $i_1$  são composições de cofibrações e, portanto, cofibrações também de acordo com o Corolário 1.9. ■

Tendo em mãos essas propriedades básicas, podemos enfim definir uma primeira noção de homotopia entre morfismos em uma categoria modelo.

**4.4 Definição.** Dois morfismos  $f, g : B \rightarrow X$  em uma categoria modelo  $\mathbf{M}$  são ditos **homotópicos à esquerda** se existe um objeto cilindro  $(\text{Cyl}(B), i, \varepsilon)$  para  $B$  e um morfismo  $h : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$  tal que  $h \circ i = \langle f, g \rangle$ , conforme mostrado no diagrama comutativo abaixo. Nesse caso, denotamos essa relação por  $f \sim_L g$ .

$$\begin{array}{ccccc} B & \xleftarrow{\nabla} & B \sqcup B & \xrightarrow{\langle f, g \rangle} & X \\ & \nwarrow \varepsilon & \downarrow i & \nearrow h & \\ & & \text{Cyl}(B) & & \end{array}$$

Se interpretarmos os morfismos  $i_0, i_1 : B \rightarrow \text{Cyl}(B)$  como sendo as faces inferior e superior do cilindro como no caso topológico clássico, então as composições  $h \circ i_0$  e  $h \circ i_1$  determinam os estágios inicial e final da homotopia  $h$ . Usando a definição de tais morfismos e a comutatividade acima vemos que por um lado

$$h \circ i_0 = h \circ i \circ j_1 = \langle f, g \rangle \circ j_1 = f,$$

e por outro

$$h \circ i_1 = h \circ i \circ j_2 = \langle f, g \rangle \circ j_2 = g.$$

Assim, recuperamos em certo sentido a intuição clássica de uma família de morfismos que começa em  $f$  e termina em  $g$ .

Veja que a definição acima possui uma sutileza: exigimos que a homotopia  $h$  esteja definida em *algum* objeto cilindro  $\text{Cyl}(B)$ , mas  $B$  pode muito bem admitir diversos objetos cilindros distintos. Isso pode representar uma dificuldade para “combinarmos” homotopias à esquerda, já que elas podem não estar definidas nos mesmos objetos cilindros.

O resultado abaixo mostra que homotopias à esquerda são preservadas por composição de morfismos à esquerda, o que possivelmente justifica a terminologia usada. Além disso, mostramos que homotopias à esquerda também são preservadas por composição de morfismos à direita quando supomos que o codomínio é fibrante, e essa hipótese também garante a independência do objeto cilindro no qual a homotopia está definida.

**4.5 Proposição.** *Suponha que  $f, g : B \rightarrow X$  sejam dois morfismos homotópicos à esquerda em uma categoria modelo  $\mathbf{M}$ .*

1. *Dado um morfismo  $\beta : X \rightarrow Y$ , os morfismos compostos  $\beta \circ f, \beta \circ g : B \rightarrow Y$  são homotópicos à esquerda.*
2. *Se  $X$  é fibrante, então a homotopia entre  $f$  e  $g$  independe do objeto cilindro usado.*
3. *Se  $X$  é fibrante, então dado qualquer morfismo  $\alpha : A \rightarrow B$ , os morfismos compostos  $f \circ \alpha, g \circ \alpha : A \rightarrow X$  são homotópicos à esquerda.*

*Demonstração.* 1. Por hipótese existe um objeto cilindro  $(\text{Cyl}(B), i, \varepsilon)$  para  $B$  e um morfismo  $h : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$  satisfazendo  $h \circ i = \langle f, g \rangle$ . Afirmamos que  $\beta \circ h$  é a homotopia à esquerda procurada de  $\beta \circ f$  para  $\beta \circ g$ . De fato, basta notar que

$$\beta \circ h \circ i = \beta \circ \langle f, g \rangle = \langle \beta \circ f, \beta \circ g \rangle,$$

onde a última igualdade segue diretamente da propriedade universal do coproduto, já que a composição  $\beta \circ \langle f, g \rangle$  satisfaz as igualdades

$$(\beta \circ \langle f, g \rangle) \circ j_1 = \beta \circ f \quad \text{e} \quad (\beta \circ \langle f, g \rangle) \circ j_2 = \beta \circ g.$$

2. Por hipótese sabemos que existe *algum* objeto cilindro  $(\text{Cyl}(B), i, \varepsilon)$  para  $B$  e um morfismo  $h : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$  tal que  $h \circ i = \langle f, g \rangle$ . Afirmamos que existe também uma homotopia de  $f$  para  $g$  definida em um cilindro *forte*. De fato, sabemos do axioma de fatoração que a equivalência fraca  $\varepsilon : \text{Cyl}(B) \rightarrow B$  pode ser fatorada como uma cofibração seguida de uma fibração trivial conforme indicado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} \text{Cyl}(B) & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon} & B \\ & \searrow j & \nearrow p \\ & C & \end{array}$$

Afirmamos então que a tripla  $(C, j \circ i, p)$  é um objeto cilindro forte para  $B$ . Veja que  $j \circ i$  e  $p$  fatoram o morfismo de dobra  $\nabla : B \rightarrow B \sqcup B$  pois

$$p \circ (j \circ i) = (p \circ j) \circ i = \varepsilon \circ i = \nabla,$$

e como  $p$  é uma fibração trivial pelo axioma de fatoração, a tripla em questão define de fato um cilindro forte.

Vamos agora mostrar que existe uma homotopia de  $f$  para  $g$  definida nesse cilindro forte. Note inicialmente que o morfismo  $j : \text{Cyl}(B) \rightarrow C$  que apareceu na fatoração acima é uma cofibração trivial pela propriedade 2-de-3, já que  $\varepsilon$  e  $p$  são ambas equivalências fracas. Como o

morfismo único  $!_X : X \rightarrow *$  é por hipótese uma fibração, segue do axioma de levantamento que existe um morfismo diagonal  $\tilde{h} : C \rightarrow X$  fazendo comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} \text{Cyl}(B) & \xrightarrow{h} & X \\ \downarrow j & \nearrow \tilde{h} & \downarrow !_X \\ C & \xrightarrow{!_C} & * \end{array}$$

Note então que  $\tilde{h}$  define uma homotopia de  $f$  para  $g$  com relação ao cilindro forte  $(C, j \circ i, p)$  pois

$$\tilde{h} \circ (j \circ i) = (\tilde{h} \circ j) \circ i = h \circ i = \langle f, g \rangle.$$

Vejamos agora como mostrar que a homotopia entre  $f$  e  $g$  independe do cilindro usado. Segue da discussão acima que podemos assumir sem perda de generalidade que o objeto cilindro  $(\text{Cyl}(B), i, \varepsilon)$  no qual está definida a homotopia  $h$  por hipótese é forte. Suponha agora que  $(S, i', \varepsilon')$  seja um outro objeto cilindro qualquer. Queremos construir um morfismo  $h' : S \rightarrow X$  tal que  $h' \circ i' = \langle f, g \rangle$ . A ideia é construirmos um morfismo do tipo  $S \rightarrow \text{Cyl}(B)$  que, ao ser composto com a homotopia  $h$  já existente, forneça uma outra homotopia definida agora no objeto cilindro  $S$ . A fim de construirmos tal morfismo, note que o quadrado mostrado abaixo é comutativo, pois ambos os pares  $(i, \varepsilon)$  e  $(i', \varepsilon')$  são fatorações do morfismo de dobra  $\nabla$ . Ademais, como  $i'$  é uma cofibração, pois  $S$  é um objeto cilindro, e  $\varepsilon$  é uma fibração trivial, pois  $\text{Cyl}(B)$  é um cilindro forte; segue do axioma de levantamento que existe um morfismo diagonal  $\phi : S \rightarrow \text{Cyl}(B)$  como indicado.

$$\begin{array}{ccc} B \sqcup B & \xrightarrow{i} & \text{Cyl}(B) \\ \downarrow i' & \nearrow \phi & \downarrow \varepsilon \\ S & \xrightarrow[\varepsilon']{\sim} & B \end{array}$$

Veja então que a composição  $h' := h \circ \phi$  define a homotopia desejada, pois da comutatividade acima vemos que

$$h' \circ i' = h \circ \phi \circ i' = h \circ i = \langle f, g \rangle.$$

3. Suponha que  $(\text{Cyl}(A), i_A, \varepsilon_A)$  seja um objeto cilindro qualquer para  $A$  e que  $(\text{Cyl}(B), i_B, \varepsilon_B)$  seja um objeto cilindro *forte* para  $B$ . Sabemos pelo item 2 que certamente existe uma homotopia  $h : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$  de  $f$  para  $g$  definida nesse cilindro forte. Considere o diagrama de levantamento exibido abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A \sqcup A & \xrightarrow{i_B \circ \alpha \sqcup \alpha} & \text{Cyl}(B) \\ \downarrow i_A & & \downarrow \varepsilon_B \\ \text{Cyl}(A) & \xrightarrow{\alpha \circ \varepsilon_A} & B \end{array}$$

Veja que o quadrado externo é de fato comutativo pois por um lado

$$\alpha \circ \varepsilon_A \circ i_A = \alpha \circ \nabla_A = \alpha \circ \langle \text{id}_A, \text{id}_A \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle,$$

e por outro

$$\varepsilon_B \circ i_B \circ \alpha \sqcup \alpha = \nabla_B \circ \alpha \sqcup \alpha = \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

Segue do axioma de levantamento que existe o morfismo diagonal  $\phi : \text{Cyl}(A) \rightarrow \text{Cyl}(B)$  mostrado acima. Note então que  $h \circ \phi : \text{Cyl}(A) \rightarrow X$  é a homotopia procurada pois

$$h \circ \phi \circ i_A = h \circ i_B \circ (\alpha \sqcup \alpha) = \langle f, g \rangle \circ (\alpha \sqcup \alpha) = \langle f \circ \alpha, g \circ \alpha \rangle. \quad \blacksquare$$

Uma consequência particularmente útil é que a noção de homotopia à esquerda se torna uma relação de equivalência quando trabalhamos com morfismos tendo codomínio fibrante.

**4.6 Corolário.** *Em uma categoria de modelos  $(\mathbf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ , se  $B$  é um objeto cofibrante e  $X$  é um objeto qualquer, então a relação de homotopia à esquerda  $\simeq_L$  define uma relação de equivalência no conjunto de morfismos  $\mathbf{M}(B, X)$ .*

*Demonstração.* Vejamos primeiro a reflexividade da relação de homotopia à esquerda. Dado um morfismo  $f : B \rightarrow X$ , considere  $(\text{Cyl}(B), i, \varepsilon)$  um objeto cilindro qualquer para  $B$ . Veja que o quadrado indicado abaixo é comutativo pois

$$f \circ \varepsilon \circ i = f \circ \nabla = f \circ \langle \text{id}_B, \text{id}_B \rangle = \langle f, f \rangle,$$

e como o morfismo idêntico  $\text{id}_X : X \rightarrow X$  é uma fibração trivial, e  $i : B \sqcup B \rightarrow \text{Cyl}(B)$  é uma cofibração por hipótese, segue do axioma de levantamento que existe o morfismo diagonal  $h : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$  mostrado, e a comutatividade mostra que tal morfismo define uma homotopia à esquerda de  $f$  para si mesmo.

$$\begin{array}{ccc} B \sqcup B & \xrightarrow{\langle f, f \rangle} & X \\ i \downarrow & \dashrightarrow h & \downarrow \text{id}_X \\ \text{Cyl}(B) & \xrightarrow{f \circ \varepsilon} & X \end{array}$$

Note que a demonstração acima não usa em nenhum momento a hipótese de cofibrância sobre  $B$ , ou seja, a relação de homotopia à esquerda é *sempre* reflexiva.

Vejamos agora a demonstração da simetria da relação. Dados dois morfismos  $f, g : B \rightarrow X$  que sejam homotópicos à esquerda, suponhamos que tal homotopia  $h : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$  esteja definido em um objeto cilindro  $(\text{Cyl}(B), i, \varepsilon)$  qualquer. A ideia é montarmos um outro objeto cilindro que tenha as “faces trocadas”, e faremos isso trocando a ordem das parcelas do coproduto  $B \sqcup B$ . Mais precisamente, sabemos da propriedade universal do coproduto que existe um único morfismo  $\Sigma : B \sqcup B$  tal que  $\Sigma \circ j_1 = j_2$  e  $\Sigma \circ j_2 = j_1$ , onde  $j_1, j_2 : B \rightarrow B \sqcup B$  denotam as injeções canônicas no coproduto. Intuitivamente,  $\Sigma$  troca as duas cópias de  $B$  que compõem o coproduto  $B \sqcup B$ . Uma propriedade do morfismo  $\Sigma$  que será importante para nós é sua interação com o morfismo codiagonal  $\nabla : B \sqcup B \rightarrow B$ . Mais precisamente, afirmamos que vale a igualdade  $\nabla \circ \Sigma = \nabla$ . Faz bastante sentido que essa igualdade seja verdadeira, pois se  $\nabla$  intuitivamente identifica as duas cópias de  $B$  que formam o coproduto  $B \sqcup B$ , não faz diferença trocarmos essas cópias de lugar antes de fazermos a identificação. A demonstração dessa igualdade é uma aplicação direta da propriedade universal do coproduto, pois  $\nabla$  é caracterizado unicamente por satisfazer as igualdades

$$\nabla \circ j_1 = \nabla \circ j_2 = \text{id}_B,$$

mas a composição  $\nabla \circ \Sigma$  satisfaz as mesmas igualdades, pois por um lado

$$(\nabla \circ \Sigma) \circ j_1 = \nabla \circ (\Sigma \circ j_1) = \nabla \circ j_2 = \text{id}_B$$

e por outro

$$(\nabla \circ \Sigma) \circ j_2 = \nabla \circ (\Sigma \circ j_2) = \nabla \circ j_1 = \text{id}_B.$$

Sabendo das propriedades acima, afirmamos que a tripla  $(\text{Cyl}(B), i \circ \Sigma, \varepsilon)$  define um outro objeto cilindro para  $B$ . Note primeiro que o morfismo de troca  $\Sigma$  é um automorfismo de  $B \sqcup B$ , já que uma aplicação direta da propriedade universal do coproduto mostra que vale a igualdade  $\Sigma \circ \Sigma = \text{id}_{B \sqcup B}$ . Segue em particular que  $\Sigma$  é uma cofibração, portanto o mesmo é válido para a



composição  $i \circ \Sigma : B \rightarrow \text{Cyl}(B)$ . Por fim, usando a propriedade de  $\Sigma$  discutida no parágrafo anterior vemos que  $i \circ \Sigma$  e  $\varepsilon$  fatoram o morfismo codiagonal, pois

$$\varepsilon \circ (i \circ \Sigma) = (\varepsilon \circ i) \circ \Sigma = \nabla \circ \Sigma = \nabla.$$

Afirmamos então que o próprio morfismo  $h : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$  define a homotopia desejada de  $g$  para  $f$  com respeito ao objeto cilindro “trocado”  $(\text{Cyl}(B), i \circ \Sigma, \varepsilon)$ . De fato, note que por um lado

$$h \circ (i \circ \Sigma) \circ j_1 = (h \circ i) \circ (\Sigma \circ j_1) = \langle f, g \rangle \circ j_2 = g,$$

e por outro

$$h \circ (i \circ \Sigma) \circ j_2 = (h \circ i) \circ (\Sigma \circ j_2) = \langle f, g \rangle \circ j_1 = f;$$

portanto  $h \circ (i \circ \Sigma) = \langle g, f \rangle$  conforme desejado. Note que essa demonstração também não necessita da hipótese de cofibrância sobre  $B$ , ou seja, a relação de homotopia à esquerda é *sempre* simétrica.

Resta verificarmos a transitividade da relação, e é aqui onde finalmente usamos a hipótese de cofibrância sobre  $B$ . Suponha que tenhamos três morfismos  $f_1, f_2, f_3 : B \rightarrow X$  tais que  $f_1 \simeq_L f_2$  e  $f_2 \simeq_L f_3$ . A primeira homotopia à esquerda é dada por um morfismo  $h_1 : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$ , enquanto a segunda é dada por um morfismo  $h_2 : \text{Cyl}'(B) \rightarrow X$ , sendo que  $(\text{Cyl}(B), i, \varepsilon)$  e  $(\text{Cyl}'(B), i', \varepsilon')$  são objetos cilindros possivelmente *distintos*.<sup>3</sup> A ideia é que podemos colar os dois cilindros juntos de uma forma que vai nos permitir “concatenar” as homotopias  $h_1$  e  $h_2$  de forma a obtermos uma homotopia de  $f_1$  para  $f_3$ . Inicialmente, consideramos o objeto  $Q \in \mathbf{M}$  dado pelo diagrama de pushout abaixo, onde  $i_1 : B \rightarrow \text{Cyl}(B)$  e  $i'_0 : B \rightarrow \text{Cyl}'(B)$  são componentes das cofibrações  $i : B \sqcup B \rightarrow \text{Cyl}(B)$  e  $i' : B \sqcup B \rightarrow \text{Cyl}'(B)$ , respectivamente.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i_1} & \text{Cyl}(B) \\ i'_0 \downarrow & & \downarrow b \\ \text{Cyl}'(B) & \xrightarrow{t} & Q \end{array}$$

A hipótese de cofibrância sobre  $B$  garante por meio do Lema 4.3 que os morfismos  $i_1$  e  $i'_0$  são cofibrações triviais, e como esse tipo de morfismo é preservado por pushouts, segue que os morfismos  $b : \text{Cyl}(B) \rightarrow Q$  e  $t : \text{Cyl}'(B) \rightarrow Q$  que aparecem acima são também cofibrações triviais. Como os morfismos  $\varepsilon : \text{Cyl}(B) \rightarrow B$  e  $\varepsilon' : \text{Cyl}'(B) \rightarrow B$  satisfazem as igualdades  $\varepsilon \circ i_1 = \varepsilon' \circ i'_0 = \text{id}_B$ , segue da propriedade universal do pushout a existência de um morfismo  $\tilde{\varepsilon} : Q \rightarrow B$  fazendo comutar o diagrama mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{i_1} & \text{Cyl}(B) & & \\ i'_0 \downarrow & & \downarrow b & \searrow \varepsilon & \\ \text{Cyl}'(B) & \xrightarrow{t} & Q & \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} & B \\ & \searrow \varepsilon' & & & \end{array}$$

Note que, como  $\varepsilon$  e  $b$  são equivalências fracas, o mesmo é válido para  $\tilde{\varepsilon}$  por conta da igualdade  $\tilde{\varepsilon} \circ b = \varepsilon$  e da propriedade 2-de-3.

<sup>3</sup>Aqui não podemos usar o resultado de independência de objetos cilindro pois isso requer que o codomínio dos morfismos seja fibrante.

Considere agora o morfismo  $\tilde{i} : B \sqcup B \rightarrow Q$  definido como  $\tilde{i} := \langle b \circ i_0, t \circ i'_1 \rangle$  por meio da propriedade universal do coproduto  $B \sqcup B$ . Afirmamos que  $\tilde{\varepsilon}$  e  $\tilde{i}$  juntos fatoram o morfismo codiagonal. De fato, por um lado temos

$$\tilde{\varepsilon} \circ \tilde{i} \circ j_1 = \tilde{\varepsilon} \circ b \circ i_0 = \varepsilon \circ i_0 = \text{id}_B,$$

e por outro temos também

$$\tilde{\varepsilon} \circ \tilde{i} \circ j_2 = \tilde{\varepsilon} \circ t \circ i'_1 = \varepsilon' \circ i'_1 = \text{id}_B;$$

portanto a propriedade universal do coproduto implica a igualdade  $\tilde{\varepsilon} \circ \tilde{i} = \nabla$  desejada.

Veja que como a homotopia  $h_1 : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$  “termina” em  $f_2$ , enquanto a homotopia  $h_2 : \text{Cyl}'(B) \rightarrow X$  “começa” em  $f_2$ , ou seja, temos as igualdades  $h \circ i_1 = h \circ i'_0 = f_2$ , a camada externa do diagrama abaixo comuta, portanto pela propriedade universal do pushout obtemos o morfismo  $h : Q \rightarrow X$  indicado.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{i_1} & \text{Cyl}(B) \\ \downarrow i'_0 & & \downarrow b \\ \text{Cyl}'(B) & \xrightarrow{t} & Q \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow h_1 \\ \searrow h_2 \\ \dashrightarrow h \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ B \end{array}$$

Afirmamos que o morfismo  $h$  construído dessa forma satisfaz a igualdade  $h \circ \tilde{i} = \langle f_1, f_3 \rangle$ . De fato, pré-compondo com a injeção  $j_1$  no coproduto vemos que

$$h \circ \tilde{i} \circ j_1 = h \circ b \circ i_0 = h_1 \circ i_0 = f_1,$$

e pré-compondo com a outra injeção  $j_2$  vemos também que

$$h \circ \tilde{i} \circ j_2 = h \circ t \circ i'_1 = h_2 \circ i'_1 = f_3;$$

de forma que a igualdade desejada segue da propriedade universal do coproduto novamente.

Infelizmente, embora isso pareça muito ser verdade,  $h$  *não* define uma homotopia de  $f_1$  para  $f_3$ , pois a tripla  $(Q, \tilde{i}, \tilde{\varepsilon})$  *não* define um objeto cilindro para  $B$  já que  $\tilde{i}$  pode não ser uma cofibração. Felizmente, podemos usar o axioma de fatoração para corrigirmos esse defeito sem grandes dores de cabeça. Mais precisamente, usando tal axioma podemos reescrever  $\tilde{i}$  como uma cofibração  $\hat{i} : B \sqcup B \rightarrow \hat{Q}$  seguida de uma fibração trivial  $p : \hat{Q} \rightarrow Q$  conforme mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} B \sqcup B & \xrightarrow{\tilde{i}} & Q \\ \searrow \hat{i} & & \nearrow p \\ & \hat{Q} & \end{array}$$

Veja que a tripla  $(\hat{Q}, \hat{i}, \tilde{\varepsilon} \circ p)$  define realmente um objeto cilindro:  $\hat{i}$  é uma cofibração por hipótese,  $\tilde{\varepsilon} \circ p$  é a composição de duas equivalências fracas e, portanto, uma equivalência fraca também; e os dois morfismos em questão fatoram a codiagonal pois

$$\tilde{\varepsilon} \circ p \circ \hat{i} = \tilde{\varepsilon} \circ \tilde{i} = \nabla.$$

Note agora que o morfismo composto  $h \circ p : \hat{Q} \rightarrow X$  define enfim a homotopia procurada com relação a esse verdadeiro objeto cilindro como mostra a sequência de igualdades

$$h \circ p \circ \hat{i} = h \circ \tilde{i} = \langle f_1, f_3 \rangle. \quad \blacksquare$$

Introduzimos agora uma noção de certa forma dual àquela de objeto cilindro.

**4.7 Definição.** Sejam  $\mathbf{M}$  uma categoria modelo e  $B \in \mathbf{M}$  um objeto qualquer. Um **objeto de caminhos** para  $B$  é uma fatoração do morfismo diagonal  $\Delta : B \rightarrow B \times B$  como uma equivalência fraca seguida de uma fibração. Mais explicitamente, um objeto de caminhos para  $B$  é uma tripla  $(P(B), c, p)$ , onde  $P(B) \in \mathbf{M}$  é um objeto da categoria,  $c : B \xrightarrow{\sim} P(B)$  é uma equivalência fraca, e  $p : P(B) \twoheadrightarrow B \times B$  é uma fibração tais que  $\Delta = p \circ c$ , conforme mosrado no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} & & P(B) \\ & \nearrow c & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\Delta} & B \times B \end{array}$$

Quando o morfismo  $c$  é também uma cofibração, portanto uma cofibração trivial, dizemos que a tripla  $(P(B), c, p)$  define um objeto de caminhos **forte** para  $B$ .

**4.8 Observação.** O axioma de fatoração (M5) garante que o morfismo diagonal  $\Delta : B \times B \rightarrow B$  pode ser fatorado como uma cofibração trivial seguida de uma fibração, portanto todo objeto de uma categoria modelo admite um objeto de caminhos que é até mesmo forte. Como no caso do objetos cilindro, nem sempre esse modelo obtido pelo axioma de fatoração é o mais conveniente para trabalharmos, de forma que é vantajoso considerarmos também objetos de caminhos que não sejam fortes.

Neste caso temos também algumas notações associadas. Dado um objeto cilindro  $(P(B), c, p)$  para  $B$ , se  $\pi_1, \pi_2 : B \times B \rightarrow B$  são as projeções canônicas associadas ao produto, denotaremos os morfismos compostos  $\pi_1 \circ p, \pi_2 \circ p : P(B) \rightarrow B$  por  $p_0$  e  $p_1$ , respectivamente. Note então que a fibração  $p$  é precisamente o morfismo induzido por  $p_0$  e  $p_1$  por meio da propriedade universal do produto, ou seja,  $p = (p_0, p_1)$ . Como no caso de objetos cilindros, os índices usados na notação ficam claros quando examinamos o caso topológico clássico, onde o objeto de caminhos é dado pelo espaço de mapas  $B^I$  munido da topologia compacto-aberta, a equivalência fraca  $c : B \rightarrow B^I$  associa a cada ponto  $b \in B$  o caminho  $c(b) : I \rightarrow B$  constante naquele ponto, e a fibração  $p : B^I \rightarrow B \times B$  associa a um caminho  $\gamma \in B^I$  seus pontos inicial e final, ou seja,  $p(\gamma) := (\gamma(0), \gamma(1))$ . Nesse caso, os mapas  $p_0, p_1 : B^I \rightarrow B$  introduzidos acima são simplesmente os mapas de avaliação no instante inicial 0 e no instante final 1, respectivamente.

Vamos agora percorrer um caminho completamente análogo ao que percorremos para objetos cilindros. Começamos inicialmente verificando algumas de suas propriedades básicas.

**4.9 Lema.** *Sejam  $\mathbf{M}$  uma categoria modelo,  $B \in \mathbf{M}$  um objeto, e  $(P(B), c, p)$  um objeto de caminhos qualquer para  $B$ .*

- (i) *Os morfismos  $p_0, p_1 : P(B) \rightarrow B$  são equivalência fracas.*
- (ii) *Se  $B$  é um objeto fibrante, então os morfismos  $p_0, p_1 : P(B) \rightarrow B$  são também fibrações e, portanto, fibrações triviais.*

*Demonstração.* (i) Note que pela definição de  $p_0$  e do morfismo diagonal  $\Delta$  temos

$$p_0 \circ c = \pi_1 \circ p \circ c = \pi_1 \circ \Delta = \text{id}_B.$$

Ora, como  $\text{id}_B$  é uma equivalência fraca, o mesmo valendo para  $c$  pela definição de objeto de caminhos, segue da propriedade 2-de-3 que  $p_0$  é uma equivalência fraca. A demonstração de que  $p_1$  também é uma equivalência fraca segue de um raciocínio completamente análogo.

(ii) Lembremos que em qualquer categoria, um produto por der interpretado como um pull-back sobre o objeto final. Mais precisamente, se  $*$   $\in \mathbf{M}$  denota um objeto final qualquer de  $\mathbf{M}$ , então o quadrado comutativa abaixo é um pullback.

$$\begin{array}{ccc} B \times B & \xrightarrow{\pi_1} & B \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow !_B \\ B & \xrightarrow{!_B} & * \end{array}$$

Como  $B$  é por hipótese fibrante, ou seja, o morfismo  $!_B : B \rightarrow *$  é uma fibração, e como fibrações são preservadas por pullbacks de acordo com a Corolário 1.9, concluímos que as projeções canônicas  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são fibrações também. Segue então que os morfismos  $p_0 = \pi_1 \circ p$  e  $p_1 = \pi_2 \circ p$  são composições de fibrações e, portanto, fibrações também de acordo com o Corolário 1.9. ■

Objetos de caminhos dão origem a uma noção de homotopia entre morfismos que é dual à noção de homotopia à esquerda introduzida anteriormente em termos de objetos cilindros.

**4.10 Definição.** Dois morfismos  $f, g : B \rightarrow X$  em uma categoria modelo  $\mathbf{M}$  são ditos **homotópicos à direita** se existe um objeto de caminhos  $(P(X), c, p)$  para  $X$  e um morfismo  $h : B \rightarrow P(X)$  tal que  $p \circ h = (f, g)$ , conforme mostrado no diagrama abaixo. Neste caso, denotamos essa relação por  $f \sim_R g$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & P(X) & & \\ & \nearrow h & \downarrow p & \nwarrow c & \\ B & \xrightarrow{(f,g)} & X \times X & \xleftarrow{\Delta} & X \end{array}$$

Veja que a definição acima recupera a definição clássica da Topologia. O mapa  $h : B \rightarrow X^I$  define uma família de caminhos em  $X$  parametrizada pelos pontos do espaço  $B$ . Para cada  $b \in B$ , o caminho associada  $h(b)$  tem  $f(b)$  como ponto inicial pois

$$[h(b)](0) = p_0(h(b)) = \pi_1(p(h(b))) = \pi_1(f(b), g(b)) = f(b),$$

e analogamente,  $h(b)$  tem como ponto final a imagem  $g(b)$ . Assim, a família de caminhos definida pela homotopia  $h$  em certo sentido “conecta” a imagem do estágio inicial  $f$  da homotopia ao estágio final  $g$  da mesma.

Nosso objetivo agora é demonstrar um resultado análogo à Proposição 4.5 para homotopias à direita.

**4.11 Proposição.** *Suponha que  $f, g : B \rightarrow X$  sejam dois morfismos homotópicos à direita em uma categoria modelo  $\mathbf{M}$ .*

1. *Dado um morfismo  $\alpha : A \rightarrow B$ , os morfismos compostos  $f \circ \alpha, g \circ \alpha : A \rightarrow X$  são homotópicos à direita.*
2. *Se  $B$  é cofibrante, então a homotopia entre  $f$  e  $g$  independe do objeto de caminhos para  $X$ .*
3. *Se  $B$  é cofibrante, então dado qualquer morfismo  $\beta : X \rightarrow Y$ , os morfismos compostos  $\beta \circ f, \beta \circ g : B \rightarrow Y$  são homotópicos à direita.*

*Demonstração.* 1. Como  $f$  e  $g$  são homotópicos à direita, existe *algum* objeto de caminhos  $(P(X), c, p)$  para  $X$  juntamente com um morfismo  $h : B \rightarrow P(X)$  tal que  $p \circ h = (f, g)$ . Afirmamos

que o morfismo composto  $h \circ \alpha : A \rightarrow P(X)$  define uma homotopia à direita de  $f \circ \alpha$  para  $g \circ \alpha$ . De fato, basta para isso notarmos que

$$p \circ h \circ \alpha = (f, g) \circ \alpha = (f \circ \alpha, g \circ \alpha),$$

sendo que a última igualdade é uma consequência direta da propriedade universal que caracteriza o produto  $X \times X$ .

2. Considere um objeto de caminhos  $(P(X), c, p)$  para  $X$  e uma homotopia à direita  $h : B \rightarrow P(X)$  como acima. Afirmamos inicialmente que podemos encontrar uma outra homotopia à direita entre  $f$  e  $g$  que esteja definida em um objeto de caminhos *forte* para  $X$ . Inicialmente, aplicamos o axioma de fatoração (M5) à equivalência fraca  $c : X \rightarrow P(X)$  para obtermos uma cofibração trivial  $i : X \xrightarrow{\sim} P$  seguida de uma fibração  $q : P \rightarrow P(X)$  tais que  $c = q \circ i$ , conforme mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c} & P(X) \\ & \searrow i & \nearrow q \\ & P & \end{array}$$

Afirmamos que a tripla  $(P, i, p \circ q)$  define um objeto de caminhos forte para  $X$ . De fato,  $i$  é uma cofibração trivial pela fatoração acima, enquanto  $p \circ q$  é a composição de duas fibrações e, portanto, uma fibração também. Além disso, esses morfismos fatoram o morfismo diagonal de  $X$  já que

$$(p \circ q) \circ i = p \circ (q \circ i) = p \circ c = \Delta.$$

Tendo em mãos o objeto de caminhos forte acima, vejamos como obter uma homotopia que tome valores nele a partir da homotopia  $h$  já existente. Veja inicialmente que o problema de levantamento abaixo admite uma solução  $H : B \rightarrow P$ , já que  $!_B : \emptyset \rightarrow B$  é uma cofibração pela hipótese de  $B$  ser cofibrante, e  $q : P \rightarrow P(X)$  é uma fibração trivial pela fatoração acima e pela propriedade 2-de-3.

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{!_P} & P \\ \downarrow !_B & \nearrow H & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{h} & P(X) \end{array}$$

Esse morfismo  $H$  é precisamente a homotopia à direita procurada, pois

$$(p \circ q) \circ H = p \circ (q \circ H) = p \circ h = (f, g).$$

Podemos assumir então sem perda de generalidade que o objeto de caminhos  $(P(X), c, p)$  no qual está definida a homotopia à direita entre  $f$  e  $g$  é forte. Se  $(P', c', p')$  é outro objeto de caminhos *qualquer* para  $X$ , vejamos como construir uma homotopia à direita  $h' : B \rightarrow P'$  tomando valores nesse objeto. Note primeiro que o problema de levantamento dado pelo quadrado comutativo abaixo admite uma solução  $\phi$ , já que  $c$  é uma cofibração trivial, e  $p'$  é uma fibração.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c'} & P' \\ \downarrow c & \nearrow \phi & \downarrow p' \\ P(X) & \xrightarrow{p} & X \times X \end{array}$$

Basta notar agora que a composição  $\phi \circ h : B \rightarrow P'$  define a homotopia à direita desejada, pois

$$p' \circ \phi \circ h = p \circ h = (f, g).$$

3. Suponha que  $(P(X), c_X, p_X)$  seja um objeto de caminhos forte para  $X$  e que  $(P(Y), c_Y, p_Y)$  seja um objeto de caminhos qualquer para  $Y$ . Sendo  $B$  cofibrante, segue do item 2 que certamente existe uma homotopia de  $f$  para  $g$  em termos do objeto de caminhos  $P(X)$ , ou seja, um morfismo  $h : B \rightarrow P(X)$  tal que  $p_X \circ h = (f, g)$ . A ideia é obtermos um morfismo  $\phi : P(X) \rightarrow P(Y)$  que nos permita “empurrar” a homotopia  $h$  ao longo do morfismo  $\beta$ , e para isso é claro que vamos usar o axioma de levantamento.

Note que o quadrado abaixo é comutativo, pois

$$p_Y \circ c_Y \circ \beta = \Delta_Y \circ \beta = \beta \times \beta = (\beta \times \beta) \circ \text{id}_X = (\beta \times \beta) \circ \Delta_X = (\beta \times \beta) \circ c_X \circ p_X.$$

Aplicando o axioma de levantamento (M4) obtemos então o levantamento  $\phi : P(X) \rightarrow P(Y)$  conforme indicado.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c_Y \circ \beta} & P(Y) \\ c_X \downarrow \wr & \nearrow \phi & \downarrow p_Y \\ P(X) & \xrightarrow{(\beta \times \beta) \circ p_X} & Y \times Y \end{array}$$

Afirmamos que o morfismo composto  $\phi \circ h : B \rightarrow P(Y)$  define a homotopia à direita desejada então  $\beta \circ f$  e  $\beta \circ g$ . De fato, basta notar que

$$p_Y \circ \phi \circ h = (\beta \times \beta) \circ p_X \circ h = (\beta \times \beta) \circ (f, g) = (\beta \circ f, \beta \circ g). \quad \blacksquare$$

Em geral, dizemos simplesmente que dois morfismos  $f, g : B \rightarrow X$  em uma categoria modelo são **homotópicos** quando eles são homotópicos simultaneamente à esquerda e à direita. O resultado abaixo mostra que, quando o domínio e o codomínio são bons, a existência de uma homotopia de um dos lados já garante a existência de uma homotopia do outro lado, portanto o conceito de homotopia acima se reduz aos outros dois introduzidos anteriormente.

**4.12 Proposição.** *Considere dois morfismos  $f, g : B \rightarrow X$  em uma categoria modelo  $\mathbf{M}$ . Se  $B$  é cofibrante, e  $X$  é fibrante, então as afirmações a seguir são equivalentes:*

1.  $f$  e  $g$  são homotópicos à esquerda;
2.  $f$  e  $g$  são homotópicos à direita;
3.  $f$  e  $g$  são homotópicos.

*Demonstração.* É claro que a terceira afirmação implica a primeira, logo, a fim de mostrarmos a equivalência entre as duas, basta mostrarmos que toda homotopia à esquerda dá origem a uma homotopia à direita também.

Sejam  $(\text{Cyl}(B), i, \varepsilon)$  um objeto cilindro forte para  $B$  e  $(P(X), c, p)$  um objeto de caminhos qualquer para  $X$ . Como  $X$  é por hipótese fibrante, podemos assumir sem perda de generalidade que a homotopia à esquerda entre  $f$  e  $g$  é com relação ao cilindro  $\text{Cyl}(B)$ , ou seja, podemos assumir a existência de um morfismo  $h : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$  tal que  $h \circ i = \langle f, g \rangle$ .

Considere o problema de levantamento dado pelo quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{c \circ f} & P(X) \\ i_0 \downarrow \wr & \nearrow \phi & \downarrow p \\ \text{Cyl}(B) & \xrightarrow{(f \circ \varepsilon, h)} & X \times X \end{array}$$

A comutatividade do quadrado segue diretamente do fato de  $h$  ser uma homotopia de  $f$  para  $g$ , já que

$$(f \circ \varepsilon, h) \circ i_0 = (f \circ \varepsilon \circ i_0, h \circ i_0) = (f \circ \text{id}_B, f) = (f, f) = \Delta \circ f = p \circ c \circ f.$$

Além disso, o fato de  $i_0$  ser uma cofibração trivial segue da hipótese do cilindro  $\text{Cyl}(B)$  ser forte de acordo com o Lema 4.3. Podemos então encontrar um morfismo diagonal  $\phi : \text{Cyl}(B) \rightarrow P(X)$  conforme indicado acima. Afirmamos que a homotopia à direita desejada é dada pelo morfismo composto  $\phi \circ i_1 : B \rightarrow P(X)$ . De fato, note que

$$p \circ (\phi \circ i_1) = (p \circ \phi) \circ i_1 = (f \circ \varepsilon, h) \circ i_1 = (f \circ \varepsilon \circ i_1, h \circ i_1) = (f \circ \text{id}_B, g) = (f, g).$$

Também é claro que a terceira afirmação implica a segunda, de forma que resta apenas mostrarmos a implicação reversa, ou seja, que toda homotopia à direita nas condições do enunciado dá origem a uma homotopia à esquerda também. A estratégia é dualizarmos a demonstração anterior. Assim, sejam  $(\text{Cyl}(B), i, \varepsilon)$  um objeto cilindro qualquer para  $B$  e  $(P(X), c, p)$  um objeto de caminhos forte para  $X$ . Como  $B$  é cofibrante por hipótese, segue da Proposição 4.11 que existe uma homotopia à direita de  $f$  para  $g$  com relação ao objeto de caminhos  $P(X)$ , ou seja, existe um morfismo  $h : B \rightarrow P(X)$  tal que  $p \circ h = (f, g)$ . Considere o quadrado mostrado abaixo, o qual é comutativo pois

$$p_0 \circ \langle c \circ f, h \rangle = \langle p_0 \circ c \circ f, p_0 \circ h \rangle = \langle \text{id}_X \circ f, f \rangle = \langle f, f \rangle = f \circ \nabla_B = f \circ \varepsilon \circ i.$$

$$\begin{array}{ccc} B \sqcup B & \xrightarrow{\langle c \circ f, h \rangle} & P(X) \\ i \downarrow & \dashrightarrow \psi & \downarrow p_0 \\ \text{Cyl}(B) & \xrightarrow{f \circ \varepsilon} & X \end{array}$$

Sendo  $P(X)$  um objeto de caminhos forte, sabemos do Lema 4.9 que  $p_0 : P(X) \rightarrow X$  é de fato uma fibração trivial; e ademais,  $i : B \sqcup B \rightarrow \text{Cyl}(B)$  é uma cofibração pela própria definição de objeto cilindro. O axioma de levantamento (M4) fornece então o morfismo diagonal  $\psi : \text{Cyl}(B) \rightarrow P(X)$  indicado acima. Note enfim que o morfismo composto  $p_1 \circ \psi : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$  define a homotopia à esquerda procurada como mostra a sequência de igualdades

$$p_1 \circ \psi \circ i = p_1 \circ \langle c \circ f, h \rangle = \langle p_1 \circ c \circ f, p_1 \circ h \rangle = \langle \text{id}_X \circ f, g \rangle = \langle f, g \rangle. \quad \blacksquare$$