

# Teoria de Homotopia Abstrata

Edmundo Martins

25 de agosto de 2023

## 1 Categorias modelo

**1.1 Definição.** Seja  $M$  uma categoria localmente pequena, completa e co-completa. Uma **estrutura modelo** em  $M$  consiste de três classes de morfismos  $\mathcal{W}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \subseteq \text{Mor}(M)$  cujos elementos são chamados, respectivamente, **equivalências fracas**, **fibrações** e **cofibrações**, as quais devem satisfazer as seguintes condições:

- (M1) A categoria  $M$  é bicompleta, ou seja, admite todos os limites e colimites indexados por categorias pequenas.
- (M2) (Propriedade 2-de-3) Dados morfismos  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  em  $M$ , se dois dos morfismos do conjunto  $\{f, g, g \circ f\}$  estiverem em  $\mathcal{W}$ , então o terceiro também deve estar.
- (M3) (Propriedade de retração) Se um morfismo  $f : A \rightarrow X$  é retração de um outro morfismo  $g : B \rightarrow Y$ , ou seja, se existe um diagrama comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_A & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & A \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_X & & \end{array}$$

e  $g$  pertence a  $\mathcal{W}$  (ou a  $\mathcal{F}$ , ou a  $\mathcal{C}$ ), então  $f$  também pertence a  $\mathcal{W}$  (ou a  $\mathcal{F}$ , ou a  $\mathcal{C}$ , respectivamente). Em suma, as classes  $\mathcal{W}, \mathcal{F}$  e  $\mathcal{C}$  são fechadas por retrações.

- (M4) (Propriedade de levantamento) Dado um diagrama comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

onde  $i$  é uma cofibração, e  $p$  é uma fibração; se um dos dois morfismos  $i$  ou  $p$  é também uma equivalência fraca, então o diagrama admite um levantamento, ou seja, existe um morfismo  $f : B \rightarrow X$  que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow f & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

(M5) (Propriedade de fatoração) Qualquer morfismo  $f : X \rightarrow Y$  em  $\mathbf{M}$  pode ser fatorado nas duas formas mostradas abaixo,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow i & \nearrow p \\ & \hat{X} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow j & \nearrow q \\ & \tilde{Y} & \end{array}$$

onde  $p$  é simultaneamente uma fibração e uma equivalência fraca, enquanto  $j$  é simultaneamente uma cofibração e uma equivalência fraca.

Vamos introduzir um pouco de terminologia antes de fazermos alguns comentários sobre a definição acima. Os morfismos de  $\mathbf{M}$  que pertencem à classe  $\mathcal{W} \cap \mathcal{F}$  são chamados de **fibrações triviais** ou **fibrações acíclicas**, enquanto os morfismos que pertencem à classe  $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}$  são chamados de **cofibrações triviais** ou **cofibrações acíclicas**. Usando essa terminologia o axioma de fatoração (M5) pode ser enunciado da seguinte forma: todo morfismo em uma categoria modelo pode ser fatorado como uma cofibração seguido de uma fibração trivial, ou como uma cofibração trivial seguido de uma fibração.

**1.2 Observação.** Lembremos que, dados objetos  $X$  e  $Y$  de uma categoria  $\mathbf{C}$  qualquer, dizemos que  $X$  é um **retrato** de  $Y$  se existem morfismos  $s : X \rightarrow Y$  e  $r : Y \rightarrow X$  tais que  $r \circ s = \text{id}_X$ . Comumente nos referimos ao morfismo  $s$  por **seção** e ao morfismo  $r$  por **retração**. A condição  $r \circ s = \text{id}_X$  garante que  $s$  seja um monomorfismo. De fato, se  $f, g : W \rightarrow X$  são morfismos tais que  $s \circ f = s \circ g$ , então

$$f = \text{id}_X \circ f = r \circ s \circ f = r \circ s \circ g = \text{id}_X \circ g = g.$$

Isso nos permite encarar  $X$  como um subobjeto de  $Y$ , e o morfismo  $r$  então intuitivamente deforma  $Y$  para esse subobjeto, mas de forma a mantê-lo fixado. Note que a condição  $r \circ s = \text{id}_X$  garante também que o morfismo  $r$  seja um epimorfismo.

A noção de retração que aparece no axioma (M3) de uma estrutura modelo enunciado acima pode ser interpretada nesse sentido em uma categoria adequada. Lembremos que toda categoria  $\mathbf{C}$  dá origem a uma categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{C})$ . Os objetos dessa categoria são precisamente morfismos  $f : A \rightarrow B$  na categoria inicial  $\mathbf{C}$ , e dados dois tais objetos  $f : A \rightarrow B$  e  $g : X \rightarrow Y$ , um morfismo do tipo  $(f : A \rightarrow B) \rightarrow (g : X \rightarrow Y)$  na categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  é dado por um par de morfismos  $(\alpha : A \rightarrow X, \beta : B \rightarrow Y)$  satisfazendo a igualdade  $\beta \circ f = g \circ \alpha$ . Podemos então visualizar esse morfismo em  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  na forma de um quadrado comutativo como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

A composição de morfismos é definida “colando” quadrados comutativos adjacentes. Mais precisamente, dados três objetos  $f : X_1 \rightarrow Y_1$ ,  $g : X_2 \rightarrow Y_2$  e  $h : X_3 \rightarrow Y_3$  na categoria  $\text{Arr}(\mathbf{C})$ , e dados também dois morfismos componíveis

$$(\alpha_1 : X_1 \rightarrow X_2, \beta_1 : Y_1 \rightarrow Y_2) \quad (\alpha_2 : X_2 \rightarrow X_3, \beta_2 : Y_2 \rightarrow Y_3),$$

sua composição é o morfismo

$$(\alpha_2, \beta_2) \circ (\alpha_1, \beta_1) : (f : X_1 \rightarrow Y_1) \rightarrow (h : X_3 \rightarrow Y_3)$$

em  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  definido pelo par

$$(\alpha_2, \beta_2) \circ (\alpha_1, \beta_1) := (\alpha_2 \circ \alpha_1 : X_1 \rightarrow X_3, \beta_2 \circ \beta_1 : Y_1 \rightarrow Y_3).$$

Essa composição pode também ser visualizada como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & X_3 \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Y_3 \end{array} \implies \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_2 \circ \alpha_1} & X_3 \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta_2 \circ \beta_1} & Y_3 \end{array}$$

A associatividade dessa composição via colagem segue diretamente da associatividade da composição na categoria inicial  $\mathbf{C}$ . Por fim, dado um objeto  $f : X \rightarrow Y$  qualquer, o morfismo idêntico associado a ele é dado pelo par  $\text{id}_f := (\text{id}_X, \text{id}_Y)$ , conforme mostrado no quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \end{array}$$

Note agora que, se o objeto  $f : A \rightarrow B$  é um retrato do objeto  $g : X \rightarrow Y$  na categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{M})$ , então por definição existem morfismos  $s_1 : A \rightarrow X$ ,  $s_2 : B \rightarrow Y$ ,  $r_1 : X \rightarrow A$  e  $r_2 : Y \rightarrow B$  tais que  $(r_1, r_2) \circ (s_1, s_2) = \text{id}_f$ , o que também pode ser expresso pelo diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_A & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ A & \xrightarrow{s_1} & X & \xrightarrow{r_1} & A \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{s_2} & Y & \xrightarrow{r_2} & B \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_B & & \end{array}$$

Esse é precisamente o diagrama que aparece no axioma de retração na definição de uma estrutura modelo. Podemos então reformular tal axioma dizendo que as classes de equivalências fracas, fibrações e cofibrações são todas fechadas por *retrações na categoria de setas*  $\text{Arr}(\mathbf{C})$ .

**1.3 Observação.** Quando trabalhamos com categorias modelo, no lugar de dizermos explicitamente que um morfismo é uma equivalência fraca, ou uma cofibração, ou uma fibração, simplesmente adornarmos de alguma forma a seta que representa o morfismo em questão. A convenção notacional que seguiremos nesse aspecto é a seguinte:

- uma equivalência fraca será denotada por  $\xrightarrow{\sim}$ ;
- uma cofibração será denotada por  $\twoheadrightarrow$ ;
- uma fibração será denotada por  $\rightarrowtail$ .

Também denotaremos cofibrações ou fibrações triviais por uma combinação dos símbolos acima:

- uma cofibração trivial será denotada por  $\xrightarrow{\sim}\twoheadrightarrow$ ;
- uma fibração trivial será denotada por  $\rightarrowtail\sim$ .

Seguindo essa convenção notacional, podemos, por exemplo, enunciar o axioma de levantamento (M4) da seguinte forma: em uma categoria modelo, todo quadrado comutativo da forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow \wr & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

admite um levantamento  $f : B \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow \wr & \nearrow f & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

e todo quadrado comutativo da forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \wr \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

admite um levantamento  $f : B \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow f & \wr \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

Usando a mesma convenção, o axioma de fatoração (M5) pode ser enunciado da seguinte maneira: em uma categoria modelo, todo morfismo  $f : X \rightarrow Y$  possui duas fatoraões como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \swarrow i & & \nearrow p \\ & \hat{X} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \swarrow j & & \nearrow q \\ & \tilde{Y} & \end{array}$$

## 1.1 Fatorações em categorias

Antes de investigarmos mais a fundo as propriedades de categorias modelo, vamos investigar parte de sua estrutura sob uma perspectiva mais geral. O ponto central da discussão é que a definição de uma categoria modelo pode ser encapsulada totalmente pela existência de fatorações em cofibrações e fibrações que estão relacionadas por condições de levantamento.

Inicialmente, definimos a noção de levantamento de forma mais geral.

**1.4 Definição.** Sejam  $\mathbf{C}$  uma categoria e  $\mathcal{A} \subseteq \text{Mor}(\mathbf{C})$  uma classe qualquer de morfismos. Dizemos que um morfismo  $f : A \rightarrow B$  em  $\mathbf{C}$  **satisfaz a propriedade de levantamento à esquerda com relação a  $\mathcal{A}$**  se todo quadrado comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

onde  $p : X \rightarrow Y$  pertence a  $\mathcal{A}$ , admite um levantamento, ou seja, existe um morfismo  $h : B \rightarrow X$  que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Dualmente, dizemos que um morfismo  $g : X \rightarrow Y$  **satisfaz a propriedade de levantamento à direita com relação a  $\mathcal{A}$**  se todo quadrado comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

onde  $i : A \rightarrow B$  pertence a  $\mathcal{A}$ , admite um levantamento  $h : B \rightarrow X$  como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Tendo a definição acima em mãos, podemos formular uma noção categórica de fatoração geral o suficiente para englobar a situação que aparece no estudo de categorias modelo.

**1.5 Definição.** Um **sistema de fatoração fraco** em uma categoria  $\mathbf{C}$  consiste de um par  $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ , onde  $\mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq \text{Mor}(\mathbf{C})$  são duas classes de morfismos, satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Todo morfismo  $f \in \text{Mor}(\mathbf{C})$  pode ser escrito na forma  $f = f_L \circ f_R$  com  $f_L \in \mathcal{L}$  e  $f_R \in \mathcal{R}$ ;

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f_L \in \mathcal{L}} & Y & \xrightarrow{f_R \in \mathcal{R}} & Z \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & f & & \end{array}$$

- (ii)  $\mathcal{L}$  consiste precisamente dos morfismos de  $\mathbf{C}$  que satisfazem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a  $\mathcal{R}$ ;
- (iii)  $\mathcal{R}$  consiste precisamente dos morfismos de  $\mathbf{C}$  que satisfazem a propriedade de levantamento à direita com relação a  $\mathcal{L}$ .

Os principais exemplos de sistemas de fatoração fracos nos quais estaremos interessados envolvem as cofibrações e fibrações triviais em uma categoria modelo, embora talvez ainda não seja claro como essas classes dão origem a um sistema de fatoração. Antes de detalharmos esse exemplo, entretanto, vamos demonstrar algumas propriedades gerais de sistemas de fatoração fracos.

**1.6 Proposição.** *Suponha que  $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$  seja um sistema de fatoração fraco em uma categoria  $\mathbf{C}$ . Valem as seguintes propriedades:*

1. *Ambas as classes contêm todos os isomorfismos de  $\mathbf{C}$ .*
2. *Ambas as classes são fechadas por composição.*
3. *Ambas as classes são fechadas por retratos na categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{C})$ .*
4.  *$\mathcal{L}$  é fechada pela formação de pushouts, enquanto  $\mathcal{R}$  é fechada pela formação de pullbacks.*

5.  $\mathcal{L}$  é fechada por coprodutos, enquanto  $\mathcal{R}$  é fechada por produtos.

*Demonstração.* 1. Suponha que  $f : A \rightarrow B$  seja um isomorfismo. Sabemos da definição de sistema de fatoração fraco que  $\mathcal{L}$  consiste precisamente dos morfismos de  $\mathcal{C}$  que satisfazem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a  $\mathcal{R}$ . Considere então um quadrado comutativo como abaixo, onde  $g : X \rightarrow Y$  é um morfismo pertencente à classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Sendo  $f$  um isomorfismo por hipótese, podemos considerar o morfismo inverso  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , e definir então um morfismo  $h : B \rightarrow X$  por meio da composição  $h := \alpha \circ f^{-1}$ . Note então que por um lado

$$h \circ f = \alpha \circ f^{-1} \circ f = \alpha \circ \text{id}_A = \alpha,$$

e por outro

$$g \circ h = g \circ \alpha \circ f^{-1} = \beta \circ f \circ f^{-1} = \beta \circ \text{id}_B = \beta;$$

mostando que  $h$  faz comutar o diagrama abaixo, definindo então um levantamento para o quadrado comutativo original.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

A demonstração de que  $\mathcal{R}$  contém todos os isomorfismos é análoga. Se  $g : X \rightarrow Y$  é um isomorfismo, considere o quadrado comutativo abaixo onde  $f : A \rightarrow B$  pertence à classe  $\mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Dessa vez definimos um morfismo  $h : B \rightarrow Y$  pela composição  $h := g^{-1} \circ \beta$ , e notamos que esse morfismo satisfaz a igualdade

$$g \circ h = g \circ g^{-1} \circ \beta = \text{id}_Y \circ \beta = \beta,$$

e também a igualdade

$$h \circ f = g^{-1} \circ \beta \circ f = g^{-1} \circ g \circ \alpha = \text{id}_X \circ \alpha = \alpha;$$

portanto  $h$  define um levantamento neste caso também.

2. Suponha que  $f_1 : A \rightarrow B$  e  $f_2 : B \rightarrow C$  sejam dois morfismos pertencentes à classe  $\mathcal{L}$ . A fim de mostrarmos que sua composição  $f_2 \circ f_1 : A \rightarrow C$  também pertence a  $\mathcal{L}$ , vamos mostrar que essa composição satisfaz a condição de levantamento à esquerda com relação a  $\mathcal{R}$ . Considere então um quadrado comutativo como abaixo, onde  $g : X \rightarrow Y$  pertence à classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f_2 \circ f_1 \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

A partir do quadrado acima podemos obter o quadrado comutativo mostrado abaixo, o qual admite um levantamento  $h_1 : B \rightarrow Y$  pois  $f_1 \in \mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f_1 \downarrow & \nearrow h_1 & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta \circ f_2} & Y \end{array}$$

Usando o levantamento  $h_1$  obtemos um terceiro quadrado comutativo como mostrado abaixo, o qual admite um levantamento  $h_2 : C \rightarrow X$  pois  $f_2 \in \mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h_1} & X \\ f_2 \downarrow & \nearrow h_2 & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Afirmamos que  $h_2 : C \rightarrow X$  define também um levantamento para o quadrado comutativo considerado inicialmente. De fato, por um lado a igualdade  $g \circ h_2 = \beta$  segue diretamente da comutatividade do último quadrado acima, e por outro temos a sequência de igualdades

$$h_2 \circ f_2 \circ f_1 = h_1 \circ f_1 = \alpha;$$

portanto  $h_2$  satisfaz as condições de comutatividades necessárias.

A demonstração da segunda parte é análoga. Suponha que  $g_1 : X \rightarrow Y$  e  $g_2 : Y \rightarrow Z$  sejam dois morfismos pertencentes à classe  $\mathcal{R}$ , e considere o quadrado comutativo abaixo, onde  $f : A \rightarrow B$  pertence à classe  $\mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g_2 \circ g_1 \\ B & \xrightarrow{\beta} & Z \end{array}$$

Considere então o quadrado comutativo abaixo, o qual admite um levantamento  $h_2 : B \rightarrow Y$  pois  $g_2$  pertence a  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g_1 \circ \alpha} & Y \\ f \downarrow & \nearrow h_2 & \downarrow g_2 \\ B & \xrightarrow{\beta} & Z \end{array}$$

Usando  $h_2$  consideramos então o quadrado comutativo abaixo, o qual também admite um levantamento  $h_1 : B \rightarrow X$  pois  $g_1 \in \mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & \nearrow h_1 & \downarrow g_1 \\ B & \xrightarrow{h_2} & Y \end{array}$$

O morfismo  $h_1$  é precisamente o procurado, já que por um lado a igualdade  $h_1 \circ f = \alpha$  segue diretamente da comutatividade acima, e por outro temos a sequência de igualdades

$$g_2 \circ g_1 \circ h_1 = g_2 \circ h_2 = \beta;$$

mostrando então que  $h_1$  define um levantamento para o quadrado comutativo inicial.

3. Suponha que o morfismo  $f : A \rightarrow B$  seja um retrato do morfismo  $g : X \rightarrow Y$  o qual pertence à classe  $\mathcal{L}$ . Temos então por definição o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_A & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 A & \xrightarrow{s_1} & X & \xrightarrow{r_1} & A \\
 f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 B & \xrightarrow{s_2} & Y & \xrightarrow{r_2} & B \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \text{id}_B & & 
 \end{array}$$

A fim de mostrarmos que  $f$  também pertence a  $\mathcal{L}$ , considere o quadrado comutativo abaixo onde  $p : P \rightarrow Q$  é um morfismo qualquer da classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\alpha} & P \\
 f \downarrow & & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{\beta} & Q
 \end{array}$$

A partir deste quadrado e do diagrama anterior produzimos o quadrado comutativo, o qual admite um levantamento  $h : Y \rightarrow P$  já que  $g \in \mathcal{L}$  por hipótese.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\alpha \circ r_1} & P \\
 g \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\
 Y & \xrightarrow{\beta \circ r_2} & Q
 \end{array}$$

Afirmamos então que o morfismo  $H : B \rightarrow P$  dado pela composição  $H := h \circ s_2$  define um levantamento para o quadrado inicial. De fato, por um lado temos

$$H \circ f = h \circ s_2 \circ f = h \circ g \circ s_1 = \alpha \circ r_1 \circ s_1 = \alpha \circ \text{id}_A = \alpha,$$

e por outro temos também

$$p \circ H = p \circ h \circ s_2 = \beta \circ r_2 \circ s_2 = \beta \circ \text{id}_B = \beta.$$

Supondo ainda que  $f$  seja um retrato de  $g$ , considere agora o caso em que  $g$  pertence à classe  $\mathcal{R}$ . A fim de mostrarmos que  $f$  também pertence a  $\mathcal{R}$ , considere o quadrado comutativo abaixo onde  $j : M \rightarrow N$  é um morfismo qualquer da classe  $\mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\varphi} & A \\
 j \downarrow & & \downarrow f \\
 N & \xrightarrow{\psi} & B
 \end{array}$$

A partir disso obtemos o quadrado comutativo abaixo, o qual admite um levantamento  $h : N \rightarrow X$  pois  $g$  pertence à classe  $\mathcal{R}$  por hipótese.

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{s_1 \circ \varphi} & X \\
 j \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\
 N & \xrightarrow{s_2 \circ \psi} & Y
 \end{array}$$



Afirmamos então que  $H : N \rightarrow A$  definido por  $H := r_1 \circ h$  é o levantamento procurado para o quadrado considerado inicialmente. De fato, por um lado temos as igualdades

$$H \circ j = r_1 \circ h \circ j = r_1 \circ s_1 \circ \varphi = \text{id}_A \circ \varphi = \varphi,$$

e por outro temos também as igualdades

$$f \circ H = f \circ r_1 \circ h = r_2 \circ g \circ h = r_2 \circ s_2 \circ \psi = \text{id}_B \circ \psi = \psi.$$

4. Suponha que  $f : X_1 \rightarrow Y_1$  pertença a  $\mathcal{L}$  e que o quadrado comutativo abaixo seja um pushout em  $\mathcal{C}$ .

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array}$$

Nosso objetivo é mostrar que então  $g$  também pertence a  $\mathcal{L}$ , e com esse intuito consideramos o problema de levantamento abaixo, onde  $p : P \rightarrow Q$  é um morfismo qualquer na classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{\varphi} & P \\ g \downarrow & & \downarrow p \\ Y_2 & \xrightarrow{\psi} & Q \end{array}$$

Note primeiro que o quadrado comutativo abaixo admite um levantamento  $h : Y_1 \rightarrow P$  pois  $f \in \mathcal{L}$  por hipótese.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\varphi \circ \alpha} & P \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ Y_1 & \xrightarrow{\psi \circ \beta} & Q \end{array}$$

A igualdade  $h \circ f = \varphi \circ \alpha$  nos permite então usar a hipótese de que temos um pushout para obtermos um morfismo  $H : Y_2 \rightarrow P$  que faz comutar todo o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \varphi \\ \searrow H \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} P \\ \downarrow p \\ Q \end{array}$$

$h$  (curved arrow from  $Y_1$  to  $P$ )

Afirmamos que o morfismo  $H$  obtido dessa maneira é o levantamento procurado. Note primeiro que a igualdade  $H \circ g = \varphi$  segue imediatamente da comutatividade acima. Já a igualdade  $p \circ H = \psi$  requer um pouco mais de trabalho. Repare com carinho que estes dois morfismos fazem comutar o diagrama abaixo,

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow p \circ \varphi \\ \searrow p \circ H \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} P \\ \downarrow p \\ Q \end{array}$$

$\psi$  (curved arrow from  $Y_2$  to  $Q$ )

mas como o quadrado que aparece neste diagrama é um pushout, sua propriedade universal garante que existe um único morfismo do tipo  $Y_2 \rightarrow Q$  que faça tudo comutar, portanto deve valer a igualdade  $p \circ H = \psi$ .

A demonstração de que morfismos em  $\mathcal{R}$  são preservados por pullbacks é novamente análoga. Suponha agora que o quadrado comutativo abaixo seja um pullback e que o morfismo  $g : X_2 \rightarrow Y_2$  seja pertence a  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array}$$

A fim de mostrarmos que  $f$  também pertence a  $\mathcal{R}$ , consideramos o problema de levantamento abaixo, onde  $j : M \rightarrow N$  é um morfismo qualquer pertencente à classe  $\mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & X_1 \\ j \downarrow & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{\psi} & Y_1 \end{array}$$

Colando estes dois quadrados obtemos o quadrado comutativo abaixo, o qual admite um levantamento  $h : N \rightarrow X_2$  pois  $g \in \mathcal{R}$  por hipótese.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\alpha \circ \varphi} & X_2 \\ j \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{\beta \circ \psi} & Y_2 \end{array}$$

A estratégia para obtermos um morfismo do tipo  $N \rightarrow X_1$  é usarmos a propriedade universal do pullback. A igualdade  $h \circ j = \alpha \circ \varphi$  implicada pela comutatividade acima diz que a “camada externa” do diagrama abaixo comuta, portanto segue da propriedade universal do pullback que existe um único morfismo do tipo  $H : N \rightarrow X_1$  fazendo comutar o diagrama todo.

$$\begin{array}{ccccc} N & & \xrightarrow{h} & & X_2 \\ & \searrow H & & \nearrow \alpha & \\ & & X_1 & & \\ & \searrow \psi & \downarrow f & & \downarrow g \\ & & Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array}$$

Resta mostrarmos que  $H$  é o levantamento procurado para o quadrado comutativo inicial. A igualdade  $f \circ H = \psi$  segue imediatamente da comutatividade acima. Analogamente ao que ocorreu no caso do pushout, a fim de mostrarmos que a igualdade  $H \circ j = \varphi$  também vale, precisamos utilizar a unicidade na propriedade universal do pullback. Ambos os morfismos  $H \circ j$  e  $\varphi$  fazem comutar o diagrama abaixo,

$$\begin{array}{ccccc} M & & \xrightarrow{\alpha \circ \varphi} & & X_2 \\ & \searrow H \circ j & & \nearrow \alpha & \\ & \searrow \varphi & X_1 & & \\ & \searrow f \circ \varphi & \downarrow f & & \downarrow g \\ & & Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array}$$

mas a propriedade universal do pullback garante a existência de um único morfismo do tipo  $M \rightarrow X_1$  fazendo comutar o diagrama acima, de onde podemos concluir enfim que a igualdade  $H \circ j = \varphi$  deve ser verdadeira.

5. Suponha que  $f : A_1 \rightarrow B_1$  e  $g : A_2 \rightarrow B_2$  sejam dois morfismos que pertençam a  $\mathcal{L}$ . A fim de mostrarmos que seu coproduto  $f \sqcup g : A_1 \sqcup A_2 \rightarrow B_1 \sqcup B_2$  também pertence a  $\mathcal{L}$ , basta mostrarmos que o problema de levantamento abaixo admite uma solução, onde  $p : X \rightarrow Y$  é um morfismo qualquer na classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} A_1 \sqcup A_2 & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \sqcup g \downarrow & & \downarrow p \\ B_1 \sqcup B_2 & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Se  $i_1 : A_1 \rightarrow A_1 \sqcup A_2$ ,  $i_2 : A_2 \rightarrow A_1 \sqcup A_2$ ,  $j_1 : B_1 \rightarrow B_1 \sqcup B_2$  e  $j_2 : B_2 \rightarrow B_1 \sqcup B_2$  denotam as várias inclusões canônicas nos respectivos coprodutos, lembre-se que  $f \sqcup g$  é por definição o único mapa do tipo  $A_1 \sqcup A_2 \rightarrow B_1 \sqcup B_2$  que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f} & B_1 \\ i_1 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ A_1 \sqcup A_2 & \xrightarrow{f \sqcup g} & B_1 \sqcup B_2 \\ i_2 \uparrow & & \uparrow j_2 \\ A_2 & \xrightarrow{g} & B_2 \end{array}$$

A partir do quadrado comutativo inicial obtemos o quadrado comutativo abaixo o qual admite um levantamento pois  $f \in \mathcal{L}$  por hipótese.

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha \circ i_1} & X \\ f \downarrow & \nearrow h_1 & \downarrow p \\ B_1 & \xrightarrow{\beta \circ j_1} & Y \end{array}$$

Veja que o quadrado é realmente comutativo pois

$$\beta \circ j_1 \circ f = \beta \circ (f \sqcup g) \circ i_1 = p \circ \alpha \circ i_1.$$

Analogamente, temos também o quadrado comutativo abaixo que admite um levantamento pelo fato que  $g \in \mathcal{L}$  também.

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{\alpha \circ i_2} & X \\ g \downarrow & \nearrow h_2 & \downarrow p \\ B_2 & \xrightarrow{\beta \circ j_2} & Y \end{array}$$

Combinando estes dois levantamentos obtemos por meio da propriedade universal do coproduto um morfismo  $\langle h_1, h_2 \rangle : B_1 \sqcup B_2 \rightarrow X$  o qual afirmamos ser o levantamento procurado para o quadrado original. Por um lado, a fim de mostrarmos a igualdade

$$p \circ \langle h_1, h_2 \rangle = \beta,$$

pela unicidade na propriedade universal do coproduto basta mostrarmos as duas igualdades abaixo,

$$\begin{cases} p \circ \langle h_1, h_2 \rangle \circ j_1 = \beta \circ j_1, \\ p \circ \langle h_1, h_2 \rangle \circ j_2 = \beta \circ j_2; \end{cases}$$

mas pelas propriedades dos morfismos envolvidos vemos que

$$p \circ \langle h_1, h_2 \rangle \circ j_1 = p \circ h_1 = \beta \circ j_1,$$

sendo que a segunda igualdade segue de uma sequência análoga de igualdades.

Já a igualdade  $\langle h_1, h_2 \rangle \circ (f \sqcup g) = \alpha$  seguirá também da unicidade na propriedade do coproduto se mostrarmos as igualdades

$$\begin{cases} \langle h_1, h_2 \rangle \circ (f \sqcup g) \circ i_1 = \alpha \circ i_1, \\ \langle h_1, h_2 \rangle \circ (f \sqcup g) \circ i_2 = \alpha \circ i_2. \end{cases}$$

No primeiro caso basta vermos que

$$\langle h_1, h_2 \rangle \circ (f \sqcup g) \circ i_1 = \langle h_1, h_2 \rangle \circ j_1 \circ f = h_1 \circ f = \alpha \circ i_1,$$

enquanto no segundo caso temos uma sequência análoga de igualdades. ■

Agora mostramos como podemos usar a estrutura de uma categoria modelo para construirmos enfim exemplos um pouco mais concretos de sistemas de fatoração fracos.

**1.7 Proposição.** *Suponha que  $(\mathbf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$  seja uma categoria modelo. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1.  $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$  define um sistema de fatoração fraco em  $\mathbf{M}$ ;
2.  $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$  define um sistema de fatoração fraco em  $\mathbf{M}$ .

*Demonstração.* 1. O axioma de fatoração (M5) garante que, dado qualquer morfismo  $f : X \rightarrow Y$  em  $\mathbf{M}$ , existe uma cofibração trivial  $j : X \xrightarrow{\sim} \tilde{Y}$  e uma fibração  $q : \tilde{Y} \twoheadrightarrow Y$  que fatoram  $f$  como indicado abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j} & \tilde{Y} & \xrightarrow{q} & Y \\ & \searrow \scriptstyle f & \nearrow & & \end{array}$$

Isso significa que o par de classes de morfismos  $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$  satisfaz a primeira condição de um sistema de fatoração fraco.

Resta mostrarmos que  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$  e  $\mathcal{F}$  definem um ao outro por meio de propriedades de levantamento. Note que o axioma de levantamento (M4) garante que toda fibração satisfaz a propriedade de levantamento à direita com relação à classe  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$  das cofibrações triviais. Reciprocamente, suponha que  $f : X \rightarrow Y$  satisfaça a propriedade de levantamento à direita com relação à classe das cofibrações triviais. Queremos mostrar que isso garante que  $f$  seja uma fibração, e como os únicos axiomas que temos para lidar com fibrações são os de retração e fatoração, não é surpresa que a estratégia da demonstração seja combinarmos esses dois axiomas com a hipótese de levantamento sobre  $f$ .

Usando o axioma de fatoração podemos obter uma cofibração trivial  $j : X \xrightarrow{\sim} \tilde{Y}$  e uma fibração  $q : \tilde{Y} \twoheadrightarrow Y$  tais que  $f = q \circ j$ . Essa igualdade também pode ser expressa em termos do quadrado comutativo abaixo, o qual admite um levantamento  $h : \tilde{Y} \rightarrow X$  já que  $f$  satisfaz a propriedade de levantamento à direita com relação às cofibrações triviais.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ j \downarrow & \nearrow h & \downarrow f \\ \tilde{Y} & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

Podemos organizar estes morfismos todos no diagrama comutativo mostrado abaixo,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_X & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow[\sim]{j} & \tilde{Y} & \xrightarrow{h} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow q & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \text{id}_Y & & 
 \end{array}$$

o qual mostra que  $f$  é uma retração da fibração  $q$  na categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{M})$  e, portanto, uma fibração também.

Vejamos agora a descrição das cofibrações triviais em termos das fibrações. Note inicialmente que o axioma de levantamento (M4) mais uma vez já garante que toda cofibração trivial satisfaz a propriedade de levantamento à esquerda com relação à classe de fibrações, a questão aqui é mostrar que essa propriedade de levantamento *caracteriza* as cofibrações triviais. Suponha então que  $f : X \rightarrow Y$  satisfaça a propriedade de levantamento à esquerda com relação às fibrações. Como a classe  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$  é fechada por retrações, pois tanto  $\mathcal{C}$  quanto  $\mathcal{W}$  o são, basta mostrarmos que  $f$  é uma retração de uma cofibração trivial. Novamente consideramos a fatoração abaixo em termos de uma cofibração trivial seguida de uma fibração.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow[\sim]{j} & \tilde{Y} & \xrightarrow{q} & Y
 \end{array}$$

A condição  $f = q \circ j$  pode ser expressa em termos do quadrado comutativo abaixo, e tal quadrado admite um levantamento  $h : Y \rightarrow \tilde{Y}$  pois  $f$  por hipótese satisfaz a condição de levantamento à esquerda com relação às fibrações.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow[\sim]{j} & \tilde{Y} \\
 f \downarrow & \nearrow h & \downarrow q \\
 Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y
 \end{array}$$

Os morfismos todos em questão podem então ser combinados no diagrama comutativo abaixo que expressa  $f$  como uma retração da cofibração trivial  $j$  como queríamos.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_X & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\
 f \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{h} & \tilde{Y} & \xrightarrow{q} & Y \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \text{id}_Y & & 
 \end{array}$$

2. Novamente pelo axioma de fatoração (M5) podemos fatorar um morfismo  $f : X \rightarrow Y$  qualquer de  $\mathbf{M}$  da forma indicada abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 X & \xrightarrow{i} & \hat{X} & \xrightarrow[p]{\sim} & Y
 \end{array} \tag{1}$$

Em outras palavras, o par  $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$  satisfaz a primeira condição na definição de sistema de fatoração fraco. Resta verificarmos que as classes se definem mutuamente em termos de propriedades de levantamento.

Inicialmente, sabemos do axioma de levantamento (M4) que toda cofibração satisfaz a propriedade de levantamento à esquerda com relação à classe das fibrações triviais. Suponha agora que  $f : X \rightarrow Y$  satisfaça tal propriedade de levantamento, e vamos então mostrar que  $f$  é necessariamente uma cofibração trivial também, o que como nos dois casos anteriores será feito por meio do axioma de retração. A condição  $f = p \circ i$  pode ser expressa pela comutatividade do quadrado abaixo, e a condição de levantamento sobre  $f$  nos permite obter o mapa  $h : Y \rightarrow \widehat{X}$  indicado.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & \widehat{X} \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \end{array}$$

Usando os morfismos à disposição construímos o diagrama abaixo expressando  $f$  como uma retração da cofibração  $i$ , de onde concluímos que  $f$  é também uma cofibração.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_X & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ \downarrow f & & \downarrow i & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{h} & \widehat{X} & \xrightarrow[\sim]{p} & Y \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\ & & \text{id}_Y & & \end{array}$$

Por fim, resta apenas mostrarmos que as fibrações triviais são precisamente os morfismos satisfazendo a condição de levantamento à direita com relação às cofibrações. O axioma de levantamento (M4) nos diz que toda fibração trivial satisfaz tal propriedade de levantamento, a questão é justamente a recíproca. Suponha então que  $f : X \rightarrow Y$  satisfaça essa propriedade também, e seguindo a notação da fatoração em (1), considere o quadrado comutativo abaixo, e o mapa  $h : \widehat{X} \rightarrow X$  obtido da hipótese feita sobre  $f$ .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ \downarrow i & \nearrow h & \downarrow f \\ \widehat{X} & \xrightarrow[\sim]{p} & Y \end{array}$$

Como o leitor já há muito deve ter previsto, combinando todos esses ingredientes obtemos o diagrama comutativo abaixo exibindo  $f$  como uma retração da fibração trivial  $p$ , o que nos permite concluir enfim que  $f$  é também uma fibração trivial.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_X & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ X & \xrightarrow{i} & \widehat{X} & \xrightarrow{h} & X \\ \downarrow f & & \downarrow p & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\ & & \text{id}_Y & & \end{array}$$

■