

# Teoria de Homotopia Abstrata

Edmundo Martins

23 de agosto de 2023

## 1 Categorias modelo

**1.1 Definição.** Seja  $M$  uma categoria localmente pequena, completa e co-completa. Uma **estrutura modelo** em  $M$  consiste de três classes de morfismos  $\mathcal{W}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \subseteq \text{Mor}(M)$  cujos elementos são chamados, respectivamente, **equivalências fracas**, **fibrações** e **cofibrações**, as quais devem satisfazer as seguintes condições:

- (M1) A categoria  $M$  é bicompleta, ou seja, admite todos os limites e colimites indexados por categorias pequenas.
- (M2) (Propriedade 2-de-3) Dados morfismos  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  em  $M$ , se dois dos morfismos do conjunto  $\{f, g, g \circ f\}$  estiverem em  $\mathcal{W}$ , então o terceiro também deve estar.
- (M3) (Propriedade de retração) Se um morfismo  $f : A \rightarrow X$  é retração de um outro morfismo  $g : B \rightarrow Y$ , ou seja, se existe um diagrama comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_A & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & A \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_X & & \end{array}$$

e  $g$  pertence a  $\mathcal{W}$  (ou a  $\mathcal{F}$ , ou a  $\mathcal{C}$ ), então  $f$  também pertence a  $\mathcal{W}$  (ou a  $\mathcal{F}$ , ou a  $\mathcal{C}$ , respectivamente). Em suma, as classes  $\mathcal{W}, \mathcal{F}$  e  $\mathcal{C}$  são fechadas por retrações.

- (M4) (Propriedade de levantamento) Dado um diagrama comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

onde  $i$  é uma cofibração, e  $p$  é uma fibração; se um dos dois morfismos  $i$  ou  $p$  é também uma equivalência fraca, então o diagrama admite um levantamento, ou seja, existe um morfismo  $f : B \rightarrow X$  que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow f & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

(M5) (Propriedade de fatoração) Qualquer morfismo  $f : X \rightarrow Y$  em  $\mathbf{M}$  pode ser fatorado nas duas formas mostradas abaixo,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow i & \nearrow p \\ & \hat{X} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow j & \nearrow q \\ & \tilde{Y} & \end{array}$$

onde  $p$  é simultaneamente uma fibração e uma equivalência fraca, enquanto  $j$  é simultaneamente uma cofibração e uma equivalência fraca.

Vamos introduzir um pouco de terminologia antes de fazermos alguns comentários sobre a definição acima. Os morfismos de  $\mathbf{M}$  que pertencem à classe  $\mathcal{W} \cap \mathcal{F}$  são chamados de **fibrações triviais** ou **fibrações acíclicas**, enquanto os morfismos que pertencem à classe  $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}$  são chamados de **cofibrações triviais** ou **cofibrações acíclicas**. Usando essa terminologia o axioma de fatoração (M5) pode ser enunciado da seguinte forma: todo morfismo em uma categoria modelo pode ser fatorado como uma cofibração seguido de uma fibração trivial, ou como uma cofibração trivial seguido de uma fibração.

**1.2 Observação.** Lembremos que, dados objetos  $X$  e  $Y$  de uma categoria  $\mathbf{C}$  qualquer, dizemos que  $X$  é um **retrato** de  $Y$  se existem morfismos  $s : X \rightarrow Y$  e  $r : Y \rightarrow X$  tais que  $r \circ s = \text{id}_X$ . Comumente nos referimos ao morfismo  $s$  por **seção** e ao morfismo  $r$  por **retração**. A condição  $r \circ s = \text{id}_X$  garante que  $s$  seja um monomorfismo. De fato, se  $f, g : W \rightarrow X$  são morfismos tais que  $s \circ f = s \circ g$ , então

$$f = \text{id}_X \circ f = r \circ s \circ f = r \circ s \circ g = \text{id}_X \circ g = g.$$

Isso nos permite encarar  $X$  como um subobjeto de  $Y$ , e o morfismo  $r$  então intuitivamente deforma  $Y$  para esse subobjeto, mas de forma a mantê-lo fixado. Note que a condição  $r \circ s = \text{id}_X$  garante também que o morfismo  $r$  seja um epimorfismo.

A noção de retração que aparece no axioma (M3) de uma estrutura modelo enunciado acima pode ser interpretada nesse sentido em uma categoria adequada. Lembremos que toda categoria  $\mathbf{C}$  dá origem a uma categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{C})$ . Os objetos dessa categoria são precisamente morfismos  $f : A \rightarrow B$  na categoria inicial  $\mathbf{C}$ , e dados dois tais objetos  $f : A \rightarrow B$  e  $g : X \rightarrow Y$ , um morfismo do tipo  $(f : A \rightarrow B) \rightarrow (g : X \rightarrow Y)$  na categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  é dado por um par de morfismos  $(\alpha : A \rightarrow X, \beta : B \rightarrow Y)$  satisfazendo a igualdade  $\beta \circ f = g \circ \alpha$ . Podemos então visualizar esse morfismo em  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  na forma de um quadrado comutativo como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

A composição de morfismos é definida “colando” quadrados comutativos adjacentes. Mais precisamente, dados três objetos  $f : X_1 \rightarrow Y_1$ ,  $g : X_2 \rightarrow Y_2$  e  $h : X_3 \rightarrow Y_3$  na categoria  $\text{Arr}(\mathbf{C})$ , e dados também dois morfismos componíveis

$$(\alpha_1 : X_1 \rightarrow X_2, \beta_1 : Y_1 \rightarrow Y_2) \quad (\alpha_2 : X_2 \rightarrow X_3, \beta_2 : Y_2 \rightarrow Y_3),$$

sua composição é o morfismo

$$(\alpha_2, \beta_2) \circ (\alpha_1, \beta_1) : (f : X_1 \rightarrow Y_1) \rightarrow (h : X_3 \rightarrow Y_3)$$

em  $\text{Arr}(\mathbf{C})$  definido pelo par

$$(\alpha_2, \beta_2) \circ (\alpha_1, \beta_1) := (\alpha_2 \circ \alpha_1 : X_1 \rightarrow X_3, \beta_2 \circ \beta_1 : Y_1 \rightarrow Y_3).$$

Essa composição pode também ser visualizada como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & X_3 \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Y_3 \end{array} \implies \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_2 \circ \alpha_1} & X_3 \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta_2 \circ \beta_1} & Y_3 \end{array}$$

A associatividade dessa composição via colagem segue diretamente da associatividade da composição na categoria inicial  $\mathbf{C}$ . Por fim, dado um objeto  $f : X \rightarrow Y$  qualquer, o morfismo idêntico associado a ele é dado pelo par  $\text{id}_f := (\text{id}_X, \text{id}_Y)$ , conforme mostrado no quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \end{array}$$

Note agora que, se o objeto  $f : A \rightarrow B$  é um retrato do objeto  $g : X \rightarrow Y$  na categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{M})$ , então por definição existem morfismos  $s_1 : A \rightarrow X$ ,  $s_2 : B \rightarrow Y$ ,  $r_1 : X \rightarrow A$  e  $r_2 : Y \rightarrow B$  tais que  $(r_1, r_2) \circ (s_1, s_2) = \text{id}_f$ , o que também pode ser expresso pelo diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_A & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ A & \xrightarrow{s_1} & X & \xrightarrow{r_1} & A \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{s_2} & Y & \xrightarrow{r_2} & B \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_B & & \end{array}$$

Esse é precisamente o diagrama que aparece no axioma de retração na definição de uma estrutura modelo. Podemos então reformular tal axioma dizendo que as classes de equivalências fracas, fibrações e cofibrações são todas fechadas por *retrações na categoria de setas*  $\text{Arr}(\mathbf{C})$ .

**1.3 Observação.** Quando trabalhamos com categorias modelo, no lugar de dizermos explicitamente que um morfismo é uma equivalência fraca, ou uma cofibração, ou uma fibração, simplesmente adornarmos de alguma forma a seta que representa o morfismo em questão. A convenção notacional que seguiremos nesse aspecto é a seguinte:

- uma equivalência fraca será denotada por  $\xrightarrow{\sim}$ ;
- uma cofibração será denotada por  $\twoheadrightarrow$ ;
- uma fibração será denotada por  $\rightarrowtail$ .

Também denotaremos cofibrações ou fibrações triviais por uma combinação dos símbolos acima:

- uma cofibração trivial será denotada por  $\xrightarrow{\sim}\twoheadrightarrow$ ;
- uma fibração trivial será denotada por  $\rightarrowtail\sim$ .

Seguindo essa convenção notacional, podemos, por exemplo, enunciar o axioma de levantamento (M4) da seguinte forma: em uma categoria modelo, todo quadrado comutativo da forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow \wr & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

admite um levantamento  $f : B \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow \wr & \nearrow f & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

e todo quadrado comutativo da forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \wr \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

admite um levantamento  $f : B \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow f & \wr \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

Usando a mesma convenção, o axioma de fatoração (M5) pode ser enunciado da seguinte maneira: em uma categoria modelo, todo morfismo  $f : X \rightarrow Y$  possui duas fatoraões como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \swarrow i & & \nearrow p \\ & \hat{X} & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \swarrow j & & \nearrow q \\ & \tilde{Y} & \end{array}$$

## 1.1 Fatorações em categorias

Antes de investigarmos mais a fundo as propriedades de categorias modelo, vamos investigar parte de sua estrutura sob uma perspectiva mais geral. O ponto central da discussão é que a definição de uma categoria modelo pode ser encapsulada totalmente pela existência de fatorações em cofibrações e fibrações que estão relacionadas por condições de levantamento.

Inicialmente, definimos a noção de levantamento de forma mais geral.

**1.4 Definição.** Sejam  $\mathbf{C}$  uma categoria e  $\mathcal{A} \subseteq \text{Mor}(\mathbf{C})$  uma classe qualquer de morfismos. Dizemos que um morfismo  $f : A \rightarrow B$  em  $\mathbf{C}$  **satisfaz a propriedade de levantamento à esquerda com relação a  $\mathcal{A}$**  se todo quadrado comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

onde  $p : X \rightarrow Y$  pertence a  $\mathcal{A}$ , admite um levantamento, ou seja, existe um morfismo  $h : B \rightarrow X$  que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Dualmente, dizemos que um morfismo  $g : X \rightarrow Y$  **satisfaz a propriedade de levantamento à direita com relação a  $\mathcal{A}$**  se todo quadrado comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

onde  $i : A \rightarrow B$  pertence a  $\mathcal{A}$ , admite um levantamento  $h : B \rightarrow X$  como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Tendo a definição acima em mãos, podemos formular uma noção categórica de fatoração geral o suficiente para englobar a situação que aparece no estudo de categorias modelo.

**1.5 Definição.** Um **sistema de fatoração fraco** em uma categoria  $\mathbf{C}$  consiste de um par  $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ , onde  $\mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq \text{Mor}(\mathbf{C})$  são duas classes de morfismos, satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Todo morfismo  $f \in \text{Mor}(\mathbf{C})$  pode ser escrito na forma  $f = f_L \circ f_R$  com  $f_L \in \mathcal{L}$  e  $f_R \in \mathcal{R}$ ;

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f_L \in \mathcal{L}} & Y & \xrightarrow{f_R \in \mathcal{R}} & Z \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & f & & \end{array}$$

- (ii)  $\mathcal{L}$  consiste precisamente dos morfismos de  $\mathbf{C}$  que satisfazem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a  $\mathcal{R}$ ;
- (iii)  $\mathcal{R}$  consiste precisamente dos morfismos de  $\mathbf{C}$  que satisfazem a propriedade de levantamento à direita com relação a  $\mathcal{L}$ .

Os principais exemplos de sistemas de fatoração fracos nos quais estaremos interessados envolvem as cofibrações e fibrações triviais em uma categoria modelo, embora talvez ainda não seja claro como essas classes dão origem a um sistema de fatoração. Antes de detalharmos esse exemplo, entretanto, vamos demonstrar algumas propriedades gerais de sistemas de fatoração fracos.

**1.6 Proposição.** *Suponha que  $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$  seja um sistema de fatoração fraco em uma categoria  $\mathbf{C}$ . Valem as seguintes propriedades:*

1. *Ambas as classes contêm todos os isomorfismos de  $\mathbf{C}$ .*
2. *Ambas as classes são fechadas por composição.*
3. *Ambas as classes são fechadas por retratos na categoria de setas  $\text{Arr}(\mathbf{C})$ .*
4.  *$\mathcal{L}$  é fechada pela formação de pushouts, enquanto  $\mathcal{R}$  é fechada pela formação de pullbacks.*

*Demonstração.* 1. Suponha que  $f : A \rightarrow B$  seja um isomorfismo. Sabemos da definição de sistema de fatoração fraco que  $\mathcal{L}$  consiste precisamente dos morfismos de  $\mathcal{C}$  que satisfazem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a  $\mathcal{R}$ . Considere então um quadrado comutativo como abaixo, onde  $g : X \rightarrow Y$  é um morfismo pertencente à classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Sendo  $f$  um isomorfismo por hipótese, podemos considerar o morfismo inverso  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , e definir então um morfismo  $h : B \rightarrow X$  por meio da composição  $h := \alpha \circ f^{-1}$ . Note então que por um lado

$$h \circ f = \alpha \circ f^{-1} \circ f = \alpha \circ \text{id}_A = \alpha,$$

e por outro

$$g \circ h = g \circ \alpha \circ f^{-1} = \beta \circ f \circ f^{-1} = \beta \circ \text{id}_B = \beta;$$

mostando que  $h$  faz comutar o diagrama abaixo, definindo então um levantamento para o quadrado comutativo original.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

A demonstração de que  $\mathcal{R}$  contém todos os isomorfismos é análoga. Se  $g : X \rightarrow Y$  é um isomorfismo, considere o quadrado comutativo abaixo onde  $f : A \rightarrow B$  pertence à classe  $\mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Dessa vez definimos um morfismo  $h : B \rightarrow Y$  pela composição  $h := g^{-1} \circ \beta$ , e notamos que esse morfismo satisfaz a igualdade

$$g \circ h = g \circ g^{-1} \circ \beta = \text{id}_Y \circ \beta = \beta,$$

e também a igualdade

$$h \circ f = g^{-1} \circ \beta \circ f = g^{-1} \circ g \circ \alpha = \text{id}_X \circ \alpha = \alpha;$$

portanto  $h$  define um levantamento neste caso também.

2. Suponha que  $f_1 : A \rightarrow B$  e  $f_2 : B \rightarrow C$  sejam dois morfismos pertencentes à classe  $\mathcal{L}$ . A fim de mostrarmos que sua composição  $f_2 \circ f_1 : A \rightarrow C$  também pertence a  $\mathcal{L}$ , vamos mostrar que essa composição satisfaz a condição de levantamento à esquerda com relação a  $\mathcal{R}$ . Considere então um quadrado comutativo como abaixo, onde  $g : X \rightarrow Y$  pertence à classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f_2 \circ f_1 \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

A partir do quadrado acima podemos obter o quadrado comutativo mostrado abaixo, o qual admite um levantamento  $h_1 : B \rightarrow Y$  pois  $f_1 \in \mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f_1 \downarrow & \nearrow h_1 & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta \circ f_2} & Y \end{array}$$

Usando o levantamento  $h_1$  obtemos um terceiro quadrado comutativo como mostrado abaixo, o qual admite um levantamento  $h_2 : C \rightarrow X$  pois  $f_2 \in \mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h_1} & X \\ f_2 \downarrow & \nearrow h_2 & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Afirmamos que  $h_2 : C \rightarrow X$  define também um levantamento para o quadrado comutativo considerado inicialmente. De fato, por um lado a igualdade  $g \circ h_2 = \beta$  segue diretamente da comutatividade do último quadrado acima, e por outro temos a sequência de igualdades

$$h_2 \circ f_2 \circ f_1 = h_1 \circ f_1 = \alpha;$$

portanto  $h_2$  satisfaz as condições de comutatividades necessárias.

A demonstração da segunda parte é análoga. Suponha que  $g_1 : X \rightarrow Y$  e  $g_2 : Y \rightarrow Z$  sejam dois morfismos pertencentes à classe  $\mathcal{R}$ , e considere o quadrado comutativo abaixo, onde  $f : A \rightarrow B$  pertence à classe  $\mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g_2 \circ g_1 \\ B & \xrightarrow{\beta} & Z \end{array}$$

Considere então o quadrado comutativo abaixo, o qual admite um levantamento  $h_2 : B \rightarrow Y$  pois  $g_2$  pertence a  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g_1 \circ \alpha} & Y \\ f \downarrow & \nearrow h_2 & \downarrow g_2 \\ B & \xrightarrow{\beta} & Z \end{array}$$

Usando  $h_2$  consideramos então o quadrado comutativo abaixo, o qual também admite um levantamento  $h_1 : B \rightarrow X$  pois  $g_1 \in \mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & \nearrow h_1 & \downarrow g_1 \\ B & \xrightarrow{h_2} & Y \end{array}$$

O morfismo  $h_1$  é precisamente o procurado, já que por um lado a igualdade  $h_1 \circ f = \alpha$  segue diretamente da comutatividade acima, e por outro temos a sequência de igualdades

$$g_2 \circ g_1 \circ h_1 = g_2 \circ h_2 = \beta;$$

mostrando então que  $h_1$  define um levantamento para o quadrado comutativo inicial.

3. Suponha que o morfismo  $f : A \rightarrow B$  seja um retrato do morfismo  $g : X \rightarrow Y$  o qual pertence à classe  $\mathcal{L}$ . Temos então por definição o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_A & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 A & \xrightarrow{s_1} & X & \xrightarrow{r_1} & A \\
 f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\
 B & \xrightarrow{s_2} & Y & \xrightarrow{r_2} & B \\
 & \nwarrow & & \nearrow & \\
 & & \text{id}_B & & 
 \end{array}$$

A fim de mostrarmos que  $f$  também pertence a  $\mathcal{L}$ , considere o quadrado comutativo abaixo onde  $p : P \rightarrow Q$  é um morfismo qualquer da classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\alpha} & P \\
 f \downarrow & & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{\beta} & Q
 \end{array}$$

A partir deste quadrado e do diagrama anterior produzimos o quadrado comutativo, o qual admite um levantamento  $h : Y \rightarrow P$  já que  $g \in \mathcal{L}$  por hipótese.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\alpha \circ r_1} & P \\
 g \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\
 Y & \xrightarrow{\beta \circ r_2} & Q
 \end{array}$$

Afirmamos então que o morfismo  $H : B \rightarrow P$  dado pela composição  $H := h \circ s_2$  define um levantamento para o quadrado inicial. De fato, por um lado temos

$$H \circ f = h \circ s_2 \circ f = h \circ g \circ s_1 = \alpha \circ r_1 \circ s_1 = \alpha \circ \text{id}_A = \alpha,$$

e por outro temos também

$$p \circ H = p \circ h \circ s_2 = \beta \circ r_2 \circ s_2 = \beta \circ \text{id}_B = \beta.$$

Supondo ainda que  $f$  seja um retrato de  $g$ , considere agora o caso em que  $g$  pertence à classe  $\mathcal{R}$ . A fim de mostrarmos que  $f$  também pertence a  $\mathcal{R}$ , considere o quadrado comutativo abaixo onde  $j : M \rightarrow N$  é um morfismo qualquer da classe  $\mathcal{L}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\varphi} & A \\
 j \downarrow & & \downarrow f \\
 N & \xrightarrow{\psi} & B
 \end{array}$$

A partir disso obtemos o quadrado comutativo abaixo, o qual admite um levantamento  $h : N \rightarrow X$  pois  $g$  pertence à classe  $\mathcal{R}$  por hipótese.

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{s_1 \circ \varphi} & X \\
 j \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\
 N & \xrightarrow{s_2 \circ \psi} & Y
 \end{array}$$



Afirmamos então que  $H : N \rightarrow A$  definido por  $H := r_1 \circ h$  é o levantamento procurado para o quadrado considerado inicialmente. De fato, por um lado temos as igualdades

$$H \circ j = r_1 \circ h \circ j = r_1 \circ s_1 \circ \varphi = \text{id}_A \circ \varphi = \varphi,$$

e por outro temos também as igualdades

$$f \circ H = f \circ r_1 \circ h = r_2 \circ g \circ h = r_2 \circ s_2 \circ \psi = \text{id}_B \circ \psi = \psi.$$

4. Suponha que  $f : X_1 \rightarrow Y_1$  pertença a  $\mathcal{L}$  e que o quadrado comutativo abaixo seja um pushout em  $\mathbf{C}$ .

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array}$$

Nosso objetivo é mostrar que então  $g$  também pertence a  $\mathcal{L}$ , e com esse intuito consideramos o problema de levantamento abaixo, onde  $p : P \rightarrow Q$  é um morfismo qualquer na classe  $\mathcal{R}$ .

$$\begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{\varphi} & P \\ g \downarrow & & \downarrow p \\ Y_2 & \xrightarrow{\psi} & Q \end{array}$$

Note primeiro que o quadrado comutativo abaixo admite um levantamento  $h : Y_1 \rightarrow P$  pois  $f \in \mathcal{L}$  por hipótese.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\varphi \circ \alpha} & P \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ Y_1 & \xrightarrow{\psi \circ \beta} & Q \end{array}$$

A igualdade  $h \circ f = \varphi \circ \alpha$  nos permite então usar a hipótese de que temos um pushout para obtermos um morfismo  $H : Y_2 \rightarrow P$  que faz comutar todo o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \varphi \\ \quad \quad \quad \searrow H \\ \quad \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \quad \quad P \end{array}$$

$h$  (curved arrow from  $Y_1$  to  $P$ )

Afirmamos que o morfismo  $H$  obtido dessa maneira é o levantamento procurado. Note primeiro que a igualdade  $H \circ g = \varphi$  segue imediatamente da comutatividade acima. Já a igualdade  $p \circ H = \psi$  requer um pouco mais de trabalho. Repare com carinho que estes dois morfismos fazem comutar o diagrama abaixo,

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha} & X_2 \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta} & Y_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow p \circ \varphi \\ \quad \quad \quad \searrow \psi \\ \quad \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad \quad \quad Q \end{array}$$

$p \circ H$  (curved arrow from  $Y_1$  to  $Q$ )

mas como o quadrado que aparece neste diagrama é um pushout, sua propriedade universal garante que existe um único morfismo do tipo  $Y_2 \rightarrow Q$  que faça tudo comutar, portanto deve valer a igualdade  $p \circ H = \psi$ . ■