Teoria de Obstrução Categórica
Notas para o seminário

Edmundo Martins

24 de novembro de 2023

1 Introdução e motivação

Considere o quadrado comutativo abaixo em uma categoria modelo M qualquer, onde $i : A \rightarrowtail B$ é uma cofibração, e $p : X \twoheadrightarrow Y$ é uma fibração.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

O *axioma de levantamento* na definição de uma categoria modelo M garante que, quando i ou p são equivalências fracas, então podemos encontrar um morfismo diagonal $h : B \to X$ (um levantamento) que faz os diagramas resultantes comutarem.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, tail, "i"', "\wr"] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "p", "\wr"'] \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Mas o que ocorre quando removemos a condição de trivialidade sobre o morfismo i ou sobre o morfismo p? Nesse caso, não há por que esperar que exista necesariamente um morfismo diagonal h que complete o diagrama de forma comutativa. Vejamos um exemplo mais concreto para nos convencermos disso.

1.1 Exemplo (Homotopias à esquerda e à direita)**.** Em uma categoria modelo M, sejam B um objeto qualquer, $(\mathrm{Cyl}(B), i, \varepsilon)$ um objeto cilindro para B, e X um objeto fibrante. Dado um par de morfismos f, $g : B \to X$, podemos considerar o quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} B \sqcup B \arrow[r, "\langle f,g \rangle"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, two heads] \\ \mathrm{Cyl}(B) \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

Veja que esse diagrama é do tipo considerado acima, já que $i : B \sqcup B \rightarrowtail \mathrm{Cyl}(B)$ é uma cofibração pela definição de objeto cilindro, e o morfismo único $X \twoheadrightarrow *$ é uma fibração por conta da hipótese que fizemos sobre X. Note que um morfismo diagonal $h : \mathrm{Cyl}(B) \to X$ faz comtuar o diagrama acima se, e somente se, a igualdade $h \circ i = \langle f, g \rangle$ é satisfeita; ou seja, um levantamento para o diagrama acima é o mesmo que uma homotopia à esquerda entre os morfismos f e g, o que não necessariamente vai existir sempre.

Vale notar que a exigência de que X seja fibrante não significa nada na estrutura modelo de Serre na categoria de espaços topológicos Top, já que nessa estrutura modelo todo objeto é fibrante. Em outras palavras, quando lidamos com espaços topológicos, todo problema de construção de uma homotopia entre dois mapas pode ser formulado como um problema de levantamento do tipo que estamos considerando.

É claro que também temos uma formulação análogo para o problema de construção de uma homotopia à direita entre os morfismos f e g. Nesse caso, supomos que B seja um objeto cofibrante, tomamos $(P(X), c, p)$ um objeto de caminhos para X, e consideramos o quadrado comutativo abaixo o qual é do tipo que estamos considerando.

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r] \arrow[d, tail] & P(X) \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r, "{(f,g)}"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

Um morfismo diagonal $h : B \to P(X)$ faz comutar o diagrama acima se, e somente se, satisfaz a igualdade $p \circ h = (f, g)$; ou seja, um levantamento para o diagrama acima é precisamente uma homotopia à direita entre f e g, a qual não necessariamente precisa existir.

1.2 Exemplo (Extensões ao longo de cofibrações)**.** Suponha que $i : A \rightarrowtail B$ seja uma cofibração em uma categoria modelo M, o que geralmente interpretamos como A sendo um *bom* subobjeto de B. Considere um morfismo $f : A \to X$, onde supomos que X seja um objeto fibrante. Podemos então considerar o problema de levantamento dado pelo quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "!_X"] \\ B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] & * \end{tikzcd}$$

Veja que uma solução para o problema de levantamento acima é precisamente um morfismo $F : B \to X$ satisfazendo a igualdade $F \circ i = f$, ou seja, F é *extensão do morfismo f ao longo da cofibração i*. Pensando novamente em cofibrações como boas inclusões, temos um morfismo definido *parcialmente* no "subobjeto" A e queremos estendê-lo a um morfismo definido *globalmente* no objeto B.

Novamente, no caso clássico da categoria Top, a exigência de que X seja fibrante não impõe na verdade nenhuma restrição adicional sobre X, portanto qualquer problema de extensão de um mapa contínuo ao longo de uma cofibração na estrutura modelo de Serre pode ser formulado como um problema de levantamento no sentido em que estamos tratando aqui.

1.3 Exemplo (Seções de uma fibração)**.** Considere uma cofibração $i : A \rightarrowtail B$, e uma fibração $p : E \twoheadrightarrow B$. Vamos supor que essa fibração admita uma *seção parcial sobre* A, ou seja, que exista um morfismo $s : A \to E$ satisfazendo a igualdade $p \circ s = i$. Podemos então considerar o problema de levantamento dado pelo quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, tail, "i"'] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Suponha que $S : B \to E$ seja um levantamento para o diagrama acima,o que significa que S deve satisfazer as seguintes igualdades:

(i) $p \circ S = \mathrm{id}_B$;

(ii) $S \circ i = s$.

A primeira igualdade diz que S é uma *seção* da fibração p, enquanto a segunda igualdade diz que S *estende* a seção parcial s considerada inicialmente ao longo da cofibração i.

No caso topológico, se considerarmos A como um *bom* subespaço de B, então no problema acima começamos com uma seção parcial da fibração p definida apenas sobre o subespaço A, e queremos então estendê-la a uma outra seção que esteja definida globalmente no espaço B.

Os exemplos acima ilustram algumas situações nas quais nos deparamos com problemas de levantamento não triviais. O objetivo da Teoria de Obstrução no contexto de categorias modelo é exatamente estudar esses problemas de levantamento não-triviais e obter critérios que nos permitam inferir quando eles admitem ou não alguma solução.

2 Categorias pontuadas

Antes de definirmos propriamente a noção de uma teoria de obstrução para morfismos em uma categoria modelo, precisamos antes discutir a noção de uma categoria modelo pontuada, já que é nesse contexto que desenvolveremos nosso estudo.

2.1 Definição. Uma categoria C é dita **pontuada** se ela admite um objeto que seja tanto inicial quanto final.

2.2 Observação. Por vezes, especialmente em contextos algébricos, um objeto que seja simultaneamente inicial e final é chamado de *objeto zero*. Seguindo essa terminologia, uma categoria pontuada é então uma categoria que possui um objeto zero.

2.3 Exemplo. A categoria de grupos Grp é pontuada, sendo seu objeto zero dado pelo grupo trivial $\{e\}$.

Dado um anel R qualquer, a categoria $\mathsf{Ch}(R)$ de complexos de cadeias de R-módulos é uma categoria pontuada, sendo seu objeto zero dado pelo complexo trivial $0_\bullet$ cujo módulo de n-cadeias 0_n é por definição o R-módulo trivial 0 e cujo morfismo de bordo $\partial_n : 0_n \to 0_{n-1}$ é por definição o morfismo trivial.

Podemos obter uma categoria pontuada a partir de uma categoria arbitrária utilizando a noção de *objetos pontuados*.

2.4 Exemplo (Categorias de objetos pontuados)**.** Dada uma categoria C contendo um objeto final $*$, considere a categoria co-slice $\mathsf{C}_* \coloneqq */\mathsf{C}$, ou seja, os objetos de C_* são pares (A, a), onde A é um objeto de C, e $a : * \to A$ é um morfismo; e um morfismo do tipo $(A, a) \to (B, b)$ é um morfismo $f : A \to B$ na categoria original C satisfazendo a igualdade $f \circ a = b$.

$$\begin{tikzcd} & * \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ A \arrow[rr, dashed, "f"'] & & B \end{tikzcd}$$

É comum interpretarmos o morfismo $a : * \to A$ como uma escolha de ponto no objeto A, e nos referirmos então ao morfismo a como um *ponto base* para A e ao par (A, a) como um *objeto pontuado* em C. Seguindo essa interpretação, a condição $f \circ a = b$ imposta sobre um morfismo $f : (A, a) \to (B, b)$ pode ser entendida como uma condição de *preservação de pontos base*, razão pela qual dizemos que f nesse caso é um *morfismo pontuado*

Veja que o objeto terminal vem sempre equipado com o ponto base dado pelo morfismo idêntico $\mathrm{id}_* : * \to *$. Afirmamos que o objeto pontuado $(*, \mathrm{id}_*)$ é tanto inicial quanto final na categoria C_*. Dado um objeto pontuado $(A, a) \in \mathsf{C}_*$, o fato de $*$ ser final garante a existência de um único morfismo $!_A : A \to *$ na categoria original C. Veja que esse morfismo é automaticamente pontuado, já que a igualdade $!_A \circ a = \mathrm{id}_*$ segue diretamente do fato de ambos os morfismos $!_A \circ a$ e id_* terem o objeto final $*$ como codomínio. Em outras palavras, $!_A$ é o único morfismo do tipo $(A, a) \to (*, \mathrm{id}_*)$ em C_*, o que mostra que $(*, \mathrm{id}_*)$ é um objeto final nessa categoria. Note agora que o morfismo $a : * \to A$ que determina o ponto base pode ser visto como um morfismo pontuado $a : (*, \mathrm{id}_*) \to (A, a)$. Na verdade, pela definição de morfismo pontuado, esse é na verdade o único morfismo deste tipo, já que se $a' : (*, \mathrm{id}_*) \to (A, a)$ é pontuado, então pode definição $a' \circ \mathrm{id}_* = a$, ou seja, $a' = a$. Concluímos assim que existe um único morfismo do tipo $(*, \mathrm{id}_*) \to (A, a)$, o que mostra que $(*, \mathrm{id}_*)$ é também um objeto inicial em C_*. Em suma, a categoria C_* é sempre pontuada.

2.5 Exemplo (Conjuntos e espaços pontuados)**.** Aplicando a construção descrita no Exemplo 2.4 a algumas categorias bem conhecidas recuperamos exemplos familiares de objetos pontuados. Essa construção geral pode ser especializada para obtermos várias categorias de objetos pontuadas com as quais estamos habituados. Tomando $\mathsf{C} \coloneqq \mathsf{Set}$ obtemos a categoria Set_* de *conjuntos pontuados*. Veja que uma função $a : * \to A$ determina um elemento único $a(*) \in A$, e reciprocamente, todo elemento de A determina uma função do tipo $* \to A$, o que nos permite recuperar a noção mais usual de conjunto pontuado como sendo um par (A, a), onde A é um conjunto e $a \in A$ é um elemento deste conjunto. Exatamente o mesmo raciocínio mostra que tomando $\mathsf{C} \coloneqq \mathsf{Top}$ recuperamos a categoria Top_* usual de espaços pontuados.

Assumindo que C possua um pouco mais de estrutura, podemos relacioná-la com a categoria de objetos pontuadas C_*. Mais assumindo que C admita coprodutos binários[1], podemos *adjuntar um ponto base* a qualquer objeto $X \in \mathsf{C}$ formando o coproduto $X \sqcup *$, o qual e comumente denotado por X^+. Denotando os morfismos canônicos para esse coproduto por $j_1^X : X \to X^+$ e $j_2^X : * \to X^+$, o par (X^+, j_2^X) define define um objeto na categoria C_*. Essa construção pode ser estendida aos morfismos de C. De fato, dado $f : X \to Y$, podemos formar o coproduto $f^+ \coloneqq f \sqcup \mathrm{id}_*$ o qual define um morfismo do tipo $X^+ \to Y^+$. Lembremos que pela definição do coproduto de dois morfismos f^+ é o único morfismo de seu tipo que faz comutar o diagrama mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_1^X"'] & Y \arrow[d, "j_1^Y"] \\
X^+ \arrow[r, dashed, "f^+"] & Y^+ \\
* \arrow[u, "j_2^X"] \arrow[r, "\mathrm{id}_*"'] & * \arrow[u, "j_2^Y"']
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Note que a comutatividade da parte inferior do diagrama mostra que f^+ define um morfismo pontuado do tipo $(X^+, j_2^X) \to (Y^+, j_2^Y)$.

Lembrando que o coproduto de objetos e morfismos depende funtorialmente de ambas as variáveis, temos as igualdades

$$\mathrm{id}_X^+ = \mathrm{id}_X \sqcup \mathrm{id}_* = \mathrm{id}_{X \sqcup *} = \mathrm{id}_{X^+}$$

e também as igualdades

$$(g \circ f)^+ = (g \circ f) \sqcup \mathrm{id}_* = (g \sqcup \mathrm{id}_*) \circ (f \sqcup \mathrm{id}_*) = g^+ \circ f^+.$$

[1] A princípio só precisamos da existência de coprodutos com o objeto terminal, mas enfim...

Em suma, associando a cada objeto $X \in \mathsf{C}$ o objeto pontuado (X^+, j_2^X), e associando a cada morfismo $f : X \to Y$ o morfismo pontuado correspondente $f^+ : (X^+, j_2^X) \to (Y^+, j_2^Y)$ obtemos o *funtor de adjunção de ponto base* $(-)^+ : \mathsf{C} \to \mathsf{C}_*$. No caso de categorias pontuadas, o resultado abaixo mostra que essa construção identifica C com C_*.

2.6 Proposição. *Se C é uma categoria pontuada, então o funtor de adjunção de ponto base $(-)^+ : \mathsf{C} \to \mathsf{C}_*$ é uma equivalência de categorias, sendo seu quasi-inverso dado pelo funtor de esquecimento $\mathcal{E} : \mathsf{C}_* \to \mathsf{C}$.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que a composição $\mathcal{E} \circ (-)^+ : \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ é naturalmente isomorfa ao funtor idêntico. Considere a transformação natural $\theta : \mathrm{id}_\mathsf{C} \Rightarrow \mathcal{E} \circ (-)^+$ cuja componente no objeto $X \in \mathsf{C}$ é dada pela injeção canônica $j_1^X : X \to X^+$. Dado um morfismo $f : X \to Y$, a comutatividade do quadrado superior no diagrama (1) usado na definição de f^+ mostra que a família $(j_1^X)_{X \in \mathsf{C}}$ depende naturalmente de X, ou seja, temos de fato uma transformação natural. Note agora que, se $!_X : * \to X$ denota o morfismo único decorrente do fato de $*$ ser também um objeto inicial, então a propriedade universal do coproduto fornece um morfismo $\langle \mathrm{id}_X, !_X \rangle : X^+ \to X$ tal que $\langle \mathrm{id}_X, !_X \rangle \circ j_1^X = \mathrm{id}_X$; mostrando então que j_1^X é um isomorfismo e que, portanto, temos um isomorfismo natural de funtores $\mathrm{id}_\mathsf{C} \cong \mathcal{E} \circ (-)^+$.

Resta construirmos um isomorfismo natural $(-)^+ \circ \mathcal{E} \cong \mathrm{id}_{\mathsf{C}_*}$. Dado um objeto pontuado $(X, x) \in \mathsf{C}_*$ qualquer, afirmamos que a injeção canônica $j_1^X : X \to X^+$ define na verdade um morfismo pontuado do tipo $(X, x) \to (X^+, j_2^X)$. De fato, isso segue simplesmente do fato de que os morfismos $j_1^X \circ x$ e j_2^X ambos têm o objeto inicial $*$ como domínio.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "j_1^X"] & & X^+ \\
& * \arrow[ul, "x"] \arrow[ur, "j_2^X"'] &
\end{tikzcd}
$$

Dado um morfismo pontuado $f : (X, x) \to (Y, y)$, a comutatividade do diagrama usado na definição de $f^+ : (X^+, j_2^X) \to (Y^+, j_2^Y)$ mais uma vez mostra que temos o quadrado comutativo abaixo,

$$
\begin{tikzcd}
(X, x) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j_1^X"'] & (Y, y) \arrow[d, "j_1^Y"] \\
(X^+, j_2^X) \arrow[r, "f^+"'] & (Y^+, j_2^Y)
\end{tikzcd}
$$

portanto a família de morfismos $(j_1^X)_{(X,x) \in \mathsf{C}}$ define uma transformação natural do funtor identidade $\mathrm{id}_{\mathsf{C}_*}$ para a composição $(-)^+ \circ \mathcal{E}$.

Dado agora um objeto pontuado $(X, x) \in \mathsf{C}^*$, o morfismo x que escolhe ponto base dá origem por meio da propriedade universal do coproduto a um único morfismo $\langle \mathrm{id}_X, x \rangle : X^+ \to X$ fazendo comutar o diagrama abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "j_1^X"'] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_X"] & & \\
& X^+ \arrow[r, dashed, "\langle \mathrm{id}_X, x \rangle"] & X \\
* \arrow[ur, "j_2^X"] \arrow[urr, bend right, "x"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Ora, a comutatividade da parte inferior do diagrama diz que $\langle \mathrm{id}_X, x \rangle$ define um morfismo pontuado do tipo $(X^+, j_2^X) \to (X, x)$, enquanto a comutatividade da parte superior diz precisamente que esse morfismo é o inverso do morfismo $j_1^X : (X, x) \to (X^+, j_2^X)$ considerado anteriormente. Concluímos assim que a família $(j_1^X)_{(X,x) \in \mathsf{C}_*}$ define na verdade um isomorfismo natural $\mathrm{id}_{\mathsf{C}_*} \cong (-)^+ \circ \mathcal{E}$. ■

Veremos agora como a existência de um objeto zero em uma categoria pontuada nos permite fazer uma série de construções especiais.

Dados dois objetos quaisquer X e Y de uma categoria pontuada C, a existência de um objeto simultaneamente inicial e final nos permite definir um morfismo especial $\mathrm{ct}_{X,Y} : X \to Y$ chamado **morfismo constante de X para Y** por meio da composição mostrada abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "!_X"'] & & Y \\ & * \arrow[ur, "!_Y"'] & \end{tikzcd}$$

2.7 Exemplo. Vejamos a interpretação dessa noção de morfismo constante em alguns exemplos concretos de categorias pontuadas.

(i) No caso da categoria de grupos Grp, dados grupos G e H, como o morfismo $!_G : G \to \{e\}$ manda todos os elementos de G para e, enquanto o morfismo $!_H : \{e\} \to H$ manda e para a identidade e_H do grupo H, o morfismo constante $\mathrm{ct}_{G,H} : G \to H$ é constante e igual a e_H.

(ii) No caso da categoria de conjuntos pontuados Set_*, dados (A, a) e (B, b), o morfismo constante $\mathrm{ct}_{(A,a),(B,b)} : (A, a) \to (B, b)$ manda todos os elementos de A para o ponto base $b \in B$. A interpretação é exatamente a mesma no caso da categoria Top_* de espaços pontuados.

Introduduziremos agora algumas construções envolvendo escolhas de pontos base que serão especialmente relevantes no estudo de categorias pontuadas.

2.8 Definição. Sejam $f : X \to Y$ um morfismo em uma categoria C qualquer e $y : * \to Y$ uma escolha de ponto base no codomínio do mesmo. Caso o diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ * \arrow[r, "y"'] & Y \end{tikzcd}$$

admita um pullback $(F, i, !_F)$, nos referiremos a este pullback por **fibra de f sobre y**.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "!_F"'] & X \arrow[d, "f"] \\ * \arrow[r, "y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Um fato que conforta o coração é que, conforme esperado, mesmo em uma categoria qualquer, a fibra de um morfismo "vive dentro" do domínio deste morfismo em um sentido categórico adequado como mostra o Lema abaixo.

2.9 Lema. *Sejam $f : X \to Y$ um morfismo em uma categoria C qualquer e $y : * \to Y$ um ponto base. Se $(F, i, !_F)$ é uma fibra de f sobre o ponto y, então $i : F \to X$ é um monomorfismo, ou seja, a fibra F define um subobjeto do domínio X.*

Demonstração. Afirmamos que o morfismo $y : * \to Y$ que define o ponto base é sempre um monomorfismo. Isso pode parecer surpreendente, mas não passa de uma trivialidade absoluta: se $\alpha, \beta : Z \to *$ são dois morfismos tais que $y \circ \alpha = y \circ \beta$, necessariamente devemos ter $\alpha = \beta$ simplesmente pelo fato de $*$ ser um objeto final da categoria C. Sabendo disso, o resultado em questão segue diretamente do fato de monomorfismos serem preservados por pullbacks (veja **??**). ■

2.10 Exemplo. Vejamos que essa noção categórica de fibra faz sentido nas categoriais usuais com as quais estamos acostumados.

(i) Suponha que $f : X \to Y$ seja um morfismo na categoria de conjuntos Set. Dado um ponto $y \in Y$, seja $p_y : \{*\} \to Y$ a função associada que escolhe esse elemento, ou seja, $p_y(*) := y$. Vamos mostrar que a fibra usual $f^{-1}(y)$ juntamente com o mapa de inclusão $i : f^{-1}(y) \hookrightarrow X$ e a função terminal $f^{-1}(y) \to \{*\}$ definem uma fibra também no sentido categórico, ou seja, vamos mostrar que o diagrama abaixo é um pullback em Set.

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(y) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\{*\} \arrow[r, "p_y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Suponha então que W seja outro conjunto e que $\alpha : W \to X$ seja uma função que juntamente com a função terminal $!_W : W \to \{*\}$ faz comutar a camada externa do diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "!_W"'] & & \\
& f^{-1}(y) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
& \{*\} \arrow[r, "p_y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Veja então que α necessariamente toma valores na fibra $f^{-1}(y)$, já que pela condição de comutatividade acima temos as igualdades

$$f(\alpha(w)) = p_y(!_W(w)) = p_y(*) = y$$

para qualquer elemento $w \in W$. Podemos então fatorar unicamente α pela fibra e obtermos uma função $\overline{\alpha} : W \to f^{-1}(y)$ que faz comutar todo o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "!_W"'] \arrow[dr, dashed, "\overline{\alpha}"] & & \\
& f^{-1}(y) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
& \{*\} \arrow[r, "p_y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Exatamente o mesmo raciocínio mostra que a noção categórica de fibra coincide com a noção usual na categoria Top.

(ii) Seja R um anel qualquer e consider a categoria $R - \mathsf{Mod}$ de R-módulos. Como o objeto terminal dessa categoria é dado pelo R-módulo trivial $\mathbf{0}$, e morfismos de R-módulos sempre levam zero em zero, o único ponto base que um R-módulo M qualquer possui é seu elemento zero 0_M. Assim, só podemos falar categoricamente de fibras sobre o zero, e como era de se esperar, dado um morfismo de R-módulos $f : M \to N$, um modelo concreto para tal fibra é dada pelo núcleo $\ker f$, juntamente com o morfismo de inclusão $i : \ker f \hookrightarrow M$ e o morfismo terminal $! : \ker f \to \mathbf{0}$; ou em outras palavras, o quadrado comutativo abaixo é um pullback na categoria $R - \mathsf{Mod}$.

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "i"] \arrow[d, "!"'] & M \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{0} \arrow[r, "0"'] & N
\end{tikzcd}$$

No caso de uma categoria pontuada, como cada objeto admite um único ponto base, já que o objeto terminal é também inicial, só faz sentido falarmos da fibra de um morfismo $f : X \to Y$ sobre o ponto base único $!_Y : * \to Y$. Nos referiremos a essa fibra sobre o único ponto base simplesmente como **a fibra** do morfismo f e a denotaremos por $\mathrm{Fib}(f)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fib}(f) \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, "!_{\mathrm{Fib}(f)}"'] & X \arrow[d, "f"] \\
* \arrow[r, "!_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

2.11 Exemplo (Fibra do morfismo constante)**.** Sejam X e Y objetos quaisquer de uma categoria pontuada C, e considere o morfismo constante $\mathrm{ct}_{X,Y} : X \to Y$. Seguindo a experiência que temos com morfismos constantes em categorias concretas, parece razoável esperarmos que a fibra deste morfismo seja o próprio objeto X, e vamos mostrar que isso é de fato verdade, ou seja, que o diagram abaixo define um pullback em C.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "!_X"'] & X \arrow[d, "\mathrm{ct}_{X,Y}"] \\
* \arrow[r, "!_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Note primeiro que o quadrado acima é comutativo, pois pela definição do morfismo constante temos

$$\mathrm{ct}_{X,Y} \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{ct}_{X,Y} = !_Y \circ !_X.$$

Se W é outro objeto e $\alpha : W \to X$ é um morfismo tal que $\alpha \circ \mathrm{ct}_{X,Y} = !_Y \circ \alpha$, afirmamos que o próprio morfismo $\alpha : X \to Y$ pode ser usado para fazer o diagrama abaixo comutar.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "\alpha"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "!_W"'] & & \\
& X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "!_X"'] & X \arrow[d, "\mathrm{ct}_{X,Y}"] \\
& * \arrow[r, "!_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

É claro que triângulo superior é comutativo, e a comutatividade do triângulo inferior segue simplesmente do fato de $!_X \circ \alpha$ e $!_W$ serem ambos morfismos para o objeto terminal $*$. É claro também que α é o único morfismo satisfazendo tais condições de comutatividade, já que se $\alpha' : W \to X$ é outro morfismo satisfazendo as mesmas condições, então em particular $\mathrm{id}_X \circ \alpha' = \alpha$, portanto $\alpha' = \alpha$.

2.12 Exemplo. Suponha que $f : X \to Y$ seja um monomorfismo em uma categoria pontuada C, sendo $*$ seu objeto zero. Afirmamos então que a fibra de f é dada por $*$. De fato, no primeiro que o quadrado abaixo é trivialmente comutativo, já que $*$ é em particular um objeto inicial.

$$\begin{tikzcd}
* \arrow[r, "!_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_*"'] & X \arrow[d, "f"] \\
* \arrow[r, "!_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Suponha agora que W seja outro objeto de C e que $\alpha : W \to X$ seja tal que $f \circ \alpha = !_Y \circ !_W$, ou seja, a parte externa do diagrama abaixo é comutativa. Afirmamos então que o morfismo único $!_W : W \to *$ faz comutar o diagrama todo.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "!_W"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "!_W"'] & & \\
& * \arrow[r, "!_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_*"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& * \arrow[r, "!_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

A comutatividade do triângulo inferior é imediata. Já com relação à comutatividade do triângulo superior, note que

$$f \circ (!_X \circ !_W) = (f \circ !_X) \circ !_Y = !_Y \circ !_W = f \circ \alpha,$$

e sendo f um monomorfismo, podemos cancelá-lo na igualdade acima para obtermos a igualdade desejada $!_X \circ !_W = \alpha$.

A recíproca desse fato me parece ser falsa, ou seja, existem morfismos em categorias pontuadas cuja fibra é trivial mas que não são monomorfismos. Isso é verdade, por exemplo, em categorias abelianas, mas nesse contexto podemos formar a diferença entre dois morfismos de forma que possamos utilizar a propriedade universal do pullback, mas não vejo como fazer algo análogo em um contexto geral.

3 Categorias modelo pontuadas

Após introduzirmos algumas das noções básicas associadas a categorias pontuadas, vejamos como essa estrutura se combina com a estrutura de uma categoria modelo. Uma **categoria modelo pontuada** é nada mais que uma categoria modelo $(\mathsf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ cuja categoria subjacente M é pontuada no sentido da seção anterior.

A principal fonte de exemplo de categorias de modelos pontuadas para nós serão categorias de objetos pontuados em uma categoria de modelos inicial.

3.1 Exemplo. Seja $(\mathsf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ uma categoria modelo. Vejamos como definir uma estrutura modelo na categoria de objetos pontuados M_* introduzida no Exemplo 2.4. Diremos que um morfismo pontuado $f : (A, a) \to (B, b)$ é uma equivalência fraca (respectivamente uma cofibração, uma fibração) se o morfismo subjacente $f : A \to B$ na categoria M é uma equivalência fraca (respectivamente uma cofibração, uma fibração). Vamos denotar as classes de morfismos resultantes em M_* por $\mathcal{W}_*$, $\mathcal{C}_*$ e $\mathcal{F}_*$, respectivamente.

Vejamos que essas três classes de morfismos em M_* satisfazem os axiomas que definem uma estrutura modelo.

(M1) Não vamos pensar na bicompletude de M_* por enquanto...

(M2) Como a composição de morfismos em M_* é dada pela composição em M, é imediato que as equivalências fracas pontuadas satisfazem a propriedade 2-de-3.

(M3) Suponha que o morfismo pontuado $f : (A, a) \to (B, b)$ seja um retrato do da equivalência fraca pontuada $g : (X, x) \to (Y, y)$. Vale então que $f : A \to B$ é uma retração da equivalência fraca $g : X \to Y$ na categoria M subjacente, logo f é também uma equivalência fraca e, portanto, uma equivalência fraca pontuada. Um argumento análogo mostra que as classes de cofibrações e fibrações pontuadas são também fechadas por retrações.

(M4) Considere o quadrado comutativo abaixo em M_*, onde $i : (A, a) \to (B, b)$ é uma cofibração trivial pontuada e $p : (X, x) \to (Y, y)$ é uma fibração pontuada.

$$\begin{tikzcd} (A,a) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, tail, "i"', "\wr"] & (X,x) \arrow[d, two heads, "p", "\wr"'] \\ (B,b) \arrow[r, "\beta"'] & (Y,y) \end{tikzcd}$$

Esquecendo os pontos base obtemos o quadrado comutativo abaixo na categoria M onde i e p são agora uma cofibração trivial e uma fibração trivial, respectivamente. Usando o axioma de levantamento em M obtemos um morfismo $h : B \to X$ fazendo comutar o diagrama todo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, tail, "i"', "\wr"] & X \arrow[d, two heads, "p", "\wr"'] \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Veja que h é um morfismo pontuado pois

$$h \circ b = h \circ (i \circ a) = (h \circ i) \circ a = \alpha \circ a = x.$$

Consequentemente, podemos ver h como um morfismo do tipo $(B, b) \to (X, x)$ na categoria M_*, e então obtemos o levantamento necessário para o quadrado considerado inicialmente.

$$\begin{tikzcd} (A,a) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, tail, "i"', "\wr"] & (X,x) \arrow[d, two heads, "p", "\wr"'] \\ (B,b) \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & (Y,y) \end{tikzcd}$$

Um raciocínio completamente análogo mostra que a existência de um levantamento pontuado no caso onde i é apenas uma cofibração pontuada, mas p é uma fibração trivial pontuada.

(M5) Dado um morfismo pontuado $f : (A, a) \to (B, b)$, podemos fatorar o morfismo subjacente $f : A \to B$ como uma cofibração trivial $i : A \to C$ seguida de uma fibração $p : C \to B$. Considere no objeto C o ponto base $c : * \to C$ dado pela composição $c := i \circ a$. É óbvio que com essa escolha de ponto base em C o morfismo i se torna pontuado, e o mesmo é verdade para o morfismo p já que

$$p \circ c = p \circ i \circ a = f \circ a = b.$$

Temos então a fatoração de f como uma cofibração trivial pontuada $i : (A, a) \to (C, c)$ seguida de uma fibração pontuada $p : (C, c) \to (B, b)$, conforme indicado abaixo.

$$\begin{tikzcd}
(A,a) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "\sim", "i"'] & & (B,b) \\
& (C,c) \arrow[ur, two heads, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

Um argumento análogo mostra que f também pode ser fatorado como uma cofibração pontuada $j : (A, a) \to (D, d)$ seguida de uma fibração trivial pontuada $q : (D, d) \to (B, b)$.

3.2 Observação. O leitor percebeu que não mencionamos nada sobre a bicompletude da categoria de objetos pontuados M_* associada a uma categoria M. Isso é porque essa é uma questão puramente categórica que não tem relação com a estrutura modelo de M.

É um fato geral que, se C é uma categoria completa, então a categoria de objetos pontuados C_* é completa também. Isso é relativamente tranquilo de demonstrar. Dado um diagrama pequeno $F : \mathsf{J} \to \mathsf{C}_*$, se $\mathcal{E} : \mathsf{C}_* \to \mathsf{C}$ é o morfismo de esquecimento evidente, temos o diagrama pequeno $\mathcal{E} \circ F : \mathsf{J} \to \mathsf{C}$ na categoria inicial, o qual admite um limite $(L, (p_j : L \to F(j))_{j \in \mathsf{J}})$ pela hipótese de completude. Veja que L possui uma escolha natural de ponto base, pois como cada $F(j)$ possui um ponto base $x_j : * \to F(j)$, e a coleção $(p_j : * \to F(j))_{j \in \mathsf{J}}$ define um cone sobre $\mathcal{E} \circ F$ com vértice no objeto terminal $*$, a propriedade universal do limite garante a existência de um único morfismo $x : * \to L$ tal que $p_j \circ x = x_j$ para todo $j \in J$. Essa coleção de igualdades diz que os morfismos estruturais p_j do limite podem ser vistos como morfismos pontuados $p_j : (L, x) \to (F(j), x_j)$, e podemos então mostrar que o cone $((L, x), p_j)$ é o limite procurado para o funtor F.

Também é um fato geral que, quando a categoria C_* é cocompleta, o mesmo é válido para a categoria de objetos pontuados C_*, mas isso é um pouco mais difícil de demonstrar. O início da demonstranção é o mesmo, começamos com um diagrama pequeno $F : \mathsf{J} \to \mathsf{C}_*$ na categoria de objetos pontuados e por meio do funtor de esquecimento obtemos um diagrama pequeno $\mathcal{E} \circ F : \mathsf{J} \to \mathsf{C}$ na categoria original. Esse diagrama admite um colimite Q, mas o problema é que, diferentemente do limite no caso anterior que vinha com uma escolha natural de ponto base, nesse caso temos várias escolhas diferentes de ponto base. De fato, se $(\lambda_j : F(j) \to Q)_{j \in \mathsf{J}}$ são os morfismos estruturais do colimite, então cada ponto base $x_j : * \to F(j)$ dá origem a um ponto base $\lambda_j \circ x_j : * \to Q$ no colimite. A ideia é que o colimite correto é obtido identificando todos esses candidatos a ponto base para que não tenhamos que fazer uma escolha que não seja canônica, e essa identificação é feita por meio de um *outro* colimite. Consideramos a categoria J^+ obtida de J pela adjunção de um objeto disjunto 0 e de um morfismo $!_j : 0 \to j$ para cada objeto que já existia previamente. O diagrama F pode ser *estendido* a um diagrama $F^+ : \mathsf{J}^+ \to \mathsf{C}$ definindo $F^+(0) \coloneqq *$ e $F^+(!_j) \coloneqq x_j : * \to F(j)$. Podemos então mostrar que o colimite do funtor estendido F^+ pode ser usado para obtermos o colimite do funtor $F : \mathsf{J} \to \mathsf{C}_*$ considerado inicialmente.

A existência de morfismos constantes em uma categoria pontuada nos permite definir a noção de morfismos homotopicamente nulos em categorias de modelos pontuadas.

3.3 Definição. Um morfismo $f : X \to Y$ em uma categoria de modelos pontuada M é dito

(a) **homotopicamente nulo à esquerda** se f é homotópico à esquerda ao morfismo constante $\mathrm{ct}_{X,Y} : X \to Y$;

(b) **homotopicamente nulo à direita** se f é homotópico à direita ao morfismo constante $\mathrm{ct}_{X,Y} : X \to Y$;

(c) **homotopicamente nulo** se f é homotópico ao morfismo constante $\mathrm{ct}_{X,Y}$.

Uma noção que é bem comportada em uma categoria modelo pontuada é a de objeto fracamento contrátil.

3.4 Definição. Seja M uma categoria modelo pontuada tendo $*$ como objeto zero. Um objeto $X \in \mathsf{M}$ é dito **fracamente contrátil** se o morfismo inicial $* \to X$ é uma equivalência fraca.

O lema simples abaixo mostra que a definição acima também pode ser formulada em termos de morfismos terminais.

3.5 Lema. *Seja M uma categoria modelo pontuada tendo $*$ como objeto zero. Dado um objeto $X \in \mathsf{M}$, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) X é fracamento contrátil;

(ii) o morfismo terminal $X \to *$ é uma equivalência fraca.

Demonstração. Veja que temos o diagrama comutativo abaixo envolvendo os morfismos inicial e terminal associados ao objeto X.

$$\begin{tikzcd} * \arrow[rr, "\mathrm{id}_*", "\sim"'] \arrow[dr] & & * \\ & X \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Sendo o morfismo idêntico $\mathrm{id}_* : * \to *$ uma equivalência fraca, segue diretamente da propriedade 2-de-3 que o morfismo inicial $* \to X$ é uma equivalência fraca se, e somente se, o morfismo terminal $X \to *$ também o é. ■

Assim como no caso clássico, as noções de objetos contráteis e morfismos homotopicamente nulos estão relacionadas, embora aqui tenhamos as sutilezas usuais envolvendo homotopias à esquerda e à direita, assim como condições de cofibrância e fbrância sobre os objetos.

4 Teorias de Obstrução

Temos enfim todos os ingredientes à nossa disposição para definirmos o que é uma teoria de obstrução em uma categoria modelo.

4.1 Definição. Dizemos que uma cofibração $i : A \rightarrowtail B$ em uma categoria modelo pontuada M **admite uma teoria de obstrução** se existe um objeto W tal que para todo diagrama comutativo da forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

onde $p : X \twoheadrightarrow Y$ é uma fibração, exista uma classe de homotopia $\theta_p \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{M})}(W, \mathrm{Fib}(p))$ com as seguintes propriedades:

1. O problema de levantamento admite solução se e somente se θ_p é trivial, ou seja, se e somente se $\theta_p = \eta(\mathrm{ct}_{W,\mathrm{Fib}(p)})$, onde $\eta : \mathsf{M} \to \mathrm{Ho}(\mathsf{M})$ é o funtor de localização.

2. A classe θ_p depende funtorialmente da fibração p.

Vamos analisar algumas sutilezas por trás da definição acima. Lembremos que, dados dois objetos *quaisquer* $X, Y \in \mathsf{M}$ de uma categoria de modelos, a relação de homotopia, seja à esquerda ou à direita, em geral *não* define uma relação de equivalência no conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathsf{M}}(X, Y)$, logo não existe um conjunto bem-definido de classes de homotopia de morfismos. Podemos obter conjuntos bem-definidos de classes de homotopia impondo condições adicionais de (co)fibrância sobre os objetos: se X é cofibrante, então a relação de homotopia à esquerda é uma relação de equivalência, logo temos um conjunto quociente $[X, Y]_\ell$ formado por classes de homotopia à esquerda; e se Y é fibrante, então a relação de homotopia à direita é uma relação de equivalência, dessa forma temos um conjunto quociente $[X, Y]_r$ formado por classes de homotopia à direita. Quando X é cofibrante e Y é fibrante, então as duas relações de homotopia coincidem e temos um conjunto quociente único $[X, Y]$ cujos elementos chamamos simplesmente de classes de homotopia. Se ademais X e Y forem ambos *bifibrantes*, então as operações de pós-composição e pré-composição de morfismos respeitam a relação de homotopia, induzindo operações análogas a nível de classes de homotopia.

Sabendo desse bom comportamento da relação de homotopia para morfismos entre objetos bifibrantes, podemos construir a categoria homotópica $\mathrm{Ho}(\mathsf{M})$ por meio de substituições cofibrantes/fibrantes fortes funtoriais. Mais precisamente, assumindo que categoria de modelos M admite fatorações funtoriais, podemos associar a cada objeto $X \in \mathsf{M}$ uma substituição cofibrante forte $p_X : X_c \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ e a cada morfismo $\alpha : X \to Y$ um morfismo $\alpha_c : X_c \to Y_c$ entre as substituições cofibrantes que faz comutar o quadrado abaixo.

$$\begin{tikzcd}
X_c \arrow[r, dashed, "\alpha_c"] \arrow[d, two heads, "p_X"', "\wr"] & Y_c \arrow[d, two heads, "p_Y", "\wr"'] \\
X \arrow[r, "\alpha"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Analogamente, associamos a cada objeto $X \in \mathsf{M}$ uma substituição fibrante forte $j_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} X_f$ e a cada morfismo $\alpha : X \to Y$ um morfismo $\alpha_f : X_f \to Y_f$ entre as subsittuições fibrantes fazendo comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
X_f \arrow[r, dashed, "\alpha_f"] & Y_f \\
X \arrow[u, tail, "j_X", "\wr"'] \arrow[r, "\alpha"'] & Y \arrow[u, tail, "j_Y"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

Fixados tais funtores de substituição, definimos a categoria homotópica $\mathrm{Ho}(\mathsf{M})$ da seguinte forma: os objetos de $\mathrm{Ho}(\mathsf{M})$ são precisamente os objetos de M, e dados dois objetos $X, Y \in \mathsf{M}$, definimos o conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{M})}(X, Y)$ como sendo o conjunto de classes de homotopia de morfismos $[X_{cf}, Y_{cf}]$. O funtor de localização $\eta : \mathsf{M} \to \mathrm{Ho}(\mathsf{M})$ mapeia então um objeto X para si mesmo, e um morfismo $\alpha : X \to Y$ para a classe de homotopia $[\alpha_{cf}]$ do morfismo $\alpha_{cf} : X_{cf} \to Y_{cf}$ obtido por aplicação dos funtores de subsituição cofibrante e fibrante nessa ordem. O Teorema de Whitehead diz então precisamente que η inverte equivalências fracas, uma das condições necessárias para que $\mathrm{Ho}(\mathsf{M})$ seja uma localização de M nesta classe de morfismos.

Assim, a rigor a classe $\theta_p \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{M})}(W, \mathrm{Fib}(p))$ que aparece na definição acima não é a classe de homotopia de um morfismo do tipo $W \to \mathrm{Fib}(p)$, mas sim a classe de homotopia de um morfismo do tipo $W_{cf} \to \mathrm{Fib}(p)_{cf}$ entre objetos bifibrantes equivalentes aos originais. Embora isso seja um pouco incômodo, em muitos casos podemos reinterpretar essa classe de homotopia em termos de outra classe involvendo objetos que estejam mais "próximos" dos originais do que as substituições bifibrantes consideradas. A razão por trás disso é o conteúdo do resultado abaixo.

4.2 Proposição. *Sejam X e Y objetos de uma categoria de modelos M. Se $p : \widetilde{X} \xrightarrow{\sim} X$ é uma substituição cofibrante qualquer, e $j : Y \xrightarrow{\sim} \widehat{Y}$ é uma substituição fibrante qualquer, existe uma* *bijeção*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{M})}(X,Y) \cong \left[\widetilde{X}, \widehat{Y}\right].$$

Em particular, se X já é cofibrante, e Y já é fibrante, então existe uma bijeção

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{M})}(X,Y) \cong [X,Y].$$

Assim, embora os funtores de substituição cofibrante/fibrante não façam necessariamente as escolhas mais convenientes, o resultado acima diz que, se estivermos interessados apenas em classes de homotopia de morfismos, então podemos trabalhar com substituições cofibrantes/fibrantes quaisquer, e não apenas aquelas determinadas pelos funtores.

Essa independência a nível de homotopias também é verdade para a ação dos funtores de substituição nos morfismos. O funtor de substituição fibrante associa a cada morfismo $\alpha : X \to Y$ um morfismo $\alpha_c : X_c \to Y_c$ entre as substituições cofibrantes que faz comutar o quadrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} X_c \arrow[r, dashed, "\alpha_c"] \arrow[d, two heads, "p_X"', "\wr"] & Y_c \arrow[d, two heads, "p_Y", "\wr"'] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

Entretanto, se estivermos interessados unicamente na classe de homotopia à esquerda de α_c, podemos considerar *qualquer* morfismo $\widetilde{\alpha} : X_c \to Y_c$ fazendo comutar o quadrado acima. De fato, se esse é o caso, então as classes de homotopia à esquerda $[\alpha_c]_\ell$, $[\widetilde{\alpha}]_\ell \in [X_c, Y_c]_\ell$ são ambas mapeadas para a classe de homotopia à esquerda $[\alpha \circ p_X]_\ell \in [X_c, Y]_\ell$ pela função de pushforward

$$[X_c, p_Y]_\ell : [X_c, Y_c]_\ell \to [X_c, Y]_\ell,$$

mas como p_Y é uma fibração trivial, e X_c é cofibrante, segue do CITAR RESULTADO que tal função é uma bijeção, portanto devemos ter $[\alpha_c]_\ell = [\widetilde{\alpha}]_\ell$.

Um argumento completamente análogo mostra que a classe de homotopia à esquerda das substituições cofibrantes depende apenas da classe de homotopia à esquerda do morfismo original quando os objetos envolvidos são fibrantes. Mais precisamente, se X e Y são fibrantes, e α, $\beta : X \to Y$ são homotópicos à direita, então as substituições cofibrantes correspondentes α_c, $\beta_c : X_c \to Y_c$ são homotópicas.[2] De fato, basta ver que

$$[X_c, p_Y]([\alpha_c]) = [p_X \circ \alpha_c] = [\alpha \circ p_Y]_r = [\beta \circ p_Y]_r = [p_X \circ \beta_c] = [X_c, p_Y]([\beta_c]),$$

mas $[X_c, p_Y]$ é novamente uma bijeção graças à cofibrância de X_c e à trivialidade da fibração p_Y, portanto devemos ter $[\alpha_c] = [\beta_c]$ nesse caso também.

É claro que existe toda uma discussão dual à discussão acima que diz respeito ao comportamento do funtor de substituição fibrante nas classes de homotopia. Uma consequência agradável dessa discussão é que temos uma certa "liberdade de escolha" para descrevermos as classes de homotopia associadas a morfismos por meio do funtor de localização $\eta : \mathsf{M} \to \mathrm{Ho}(\mathsf{M})$.

4.3 Proposição. *Dado um morfismo $\alpha : X \to Y$, se $\alpha' : X_c \to Y_c$ e $\alpha'' : X_{cf} \to Y_{cf}$ são morfismos que fazem comutar o diagrama abaixo,*

$$\begin{tikzcd} X_{cf} \arrow[r, "\alpha''"] & Y_{cf} \\ X_c \arrow[u, tail, "j_{X_c}"] \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, two heads, "p_X"', "\wr"] & Y_c \arrow[u, tail, "j_{Y_c}"'] \arrow[d, two heads, "p_Y", "\wr"'] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

[2] Aqui não precisamos dizer se à direita ou à esquerda, já que os objetos X_c e Y_c são bifibrantes nesse caso, portanto todas as noções de homotopia coincidem.

então vale a igualdade $\eta(\alpha) = [\alpha'']$.

Demonstração. Segue da discussão acima que $[\alpha']_\ell = [\alpha_c]_\ell$, portanto pela cofibrância de X_c e Y_c e pela discussão dual sobre substituições fibrantes também teremos $[\alpha'_f] = [\alpha_{cf}]$, mas pela comutatividade do diagrama também vale que $[\alpha'_f] = [\alpha'']$. Juntando todas as igualdades temos então

$$\eta(\alpha) = [\alpha_{cf}] = [\alpha'_f] = [\alpha''].$$ ■

Isso nos permite então obter classes de homotopia triviais a partir de morfismos triviais.

4.4 Corolário. *Dados objetos X e Y quaisquer de uma categoria de modelos pontuada M, vale a igualdade $\eta(\mathrm{ct}_{X,Y}) = [\mathrm{ct}_{X_{cf},Y_{cf}}]$.*

Demonstração. Basta ver que temos o diagrama comutativo abaixo e aplicar o resultado anterior.

$$\begin{tikzcd}
X_{cf} \arrow[r, "\mathrm{ct}_{X_{cf},Y_{cf}}"] & Y_{cf} \\
X_c \arrow[u, tail, "j_{X_c}"] \arrow[r, "\mathrm{ct}_{X_c,Y_c}"] \arrow[d, two heads, "p_X"', "\wr"] & Y_c \arrow[u, tail, "j_{Y_c}"'] \arrow[d, two heads, "p_Y", "\wr"'] \\
X \arrow[r, "\mathrm{ct}_{X,Y}"'] & Y
\end{tikzcd}$$ ■

4.5 Observação (Funtorialidade das classes de obstrução)**.** Vamos precisar o significado da funtorialidade na definição de teoria de obstrução. O processo de formação de fibras pode ser visto como um funtor na categoria de setas. Mais precisamente, considere o quadrado comutativo abaixo em uma categoria pontuada qualquer.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & X' \arrow[d, "p'"] \\
Y \arrow[r, "\psi"'] & Y'
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Podemos então tomar a fibra dos morfismos p e p' e obter os dois diagrama de pullback mostrados abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fib}(p) \arrow[r, "i_p"] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\
* \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Fib}(p') \arrow[r, "i_{p'}"] \arrow[d] & X' \arrow[d, "p'"] \\
* \arrow[r] & Y'
\end{tikzcd}$$

Usando a propriedae universal do pullback obtemos um morfismo $\mathrm{Fib}(\varphi, \psi) : \mathrm{Fib}(p) \to \mathrm{Fib}(p')$ caracterizado unicamente por satisfazer a igualdade $\alpha \circ i_p \circ \mathrm{Fib}(\varphi, \psi) = i_{p'}$ conforme mostrado no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fib}(p) \arrow[dr, dashed, "\mathrm{Fib}(\varphi,\psi)"] \arrow[drr, bend left, "\alpha\circ i_p"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \mathrm{Fib}(p') \arrow[r, "i_{p'}"] \arrow[d] & X' \arrow[d, "p'"] \\
& * \arrow[r] & Y'
\end{tikzcd}$$

A funtorialidade da teoria de obstrução deve então ser entendida da seguinte maneira: dadas fibrações $p : X \twoheadrightarrow Y$ e $p' : X' \to Y'$ e um quadrado comutativo como em (2), deve valer a igualdade de morfismos

$$\theta_{p'} = \eta(\mathrm{Fib}(\varphi, \psi)) \circ \theta_p$$

na categoria homotópica $\mathrm{Ho}(\mathsf{M})$, onde $\theta_p \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{M})}(W, \mathrm{Fib}(p))$ e $\theta_{p'} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{M})}(W, \mathrm{Fib}(p'))$ são as classes de obstrução associadas aos problemas de levantamento

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi\circ\alpha"] \arrow[d, tail, "i"'] & X' \arrow[d, two heads, "p'"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y' \end{tikzcd}$$

respectivamente.

Nosso objetivo é entender um pouco quais tipos de cofibrações admitem uma teoria de obstrução no sentido acima. Dentre os problemas de levantamento não-triviais que nos interessam, um ponto de partida razoável é entendermos primeiro aqueles envolvendo fibrações do tipo $X \twoheadrightarrow *$, ou seja, aqueles envolvendo objetos fibrantes. Vimos no Exemplo 1.2 que tais problemas de levantamento são nada mais do que problemas de extensão ao longo de cofibrações. Vamos entender qual é o conteúdo homotópico destes problemas no caso clássico das cofibrações geradoras $S^n \to D^{n+1}$ na estrutura modelo de Quillen em Top.

O interessante é que esse resultado pode ser generalizado de certa forma para o contexto de categorias de modelos, mas a categoria Top possui algumas boas propriedades que não são válidas em uma categoria de modelos geral, portanto essa generalização só é possível após enfraquecermos um pouco as hipóteses. Esse enfraquecimento tem a ver com os tipos de fibrações que aparecerão nos problemas de levantamento.

4.6 Definição. Uma cofibração $i : A \rightarrowtail B$ em uma categoria de modelos pontuada C **admite uma teoria de obstrução fibrante** se as propriedades da Definição 4.1 são válidas para toda fibração $p : X \twoheadrightarrow Y$ onde Y é um objeto fibrante.[3]

5 Resultados auxiliares

Nessa seção coletamos alguns resultados auxiliares que serão úteis em diferentes partes do texto. Resolvi incluir algumas demonstrações por motivos de completude, especialmente para aqueles resultados cujas demonstrações na literatura foram deixadas para o leitor.

Nosso primeiro objetivo é demonstrar o famoso *Lema de Ken Brown*, um resultado que fornece condições suficientes para que um funtor preserve uma certa classe de equivalências fracas. Tal lema é uma consequência relativamente simples de um outro lema que fornece fatorações especiais para certas equivalências fracas.

5.1 Proposição (Lema de Fatoração)**.** *Se $f : X \to Y$ uma equivalência fraca entre objetos fibrantes de uma categoria de modelos, então existem uma cofibração trivial $i : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} Z$, uma fibração trivial $p : Z \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Y$, e uma fibração trivial $q : Z \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ tais que $p \circ i = f$ e $q \circ i = \mathrm{id}_X$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "i", "\sim"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, two heads, "p", "\sim"'] \arrow[ul, two heads, bend left, "q", "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

[3]Veja que nesse caso X é automticamente fibrante também, portanto temos uma fibração entre objetos fibrantes, e tais tipos de morfismos costumam ser bem comportados.

De maneira dual, se $f : X \to Y$ é uma equivalência fraca entre objetos cofibrantes, então existem uma fibração trivial $q : X \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Z$, uma cofibração trivial $j : Z \overset{\sim}{\rightarrowtail} Y$ e uma cofibração trivial $i : Z \overset{\sim}{\rightarrowtail} X$ tais que $q \circ j = f$ e $q \circ i = \mathrm{id}_X$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "q", "\sim"'] & & Y \\
& Z \arrow[ul, tail, bend left, "i", "\sim"'] \arrow[ur, tail, "j"', "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Vamos demonstrar o primeiro caso, já que este é que nos será útil. A demonstração do segundo caso é dual. Podemos fatorar o morfismo induzido $(\mathrm{id}_X, f) : X \to X \times Y$ como uma cofibração trivial $i : X \overset{\sim}{\to} Z$ seguida de uma fibração $\theta : Z \overset{\sim}{\to} X \times Y$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "(\mathrm{id}_X, f)"] \arrow[dr, tail, "\lambda"', "\sim"] & & X \times Y \\
& Z \arrow[ur, two heads, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

Se $\pi_1 : X \times Y \to X$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y$ são as projeções canônicas, definimos então

$$q \coloneqq \pi_1 \circ \theta : Z \to X \quad \text{e} \quad p \coloneqq \pi_2 \circ \theta : Z \to Y.$$

Veja que tais morfismos satisfazem as igualdades necessárias, já que por um lado

$$p \circ i = \pi_2 \circ \theta \circ i = \pi_2 \circ (\mathrm{id}_X, f) = f,$$

e por outro

$$q \circ i = \pi_1 \circ \theta \circ i = \pi_1 \circ (\mathrm{id}_X, f) = \mathrm{id}_X.$$

Resta apenas mostrarmos que p e q são fibrações triviais. O fato de p ser uma equivalência fraca segue da propriedade 2-de-3, já que temos a igualdade $p \circ i = f$ onde tanto i quanto f são equivalências fracas. O fato de q ser uam equivalência fraca também segue da propriedade 2-de-3, pois temos a igualdade $q \circ i = \mathrm{id}_X$ onde i e id_X são equivalências fracas. Por fim, para ver que p e q são fibrações, veja que temos um diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & X \arrow[d, two heads, "!_X"] \\
Y \arrow[r, two heads, "!_Y"'] & *
\end{tikzcd}$$

onde $!_X$ e $!_Y$ são fibrações graças ao fato de X e Y serem fibrantes. Como fibrações são preservadas por pullbacks, segue que as projeções canônicas π_1 e π_2 são fibrações também, logo p e q são ambos composições de fibrações e, portanto, fibrações também. ■

5.2 Corolário (Lema de Ken Brown). *Sejam $(\mathsf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ uma categoria de modelos e $(\mathcal{D}, \mathcal{W}')$ uma categoria com equivalências fracas, ou seja, $\mathcal{W}' \subseteq Mor(\mathsf{D})$ é uma classe de morfismos fechada por composições, contendo todos os isomorfismos, e satisfazendo a propriedade 2-de-3. Se $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ é um funtor que transforma fibrações triviais entre objetos fibrates de M em equivalências fracas de D, então F também tansforma equivalências fracas entre objetos fibrantes de M em equivalências fracas de D. De maneira dual, se F transforma cofibrações triviais entre objetos cofibrantes de M em equivalências fracas de D, então F também transforma equivalências fracas entre objetos cofibrantes de M em equivalências fracas de D.*

Demonstração. Seja $p : X \xrightarrow{\sim} Y$ uma equivalência fraca entre objetos fibrantes de M. Aplicando o Proposição 5.1 obtemos uma cofibração trivial $i : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} Z$, uma fibração trivial $p : Z \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Y$ e uma fibração trivial $q : Z \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ tais que $p \circ i = f$ e $q \circ i = \mathrm{id}_X$. Veja que Z é um objeto fibrante, já que ele manda uma fibração para um objeto fibrante. Assim, p é uma fibração trivial entre objetos fibrantes, portanto $F(p) : F(Z) \to F(Y)$ é uma equivalência fraca em D. Se conseguirmos mostrar que $F(i) : F(X) \to F(Z)$ é também uma equivalência fraca, o resultado desejado seguirá então da igualdade $F(p) \circ F(i) = F(f)$ e da propriedade 2-de-3 em M. Ora, sendo $q : Z \to X$ uma fibração trivial entre objetos fibrantes também, vale que $F(q) : F(Z) \to F(X)$ é uma equivalência fraca, e a propriedade 2-de-3 aplicada à igualdade $F(q) \circ F(i) = \mathrm{id}_{F(X)}$ nos permite concluir que $F(i)$ é uma equivalência fraca, já que o morfismo idêntico $\mathrm{id}_{F(X)}$ é também uma equivalência fraca. ■

Vamos explorar agora algumas consequências bacanas do Lema de Ken Brown. Algumas dessas aplicações serão úteis no próprio texto, mas outras serão puramente *for fun*.

5.3 Proposição. *Seja B um objeto cofibrante.*

1. *Se $p : X \to Y$ é uma fibração trivial, então a função induzida*

$$[B, p]_\ell : [B, X]_\ell \to [B, Y]_\ell$$

é uma bijeção.

2. *Se $p : X \to Y$ é uma equivalência fraca entre objetos fibrantes, então a função induzida*

$$[B, p] : [B, X] \to [B, Y]$$

é uma bijeção.

De maneira dual, seja agora X um objeto fibrante.

3 Se $i : A \to B$ é uma cofibração trivial, então a função induzida

$$[i, X]_r : [B, X]_r \to [A, X]_r$$

é uma bijeção.

4 Se $i : A \to B$ é uma equivalência fraca entre objetos cofibrantes, então a função induzida

$$[i, X] : [B, X] \to [A, X]$$

é uma bijeção.

Demonstração. 1. Esse caso segue diretamente aplicando o axioma de levantamento adequadamente, não tem segredo.

2. Considere o funtor $[B, -]_\ell : \mathsf{M} \to \mathsf{Set}$. Encaramos Set como uma categoria com equivalências fracas tomando $\mathcal{W}' \subseteq \mathrm{Mor}(\mathsf{Set})$ como sendo a classe formada por todas as bijeções entre conjuntos. Segue do item 1 que $[B, -]_\ell$ transforma fibrações triviais entre objetos fibrantes de M em equivalências fracas de Set no sentido que acabamos de introduzir. Segue então do Lema de Ken Brown que, se $p : X \to Y$ é uma equivalência fraca entre objetos fibrantes, então a função correspondente $[B, p]$ é uma equivalência fraca em Set, ou seja, uma bijeção.

As demonstrações dos itens 3 e 4 são duais. ■

Nosso próximo objetivo é usar o Lema de Ken Brown para mostrarmos que se duas fibrações entre objetos fibrantes são fracamente equivalentes, então suas fibras são fracamente equivalentes também. Apresentamos aqui uma demonstração deste fato que, embora similar à demonstração dada no artigo em alguns pontos, utiliza o Lema de Ken Brown para reduzir o argumento geral a um caso mais simples. Isso nos permite, em particular, evitar o uso de um lema sobre estabilidade de equivalências fracas entre objetos fibrantes por pullbacks ao longo de fibrações.

5.4 Lema. *Suponha que no diagrama comutativo abaixo p e p' sejam fibrações e α seja uma equivalência fraca. Então o morfismo induzido* $\mathrm{Fib}(\alpha, \mathrm{id}_Y) : \mathrm{Fib}(p) \to \mathrm{Fib}(p')$ *é uma equivalência fraca também. Dito de outra forma, duas fibrações sobre um mesmo objeto que são fracamente equivalentes possuem fibras fracamente equivalentes também.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\alpha", "\sim"'] \arrow[dr, two heads, "p"'] & & X' \arrow[dl, two heads, "p'"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Considere a categoria slice M/Y com a estrutura modelo induzida de M. Temos um funtor $R : \mathsf{M}/Y \to \mathsf{M}$ que associa a cada objeto $f : X \to Y$ de M/Y sua fibra $\mathrm{Fib}(f)$ e que associa a um morfismo $\alpha : f \to g$ o morfismo $\mathrm{Fib}(\alpha, \mathrm{id}_Y) : \mathrm{Fib}(f) \to \mathrm{Fib}(g)$ correspondente entre as fibras. Tal funtor admite um adjunto à esquerda $L : \mathsf{M} \to \mathsf{M}/Y$ que associa a cada objeto $X \in \mathsf{M}$ o morfismo constante $\mathrm{ct}_{X,Y} : X \to Y$. Segue diretamente da definição da estrutura modelo em M/Y que L preserva cofibrações e cofibrações triviais, portanto o par (L, R) define um *par de Quillen*. Uma consequência geral disso é que o funtor R então preserva equivalências fracas entre objetos fibrantes, mas os objetos fibrantes de M/Y são exatamente as fibrações tendo Y como codomínio, portanto essa condição de preservação é precisamente o conteúdo do enunciado. ■

Um corolário interessante é que fibrações fracamente equivalentes possuem fibras fracamente equivalentes mesmo quando os codomínio são diferentes, desde que eles sejam ao menos fibrantes.

5.5 Corolário. *Considere o diagrama abaixo em uma categoria de modelos pontuada,onde $p : X \twoheadrightarrow Y$ e $p' : X' \to Y'$ são fibraçõs entre objetos fibrantes, e $\alpha : X \to Y$ e $\beta : X' \to Y'$ são equivalências fracas. Então o morfismo induzido* $\mathrm{Fib}(\alpha, \beta) : \mathrm{Fib}(p) \to \mathrm{Fib}(p')$ *é uma equivalência fraca. Em outras palavras, se duas fibrações entre objetos fibrantes são fracamente equivalentes, então suas fibras correspondentes são também fracamente equivalentes.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha", "\sim"'] \arrow[d, two heads, "p"'] & X' \arrow[d, two heads, "p'"] \\ Y \arrow[r, "\sim", "\beta"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Demonstração. O processo de formar a fibra de um morfismo define um funtor $\mathrm{Fib} : \mathrm{Arr}(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$. A estratégia da demonstração é equipar a categoria de setas $\mathrm{Arr}(\mathsf{M})$ com uma estrutura modelo de tal que forma que nosso objetivo seja mostrar que o funtor Fib preserva certas equivalências fracas nessa categoria, e faremos isso utilizando o Lema de Ken Brown.

Introduzimos uma estrutura modelo adequada em $\mathrm{Arr}(\mathsf{M})$: um morfismo $(\alpha, \beta) : f \to g$ na categoria de setas como indicado no diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p"'] & X' \arrow[d, "p'"] \\ Y \arrow[r, "\beta"'] & Y' \end{tikzcd}$$

é dito uma

- equivalência fraca se α e β são equivalências fracas;
- cofibração se α e β são cofibrações;
- fibração se β é uma fibração, e se o morfismo induzido $(\alpha, p) : X \to X' \times_{Y'} Y$ mostrado no diagrama comutativo abaixo é uma fibração.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "(\alpha,p)"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & & \\ & X' \times_{Y'} Y \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & X' \arrow[d, "p'"] \\ & Y \arrow[r, "\beta"'] & Y' \end{tikzcd} \tag{3}$$

Veja que, no diagrama acima, π_1 é uma fibração, já que β o é, logo a hipótese de (α, p) ser uma fibração juntamente com a igualdade $\pi_1 \circ (\alpha, p) = \alpha$ garante que α seja uma fibração também.

Vamos assumir que isso define de fato uma estrutura modelo em $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$, a qual é comumente chamada de **estrutura modelo inejtiva**. Seguiremos a terminologia do artigo e nos referiremos às fibrações dessa estrutura por **fibrações injetivas**.

O Lema de Ken Brown diz respeito a objetos fibrantes, portanto vamos entender os objetos fibrantes da estrutura modelo injetiva. O objeto terminal da categoria de setas $\mathrm{Arr}(\mathsf{M})$ é dado pelo morfismo idêntico $\mathrm{id}_* : * \to *$ associado ao objeto terminal de M, e dado um objeto $p : X \to Y$ qualquer, o morfismo único $p \to \mathrm{id}_*$ em $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$ é dado pelo par de morfismos terminais (t_X, t_Y).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "p"'] & * \arrow[d, "\mathrm{id}_*"] \\ Y \arrow[r, "t_Y"'] & * \end{tikzcd}$$

Se tal par for uma fibração injetiva, então por definição $t_Y : Y \to *$ é uma fibração, ou seja, Y é um objeto fibrante, e o morfismo induzido $(t_X, p) : * \times_* Y$ é uma fibração também. Ora, como o quadrado abaixo também é um pullback,

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "t_Y"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Y"'] & * \arrow[d, "\mathrm{id}_*"] \\ Y \arrow[r, "t_Y"'] & * \end{tikzcd}$$

pela unicidade do pullback a projeção $* \times_* Y \to Y$ deve ser um isomorfismo, portanto a igualdade $\pi_2 \circ (t_X, p) = p$ mostra que (t_X, p) é uma fibração se, e somente se, p é uma fibração. Em suma, um objeto fibrante na estrutura modelo injetiva de $\mathrm{Arr}(\mathsf{M})$ é precisamente uma fibração tendo o codomínio fibrante, logo tendo o domínio fibrante também. Tendo essa descrição dos objetos fibrantes em mãos, o enunciado em questão pode ser reformulado da seguinte forma: o funtor $\mathrm{Fib} : \mathrm{Arr}(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$ preserva equivalências fracas entre objetos fibrantes. Fica claro então que podemos tentar usar o Lema de Ken Brown para demonstrarmos tal resultado.

Vamos começar a aplicar o Lema de Ken Brown. Suponha que $(\alpha, \beta) : p \to p'$ seja uma fibração trivial entre objetos fibrantes de $\mathrm{Arr}(\mathsf{M})$. Isso significa que temos o quadrado comutativo abaixo onde todos os objetos envolvidos são fibrantes.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "\alpha", "\sim"'] \arrow[d, two heads, "p"'] & X' \arrow[d, two heads, "p'"] \\ Y \arrow[r, "\sim", "\beta"'] & Y' \end{tikzcd}$$

Queremos mostrar que nesse caso o morfismo induzido $\mathrm{Fib}(\alpha, \beta) : \mathrm{Fib}(p) \to \mathrm{Fib}(p')$ é uma equivalência fraca. O truque é trocar a fibra $\mathrm{Fib}(p')$ pela fibra de outra fibração definida sobre Y também e então usar o Lema 5.4. Considere para isso o pullback $X' \times_Y Y$ e o morfismo (α, p) como no diagrama (3), o qual é uma fibração graças à hipótese de (α, β) ser uma fibração injetiva. Sendo β uma fibração trivial, o mesmo vale para $\pi_1 : X' \times_{Y'} Y \to Y$, e a igualdade $\pi_1 \circ (p, \alpha) = \alpha$ juntamente com o fato de α ser uma equivalência fraca mostram que $(p, \alpha) : X \to X' \times_Y' Y$ é não só uma fibração, mas também uma equivalência fraca.

Temos então uma fibração trivial relacionando duas fibrações sobre o mesmo objeto Y como mostrado no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, two heads, "(p,\alpha)", "\sim"'] \arrow[dr, two heads, "p"'] & & X' \times_{Y'} Y \arrow[dl, two heads, "\pi_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Segue do Lema 5.4 que o morfismo induzido $\mathrm{Fib}(p) \to \mathrm{Fib}(\pi_1)$ é uma equivalência fraca. Ora, mas se colarmos os dois diagramas de pullbacks mostrados abaixo concluímos que a fibra $\mathrm{Fib}(\pi_1)$ é isomorfa à fibra $\mathrm{Fib}(p')$, portanto o morfismo induzido $\mathrm{Fib}(p) \to \mathrm{Fib}(p')$ também é uma equivalência fraca.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fib}(\pi_1) \arrow[r, "i_{\pi_1}"] \arrow[d] & X' \times_{Y'} Y \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & X' \arrow[d, "p'"] \\ * \arrow[r] & Y \arrow[r, "\beta"'] & Y' \end{tikzcd}$$

O raciocínio acima mostra que $\mathrm{Fib} : \mathrm{Arr}(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}$ transforma fibrações triviais entre objetos fibrantes em equivalências fracas. Segue então do Lema de Ken Brown que Fib também transforma equivalências fracas entre objetos fibrantes em equivalências fracas, mas esse é precisamente o conteúdo do enunciado. ∎

6 Construindo teorias de obstrução

Nessa seção mostramos enfim como obter teorias de obstrução para algumas classes de cofibrações. Mostramos inicialmente que cofibrações com condições de contratibilidade sempre admitem teorias de obstrução fibrantes, e em seguida mostramos que certas operações na classe de cofibrações preservam a existência de teorias de obstrução.

6.1 Teorema. *Seja $i : A \rightarrowtail B$ uma cofibração tal que A seja cofibrante e B seja fibrante e fracamente contrátil. Então i admite uma teoria de obstrução fibrante.*

Rascunho da demonstração. Seja $p : X \twoheadrightarrow Y$ uma fibração entre dois objetos fibrantes e considere o problema de levantamento abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

Formando o pullback de p ao longo de β obtemos uma outra fibração conforme indicado abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \times_Y B \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, two heads, "\beta^* p"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

Um argumento de colagem de pullbacks mostra que a fibra $\mathrm{Fib}(\beta^* p)$ é isomorfa à fibra $\mathrm{Fib}(p)$.

Afirmamos que a condição de contratibilidade fraca sobre B garante que o “espaço total” $X \times_Y B$ da fibração $\beta^* p$ seja fracamente equivalente à própria fibra $\mathrm{Fib}(\beta^* p)$. De fato, o par de morfismos $(\mathrm{id}_{X \times_Y B}, t_B)$ define uma equivalência fraca entre as fibrações $\beta^* p : X \times_Y B \to B$ e $t : X \times_Y B \to *$ como mostrado no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \times_Y B \arrow[r, "\mathrm{id}", "\sim"'] \arrow[d, two heads, "\beta^* p"'] & X \times_Y B \arrow[d, two heads, "t"] \\ B \arrow[r, "\sim", "t_B"'] & * \end{tikzcd}$$

Como $\beta^* p$ e t são fibrações entre objetos fibrantes, aplicando o Corolário 5.5 concluímos que o morfismo induzido entre fibras

$$\mathrm{Fib}(\mathrm{id}, t_B) : \mathrm{Fib}(\beta^* p) \to \mathrm{Fib}(t)$$

é uma equivalência fraca. Ora, a fibra $\mathrm{Fib}(t)$ do morfismo terminal é isomorfa ao próprio objeto $X \times_Y B$ já que temos o diagrama de pullback abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \times_Y B \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "t"'] & X \times_Y B \arrow[d, "t"] \\ * \arrow[r, "\mathrm{id}_*"'] & * \end{tikzcd}$$

Podemos mostrar que a composição de $\mathrm{Fib}(\mathrm{id}, t_B)$ com o isomorfismo $\mathrm{Fib}(t)\overset{\cong}{B} \times_Y X$ é precisamente o “morfismo de inclusão” da fibra $i_{\beta^* p} : \mathrm{Fib}(\beta^* p) \to X \times_Y B$, o qual é portanto uma equivalência fraca.

Vamos enfim obter as classes de obstrução. Defina $W \coloneqq A$ e considere a classe $\theta_p \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathsf{M})(W, \mathrm{Fib}(\beta^* p))}$ dada pela composição

$$\theta_p \coloneqq \eta(i_{\beta^* p})^{-1} \circ \eta(\alpha, i),$$

onde $(\alpha, i) : A \to X \times_Y B$ é o morfismo induzido pela propriedade universal do pullback.

Resta mostrarmos que essa classe satisfaz as condições necessárias. Suponha que $h : B \to X$ seja um levantamento para o problema original. Então o morfismo induzido $(h, \mathrm{id}_B) : B \to X \times_Y B$ fatora (α, i) por i, no sentido de que temos a igualdade $(\alpha, i) = (h, \mathrm{id}_B) \circ i$. Afirmamos que a cofibração $i : A \rightarrowtail B$ é homotopicamente nula. De fato, como $t_B : B \xrightarrow{\sim} *$ é uma equivalência fraca entre objetos fibrantes, e A é cofibrante, a função

$$[A, t_B] : [A, B] \to [A, *]$$

é uma bijeção, mas vale a igualdade

$$[A, t_B]([i]) = [t_B \circ i] = [t_A] = [t_B \circ \mathrm{ct}_{A,B}] = [A, t_B]([\mathrm{ct}_{A,B}]),$$

logo pela injetividade devemos ter $[i] = [\mathrm{ct}_{A,B}]$. Segue disso e da fatoração $(\alpha, i) = (h, \mathrm{id}_B) \circ i$ que (α, i) também é homotopicamente nulo. Consequentemente, a classe $\eta(\alpha, i)$ é trivial, o mesmo valendo então para a classe de obstrução θ_p.

Reciprocamente, suponha que θ_p seja trivial. Segue disso que $\eta(\alpha, i)$ deve ser trivial também, o que por sua vez significa que o morfismo $(\alpha, i) : A \to X \times_Y B$ é homotopicamente nulo. Considere então $(\mathrm{Cyl}(A), j, \varepsilon)$ um objeto cilindro para A e $H : \mathrm{Cyl}(A) \to X \times_Y B$ uma homotopia de (α, i) para o morfismo constante $\mathrm{ct} : A \to X \times_Y B$. O fato da homotopia ser constante no estágio final sugere que consideremos o objeto obtido colapsando a face superior do cilindro $\mathrm{Cyl}(A)$. Mais precisamente, temos o morfismo $j_1 : A \to \mathrm{Cyl}(A)$, o qual é nesse caso uma cofibração trivial graças à hipótese de cofibrância sobre A, e consideramos o objeto $\mathrm{Cone}(A)$ obtido por meio do pushout indicado abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, tail, "j_1"', "\wr"] & * \arrow[d, tail, "\wr"'] \\ \mathrm{Cyl}(A) \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Cone}(A) \end{tikzcd}$$

O fato do morfismo $* \to \mathrm{Cone}(A)$ ser uma equivalência fraca diz que $\mathrm{Cone}(A)$ é um objeto fracamente contrátil. Como a homotopia H considerada satisfaz $H \circ j_1 = \mathrm{ct}$, a propriedade universal do pushout nos permite fatorar H pelo cone costruído para obtermos um morfismo $\overline{H} : \mathrm{Cone}(A) \to X \times_Y B$ como mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t_A"] \arrow[d, tail, "j_1"', "\wr"] & * \arrow[d, tail, "\wr"'] \arrow[ddr, bend left] & \\ \mathrm{Cyl}(A) \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[drr, bend right, "H"'] & \mathrm{Cone}(A) \arrow[dr, dashed, "\overline{H}"] & \\ & & X \times_Y B \end{tikzcd}$$

A ideia agora é relacionarmos B e $\mathrm{Cone}(A)$ para conseguirmos um morfismo do tipo $B \to X \times_Y B$ que pode então ser utilizado para conseguirmos o levantamento $B \to X$ desejado. Infelizmente, o cone construído pode não satisfazer condições de fibrância necessárias para construirmos um morfismo do tipo $B \to \mathrm{Cone}(A)$, mas isso pode ser corrigido usando uma fatoração adequada. Mais precisamente, podemos fatorar $\overline{H} : \mathrm{Cone}(A) \to X \times_Y B$ como uma cofibração trivial $\lambda : \mathrm{Cone}(A) \xrightarrow{\sim} C$ seguida de uma fibração $\psi : C \twoheadrightarrow X \times_Y B$ como indicado abaixo.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cone}(A) \arrow[rr, "\overline{H}"] \arrow[dr, tail, "\sim", "\lambda"'] & & X \times_Y B \\ & C \arrow[ur, two heads, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Temos então o diagrama abaixo, onde o morfismo que aparece na direita é a composição de duas fibrações, portanto uma fibração também.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\lambda\circ\varphi\circ j_0"] \arrow[d, tail, "i"'] & C \arrow[d, two heads, "\beta^* p\circ\psi", "\wr"'] \\
B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Note que o fato do morfismo vertical na direita ser uma equivalência fraca é simplesmente uma consequência de C e B serem ambos fracamente contráteis.

O axioma de levantamento nos fornece enfim um morfismo $\sigma : B \to C$ fazendo comutar o diagrama todo. Afirmamos então que a composição

$$\pi_1 \circ \psi \circ \sigma : B \to X$$

define enfim o levantamento procurado. De fato, fazendo as contas temos por um lado

$$\begin{aligned}
p \circ \pi_1 \circ \psi \circ \sigma &= \beta \circ \beta^* p \circ \psi \circ \sigma \\
&= \beta \circ \mathrm{id}_B \\
&= \beta,
\end{aligned}$$

e por outro temos também

$$\begin{aligned}
\pi_1 \circ \psi \circ \sigma \circ i &= \pi_1 \circ \psi \circ \lambda \circ \varphi \circ j_0 \\
&= \pi_1 \circ \overline{H} \circ \varphi \circ j_0 \\
&= \pi_1 \circ H \circ j_0 \\
&= \pi_1 \circ (\alpha, i) \\
&= \alpha. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$