

Teoria de Obstrução Categórica

Notas para o seminário

Edmundo Martins

31 de outubro de 2023

1 Introdução e motivação

Considere o quadrado comutativo abaixo em uma categoria modelo \mathbf{M} qualquer, onde $i : A \rightarrowtail B$ é uma cofibração, e $p : X \twoheadrightarrow Y$ é uma fibração.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

O *axioma de levantamento* na definição de uma categoria modelo \mathbf{M} garante que, quando i ou p são equivalências fracas, então podemos encontrar um morfismo diagonal $h : B \rightarrow X$ (um levantamento) que faz os diagramas resultantes comutarem.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Mas o que ocorre quando removemos a condição de trivialidade sobre o morfismo i ou sobre o morfismo p ? Nesse caso, não há por que esperar que exista necessariamente um morfismo diagonal h que complete o diagrama de forma comutativa. Vejamos um exemplo mais concreto para nos convenceremos disso.

1.1 Exemplo (Homotopias à esquerda e à direita). Em uma categoria modelo \mathbf{M} , sejam B um objeto qualquer, $(\text{Cyl}(B), i, \varepsilon)$ um objeto cilindro para B , e X um objeto fibrante. Dado um par de morfismos $f, g : B \rightarrow X$, podemos considerar o quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} B \sqcup B & \xrightarrow{\langle f, g \rangle} & X \\ i \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cyl}(B) & \longrightarrow & * \end{array}$$

Veja que esse diagrama é do tipo considerado acima, já que $i : B \sqcup B \rightarrowtail \text{Cyl}(B)$ é uma cofibração pela definição de objeto cilindro, e o morfismo único $X \rightarrow *$ é uma fibração por conta da hipótese que fizemos sobre X . Note que um morfismo diagonal $h : \text{Cyl}(B) \rightarrow X$ faz comutar o diagrama acima se, e somente se, a igualdade $h \circ i = \langle f, g \rangle$ é satisfeita; ou seja, um levantamento para o diagrama acima é o mesmo que uma homotopia à esquerda entre os morfismos f e g , o que não necessariamente vai existir sempre.

Vale notar que a exigência de que X seja fibrante não significa nada na estrutura modelo de Serre na categoria de espaços topológicos \mathbf{Top} , já que nessa estrutura modelo todo objeto é fibrante. Em outras palavras, quando lidamos com espaços topológicos, todo problema de construção de uma homotopia entre dois mapas pode ser formulado como um problema de levantamento do tipo que estamos considerando.

É claro que também temos uma formulação análogo para o problema de construção de uma homotopia à direita entre os morfismos f e g . Nesse caso, supomos que B seja um objeto cofibrante, tomamos $(P(X), c, p)$ um objeto de caminhos para X , e consideramos o quadrado comutativo abaixo o qual é do tipo que estamos considerando.

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & P(X) \\ \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{(f,g)} & X \times X \end{array}$$

Um morfismo diagonal $h : B \rightarrow P(X)$ faz comutar o diagrama acima se, e somente se, satisfaz a igualdade $p \circ h = (f, g)$; ou seja, um levantamento para o diagrama acima é precisamente uma homotopia à direita entre f e g , a qual não necessariamente precisa existir.

O próximo exemplo exige um lema simples a respeito da relação entre produtos e fibrações.

1.2 Lema. *Em uma categoria modelo \mathbf{M} , suponha que X seja um objeto fibrante. Então, dado qualquer outro objeto B , a projeção no primeiro fator $\pi_1 : B \times X \rightarrow B$ é uma fibração.*

Demonstração. Basta notar que o diagrama abaixo é um pullback e usar o fato que fibrações são preservadas por pullbacks.

$$\begin{array}{ccc} B \times X & \xrightarrow{\pi_2} & X \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & * \end{array} \quad \blacksquare$$

1.3 Exemplo (Extensões ao longo de cofibrações). Suponha que $i : A \rightarrow B$ seja uma cofibração em uma categoria modelo \mathbf{M} , o que geralmente interpretamos como A sendo um *bom* subobjeto de B . Considere um morfismo $f : A \rightarrow X$, onde supomos que X seja um objeto fibrante. Segue do Lema 1.2 acima que a projeção $\pi_1 : B \times X \rightarrow B$ é uma fibração, e podemos então considerar o problema de levantamento dado pelo quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{(i,f)} & B \times X \\ i \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \end{array}$$

Suponha então que $h : B \rightarrow B \times X$ seja um levantamento para o diagrama acima. Note então que o morfismo $F := \pi_2 \circ h : B \rightarrow X$ satisfaz a igualdade

$$F \circ i = \pi_2 \circ h \circ i = \pi_2 \circ (i, f) = f;$$

ou seja, F é *extensão do morfismo f ao longo da cofibração i* . Reciprocamente, se $F : B \rightarrow X$ satisfaz $F \circ i = f$, então o morfismo $h := (\text{id}_B, F) : B \rightarrow B \times X$ define um levantamento para o diagrama acima. De fato, a igualdade $\pi_1 \circ h = \text{id}_B$ é imediata da definição, e a igualdade $h \circ i = (i, f)$ segue da sequência de igualdade

$$\pi_1 \circ h \circ i = \text{id}_B \circ i = i$$

e também da sequência de igualdades

$$\pi_2 \circ h \circ i = \pi_2 \circ (\text{id}_B, F) \circ i = F \circ i = f.$$

Em suma, o problema de levantamento acima admite uma solução se, e somente se, o morfismo $f : A \rightarrow X$ pode ser estendido a um morfismo $F : B \rightarrow X$ ao longo da cofibração $i : A \rightarrow B$. Pensando novamente em cofibrações como boas inclusões, temos um morfismo definido *parcialmente* no subobjeto A e queremos estendê-lo a um morfismo definido *globalmente* no objeto B .

Novamente, no caso clássico da categoria **Top**, a exigência de que X seja fibrante não impõe na verdade nenhuma restrição adicional sobre X , as projeções nos fatores de um produto são sempre fibrações de Serre, portanto qualquer problema de extensão de um mapa contínuo ao longo de uma cofibração na estrutura modelo de Serre pode ser formulado como um problema de levantamento no sentido em que estamos tratando aqui.

1.4 Exemplo (Seções de uma fibração). Considere uma cofibração $i : A \rightarrow B$, e uma fibração $p : E \rightarrow B$. Vamos supor que essa fibração admita uma *seção parcial sobre A* , ou seja, que exista um morfismo $s : A \rightarrow E$ satisfazendo a igualdade $p \circ s = i$. Podemos então considerar o problema de levantamento dado pelo quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s} & E \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B \end{array}$$

Suponha que $S : B \rightarrow E$ seja um levantamento para o diagrama acima, o que significa que S deve satisfazer as seguintes igualdades:

- (i) $p \circ S = \text{id}_B$;
- (ii) $S \circ i = s$.

A primeira igualdade diz que S é uma *seção* da fibração p , enquanto a segunda igualdade diz que S *estende* a seção parcial s considerada inicialmente ao longo da cofibração i .

No caso topológico, se considerarmos A como um *bom* subespaço de B , então no problema acima começamos com uma seção parcial da fibração p definida apenas sobre o subespaço A , e queremos então estendê-la a uma outra seção que esteja definida globalmente no espaço B .

Os exemplos acima ilustram algumas situações nas quais nos deparamos com problemas de levantamento não triviais. O objetivo da Teoria de Obstrução no contexto de categorias modelo é exatamente estudar esses problemas de levantamento não-triviais e obter critérios que nos permitam inferir quando eles admitem ou não alguma solução.

2 Categorias pontuadas

Antes de definirmos propriamente a noção de uma teoria de obstrução para morfismos em uma categoria modelo, precisamos antes discutir a noção de uma categoria modelo pontuada, já que é nesse contexto que desenvolveremos nosso estudo.

2.1 Definição. Uma categoria C é dita **pontuada** se ela admite um objeto que seja tanto inicial quanto final.

2.2 Observação. Por vezes, especialmente em contextos algébricos, um objeto que seja simultaneamente inicial e final é chamado de *objeto zero*. Seguindo essa terminologia, uma categoria pontuada é então uma categoria que possui um objeto zero.

2.3 Exemplo. A categoria de grupos \mathbf{Grp} é pontuada, sendo seu objeto zero dado pelo grupo trivial $\{e\}$.

Dado um anel R qualquer, a categoria $\mathbf{Ch}(R)$ de complexos de cadeias de R -módulos é uma categoria pontuada, sendo seu objeto zero dado pelo complexo trivial 0_\bullet cujo módulo de n -cadeias 0_n é por definição o R -módulo trivial 0 e cujo morfismo de bordo $\partial_n : 0_n \rightarrow 0_{n-1}$ é por definição o morfismo trivial.

Podemos obter uma categoria pontuada a partir de uma categoria arbitrária utilizando a noção de *objetos pontuados*.

2.4 Exemplo (Categorias de objetos pontuados). Dada uma categoria \mathbf{C} contendo um objeto final $*$, considere a categoria co-slice $\mathbf{C}_* := * \backslash \mathbf{C}$, ou seja, os objetos de \mathbf{C}_* são pares (A, a) , onde A é um objeto de \mathbf{C} , e $a : * \rightarrow A$ é um morfismo; e um morfismo do tipo $(A, a) \rightarrow (B, b)$ é um morfismo $f : A \rightarrow B$ na categoria original \mathbf{C} satisfazendo a igualdade $f \circ a = b$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & B \\ & \swarrow a \quad \searrow b & \\ & * & \end{array}$$

É comum interpretarmos o morfismo $a : * \rightarrow A$ como uma escolha de ponto no objeto A , e nos referirmos então ao morfismo a como um *ponto base* para A e ao par (A, a) como um *objeto pontuado* em \mathbf{C} . Seguindo essa interpretação, a condição $f \circ a = b$ imposta sobre um morfismo $f : (A, a) \rightarrow (B, b)$ pode ser entendida como uma condição de *preservação de pontos base*, razão pela qual dizemos que f nesse caso é um *morfismo pontuado*.

Veja que o objeto terminal vem sempre equipado com o ponto base dado pelo morfismo idêntico $\text{id}_* : * \rightarrow *$. Afirmamos que o objeto pontuado $(*, \text{id}_*)$ é tanto inicial quanto final na categoria \mathbf{C}_* . Dado um objeto pontuado $(A, a) \in \mathbf{C}_*$, o fato de $*$ ser final garante a existência de um único morfismo $!_A : A \rightarrow *$ na categoria original \mathbf{C} . Veja que esse morfismo é automaticamente pontuado, já que a igualdade $!_A \circ a = \text{id}_*$ segue diretamente do fato de ambos os morfismos $!_A \circ a$ e id_* terem o objeto final $*$ como codomínio. Em outras palavras, $!_A$ é o único morfismo do tipo $(A, a) \rightarrow (*, \text{id}_*)$ em \mathbf{C}_* , o que mostra que $(*, \text{id}_*)$ é um objeto final nessa categoria. Note agora que o morfismo $a : * \rightarrow A$ que determina o ponto base pode ser visto como um morfismo pontuado $a : (*, \text{id}_*) \rightarrow (A, a)$. Na verdade, pela definição de morfismo pontuado, esse é na verdade o único morfismo deste tipo, já que se $a' : (*, \text{id}_*) \rightarrow (A, a)$ é pontuado, então pode definir $a' \circ \text{id}_* = a$, ou seja, $a' = a$. Concluímos assim que existe um único morfismo do tipo $(*, \text{id}_*) \rightarrow (A, a)$, o que mostra que $(*, \text{id}_*)$ é também um objeto inicial em \mathbf{C}_* . Em suma, a categoria \mathbf{C}_* é sempre pontuada.

2.5 Exemplo (Conjuntos e espaços pontuados). Aplicando a construção descrita no Exemplo 2.4 a algumas categorias bem conhecidas recuperamos exemplos familiares de objetos pontuados. Essa construção geral pode ser especializada para obtermos várias categorias de objetos pontuados com as quais estamos habituados. Tomando $\mathbf{C} := \mathbf{Set}$ obtemos a categoria \mathbf{Set}_* de *conjuntos pontuados*. Veja que uma função $a : * \rightarrow A$ determina um elemento único $a(*) \in A$, e reciprocamente, todo elemento de A determina uma função do tipo $* \rightarrow A$, o que nos permite recuperar a noção mais usual de conjunto pontuado como sendo um par (A, a) , onde A é um conjunto e $a \in A$ é um elemento deste conjunto. Exatamente o mesmo raciocínio mostra que tomando $\mathbf{C} := \mathbf{Top}$ recuperamos a categoria \mathbf{Top}_* usual de espaços pontuados.

Assumindo que \mathbf{C} possua um pouco mais de estrutura, podemos relacioná-la com a categoria de objetos pontuados \mathbf{C}_* . Mais assumindo que \mathbf{C} admita coprodutos binários¹, podemos *adjuntar*

¹A princípio só precisamos da existência de coprodutos com o objeto terminal, mas enfim...

um ponto base a qualquer objeto $X \in \mathbf{C}$ formando o coproduto $X \sqcup *$, o qual é comumente denotado por X^+ . Denotando os morfismos canônicos para esse coproduto por $j_1^X : X \rightarrow X^+$ e $j_2^X : * \rightarrow X^+$, o par (X^+, j_2^X) define um objeto na categoria \mathbf{C}_* . Essa construção pode ser estendida aos morfismos de \mathbf{C} . De fato, dado $f : X \rightarrow Y$, podemos formar o coproduto $f^+ := f \sqcup \text{id}_*$ o qual define um morfismo do tipo $X^+ \rightarrow Y^+$. Lembremos que pela definição do coproduto de dois morfismos f^+ é o único morfismo de seu tipo que faz comutar o diagrama mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 j_1^X \downarrow & & \downarrow j_1^Y \\
 X^+ & \xrightarrow{f^+} & Y^+ \\
 j_2^X \uparrow & & \uparrow j_2^Y \\
 * & \xrightarrow{\text{id}_*} & *
 \end{array} \tag{1}$$

Note que a comutatividade da parte inferior do diagrama mostra que f^+ define um morfismo pontuado do tipo $(X^+, j_2^X) \rightarrow (Y^+, j_2^Y)$.

Lembrando que o coproduto de objetos e morfismos depende functorialmente de ambas as variáveis, temos as igualdades

$$\text{id}_X^+ = \text{id}_X \sqcup \text{id}_* = \text{id}_{X \sqcup *} = \text{id}_{X^+}$$

e também as igualdades

$$(g \circ f)^+ = (g \circ f) \sqcup \text{id}_* = (g \sqcup \text{id}_*) \circ (f \sqcup \text{id}_*) = g^+ \circ f^+.$$

Em suma, associando a cada objeto $X \in \mathbf{C}$ o objeto pontuado (X^+, j_2^X) , e associando a cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ o morfismo pontuado correspondente $f^+ : (X^+, j_2^X) \rightarrow (Y^+, j_2^Y)$ obtemos o *funtor de adjunção de ponto base* $(-)^+ : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_*$. No caso de categorias pontuadas, o resultado abaixo mostra que essa construção identifica \mathbf{C} com \mathbf{C}_* .

2.6 Proposição. *Se \mathbf{C} é uma categoria pontuada, então o funtor de adjunção de ponto base $(-)^+ : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_*$ é uma equivalência de categorias, sendo seu quasi-inverso dado pelo funtor de esquecimento $\mathcal{E} : \mathbf{C}_* \rightarrow \mathbf{C}$.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que a composição $\mathcal{E} \circ (-)^+ : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ é naturalmente isomorfa ao funtor idêntico. Considere a transformação natural $\theta : \text{id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow \mathcal{E} \circ (-)^+$ cuja componente no objeto $X \in \mathbf{C}$ é dada pela injeção canônica $j_1^X : X \rightarrow X^+$. Dado um morfismo $f : X \rightarrow Y$, a comutatividade do quadrado superior no diagrama (1) usado na definição de f^+ mostra que a família $(j_1^X)_{X \in \mathbf{C}}$ depende naturalmente de X , ou seja, temos de fato uma transformação natural. Note agora que, se $!_X : * \rightarrow X$ denota o morfismo único decorrente do fato de $*$ ser também um objeto inicial, então a propriedade universal do coproduto fornece um morfismo $\langle \text{id}_X, !_X \rangle : X^+ \rightarrow X$ tal que $\langle \text{id}_X, !_X \rangle \circ j_1^X = \text{id}_X$; mostrando então que j_1^X é um isomorfismo e que, portanto, temos um isomorfismo natural de funtores $\text{id}_{\mathbf{C}} \cong \mathcal{E} \circ (-)^+$.

Resta construirmos um isomorfismo natural $(-)^+ \circ \mathcal{E} \cong \text{id}_{\mathbf{C}_*}$. Dado um objeto pontuado $(X, x) \in \mathbf{C}_*$ qualquer, afirmamos que a injeção canônica $j_1^X : X \rightarrow X^+$ define na verdade um morfismo pontuado do tipo $(X, x) \rightarrow (X^+, j_2^X)$. De fato, isso segue simplesmente do fato de que os morfismos $j_1^X \circ x$ e j_2^X ambos têm o objeto inicial $*$ como domínio.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{j_1^X} & X^+ \\
 & \nwarrow x & \nearrow j_2^X \\
 & * &
 \end{array}$$

Dado um morfismo pontuado $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$, a comutatividade do diagrama usado na definição de $f^+ : (X^+, j_2^X) \rightarrow (Y^+, j_2^Y)$ mais uma vez mostra que temos o quadrado comutativo abaixo,

$$\begin{array}{ccc} (X, x) & \xrightarrow{f} & (Y, y) \\ j_1^X \downarrow & & \downarrow j_1^Y \\ (X^+, j_2^X) & \xrightarrow{f^+} & (Y^+, j_2^Y) \end{array}$$

portanto a família de morfismos $(j_1^X)_{(X,x) \in \mathcal{C}}$ define uma transformação natural do funtor identidade $\text{id}_{\mathcal{C}_*}$ para a composição $(-)^+ \circ \mathcal{E}$.

Dado agora um objeto pontuado $(X, x) \in \mathcal{C}^*$, o morfismo x que escolhe ponto base dá origem por meio da propriedade universal do coproduto a um único morfismo $\langle \text{id}_X, x \rangle : X^+ \rightarrow X$ fazendo comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} X & & \xrightarrow{\text{id}_X} & & X \\ & \searrow j_1^X & & \nearrow \langle \text{id}_X, x \rangle & \\ & & X^+ & & \\ & \nearrow j_2^X & & \searrow x & \\ * & & & & \end{array}$$

Ora, a comutatividade da parte inferior do diagrama diz que $\langle \text{id}_X, x \rangle$ define um morfismo pontuado do tipo $(X^+, j_2^X) \rightarrow (X, x)$, enquanto a comutatividade da parte superior diz precisamente que esse morfismo é o inverso do morfismo $j_1^X : (X, x) \rightarrow (X^+, j_2^X)$ considerado anteriormente. Concluímos assim que a família $(j_1^X)_{(X,x) \in \mathcal{C}_*}$ define na verdade um isomorfismo natural $\text{id}_{\mathcal{C}_*} \cong (-)^+ \circ \mathcal{E}$. ■

Veremos agora como a existência de um objeto zero em uma categoria pontuada nos permite fazer uma série de construções especiais.

Dados dois objetos quaisquer X e Y de uma categoria pontuada \mathcal{C} , a existência de um objeto simultaneamente inicial e final nos permite definir um morfismo especial $\text{ct}_{X,Y} : X \rightarrow Y$ chamado **morfismo constante de X para Y** por meio da composição mostrada abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & Y \\ & \searrow !_X & \nearrow !_Y \\ & & * \end{array}$$

2.7 Exemplo. Vejamos a interpretação dessa noção de morfismo constante em alguns exemplos concretos de categorias pontuadas.

- (i) No caso da categoria de grupos \mathbf{Grp} , dados grupos G e H , como o morfismo $!_G : G \rightarrow \{e\}$ manda todos os elementos de G para e , enquanto o morfismo $!_H : \{e\} \rightarrow H$ manda e para a identidade e_H do grupo H , o morfismo constante $\text{ct}_{G,H} : G \rightarrow H$ é constante e igual a e_H .
- (ii) No caso da categoria de conjuntos pontuados \mathbf{Set}_* , dados (A, a) e (B, b) , o morfismo constante $\text{ct}_{(A,a),(B,b)} : (A, a) \rightarrow (B, b)$ manda todos os elementos de A para o ponto base $b \in B$. A interpretação é exatamente a mesma no caso da categoria \mathbf{Top}_* de espaços pontuados.

Introduziremos agora algumas construções envolvendo escolhas de pontos base que serão especialmente relevantes no estudo de categorias pontuadas.

2.8 Definição. Sejam $f : X \rightarrow Y$ um morfismo em uma categoria \mathcal{C} qualquer e $y : * \rightarrow Y$ uma escolha de ponto base no codomínio do mesmo. Caso o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow f & \\ * & \xrightarrow{y} & Y \end{array}$$

admita um pullback $(F, i, !_F)$, nos referiremos a este pullback por **fibra de f sobre y** .

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & X \\ !_F \downarrow & & \downarrow f \\ * & \xrightarrow{y} & Y \end{array}$$

Um fato que conforta o coração é que, conforme esperado, mesmo em uma categoria qualquer, a fibra de um morfismo “vive dentro” do domínio deste morfismo em um sentido categórico adequado como mostra o Lema abaixo.

2.9 Lema. Sejam $f : X \rightarrow Y$ um morfismo em uma categoria \mathcal{C} qualquer e $y : * \rightarrow Y$ um ponto base. Se $(F, i, !_F)$ é uma fibra de f sobre o ponto y , então $i : F \rightarrow X$ é um monomorfismo, ou seja, a fibra F define um subobjeto do domínio X .

Demonstração. Afirmamos que o morfismo $y : * \rightarrow Y$ que define o ponto base é sempre um monomorfismo. Isso pode parecer surpreendente, mas não passa de uma trivialidade absoluta: se $\alpha, \beta : Z \rightarrow *$ são dois morfismos tais que $y \circ \alpha = y \circ \beta$, necessariamente devemos ter $\alpha = \beta$ simplesmente pelo fato de $*$ ser um objeto final da categoria \mathcal{C} . Sabendo disso, o resultado em questão segue diretamente do fato de monomorfismos serem preservados por pullbacks. ■

2.10 Exemplo. Vejamos que essa noção categórica de fibra faz sentido nas categoriais usuais com as quais estamos acostumados.

- (i) Suponha que $f : X \rightarrow Y$ seja um morfismo na categoria de conjuntos \mathbf{Set} . Dado um ponto $y \in Y$, seja $p_y : \{*\} \rightarrow Y$ a função associada que escolhe esse elemento, ou seja, $p_y(*) := y$. Vamos mostrar que a fibra usual $f^{-1}(y)$ juntamente com o mapa de inclusão $i : f^{-1}(y) \hookrightarrow X$ e a função terminal $f^{-1}(y) \rightarrow \{*\}$ definem uma fibra também no sentido categórico, ou seja, vamos mostrar que o diagrama abaixo é um pullback em \mathbf{Set} .

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(y) & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \{*\} & \xrightarrow{p_y} & Y \end{array}$$

Suponha então que W seja outro conjunto e que $\alpha : W \rightarrow X$ seja uma função que juntamente com a função terminal $!_W : W \rightarrow \{*\}$ faz comutar a camada externa do diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} W & & \xrightarrow{\alpha} & & X \\ & \searrow !_W & & \searrow i & \\ & & f^{-1}(y) & \xrightarrow{i} & X \\ & & \downarrow & & \downarrow f \\ & & \{*\} & \xrightarrow{p_y} & Y \end{array}$$

Veja então que α necessariamente toma valores na fibra $f^{-1}(y)$, já que pela condição de comutatividade acima temos as igualdades

$$f(\alpha(w)) = p_y(!_W(w)) = p_y(*) = y$$

para qualquer elemento $w \in W$. Podemos então fatorar unicamente α pela fibra e obtermos uma função $\bar{\alpha} : W \rightarrow f^{-1}(y)$ que faz comutar todo o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow \bar{\alpha} & \searrow i & \downarrow f \\ f^{-1}(y) & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow !_W & & \downarrow f \\ \{*\} & \xrightarrow{p_y} & Y \end{array}$$

Exatamente o mesmo raciocínio mostra que a noção categórica de fibra coincide com a noção usual na categoria **Top**.

- (ii) Seja R um anel qualquer e considere a categoria $R - \mathbf{Mod}$ de R -módulos. Como o objeto terminal dessa categoria é dado pelo R -módulo trivial $\mathbf{0}$, e morfismos de R -módulos sempre levam zero em zero, o único ponto base que um R -módulo M qualquer possui é seu elemento zero 0_M . Assim, só podemos falar categoricamente de fibras sobre o zero, e como era de se esperar, dado um morfismo de R -módulos $f : M \rightarrow N$, um modelo concreto para tal fibra é dada pelo núcleo $\ker f$, juntamente com o morfismo de inclusão $i : \ker f \hookrightarrow M$ e o morfismo terminal $! : \ker f \rightarrow \mathbf{0}$; ou em outras palavras, o quadrado comutativo abaixo é um pullback na categoria $R - \mathbf{Mod}$.

$$\begin{array}{ccc} \ker f & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow ! & & \downarrow f \\ \mathbf{0} & \xrightarrow{0} & N \end{array}$$

No caso de uma categoria pontuada, como cada objeto admite um único ponto base, já que o objeto terminal é também inicial, só faz sentido falarmos da fibra de um morfismo $f : X \rightarrow Y$ sobre o ponto base único $!_Y : * \rightarrow Y$. Nos referiremos a essa fibra sobre o único ponto base simplesmente como **a fibra** do morfismo f e a denotaremos por $\text{Fib}(f)$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Fib}(f) & \xrightarrow{i_f} & X \\ \downarrow !_\text{Fib}(f) & & \downarrow f \\ * & \xrightarrow{!_Y} & Y \end{array}$$

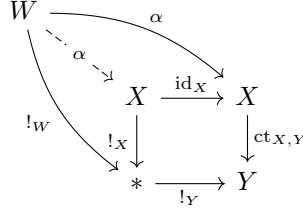
2.11 Exemplo (Fibra do morfismo constante). Sejam X e Y objetos quaisquer de uma categoria pontuada \mathbf{C} , e considere o morfismo constante $\text{ct}_{X,Y} : X \rightarrow Y$. Seguindo a experiência que temos com morfismos constantes em categorias concretas, parece razoável esperarmos que a fibra deste morfismo seja o próprio objeto X , e vamos mostrar que isso é de fato verdade, ou seja, que o diagrama abaixo define um pullback em \mathbf{C} .

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ \downarrow !_X & & \downarrow \text{ct}_{X,Y} \\ * & \xrightarrow{!_Y} & Y \end{array}$$

Note primeiro que o quadrado acima é comutativo, pois pela definição do morfismo constante temos

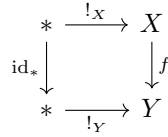
$$\text{ct}_{X,Y} \circ \text{id}_X = \text{ct}_{X,Y} = !_Y \circ !_X.$$

Se W é outro objeto e $\alpha : W \rightarrow X$ é um morfismo tal que $\alpha \circ \text{ct}_{X,Y} = !_Y \circ \alpha$, afirmamos que o próprio morfismo $\alpha : X \rightarrow Y$ pode ser usado para fazer o diagrama abaixo comutar.

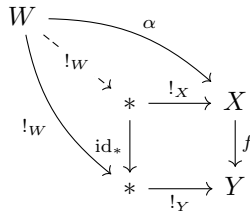


É claro que triângulo superior é comutativo, e a comutatividade do triângulo inferior segue simplesmente do fato de $!_X \circ \alpha$ e $!_W$ serem ambos morfismos para o objeto terminal $*$. É claro também que α é o único morfismo satisfazendo tais condições de comutatividade, já que se $\alpha' : W \rightarrow X$ é outro morfismo satisfazendo as mesmas condições, então em particular $\text{id}_X \circ \alpha' = \alpha$, portanto $\alpha' = \alpha$.

2.12 Exemplo. Suponha que $f : X \rightarrow Y$ seja um monomorfismo em uma categoria pontuada \mathbf{C} , sendo $*$ seu objeto zero. Afirmamos então que a fibra de f é dada por $*$. De fato, no primeiro que o quadrado abaixo é trivialmente comutativo, já que $*$ é em particular um objeto inicial.



Suponha agora que W seja outro objeto de \mathbf{C} e que $\alpha : W \rightarrow X$ seja tal que $f \circ \alpha = !_Y \circ !_W$, ou seja, a parte externa do diagrama abaixo é comutativa. Afirmamos então que o morfismo único $!_W : W \rightarrow *$ faz comutar o diagrama todo.



A comutatividade do triângulo inferior é imediata. Já com relação à comutatividade do triângulo superior, note que

$$f \circ (!_X \circ !_W) = (f \circ !_X) \circ !_Y = !_Y \circ !_W = f \circ \alpha,$$

e sendo f um monomorfismo, podemos cancelá-lo na igualdade acima para obtermos a igualdade desejada $!_X \circ !_W = \alpha$.

A recíproca desse fato me parece ser falsa, ou seja, existem morfismos em categorias pontuadas cuja fibra é trivial mas que não são monomorfismos. Isso é verdade, por exemplo, em categorias abelianas, mas nesse contexto podemos formar a diferença entre dois morfismos de forma que possamos utilizar a propriedade universal do pullback, mas não vejo como fazer algo análogo em um contexto geral.

3 Categorias modelo pontuadas

Após introduzirmos algumas das noções básicas associadas a categorias pontuadas, vejamos como essa estrutura se combina com a estrutura de uma categoria modelo. Uma **categoria modelo pontuada** é nada mais que uma categoria modelo $(\mathbf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ cuja categoria subjacente \mathbf{M} é pontuada no sentido da seção anterior.

A principal fonte de exemplo de categorias de modelos pontuadas para nós serão categorias de objetos pontuados em uma categoria de modelos inicial.

3.1 Exemplo. Seja $(\mathbf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ uma categoria modelo. Vejamos como definir uma estrutura modelo na categoria de objetos pontuados \mathbf{M}_* introduzida no Exemplo 2.4. Diremos que um morfismo pontuado $f : (A, a) \rightarrow (B, b)$ é uma equivalência fraca (respectivamente uma cofibração, uma fibração) se o morfismo subjacente $f : A \rightarrow B$ na categoria \mathbf{M} é uma equivalência fraca (respectivamente uma cofibração, uma fibração). Vamos denotar as classes de morfismos resultantes em \mathbf{M}_* por \mathcal{W}_* , \mathcal{C}_* e \mathcal{F}_* , respectivamente.

Vejamos que essas três classes de morfismos em \mathbf{M}_* satisfazem os axiomas que definem uma estrutura modelo.

- (M1) Não vamos pensar na bicompletude de \mathbf{M}_* por enquanto...
- (M2) Como a composição de morfismos em \mathbf{M}_* é dada pela composição em \mathbf{M} , é imediato que as equivalências fracas pontuadas satisfazem a propriedade 2-de-3.
- (M3) Suponha que o morfismo pontuado $f : (A, a) \rightarrow (B, b)$ seja um retrato do da equivalência fraca pontuada $g : (X, x) \rightarrow (Y, y)$. Vale então que $f : A \rightarrow B$ é uma retração da equivalência fraca $g : X \rightarrow Y$ na categoria \mathbf{M} subjacente, logo f é também uma equivalência fraca e, portanto, uma equivalência fraca pontuada. Um argumento análogo mostra que as classes de cofibrações e fibrações pontuadas são também fechadas por retrações.
- (M4) Considere o quadrado comutativo abaixo em \mathbf{M}_* , onde $i : (A, a) \rightarrow (B, b)$ é uma cofibração trivial pontuada e $p : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ é uma fibração pontuada.

$$\begin{array}{ccc} (A, a) & \xrightarrow{\alpha} & (X, x) \\ i \downarrow \wr & & \wr \downarrow p \\ (B, b) & \xrightarrow{\beta} & (Y, y) \end{array}$$

Esquecendo os pontos base obtemos o quadrado comutativo abaixo na categoria \mathbf{M} onde i e p são agora uma cofibração trivial e uma fibração trivial, respectivamente. Usando o axioma de levantamento em \mathbf{M} obtemos um morfismo $h : B \rightarrow X$ fazendo comutar o diagrama todo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ i \downarrow \wr & \nearrow h & \wr \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

Veja que h é um morfismo pontuado pois

$$h \circ b = h \circ (i \circ a) = (h \circ i) \circ a = \alpha \circ a = x.$$

Consequentemente, podemos ver h como um morfismo do tipo $(B, b) \rightarrow (X, x)$ na categoria \mathbf{M}_* , e então obtemos o levantamento necessário para o quadrado considerado inicialmente.

$$\begin{array}{ccc} (A, a) & \xrightarrow{\alpha} & (X, x) \\ \downarrow i & \nearrow h & \downarrow p \\ (B, b) & \xrightarrow{\beta} & (Y, y) \end{array}$$

Um raciocínio completamente análogo mostra que a existência de um levantamento pontuado no caso onde i é apenas uma cofibração pontuada, mas p é uma fibração trivial pontuada.

- (M5) Dado um morfismo pontuado $f : (A, a) \rightarrow (B, b)$, podemos fatorar o morfismo subjacente $f : A \rightarrow B$ como uma cofibração trivial $i : A \rightarrow C$ seguida de uma fibração $p : C \rightarrow B$. Considere no objeto C o ponto base $c : * \rightarrow C$ dado pela composição $c := i \circ a$. É óbvio que com essa escolha de ponto base em C o morfismo i se torna pontuado, e o mesmo é verdade para o morfismo p já que

$$p \circ c = p \circ i \circ a = f \circ a = b.$$

Temos então a fatoração de f como uma cofibração trivial pontuada $i : (A, a) \rightarrow (C, c)$ seguida de uma fibração pontuada $p : (C, c) \rightarrow (B, b)$, conforme indicado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} (A, a) & \xrightarrow{f} & (B, b) \\ \searrow i & & \nearrow p \\ & (C, c) & \end{array}$$

Um argumento análogo mostra que f também pode ser fatorado como uma cofibração pontuada $j : (A, a) \rightarrow (D, d)$ seguida de uma fibração trivial pontuada $q : (D, d) \rightarrow (B, b)$.

3.2 Observação. O leitor percebeu que não mencionamos nada sobre a bicompletude da categoria de objetos pontuados \mathbf{M}_* associada a uma categoria \mathbf{M} . Isso é porque essa é uma questão puramente categórica que não tem relação com a estrutura modelo de \mathbf{M} .

É um fato geral que, se \mathbf{C} é uma categoria completa, então a categoria de objetos pontuados \mathbf{C}_* é completa também. Isso é relativamente tranquilo de demonstrar. Dado um diagrama pequeno $F : J \rightarrow \mathbf{C}_*$, se $\mathcal{E} : \mathbf{C}_* \rightarrow \mathbf{C}$ é o morfismo de esquecimento evidente, temos o diagrama pequeno $\mathcal{E} \circ F : J \rightarrow \mathbf{C}$ na categoria inicial, o qual admite um limite $(L, (p_j : L \rightarrow F(j))_{j \in J})$ pela hipótese de completude. Veja que L possui uma escolha natural de ponto base, pois como cada $F(j)$ possui um ponto base $x_j : * \rightarrow F(j)$, e a coleção $(p_j : * \rightarrow F(j))_{j \in J}$ define um cone sobre $\mathcal{E} \circ F$ com vértice no objeto terminal $*$, a propriedade universal do limite garante a existência de um único morfismo $x : * \rightarrow L$ tal que $p_j \circ x = x_j$ para todo $j \in J$. Essa coleção de igualdades diz que os morfismos estruturais p_j do limite podem ser vistos como morfismos pontuados $p_j : (L, x) \rightarrow (F(j), x_j)$, e podemos então mostrar que o cone $((L, x), p_j)$ é o limite procurado para o funtor F .

Também é um fato geral que, quando a categoria \mathbf{C}_* é cocompleta, o mesmo é válido para a categoria de objetos pontuados \mathbf{C}_* , mas isso é um pouco mais difícil de demonstrar. O início da demonstração é o mesmo, começamos com um diagrama pequeno $F : J \rightarrow \mathbf{C}_*$ na categoria de objetos pontuados e por meio do funtor de esquecimento obtemos um diagrama pequeno $\mathcal{E} \circ F : J \rightarrow \mathbf{C}$ na categoria original. Esse diagrama admite um colimite Q , mas o problema é que, diferentemente do limite no caso anterior que vinha com uma escolha natural de ponto

base, nesse caso temos várias escolhas diferentes de ponto base. De fato, se $(\lambda_j : F(j) \rightarrow Q)_{j \in J}$ são os morfismos estruturais do colimite, então cada ponto base $x_j : * \rightarrow F(j)$ dá origem a um ponto base $\lambda_j \circ x_j : * \rightarrow Q$ no colimite. A ideia é que o colimite correto é obtido identificando todos esses candidatos a ponto base para que não tenhamos que fazer uma escolha que não seja canônica, e essa identificação é feita por meio de um *outro* colimite. Consideramos a categoria J^+ obtida de J pela adjunção de um objeto disjunto 0 e de um morfismo $!_j : 0 \rightarrow j$ para cada objeto que já existia previamente. O diagrama F pode ser *estendido* a um diagrama $F^+ : J^+ \rightarrow C$ definindo $F^+(0) := *$ e $F^+(!_j) := x_j : * \rightarrow F(j)$. Podemos então mostrar que o colimite do funtor estendido F^+ pode ser usado para obtermos o colimite do funtor $F : J \rightarrow C_*$ considerado inicialmente.

A existência de morfismos constantes em uma categoria pontuada nos permite definir a noção de morfismos homotopicamente nulos em categorias de modelos pontuadas.

3.3 Definição. Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em uma categoria de modelos pontuada M é dito

- (a) **homotopicamente nulo à esquerda** se f é homotópico à esquerda ao morfismo constante $ct_{X,Y} : X \rightarrow Y$;
- (b) **homotopicamente nulo à direita** se f é homotópico à direita ao morfismo constante $ct_{X,Y} : X \rightarrow Y$;
- (c) **homotopicamente nulo** se f é homotópico ao morfismo constante $ct_{X,Y}$.

4 Teoria de Obstrução e o caso clássico

Temos enfim todos os ingredientes à nossa disposição para definirmos o que é uma teoria de obstrução em uma categoria modelo.

4.1 Definição. Dizemos que uma cofibração $i : A \rightarrow B$ em uma categoria modelo pontuada M **admite uma teoria de obstrução** se para todo diagrama comutativo da forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

onde $p : X \rightarrow Y$ é uma fibração, existem um objeto W e um morfismo $\alpha : W \rightarrow \text{Fib}(p)$ com a seguinte propriedade: o problema de levantamento acima admite uma solução se, e somente se, α é homotopicamente nulo.

4.2 Observação. Na definição dada no artigo existe a exigência de que o morfismo α , ou mais precisamente sua classe de homotopia $[a] \in [W, \text{Fib}(p)]$ dependa funtorialmente da fibração p , mas vamos deixar isso de lado momentaneamente.

Antes de investigarmos propriedades dessa definição categórica geral de teoria de obstrução, vamos entender como ela se relaciona com alguns resultados bem conhecidos da Teoria de Homotopia clássica.

Dado um espaço pontuado (X, x_0) , considere um mapa pontuado $f : (S^n, *_{S^n}) \rightarrow (X, x_0)$, onde $*_{S^n} := (1, 0, \dots, 0)$. O resultado clássico abaixo diz que a classe de homotopia pontuada do mapa f é uma obstrução à existência de uma extensão de f para o interior do disco.

4.3 Teorema. *Um mapa pontuado $f : (S^n, *_{S^n}) \rightarrow (X, x_0)$ admite uma extensão para um mapa pontuado $F : (D^{n+1}, *_{S^n}) \rightarrow (X, x_0)$ se, e somente se, f é homotopicamente nulo no sentido pontuado.*

Rascunho da demonstração. Se existe a extensão $F : (D^{n+1}, *_{S^n}) \rightarrow (X, x_0)$, então essa extensão é necessariamente homotopicamente nula no sentido pontuado pois o disco $(D^{n+1}, *_{S^n})$ é contrátil, logo o mapa pontuado f é homotopicamente nulo também.

Reciprocamente, suponha que f seja homotopicamente nulo no sentido pontuado, e considere $H : S^n \times I \rightarrow X$ uma homotopia pontuada de f para o mapa constante $\text{ct}_{(S^n, *), (X, x_0)}$. Sendo a homotopia H pontuada, ela é constante e igual a x_0 no subespaço $\{*_{S^n}\} \times I \cup S^n \times \{1\}$ do cilindro $S^n \times I$, portanto faz sentido formarmos o espaço quociente

$$CS^n := \frac{S^n \times I}{\{*_{S^n}\} \times I \cup S^n \times \{1\}},$$

chamado de *cone reduzido* de S^n , e olharmos para o mapa pontuado induzido nesse quociente

$$\overline{H} : (CS^n, [*_{S^n}]) \rightarrow (X, x_0).$$

O passo final da demonstração é compararmos esse cone reduzido com o disco. Note que o mapa $\theta : S^n \times I \rightarrow D^{n+1}$ dada por

$$\theta(x, t) := (1 - t) \cdot x + t \cdot *_{S^n} \quad \forall (x, t) \in S^n \times I$$

satisfaz é constante e igual a $*_{S^n}$ no subespaço $\{*_{S^n}\} \times I \cup S^n \times \{1\}$, portanto existe um mapa pontuado induzido no quociente

$$\overline{\theta} : (CS^n, [*_{S^n}]) \rightarrow (D^{n+1}, *_{S^n}),$$

e podemos mostrar que esse mapa induzido é na verdade um homeomorfismo. A extensão $F : (D^{n+1}, *_{S^n}) \rightarrow (X, x_0)$ desejada é obtida então por meio da composição

$$F := \overline{H} \circ \overline{\theta}^{-1}. \quad \blacksquare$$

Lembremos que todo problema de extensão pode ser interpretado como um problema de levantamento. No caso anterior, temos o problema de levantamento.

$$\begin{array}{ccc} (S^n, *_{S^n}) & \xrightarrow{(i, f)} & (D^{n+1} \times X, (*_{S^n}, x_0)) \\ i \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ (D^{n+1}, *_{S^n}) & \xrightarrow{\text{id}_{D^{n+1}}} & (D^{n+1}, *_{S^n}) \end{array}$$

Vimos no Teorema anterior que tal problema admite uma solução se, e somente se, o mapa $f : (S^n, *_{S^n}) \rightarrow (X, x_0)$ é homotopicamente nulo, sendo que (X, x_0) é exatamente a fibra da fibração π_1 acima, ou seja, α é uma obstrução no sentido categórico da Definição 4.1.