

Teoria de Homotopia Abstrata

Edmundo Martins

22 de agosto de 2023

1 Categorias modelo

1.1 Definição. Seja M uma categoria localmente pequena, completa e co-completa. Uma **estrutura modelo** em M consiste de três classes de morfismos $\mathcal{W}, \mathcal{F}, \mathcal{C} \subseteq \text{Mor}(M)$ cujos elementos são chamados, respectivamente, **equivalências fracas**, **fibrações** e **cofibrações**, as quais devem satisfazer as seguintes condições:

- (M1) A categoria M é bicompleta, ou seja, admite todos os limites e colimites indexados por categorias pequenas.
- (M2) (Propriedade 2-de-3) Dados morfismos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ em M , se dois dos morfismos do conjunto $\{f, g, g \circ f\}$ estiverem em \mathcal{W} , então o terceiro também deve estar.
- (M3) (Propriedade de retração) Se um morfismo $f : A \rightarrow X$ é retração de um outro morfismo $g : B \rightarrow Y$, ou seja, se existe um diagrama comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_A & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & A \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_X & & \end{array}$$

e g pertence a \mathcal{W} (ou a \mathcal{F} , ou a \mathcal{C}), então f também pertence a \mathcal{W} (ou a \mathcal{F} , ou a \mathcal{C} , respectivamente). Em suma, as classes \mathcal{W}, \mathcal{F} e \mathcal{C} são fechadas por retrações.

- (M4) (Propriedade de levantamento) Dado um diagrama comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

onde i é uma cofibração, e p é uma fibração; se um dos dois morfismos i ou p é também uma equivalência fraca, então o diagrama admite um levantamento, ou seja, existe um morfismo $f : B \rightarrow X$ que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow f & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

(M5) (Propriedade de fatoração) Qualquer morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathbf{M} pode ser fatorado nas duas formas mostradas abaixo,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow i & \nearrow p \\ & \hat{X} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow j & \nearrow q \\ & \tilde{Y} & \end{array}$$

onde p é simultaneamente uma fibração e uma equivalência fraca, enquanto j é simultaneamente uma cofibração e uma equivalência fraca.

Vamos introduzir um pouco de terminologia antes de fazermos alguns comentários sobre a definição acima. Os morfismos de \mathbf{M} que pertencem à classe $\mathcal{W} \cap \mathcal{F}$ são chamados de **fibrações triviais** ou **fibrações acíclicas**, enquanto os morfismos que pertencem à classe $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}$ são chamados de **cofibrações triviais** ou **cofibrações acíclicas**. Usando essa terminologia o axioma de fatoração (M5) pode ser enunciado da seguinte forma: todo morfismo em uma categoria modelo pode ser fatorado como uma cofibração seguido de uma fibração trivial, ou como uma cofibração trivial seguido de uma fibração.

1.2 Observação. Lembremos que, dados objetos X e Y de uma categoria \mathbf{C} qualquer, dizemos que X é um **retrato** de Y se existem morfismos $s : X \rightarrow Y$ e $r : Y \rightarrow X$ tais que $r \circ s = \text{id}_X$. Comumente nos referimos ao morfismo s por **seção** e ao morfismo r por **retração**. A condição $r \circ s = \text{id}_X$ garante que s seja um monomorfismo. De fato, se $f, g : W \rightarrow X$ são morfismos tais que $s \circ f = s \circ g$, então

$$f = \text{id}_X \circ f = r \circ s \circ f = r \circ s \circ g = \text{id}_X \circ g = g.$$

Isso nos permite encarar X como um subobjeto de Y , e o morfismo r então intuitivamente deforma Y para esse subobjeto, mas de forma a mantê-lo fixado. Note que a condição $r \circ s = \text{id}_X$ garante também que o morfismo r seja um epimorfismo.

A noção de retração que aparece no axioma (M3) de uma estrutura modelo enunciado acima pode ser interpretada nesse sentido em uma categoria adequada. Lembremos que toda categoria \mathbf{C} dá origem a uma categoria de setas $\text{Arr}(\mathbf{C})$. Os objetos dessa categoria são precisamente morfismos $f : A \rightarrow B$ na categoria inicial \mathbf{C} , e dados dois tais objetos $f : A \rightarrow B$ e $g : X \rightarrow Y$, um morfismo do tipo $(f : A \rightarrow B) \rightarrow (g : X \rightarrow Y)$ na categoria de setas $\text{Arr}(\mathbf{C})$ é dado por um par de morfismos $(\alpha : A \rightarrow X, \beta : B \rightarrow Y)$ satisfazendo a igualdade $\beta \circ f = g \circ \alpha$. Podemos então visualizar esse morfismo em $\text{Arr}(\mathbf{C})$ na forma de um quadrado comutativo como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

A composição de morfismos é definida “colando” quadrados comutativos adjacentes. Mais precisamente, dados três objetos $f : X_1 \rightarrow Y_1$, $g : X_2 \rightarrow Y_2$ e $h : X_3 \rightarrow Y_3$ na categoria $\text{Arr}(\mathbf{C})$, e dados também dois morfismos componíveis

$$(\alpha_1 : X_1 \rightarrow X_2, \beta_1 : Y_1 \rightarrow Y_2) \quad (\alpha_2 : X_2 \rightarrow X_3, \beta_2 : Y_2 \rightarrow Y_3),$$

sua composição é o morfismo

$$(\alpha_2, \beta_2) \circ (\alpha_1, \beta_1) : (f : X_1 \rightarrow Y_1) \rightarrow (h : X_3 \rightarrow Y_3)$$

em $\text{Arr}(\mathbf{C})$ definido pelo par

$$(\alpha_2, \beta_2) \circ (\alpha_1, \beta_1) := (\alpha_2 \circ \alpha_1 : X_1 \rightarrow X_3, \beta_2 \circ \beta_1 : Y_1 \rightarrow Y_3).$$

Essa composição pode também ser visualizada como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & X_3 \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow h \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Y_3 \end{array} \implies \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\alpha_2 \circ \alpha_1} & X_3 \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ Y_1 & \xrightarrow{\beta_2 \circ \beta_1} & Y_3 \end{array}$$

A associatividade dessa composição via colagem segue diretamente da associatividade da composição na categoria inicial \mathbf{C} . Por fim, dado um objeto $f : X \rightarrow Y$ qualquer, o morfismo idêntico associado a ele é dado pelo par $\text{id}_f := (\text{id}_X, \text{id}_Y)$, conforme mostrado no quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}_X} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\text{id}_Y} & Y \end{array}$$

Note agora que, se o objeto $f : A \rightarrow B$ é um retrato do objeto $g : X \rightarrow Y$ na categoria de setas $\text{Arr}(\mathbf{M})$, então por definição existem morfismos $s_1 : A \rightarrow X$, $s_2 : B \rightarrow Y$, $r_1 : X \rightarrow A$ e $r_2 : Y \rightarrow B$ tais que $(r_1, r_2) \circ (s_1, s_2) = \text{id}_f$, o que também pode ser expresso pelo diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id}_A & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ A & \xrightarrow{s_1} & X & \xrightarrow{r_1} & A \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{s_2} & Y & \xrightarrow{r_2} & B \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_B & & \end{array}$$

Esse é precisamente o diagrama que aparece no axioma de retração na definição de uma estrutura modelo. Podemos então reformular tal axioma dizendo que as classes de equivalências fracas, fibrações e cofibrações são todas fechadas por *retrações na categoria de setas* $\text{Arr}(\mathbf{C})$.

1.3 Observação. Quando trabalhamos com categorias modelo, no lugar de dizermos explicitamente que um morfismo é uma equivalência fraca, ou uma cofibração, ou uma fibração, simplesmente adornarmos de alguma forma a seta que representa o morfismo em questão. A convenção notacional que seguiremos nesse aspecto é a seguinte:

- uma equivalência fraca será denotada por $\xrightarrow{\sim}$;
- uma cofibração será denotada por \twoheadrightarrow ;
- uma fibração será denotada por \rightarrowtail .

Também denotaremos cofibrações ou fibrações triviais por uma combinação dos símbolos acima:

- uma cofibração trivial será denotada por $\xrightarrow{\sim}\twoheadrightarrow$;
- uma fibração trivial será denotada por $\rightarrowtail\sim$.

Seguindo essa convenção notacional, podemos, por exemplo, enunciar o axioma de levantamento (M4) da seguinte forma: em uma categoria modelo, todo quadrado comutativo da forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow \wr & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

admite um levantamento $f : B \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow \wr & \nearrow f & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

e todo quadrado comutativo da forma

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \wr \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

admite um levantamento $f : B \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow f & \wr \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

Usando a mesma convenção, o axioma de fatoração (M5) pode ser enunciado da seguinte maneira: em uma categoria modelo, todo morfismo $f : X \rightarrow Y$ possui duas fatoraões como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \wr \searrow i & & \nearrow p \\ & \hat{X} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \wr \searrow j & & \nearrow q \\ & \tilde{Y} & \end{array}$$

1.1 Fatorações em categorias

Antes de investigarmos mais a fundo as propriedades de categorias modelo, vamos investigar parte de sua estrutura sob uma perspectiva mais geral. O ponto central da discussão é que a definição de uma categoria modelo pode ser encapsulada totalmente pela existência de fatorações em cofibrações e fibrações que estão relacionadas por condições de levantamento.

Inicialmente, definimos a noção de levantamento de forma mais geral.

1.4 Definição. Sejam \mathbf{C} uma categoria e $\mathcal{A} \subseteq \text{Mor}(\mathbf{C})$ uma classe qualquer de morfismos. Dizemos que um morfismo $f : A \rightarrow B$ em \mathbf{C} **satisfaz a propriedade de levantamento à esquerda com relação a \mathcal{A}** se todo quadrado comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

onde $p : X \rightarrow Y$ pertence a \mathcal{A} , admite um levantamento, ou seja, existe um morfismo $h : B \rightarrow X$ que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Dualmente, dizemos que um morfismo $g : X \rightarrow Y$ **satisfaz a propriedade de levantamento à direita com relação a \mathcal{A}** se todo quadrado comutativo como abaixo,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

onde $i : A \rightarrow B$ pertence a \mathcal{A} , admite um levantamento $h : B \rightarrow X$ como mostrado abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow g \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$