Teoria de Homotopia Abstrata

Edmundo B. de C. Martins

14 de janeiro de 2024

Sumário

Capítulo 1

Categorias de modelos

1.1 Primeiras definições e exemplos

1.1.1 Definição. Seja M uma categoria localmente pequena. Uma **estrutura de modelos** em M consiste de três classes de morfismos $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathsf{M})$ cujos elementos são chamados, respectivamente, **equivalências fracas**, **cofibrações** e **fibrações**, as quais devem satisfazer os seguintes axiomas:

(M1) A categoria M é bicompleta, ou seja, admite todos os limites e colimites indexados por categorias pequenas.

(M2) (Propriedade 2-de-3) Dados morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ em M, se dois dos morfismos do conjunto $\{f, g, g \circ f\}$ estiverem em $\mathcal{W}$, então o terceiro também deve estar.

(M3) (Propriedade de retração) Se um morfismo $f : A \to X$ é retração de um outro morfismo $g : B \to Y$, ou seja, se existe um diagrama comutativo como abaixo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_A"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r] & X \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

e g pertence a $\mathcal{W}$ (ou a $\mathcal{C}$, ou a $\mathcal{F}$), então f também pertence a $\mathcal{W}$ (ou a $\mathcal{C}$, ou a $\mathcal{F}$, respectivamente). Em suma, as classes $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{F}$ são fechadas por retrações.

(M4) (Propriedade de levantamento) Dado um diagrama comutativo como abaixo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

onde i é uma cofibração, e p é uma fibração; se um dos dois morfismos i ou p é também uma equivalência fraca, então o diagrama admite um *levantamento*, ou seja, existe um morfismo diagonal $f : B \to X$ que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "f"] & Y \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

(M5) (Propriedade de fatoração) Qualquer morfismo $f : X \to Y$ em M pode ser na forma mostrada abaixo,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

onde i é uma cofibração, e p é simultaneamente uma fibração e uma equivalência fraca. Além disso, todo morfismo também pode ser fatorado na forma mostrada abaixo,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

onde nesse caso j é simultaneamente uma cofibração e uma equivalência, e q é uma fibração.

Vamos introduzir um pouco de terminologia antes de fazermos alguns comentários sobre a definição acima. Os morfismos de M que pertencem à classe $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}$ são chamados de **cofibrações triviais** ou **cofibrações acíclicas**, enquanto os morfismos que pertencem à classe $\mathcal{W} \cap \mathcal{F}$ são chamados de **fibrações triviais** ou **fibrações acíclicas**. Usando essa terminologia o axioma de fatoração (M5) pode ser enunciado da seguinte forma: todo morfismo em uma categoria de modelos pode ser fatorado como uma cofibração seguido de uma fibração trivial e também como uma cofibração trivial seguida de uma fibração.

Um quadrado comutativo tendo uma cofibração na aresta esquerda e uma fibração na aresta direita - como no diagrama (1.2) - será chamado de um **problema de levantamento**. Caso um desses dois morfismos seja trivial, usaremos então o termo **problema de levantamento trivial**. Tendo em vista essa terminologia, o axioma de levantamento (M4) pode ser enunciado da seguinte forma: em uma categoria de modelos, todo problema de levantamento trivial admite uma solução.

1.1.2 Observação. Lembremos que, dados objetos X e Y de uma categoria C qualquer, dizemos que X é um **retrato** de Y se existem morfismos $s : X \to Y$ e $r : Y \to X$ tais que $r \circ s = \mathrm{id}_X$. Comumente nos referimos ao morfismo s por **seção** e ao morfismo r por **retração**. A condição $r \circ s = \mathrm{id}_X$ garante que s seja um monomorfismo. De fato, se $f, g : W \to X$ são morfismos tais que $s \circ f = s \circ g$, então

$$f = \mathrm{id}_X \circ f = r \circ s \circ f = r \circ s \circ g = \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

Isso nos permite encarar X como um subobjeto de Y, e o morfismo r então intuitivamente deforma Y para esse subobjeto, mas de forma a mantê-lo fixado. Note que a condição $r \circ s = \mathrm{id}_X$ garante também que o morfismo r seja um epimorfismo.

A noção de retração que aparece no axioma (M3) de uma estrutura de modelos enunciado acima pode ser interpretada nesse sentido se introduzirmos uma categoria adequada para isso. Lembremos que toda categoria C dá origem a uma categoria de setas $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$. Os objetos dessa categorias são precisamente morfismos $f : A \to B$ na categoria incial C, e dados dois tais objetos $f : A \to B$ e $g : X \to Y$, um morfismo do tipo $(f : A \to B) \to (g : X \to Y)$ na categoria de setas $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$ é dado por um par de morfismos $(\alpha : A \to X,\ \beta : B \to Y)$ satisfazendo a igualdade $\beta \circ f = g \circ \alpha$. Podemos então visualizar esse morfismo em $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$ na forma de um quadrado comutativo como mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

A composição de morfismos é definida "colando" quadrados comutativos adjacentes. Mais precisamente, dados três objetos $f : X_1 \to Y_1$, $g : X_2 \to Y_2$ e $h : X_3 \to Y_3$ na categoria $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$, e dados também dois morfismos componíveis

$$(\alpha_1 : X_1 \to X_2,\ \beta_1 : Y_1 \to Y_2) \qquad (\alpha_2 : X_2 \to X_3,\ \beta_2 : Y_2 \to Y_3),$$

sua composição é o morfismo

$$(\alpha_2, \beta_2) \circ (\alpha_1, \beta_1) : (f : X_1 \to Y_1) \to (h : X_3 \to Y_3)$$

em $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$ definido pelo par

$$(\alpha_2, \beta_2) \circ (\alpha_1, \beta_1) \coloneqq (\alpha_2 \circ \alpha_1 : X_1 \to X_3,\ \beta_2 \circ \beta_1 : Y_1 \to Y_3).$$

Essa composição pode também ser visualizada como mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f"'] & X_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "g"] & X_3 \arrow[d, "h"] \\ Y_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & Y_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & Y_3 \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\alpha_2\circ\alpha_1"] \arrow[d, "f"'] & X_3 \arrow[d, "h"] \\ Y_1 \arrow[r, "\beta_2\circ\beta_1"'] & Y_3 \end{tikzcd}$$

A associatividade dessa composição via colagem segue diretamente da associatividade da composição na categoria inicial C. Por fim, dado um objeto $f : X \to Y$ qualquer, o morfismo idêntico associado a ele é dado pelo par $\mathrm{id}_f \coloneqq (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y)$, conforme mostrado no quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Note agora que, se o objeto $f : A \to B$ é um retrato do objeto $g : X \to Y$ *na categoria de setas* $\mathrm{Arr}(\mathsf{M})$, então por definição existem morfismos $s_1 : A \to X$, $s_2 : B \to Y$, $r_1 : X \to A$ e $r_2 : Y \to B$ tais que $(r_1, r_2) \circ (s_1, s_2) = \mathrm{id}_f$, o que também pode ser expresso pelo diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_A"] & X \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "s_2"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_B"'] & Y \arrow[r, "r_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Esse é precisamente o diagrama que aparece no axioma de retração na definição de uma estrutura modelo. Podemos então reformular tal axioma dizendo que as classes de equivalências fracas, fibrações e cofibrações são todas fechadas por *retrações na categoria de setas* $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$.

1.1.3 Observação. Quando trabalhamos com categorias de modelos, ao invés de dizermos explicitamente que um morfismo é uma equivalência fraca, uma cofibração, ou uma fibração; é comum indicarmos isso decorando de alguma forma a seta que representa tal morfismo. A convenção notacional que seguiremos nesse aspecto é a seguinte:

- uma equivalência fraca será denotada por $\xrightarrow{\sim}$;
- uma cofibração será denotada por $\rightarrowtail$;
- uma fibração será denotada por $\twoheadrightarrow$.

Combinando os símbolos acima obtemos outros que utilizaremos para denotar cofibrações triviais ou fibrações triviais:

- uma cofibração trivial será denotada por $\overset{\sim}{\rightarrowtail}$;
- uma fibração trivial será denotada por $\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}$.

1.2 Fatorações em categorias

1.2.1 Morfismos projetivos e injetivos

Uma parte essencial na definição de uma estrutura de modelos é a existência de fatorações de morfismos quaisquer em termos de cofibrações e fibrações satisfazendo condições de trivialidade, sendo que estas classes de morfismos se relacionam por propriedades de levantamento. Podemos reformular isso em um contexto categórico mais amplo que nos permitirá deduzir algumas das propriedades básicas de categorias de modelos de forma mais transparente. O conteúdo dessa seção é baseado principalmente em [nLa24].

Inicialmente, analisamos as propriedades gerais de morfismos definidos em termos de propriedades de levantamento.

1.2.1 Definição. Sejam C uma categoria e $K \subseteq \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ uma classe qualquer de morfismos. Dizemos que um morfismo $f : A \to B$ em C **satisfaz a propriedade de levantamento à esquerda com relação a** K se todo quadrado comutativo como abaixo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

onde $p : X \to Y$ pertence a K, admite um levantamento, ou seja, existe um morfismo diagonal $\varphi : B \to X$ que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Dizemos também nesse caso que f é um morfismo K**-projetivo**.

1.2.2 Exemplo. Os principais exemplos de morfismos projetivos nos quais estaremos interessados vêm da teoria de categorias de modelos. Segue diretamente do axioma de levantamento

(M4) na Definição 1.1.1 que toda cofibração em uma categoria de modelos é um morfismo projetivo com relação à classe de fibrações triviais. Veremos na próxima seção que isso na verdade caracteriza as cofibrações em uma estrutura de modelos. Analogamente, o axioma (M4) também diz que toda cofibração trivial é projetiva com relação à classe de fibrações, e também veremos logo mais que essa propriedade de projetividade caracteriza as cofibrações triviais.

1.2.3 Exemplo. Seja R um anel e considere a categoria $R\mathsf{Mod}$ de R-módulos e homomorfismos de R-módulos. Considere também a classe $\mathrm{Epi} \subseteq \mathrm{Mor}(R\mathsf{Mod})$ formada por todos os epimorfismos de R-módulos. Dado um R-módulo M qualquer, se $\mathbf{0}$ denota o R-módulo trivial, afirmamos que o morfismo trivial $0_M : \mathbf{0} \to M$ é projetivo com relação à classe Epi se, e somente se, M é um R-módulo projetivo.

Suponha inicialmente que M seja um R-módulo projetivo, e considere o problema de levantamento indicado abaixo,

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r, "0_A"] \arrow[d, "0_M"'] & A \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

onde $p : A \to B$ é um epimorfismo de R-módulos. Graças à projetividade de M, o morfismo f pode ser levantado através do epimorfismo p, ou seja, existe um morfismo $F : M \to A$ tal que $p \circ F = f$. Ora, como também vale a igualdade $F \circ 0_M = 0_A$, temos o diagrama comutativo abaixo;

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r, "0_A"] \arrow[d, "0_M"'] & A \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "F"] & B \end{tikzcd}$$

mostrando que o problema de levantamento em questão possui uma solução e que, portanto, o morfismo 0_M é projetivo.

Reciprocamente, suponha que o morfismo 0_M seja projetivo. A fim de mostrarmos que o R-módulo M é projetivo, sejam $p : A \to B$ um epimorfismo de R-módulos, e $f : M \to B$ um morfismo qualquer. Como as composições $p \circ 0_A$ e $f \circ 0_M$ são ambas iguais ao morfismo trivial $0_B : \mathbf{0} \to B$, temos o problema de levantamento indicado abaixo, o qual admite uma solução $F : M \to A$ graças à projetividade de 0_M.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r, "0_A"] \arrow[d, "0_M"'] & A \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "F"] & B \end{tikzcd}$$

Note então que pela comutatividade temos $p \circ F = f$, ou seja, F é o levantamento procurado para o morfismo f; mostrando assim a projetividade de M.

O resultado abaixo reúne algumas das principais propriedades de morfismos K-projetivos.

1.2.4 Proposição. *Sejam* C *e* $K \subseteq \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ *uma classe de morfismos qualquer.*

(i) Todo isomorfismo de C *é um morfismo* K*-projetivo.*

(ii) Se $f_1 : A \to B$ *e* $f_2 : B \to C$ *são morfismos* K*-projetivos, então o morfismo composto* $f_2 \circ f_1 : A \to C$ *é também* K*-projetivo.*

(iii) Se $f_2 : A_2 \to B_2$ é um retrato de $f_1 : A_1 \to B_1$, e f_1 é um morfismo K-projetivo, então f_2 é também K-projetivo.

(iv) Se o quadrado comutativo indicado abaixo é um pushout,

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ B_1 \arrow[r, "\beta"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

e f_1 é K-projetivo, então f_2 também é K-projetivo.

(v) Se $f_1 : X_1 \to Y_1$ e $f_2 : X_2 \to Y_2$ são morfismos K-projetivos, e existem os coprodutos $X_1 \sqcup X_2$ e $Y_1 \sqcup Y_2$, então o morfismo $f_1 \sqcup f_2 : X_1 \sqcup X_2 \to Y_1 \sqcup Y_2$ é K-projetivo.

Em suma, a classe $K\mathsf{Proj} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ formada por todos os morfismos K-projetivos contém todos os isomorfismos e é fechada por composições, retratos, pushouts, e coprodutos.

Demonstração. (i) Suponha que $f : A \to B$ seja um isomorfismo e considere o quadrado comutativo abaixo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

onde p é um morfismo qualquer pertencente à classe K. Sendo f um isomorfismo, existe o morfismo inverso $f^{-1} : B \to Y$. Afirmamos então que $\alpha \circ f^{-1} : B \to X$ faz comutar o diagrama mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "\alpha\circ f^{-1}"] & Y \end{tikzcd}$$

A comutatividade do triângulo superior é imediata, e a comutatividade do quadrado inferior segue da sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} p \circ \alpha \circ f^{-1} &= \beta \circ f \circ f^{-1} \\ &= \beta \circ \mathrm{id}_B \\ &= \beta. \end{aligned}$$

(ii) Considere um problema de levantamento como mostrado abaixo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_2\circ f_1"'] & X \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

onde p é um morfismo qualquer pertence à classe K. Nosso objetivo é obter uma solução para esse problema de levantamento.

O problema acima dá origem ao problema de levantamento indicado abaixo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_1"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta\circ f_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

e a K-projetividade de f_1 nos permite obter um morfismo $\varphi : B \to X$ resolvendo esse problema conforme indicado abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_1"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta\circ f_2"'] \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & Y \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

A comutatividade do diagrama acima dá origem ao problema de levantamento abaixo,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_2"'] & X \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

e a K-projetividade de f_2 nos permite obter agora um morfismo $\psi : C \to X$ fazendo comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_2"'] & X \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & Y \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

Afirmamos que ψ é a solução procurada para o problema de levantamento (1.6), ou seja, afirmamos que o diagrama indicado abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_2\circ f_1"'] & X \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & Y \end{tikzcd}$$

Note que a comutatividade do triângulo inferior segue imediatamente da comutatividade do diagrama (1.8). Já a comutatividade do triângulo inferior segue da seguinte sequência de igualdades:

$$\begin{aligned} \psi \circ f_2 \circ f_1 &= \varphi \circ f_1 && \text{(por (1.8))} \\ &= \alpha. && \text{(por (1.7))} \end{aligned}$$

(iii) A hipótese de retração garante a existência de um diagrama comutativo como mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "f_2"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{A_2}"] & A_1 \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\ B_2 \arrow[r, "s_2"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{B_2}"'] & B_1 \arrow[r, "r_2"'] & B_2 \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

Considere agora um problema de levantamento como mostrado abaixo,

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_2"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B_2 \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

onde p é um morfismo qualquer pertencente à classe K. Usando este problema e os morfismos do diagrama de retração obtemos um outro problema de levantamento indicado abaixo, o qual admite uma solução $\varphi : B_1 \to X$ graças à projetividade de f_1.

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\alpha\circ r_1"] \arrow[d, "f_1"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B_1 \arrow[r, "\beta\circ r_2"'] \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & Y \end{tikzcd} \tag{1.10}$$

Afirmamos que o morfismo composto $\varphi \circ s_2 : B_2 \to X$ é a solução procurada para o problema de levantamento considerado inicialmente, ou seja, que ele faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_2"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B_2 \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "\varphi\circ s_2"] & Y \end{tikzcd}$$

De fato, por um lado temos a sequência de igualdades

$$\begin{aligned} \varphi \circ s_2 \circ f_2 &= \varphi \circ f_1 \circ s_1 && \text{(por (1.9))} \\ &= \alpha \circ r_1 \circ s_1 && \text{(por (1.10))} \\ &= \alpha \circ \mathrm{id}_{A_2} && \text{(por (1.9))} \\ &= \alpha; \end{aligned}$$

e por outro temos a sequência de igualdades

$$\begin{aligned} p \circ \varphi \circ s_2 &= \beta \circ r_2 \circ s_2 && \text{(por (1.10))} \\ &= \beta \circ \mathrm{id}_{B_2} && \text{(por (1.9))} \\ &= \beta. \end{aligned}$$

(iv) Considere um problema de levantamento como abaixo,

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "f_2"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B_2 \arrow[r, "\delta"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1.11}$$

onde p é um morfismo qualquer pertencente à classe K.

Usando a comutavidade do quadrado acima obtemos o problema de levantamento indicado abaixo, o qual admite uma solução $\varphi : B_1 \to X$ graças à K-projetividade do morfismo f_1.

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\gamma\circ\alpha"] \arrow[d, "f_1"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B_1 \arrow[r, "\delta\circ\beta"'] \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & Y \end{tikzcd} \tag{1.12}$$

A comutatividade do triângulo superior no diagrama anterior diz precisamente que a "camada externa" do diagrama abaixo é comutativa, portanto a propriedade universal do pushout garante a existência de um único morfismo $\psi : B_2 \to X$ fazendo comutar o diagrama todo.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma"] & \\
B_1 \arrow[r, "\beta"'] \arrow[drr, bend right, "\varphi"'] & B_2 \arrow[dr, dashed, "\psi"] & \\
 & & X
\end{tikzcd} \tag{1.13}$$

Vamos mostrar que ψ é a solução procurada para o problema de levantamento (1.11) considerado inicialmente. Veja inicialmente que a igualdade

$$\psi \circ f_2 = \gamma$$

segue imediatamente da comutatividade de (1.13). A igualdade $p \circ \psi = \delta$ é um pouco mais sutil. Note primeiro que δ faz comutar o diagrama abaixo,

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \arrow[ddr, bend left, "p\circ\gamma"] & \\
B_1 \arrow[r, "\beta"'] \arrow[drr, bend right, "\delta\circ\beta"'] & B_2 \arrow[dr, dashed, "\delta"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

portanto pela propriedade universal do pushout sabemos que δ é na verdade o *único* morfismo do tipo $B_2 \to Y$ que faz o diagrama acima comutar. Mas note que $p \circ \psi$ satisfaz as mesmas condições de comutatividade, já que por um lado

$$p \circ \psi \circ f_2 = g \circ \gamma$$

graças à comutatividade de (1.13), e por outro

$$\begin{aligned}
p \circ \psi \circ \beta &= p \circ \varphi && \text{(por (1.13))} \\
&= \delta \circ \beta; && \text{(por (1.12))}
\end{aligned}$$

e a igualdade desejada $p \circ \psi = \delta$ segue então da unicidade mencionada acima.

(v) Considere o problema de levantamento indicado abaixo,

$$\begin{tikzcd}
A_1 \sqcup A_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_1 \sqcup f_2"'] & X \arrow[d, "p"] \\
B_1 \sqcup B_2 \arrow[r, "\beta"'] & Y
\end{tikzcd} \tag{1.14}$$

onde p é um morfismo qualquer pertencente à classe K. Considere também as injeções canônicas $i_1 : A_1 \to A_1 \sqcup A_2$, $i_2 : A_2 \to A_1 \sqcup A_2$, $j_1 : B_1 \to B_1 \sqcup B_2$ e $j_2 : B_2 \to B_1 \sqcup B_2$ nos respectivos coprodutos.

A comutatividade do quadrado acima nos permite obter o problema de levantamento indicado abaixo, o qual admite uma solução $\varphi : B_1 \to X$ graças à projetividade do morfismo f_1.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha\circ i_1"] \arrow[d, "f_1"'] & X \arrow[d, "p"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta\circ j_1"'] \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & Y
\end{tikzcd} \tag{1.15}$$

Analogamente, temos também o outro problema de levantamento indicado abaixo, o qual admite uma solução $\psi : B_2 \to X$ graças à projetividade de f_2.

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "\alpha\circ i_2"] \arrow[d, "f_2"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B_2 \arrow[r, "\beta\circ j_2"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & Y \end{tikzcd} \tag{1.16}$$

A propriedade universal do coproduto dá origem ao morfismo $\langle\varphi,\psi\rangle : B_1 \sqcup B_2 \to X$ caracterizado unicamente por satisfazer as igualdades

$$\langle\varphi,\psi\rangle \circ j_1 = \varphi \quad \text{e} \quad \langle\varphi,\psi\rangle \circ j_2 = \psi.$$

Afirmamos que este morfismo é a solução para o problema de levantamento (1.14) considerado inicialmente, ou seja, que ele faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} A_1 \sqcup A_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_1\sqcup f_2"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B_1 \sqcup B_2 \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "\langle\varphi,\psi\rangle"] & Y \end{tikzcd}$$

Graças à propriedade universal do coproduto, a comutatividade do triângulo superior é equivalente às duas igualdades abaixo

$$\begin{cases} \langle\varphi,\psi\rangle \circ f_1 \sqcup f_2 \circ i_1 = \alpha \circ i_1, \\ \langle\varphi,\psi\rangle \circ f_1 \sqcup f_2 \circ i_2 = \alpha \circ i_2. \end{cases}$$

No primeiro caso temos

$$\begin{aligned} \langle\varphi,\psi\rangle \circ f_1 \sqcup f_2 \circ i_1 &= \langle\varphi,\psi\rangle \circ j_1 \circ f_1 \\ &= \varphi \circ f_1 \\ &= \alpha \circ i_1, && \text{(por (1.15))} \end{aligned}$$

e no segundo temos

$$\begin{aligned} \langle\varphi,\psi\rangle \circ f_1 \sqcup f_2 \circ i_2 &= \langle\varphi,\psi\rangle \circ j_2 \circ f_2 \\ &= \psi \circ f_2 \\ &= \alpha \circ i_2. && \text{(por (1.16))} \end{aligned}$$

Já a comutatividade do triângulo inferior é equivalente às igualdades

$$\begin{cases} p \circ \langle\varphi,\psi\rangle \circ j_1 = \beta \circ j_1, \\ p \circ \langle\varphi,\psi\rangle \circ j_2 = \beta \circ j_2. \end{cases}$$

A primeira dessas igualdades é válida pois

$$\begin{aligned} p \circ \langle\varphi,\psi\rangle \circ j_1 &= p \circ \varphi \\ &= \beta \circ j_1, && \text{(por (1.15))} \end{aligned}$$

e a segunda igualdade também é válida pois

$$\begin{aligned} p \circ \langle\varphi,\psi\rangle \circ j_2 &= p \circ \psi \\ &= \beta \circ j_2. && \text{(por (1.16))} \end{aligned}$$

■

Agora dualizamos a discussão anterior lidando com morfismos satisfazendo uma propriedade de levantamento à direita.

1.2.5 Definição. Sejam C uma categoria e $K \subseteq \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ uma classe qualquer de morfismos. Dizemos que um morfismo $g : X \to Y$ **satisfaz a propriedade de levantamento à direita com relação a** K se todo quadrado comutativo como abaixo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

onde $i : A \to B$ é um morfismo qualquer pertencente a K, admite uma levantamento, ou seja, existe um morfismo diagonal $\varphi : B \to X$ que faz comutar o diagrama mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

Dizemos também nesse caso que g é um morfismo K**-injetivo**.

1.2.2 Sistemas de fatoração fracos

1.2.6 Definição. Um **sistema de fatoração fraco** em uma categoria C consiste de um par $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$, onde $\mathcal{L}$, $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ são duas classes de morfismos, satisfazendo as seguintes condições:

(i) Todo morfismo $f \in \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ pode ser escrito na forma $f = f_L \circ f_R$ com $f_L \in \mathcal{L}$ e $f_R \in \mathcal{R}$;

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_L \in \mathcal{L}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & Y \arrow[r, "f_R \in \mathcal{R}"] & Z \end{tikzcd}$$

(ii) $\mathcal{L}$ consiste precisamente dos morfismos de C que satisfazem a propriedade de levantamente à esquerda com relação a $\mathcal{R}$;

(iii) $\mathcal{R}$ consiste precisamente dos morfismos de C que satisfazem a propriedade de levantamento à direita com relação a $\mathcal{L}$.

Os principais exemplos de sistemas de fatoração fracos nos quais estaremos interessados envolvem as cofibrações e fibrações triviais em uma categoria modelo, embora talves ainda não seja claro como essas classes dão origem a um sistema de fatoração. Antes de detalharmos esse exemplo, entretanto, vamos demonstrar algumas propriedades gerais de sistemas de fatoração fracos.

1.2.7 Proposição. *Suponha que* $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ *seja um sistema de fatoração fraco em uma categoria* C. *Valem as seguintes propriedades:*

1. *Ambas as classes contêm todos os isomorfismos de* C.

2. *Ambas as classes são fechadas por composição.*

3. *Ambas as classes são fechadas por retratos na categoria de setas* $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$.

4. *$\mathcal{L}$ é fechada pela formação de pushouts, enquanto $\mathcal{R}$ é fechada pela formação de pullbacks.*

5. *$\mathcal{L}$ é fechada por coprodutos, enquanto $\mathcal{R}$ é fechada por produtos.*

Demonstração. 1. Suponha que $f : A \to B$ seja um isomorfismo. Sabemos da definição de sistema de fatoração fraco que $\mathcal{L}$ consiste precisamente dos morfismos de C que satisfazem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a $\mathcal{R}$. Considere então um quadrado comutativo como abaixo, onde $g : X \to Y$ é um morfismo pertencente à classe $\mathcal{R}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

Sendo f um isomorfismo por hipótese, podemos considerar o morfismo inverso $f^{-1} : B \to A$, e definir então um morfismo $h : B \to X$ por meio da composição $h \coloneqq \alpha \circ f^{-1}$. Note então que por um lado

$$h \circ f = \alpha \circ f^{-1} \circ f = \alpha \circ \mathrm{id}_A = \alpha,$$

e por outro

$$g \circ h = g \circ \alpha \circ f^{-1} = \beta \circ f \circ f^{-1} = \beta \circ \mathrm{id}_B = \beta;$$

mostando que h faz comutar o diagrama abaixo, definindo então um levantamento para o quadrado comutativo original.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

A demonstração de que $\mathcal{R}$ contém todos os isomorfismos é análoga. Se $g : X \to Y$ é um isomorfismo, considere o quadrado comutativo abaixo onde $f : A \to B$ pertence à classe $\mathcal{L}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

Dessa vez definimos um morfismo $h : B \to Y$ pela composição $h \coloneqq g^{-1} \circ \beta$, e notamos que esse morfismo satisfaz a igualdade

$$g \circ h = g \circ g^{-1} \circ \beta = \mathrm{id}_Y \circ \beta = \beta,$$

e também a igualdade

$$h \circ f = g^{-1} \circ \beta \circ f = g^{-1} \circ g \circ \alpha = \mathrm{id}_X \circ \alpha = \alpha;$$

portanto h define um levantamento neste caso também.

2. Suponha que $f_1 : A \to B$ e $f_2 : B \to C$ sejam dois morfismos pertencentes à classe $\mathcal{L}$. A fim de mostrarmos que sua composição $f_2 \circ f_1 : A \to C$ também pertence a $\mathcal{L}$, vamos mostrar que essa composição satisfaz a condição de levantamento à esquerda com relação à $\mathcal{R}$. Considere então um quadrado comutativo como abaixo, onde $g : X \to Y$ pertence à classe $\mathcal{R}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_2 \circ f_1"'] & X \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

A partir do quadrado acima podemos obter o quadrado comutativo mostrado abaixo, o qual admite um levantamento $h_1 : B \to Y$ pois $f_1 \in \mathcal{L}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_1"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\beta\circ f_2"'] \arrow[ur, dashed, "h_1"] & Y \end{tikzcd}$$

Usando o levantamento h_1 obtemos um terceiro quadrado comutativo como mostrado abaixo, o qual admite um levantamento $h_2 : C \to X$ pois $f_2 \in \mathcal{L}$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "f_2"'] & X \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "h_2"] & Y \end{tikzcd}$$

Afirmamos que $h_2 : C \to X$ define também um levantamento para o quadrado comutativo considerado inicialmente. De fato, por um lado a igualade $g \circ h_2 = \beta$ segue diretamente da comutatividade do último quadrado acima, e por outro temos a sequência de igualdades

$$h_2 \circ f_2 \circ f_1 = h_1 \circ f_1 = \alpha;$$

portanto h_2 satisfaz as condições de comutatividades necessárias.

A demonstração da segunda parte é análoga. Suponha que $g_1 : X \to Y$ e $g_2 : Y \to Z$ sejam dois morfismos pertencentes à classe $\mathcal{R}$, e considere o quadrado comutativo abaixo, onde $f : A \to B$ pertence à classe $\mathcal{L}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g_2\circ g_1"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Z \end{tikzcd}$$

Considere então o quadrado comutativo abaixo, o qual admite um levantamento $h_2 : B \to Y$ pois g_2 pertence a $\mathcal{R}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1\circ\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g_2"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] \arrow[ur, dashed, "h_2"] & Z \end{tikzcd}$$

Usando h_2 consideramos então o quadrado comutativo abaixo, o qual também admite um levantamento $h_1 : B \to X$ pois $g_1 \in \mathcal{R}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g_1"] \\ B \arrow[r, "h_2"'] \arrow[ur, dashed, "h_1"] & Y \end{tikzcd}$$

O morfismo h_1 é precisamente o procurado, já que por um lado a igualdade $h_1 \circ f = \alpha$ segue diretamente da comutatividade acima, e por outro temos a sequência de igualdades

$$g_2 \circ g_1 \circ h_1 = g_2 \circ h_2 = \beta;$$

mostrando então que h_1 define um levantamento para o quadrado comutativo inicial.

3. Suponha que o morfismo $f : A \to B$ seja um retrato do morfismo $g : X \to Y$ o qual pertence à classe $\mathcal{L}$. Temos então por definição o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_A"] & X \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "s_2"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_B"'] & Y \arrow[r, "r_2"'] & B \end{tikzcd}$$

A fim de mostrarmos que f também pertence a $\mathcal{L}$, considere o quadrado comutativo abaixo onde $p : P \to Q$ é um morfismo qualquer da classe $\mathcal{R}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Q \end{tikzcd}$$

A partir deste quadrado e do diagrama anterior produzimos o quadrado comutativo, o qual admite um levantamento $h : Y \to P$ já que $g \in \mathcal{L}$ por hipótese.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha \circ r_1"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "\beta \circ r_2"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Q \end{tikzcd}$$

Afirmamos então que o morfismo $H : B \to P$ dado pela composição $H \coloneqq h \circ s_2$ define um levantamento para o quadrado inicial. De fato, por um lado temos

$$H \circ f = h \circ s_2 \circ f = h \circ g \circ s_1 = \alpha \circ r_1 \circ s_1 = \alpha \circ \mathrm{id}_A = \alpha,$$

e por outro temos também

$$p \circ H = p \circ h \circ s_2 = \beta \circ r_2 \circ s_2 = \beta \circ \mathrm{id}_B = \beta.$$

Supondo ainda que f seja um retrato de g, considere agora o caso em que g pertence à classe $\mathcal{R}$. A fim de mostrarmos que f também pertence a $\mathcal{R}$, considere o quadrado comutativo abaixo onde $j : M \to N$ é um morfismo qualquer da classe $\mathcal{L}$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[r, "\psi"'] & B \end{tikzcd}$$

A partir disso obtemos o quadrado comutativo abaixo, o qual admite um levantamento $h : N \to X$ pois g pertence à classe $\mathcal{R}$ por hipótese.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "s_1 \circ \varphi"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "g"] \\ N \arrow[r, "s_2 \circ \psi"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Afirmamos então que $H : N \to A$ definido por $H \coloneqq r_1 \circ h$ é o levantamento procurado para o quadrado considerado inicialmente. De fato, por um lado temos as igualdades

$$H \circ j = r_1 \circ h \circ j = r_1 \circ s_1 \circ \varphi = \mathrm{id}_A \circ \varphi = \varphi,$$

e por outro temos também as igualdades

$$f \circ H = f \circ r_1 \circ h = r_2 \circ g \circ h = r_2 \circ s_2 \circ \psi = \mathrm{id}_B \circ \psi = \psi.$$

4. Suponha que $f : X_1 \to Y_1$ pertença a $\mathcal{L}$ e que o quadrado comutativo abaixo seja um pushout em C.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\
Y_1 \arrow[r, "\beta"'] & Y_2
\end{tikzcd}$$

Nosso objetivo é mostrar que então g também pertence a $\mathcal{L}$, e com esse intuito consideramos o problema de levantamento abaixo, onde $p : P \to Q$ é um morfismo qualquer na classe $\mathcal{R}$.

$$\begin{tikzcd}
X_2 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[d, "p"] \\
Y_2 \arrow[r, "\psi"'] & Q
\end{tikzcd}$$

Note primeiro que o quadrado comutativo abaixo admite um levantamento $h : Y_1 \to P$ pois $f \in \mathcal{L}$ por hipótese.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\varphi\circ\alpha"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[d, "p"] \\
Y_1 \arrow[r, "\psi\circ\beta"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Q
\end{tikzcd}$$

A igualdade $h \circ f = \varphi \circ \alpha$ nos permite então usar a hipótese de que temos um pushout para obtermos um morfismo $H : Y_2 \to P$ que faz comutar todo o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi"] & \\
Y_1 \arrow[r, "\beta"'] \arrow[drr, bend right, "h"'] & Y_2 \arrow[dr, dashed, "H"] & \\
 & & P
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que o morfismo H obtido dessa maneira é o levantamento procurado. Note primeiro que a igualdade $H \circ g = \varphi$ segue imediatamente da comutatividade acima. Já a igualdade $p \circ H = \psi$ requer um pouco mais de trabalho. Repare com carinho que estes dois morfismos fazem comutar o diagrama abaixo,

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left, "p\circ\varphi"] & \\
Y_1 \arrow[r, "\beta"'] \arrow[drr, bend right, "\psi\circ\beta"'] & Y_2 \arrow[dr, shift left, "\psi"] \arrow[dr, shift right, "p\circ H"'] & \\
 & & Q
\end{tikzcd}$$

mas como o quadrado que aparece neste diagrama é um pushout, sua propriedade universal garante que existe um único morfismo do tipo $Y_2 \to Q$ que faça tudo comutar, portanto deve valer a igualdade $p \circ H = \psi$.

A demonstração de que morfismos em $\mathcal{R}$ são preservados por pullbacks é novamente análoga. Suponha agora que o quadrado comutativo abaixo seja um pullback e que o morfismo $g : X_2 \to Y_2$ seja pertence a $\mathcal{R}$.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\ Y_1 \arrow[r, "\beta"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

A fim de mostrarmos que f também pertence a $\mathcal{R}$, consideramos o problema de levantamento abaixo, onde $j : M \to N$ é um morfismo qualquer pertencente à classe $\mathcal{L}$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[r, "\psi"'] & Y_1 \end{tikzcd}$$

Colando estes dois quadrados obtemos o quadrado comutativo abaixo, o qual admite um levantamento $h : N \to X_2$ pois $g \in \mathcal{R}$ por hipótese.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha\circ\varphi"] \arrow[d, "j"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\ N \arrow[r, "\beta\circ\psi"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

A estratégia para obtermos um morfismo do tipo $N \to X_1$ é usarmos a propriedade universal do pullback. A igualdade $h \circ j = \alpha \circ \varphi$ implicada pela comutatividade acima diz que a "camada externa" do diagrama abaixo comuta, portanto segue da propriedade universal do pullback que existe um único morfismo do tipo $H : N \to X_1$ fazendo comutar o diagrama todo.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr, dashed, "H"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "\psi"'] & & \\ & X_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\ & Y_1 \arrow[r, "\beta"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Resta mostrarmos que H é o levantamento procurado para o quadrado comutativo inicial. A igualdade $f \circ H = \psi$ segue imediatamente da comutatividade acima. Analogamente ao que ocorreu no caso do pushout, a fim de mostrarmos que a igualdade $H \circ j = \varphi$ também vale, precisamos utilizar a unicidade na propriedade universal do pullback. Ambos os morfismos $H \circ j$ e φ fazem comutar o diagrama abaixo,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, shift left, "H\circ j"] \arrow[dr, shift right, "\varphi"'] \arrow[drr, bend left, "\alpha\circ\varphi"] \arrow[ddr, bend right, "f\circ\varphi"'] & & \\ & X_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\ & Y_1 \arrow[r, "\beta"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

mas a propriedade universal do pullback garante a existência de um único morfismo do tipo $M \to X_1$ fazendo comutar o diagrama acima, de onde podemos concluímos enfim que a igualdade $H \circ j = \varphi$ deve ser verdadeira.

5. Suponha que $f : A_1 \to B_1$ e $g : A_2 \to B_2$ sejam dois morfismos que pertençam a $\mathcal{L}$. A fim de mostrarmos que seu coproduto $f \sqcup g : A_1 \sqcup A_2 \to B_1 \sqcup B_2$ também pertence a $\mathcal{L}$, basta mostrarmos que o problema de levantamento abaixo admite uma solução, onde $p : X \to Y$ é um morfismo qualquer na classe $\mathcal{R}$.

$$\begin{tikzcd} A_1 \sqcup A_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f \sqcup g"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B_1 \sqcup B_2 \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

Se $i_1 : A_1 \to A_1 \sqcup A_2$, $i_2 : A_2 \to A_1 \sqcup A_2$, $j_1 : B_1 \to B_1 \sqcup B_2$ e $j_2 : B_2 \to B_1 \sqcup B_2$ denotam as várias inclusões canônicas nos respectivos coprodutos, lembre-se que $f \sqcup g$ é por definição o único mapa do tipo $A_1 \sqcup A_2 \to B_1 \sqcup B_2$ que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1"'] & B_1 \arrow[d, "j_1"] \\ A_1 \sqcup A_2 \arrow[r, dashed, "f \sqcup g" description] & B_1 \sqcup B_2 \\ A_2 \arrow[r, "g"'] \arrow[u, "i_2"] & B_2 \arrow[u, "j_2"'] \end{tikzcd}$$

A partir do quadrado comutativo inicial obtemos o quadrado comutativo abaixo o qual admite um levantamento pois $f \in \mathcal{L}$ por hipótese.

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\alpha \circ i_1"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B_1 \arrow[r, "\beta \circ j_1"'] \arrow[ur, dashed, "h_1" description] & Y \end{tikzcd}$$

Veja que o quadrado é realmente comutativo pois

$$\beta \circ j_1 \circ f = \beta \circ (f \sqcup g) \circ i_1 = p \circ \alpha \circ i_1.$$

Analogamento, temos também o quadrado comutativo abaixo que admite um levantamento pelo fato que $g \in \mathcal{L}$ também.

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "\alpha \circ i_2"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B_2 \arrow[r, "\beta \circ j_2"'] \arrow[ur, dashed, "h_2" description] & Y \end{tikzcd}$$

Combinando estes dois levantamentos obtemos por meio da propriedade universal do coproduto um morfismo $\langle h_1, h_2 \rangle : B_1 \sqcup B_2 \to X$ o qual afirmamos ser o levantamento procurado para o quadrado original. Por um lado, a fim de mostrarmos a igualdade

$$p \circ \langle h_1, h_2 \rangle = \beta,$$

pela unicidade na propriedade universal do coproduto basta mostrarmos as duas igualdades abaixo,

$$\begin{cases} p \circ \langle h_1, h_2 \rangle \circ j_1 = \beta \circ j_1, \\ p \circ \langle h_1, h_2 \rangle \circ j_2 = \beta \circ j_2; \end{cases}$$

mas pelas propriedades dos morfismos envolvidos vemos que

$$p \circ \langle h_1, h_2 \rangle \circ j_1 = p \circ h_1 = \beta \circ j_1,$$

sendo que a segunda igualdade segue de uma sequência análoga de igualdades.

Já a igualdade $\langle h_1, h_2 \rangle \circ (f \sqcup g) = \alpha$ seguirá também da unicidade na propriedade do coproduto se mostrarmos as igualdades

$$\begin{cases} \langle h_1, h_2 \rangle \circ (f \sqcup g) \circ i_1 = \alpha \circ i_1, \\ \langle h_1, h_2 \rangle \circ (f \sqcup g) \circ i_2 = \alpha \circ i_2. \end{cases}$$

No primeiro caso basta vermos que

$$\langle h_1, h_2 \rangle \circ (f \sqcup g) \circ i_1 = \langle h_1, h_2 \rangle \circ j_1 \circ f = h_1 \circ f = \alpha \circ i_1,$$

enquanto no segundo caso temos uma sequência análoga de igualdades.

A demonstração para o produto de morfismos na classe $\mathcal{R}$ é dual. Suponha que $f : X_1 \to Y_1$ e $g : X_2 \to Y_2$ sejam dois morfismos da classe $\mathcal{R}$. A fim de mostrarmos que o produto $f \times g : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ também pertence a $\mathcal{R}$, consideramos um morfismo $i : A \to B$ qualquer na classe $\mathcal{L}$, e procuramos uma solução para o problema de levantamento mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"'] & X_1 \times X_2 \arrow[d, "f \times g"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y_1 \times Y_2 \end{tikzcd}$$

Se $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$, $p_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$, $q_1 : Y_1 \times Y_2 \to Y_1$ e $q_2 : Y_1 \times Y_2 \to Y_2$ denotam as projeções canônicas dos respectivos produtos, lembre-se que o morfismo $f \times g$ é por definição o único morfismo do tipo $X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f"] & Y_1 \\ X_1 \times X_2 \arrow[u, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] \arrow[r, dashed, "f \times g"] & Y_1 \times Y_2 \arrow[u, "q_1"'] \arrow[d, "q_2"] \\ Y_1 \arrow[r, "g"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Usando o quadrado comutativo inicial obtemos os dois problemas de levantamento indicados abaixo, os quais possem soluções h_1 e h_2 pois f e g pertencem à classe $\mathcal{R}$ por hipótese.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_1 \circ \alpha"] \arrow[d, "i"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "q_1 \circ \beta"'] \arrow[ur, dashed, "h_1"] & Y_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "p_2 \circ \alpha"] \arrow[d, "i"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "q_2 \circ \beta"'] \arrow[ur, dashed, "h_2"] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Os morfismos h_1 e h_2 combinados induzem o morfismo $(h_1, h_2) : B \to X_1 \times X_2$, o qual afirmamos ser uma solução para o problema de levantamento considerado inicialmente. De fato, temos as igualdades

$$p_1 \circ (h_1, h_2) \circ i = h_1 \circ i = p_1 \circ \alpha,$$

e também as igualdades

$$p_2 \circ (h_1, h_2) \circ i = h_2 \circ i = p_2 \circ \alpha,$$

e juntas essas duas implicam a igualdade $(h_1, h_2) \circ i = \alpha$ desejada. Por fim, usando a comutatividade do diagrama que caracteriza o produto $q_1 \times q_2$ vemos que também valem as igualdades

$$q_1 \circ (f \times g) \circ (h_1, h_2) = f \circ p_1 \circ (h_1, h_2) = f \circ h_1 = q_1 \circ \beta$$

e as igualdades

$$q_2 \circ (f \times g) \circ (h_1, h_2) = g \circ p_2 \circ (h_1, h_2) = g \circ h_2 = q_2 \circ \beta;$$

e juntas essas igualdades implicam $(f \times g) \circ (h_1, h_2) = \beta$ como desejado. ■

Agora mostramos como podemos usar a estrutura de uma categoria modelo para construirmos enfim exemplos um pouco mais concretos de sistemas de fatoração fracos.

1.2.8 Proposição. *Suponha que* $(\mathsf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ *seja uma categoria modelo. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ *define um sistema de fatoração fraco em* M*;*

2. $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ *define um sistema de fatoração fraco em* M*.*

Demonstração. 1. O axioma de fatoração (M5) garante que, dado qualquer morfismo $f : X \to Y$ em M, existe uma cofibração trivial $j : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} \widetilde{Y}$ e uma fibração $q : \widetilde{Y} \twoheadrightarrow Y$ que fatoram f como indicado abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "j", "\sim"'] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \widetilde{Y} \arrow[r, two heads, "q"] & Y \end{tikzcd}$$

Isso significa que o par de classes de morfismos $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ satisfaz a primeira condição de um sistema de fatoração fraco.

Resta mostrarmos que $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ e $\mathcal{F}$ definem um ao outro por meio de propriedades de levantamento. Note que o axioma de levantamento (M4) garante que toda fibração satisfaz a propriedade de levantamento à direita com relação à classe $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ das cofibrações triviais. Reciprocamente, suponha que $f : X \to Y$ satisfaça a propriedade de levantamento à direita com relação à classe das cofibrações triviais. Queremos mostrar que isso garante que f seja uma fibração, e como o únicos axiomas que temos para lidar com fibrações são os de retração e fatoração, não é surpresa que a estratégia da demonstração seja combinarmos esses dois axiomas com a hipótese de levantamento sobre f.

Usando o axioma de fatoração podemos obter uma cofibração trivial $j : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} \widetilde{Y}$ e uma fibração $q : \widetilde{Y} \twoheadrightarrow Y$ tais que $f = q \circ j$. Essa igualdade também pode ser expressa em termos do quadrado comutativo abaixo, o qual admite um levantamento $h : \widetilde{Y} \to X$ já que f satisfaz a propriedade de levantamento à direita com relação às cofibrações triviais.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, tail, "j"', "\wr"] & X \arrow[d, "f"] \\ \widetilde{Y} \arrow[r, two heads, "q"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

Podemos organizar estes morfismos todos no diagrama comutativo mostrado abaixo,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "j", "\sim"'] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_X"] & \widetilde{Y} \arrow[r, "h"] \arrow[d, two heads, "q"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_Y"'] & Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

o qual mostra que f é uma retração da fibração q na categoria de setas $\mathrm{Arr}(\mathsf{M})$ e, portanto, uma fibração também.

Vejamos agora a descrição das cofibrações triviais em termos das fibrações. Note inicialmente que o axioma de levantamento (M4) mais uma vez já garante que toda cofibração trivial satisfaz a propriedade de levantamento à esquerda com relação à classe de fibrações, a questão aqui é mostrar que essa propriedade de levantamento *caracteriza* as cofibrações triviais. Suponha então que $f : X \to Y$ satisfaça a propriedade de levantamento à esquerda com relação às fibrações. Como a classe $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ é fechada por retrações, pois tanto $\mathcal{C}$ quanto $\mathcal{W}$ o são, basta mostrarmos que f é uma retração de uma cofibração trivial. Novamente consideramos a fatoração abaixo em termos de uma cofibração trivial seguida de uma fibração.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\sim", "j"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & \widetilde{Y} \arrow[r, two heads, "q"'] & Y
\end{tikzcd}$$

A condição $f = q \circ j$ pode ser expressa em termos do quadrado comutativo abaixo, e tal quadrado admite um levantamento $h : Y \to \widetilde{Y}$ pois f por hipótese satisfaz a condição de levantamento à esquerda com relação às fibrações.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "j", "\sim"'] \arrow[d, "f"'] & \widetilde{Y} \arrow[d, two heads, "q"] \\
Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

Os morfismos todos em questão podem então ser combinados no diagrama comutativo abaixo que expressa f como uma retração da cofibração trivial j como queríamos.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_X"] & X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, tail, "j", "\wr"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "h"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_Y"'] & \widetilde{Y} \arrow[r, two heads, "q"'] & Y
\end{tikzcd}$$

2. Novamente pelo axioma de fatoração (M5) podemos fatorar um morfismo $f : X \to Y$ qualquer de M da forma indicada abaixo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "i"'] \arrow[rr, bend left, "f"] & \widehat{X} \arrow[r, two heads, "\sim", "p"'] & Y
\end{tikzcd} \tag{1.17}$$

Em outras palavras, o par $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ satisfaz a primeira condição na definição de sistema de fatoração fraco. Resta verificarmos que as classes se definem mutuamente em termos de propriedades de levantamento.

Inicialmente, sabemos do axioma de levantamento (M4) que toda cofibração satisfaz a propriedade de levantamento à esquerda com relação à classe das fibrações triviais. Suponha agora que $f : X \to Y$ satisfaça tal propriedade de levantamento, e vamos então mostrar que f é necessariamente uma cofibração trivial também, o que como nos dois casos anteriores será feito por meio do axioma de retração. A condição $f = p \circ i$ pode ser expressa pela comutatividade do quadrado abaixo, e a condição de levantamento sobre f nos permite obter o mapa $h : Y \to \widehat{X}$ indicado.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] & \widehat{X} \arrow[d, two heads, "p", "\wr"'] \\
Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

Usando os morfismos à disposição construímos o diagrama abaixo expressando f como uma retração da cofibração i, de onde concluímos que f é também uma cofibração.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_X"] & X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, tail, "i"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "h"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_Y"'] & \widehat{X} \arrow[r, two heads, "\sim", "p"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Por fim, resta apenas mostrarmos que as fibrações triviais são precisamente os morfismos satisfazendo a condição de levantamento à direita com relação às cofibrações. O axioma de levantamento (M4) nos diz que toda fibração trivial satisfaz tal propriedade de levantamento, a questão é justamente a recíproca. Suponha então que $f : X \to Y$ satisfaça essa propriedade também, e seguindo a notação da fatoração em (1.17), considere o quadrado comutativo abaixo, e o mapa $h : \widehat{X} \to X$ obtido da hipótese feita sobre f.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\widehat{X} \arrow[r, two heads, "\sim", "p"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

Como o leitor já há muito deve ter previsto, combinando todos esses ingredientes obtemos o diagrama comutativo abaixo exibindo f como uma retração da fibração trivial p, o que nos permite concluir enfim que f é também uma fibração trivial.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_X"] & \widehat{X} \arrow[r, "h"] \arrow[d, two heads, "p", "\wr"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_Y"'] & Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

∎

1.2.9 Observação. É comum dizer que os resultados da Proposição 1.2.8 mostram que a estrutura de uma categoria modelo é *sobredeterminada*, pois o conhecimento de duas das três classes de morfismos $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{F}$ nos permite determinar totalmente a terceira. De fato, se conhecemos as classes $\mathcal{W}$ e $\mathcal{C}$, então conhecemos também a classe das cofibrações triviais $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$, e da proposição anterior sabemos que $\mathcal{F}$ pode ser descrita então como a classe dos morfismos que satisfazem a propriedade de levantamento à direita cmo relação a $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. Analogamente, se conhecemos as classes $\mathcal{W}$ e $\mathcal{F}$, então conhecemos a classe das fibrações triviais $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, e pelo resultado anterior recuperamos $\mathcal{C}$ como a classe dos morfismos que satisfazem a propriedade de levantamento à esquerda com relação a $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. Fica a pergunta se as equivalências fracas podem ser recuperadas a partir das fibrações e cofibrações. A resposta é que em certo sentido sim, como mostra o próximo resultado, embora mais precisamente tenhamos que conhecer as fibrações e cofibrações triviais.

Essa propriedade de sobredeterminação é por vezes utilizada para *definirmos* uma estrutura modelo completa partindo apenas de alguns componentes de sua estrutura. Um exemplo onde esse fenômenos ocorre, e que abordaremos em detalhes mais tarde, é no estudo das categorias modelo *cofibrantemente geradas*, onde uma estrutura modelo é gerada a partir de uma coleção de morfismos que queremos considerar como cofibrações triviais. Um exemplo concreto é a estrutura modelo usual na categoria Top, onde a classe de cofibrações triviais inicial usada para gerar o resto das estruturas é o dos mapas $D^n \hookrightarrow D^n \times I$ incluindo o disco D^n na base inferior do cilindro associado.

Aplicando as propriedades gerais demonstradas na Proposição 1.2.7 aos sistemas explícitos construídos na Proposição 1.2.8 obtemos as propriedades abaixo a respeito dos vários tipos de morfismos em uma categoria modelo.

1.2.10 Corolário. *Em uma categoria modelo qualquer valem as seguintes propriedades:*

1. *Um isomorfismo é simultaneamento uma cofibração trivial e uma fibração trivial.*
2. *Cofibrações, cofibrações triviais, fibrações e fibrações triviais são todas preservadas por composições.*
3. *Cofibrações e cofibrações triviais são preservadas por pushouts, enquanto fibrações e fibrações triviais são preservadas por pullbacks.*
4. *Cofibrações e cofibrações triviais são preservadas por coprodutos, enquanto fibrações e fibrações triviais são preservadas por produtos.*

Por fim, temos o resultado simples abaixo mostrando como "detectar" equivalências fracas usando outras classes de morfismos.

1.2.11 Lema. *Em uma categoria modelo, um morfismo $f : X \to Y$ é uma equivalência fraca se, e somente se, ele pode ser fatorado como uma cofibração trivial seguida de uma fibração trivial.*

Demonstração. Uma das implicações é simples: se f pode ser fatorado na forma descrita no enunciado, então f é em particular a composição de duas equivalências fracas e, portanto, uma equivalência fraca também. Reciprocamente, se f é uma equivalência fraca, pelo axioma de fatoração podemos encontrar uma cofibração trivial $i : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} \widehat{X}$ e uma fibração $p : \widehat{X} \twoheadrightarrow Y$ tais que $f = p \circ i$. Ora, como f e i são equivalências fracas, segue do axioma 2-de-3 que p também o é, ou seja, p é uma fibração trivial, e a fatoração $f = p \circ i$ exibe f como uma cofibração trivial seguida de uma fibração trivial. ∎

Encerramos essa subseção mostrando como os axiomas de uma categoria modelo também pode ser enunciados apenas em termos de sistemas de fatoração fracos.

1.2.12 Proposição. *Sejam* M *uma categoria bicompleta e* $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{F}$ *três classes de morfismos em* M. *Suponha ainda que a classe* $\mathcal{W}$ *satisfaça as seguintes condições:*

(i) $\mathcal{W}$ *contém todos os isomorfismos;*

(ii) $\mathcal{W}$ *satisfaz a propriedade 2-de-3.*

Nessas condições, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $(\mathsf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ *é uma categoria modelo;*

2. $(\mathcal{W} \cap \mathcal{C}, \mathcal{F})$ *e* $(\mathcal{C}, \mathcal{W} \cap \mathcal{F})$ *são sistemas de fatoração fracos em* M.

Demonstração. A implicação $1 \implies 2$ é precisamente o conteúdo da Proposição 1.2.8.

Reciprocamente, suponha que os pares de classes $(\mathcal{W} \cap \mathcal{C}, \mathcal{F})$ e $(\mathcal{C}, \mathcal{W} \cap \mathcal{F})$ definam sistemas de fatoração fracos em M, e vamos verificar então que os axiomas de uma categoria modelo são satisfeitos.

O axioma de completude (M1) e o axioma 2-de-3 (M2) seguem das hipóteses impostas no enunciado. Os axiomas de lavantamento (M4) e de fatoração (M5) seguem diretamente das duas propriedades que definem um sistema de fatoração fraco. Resta apenas verificarmos então o axioma de retração (M3). Note que a validade deste para as classes de cofibrações e fibrações segue de uma aplicação direta do item (c) da Proposição 1.2.7 aos dois sistemas de fatoração fracos em questão. Falta então mostrarmos que a classe das equivalências fracas é também fechada por retrações, e isso será um tanto mais emocionante. Suponha que o morfismo $f : X \to Y$ seja retração de uma equivalência fraca $g : A \to B$ como mostrado no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_X"] & A \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "s_2"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_Y"'] & B \arrow[r, "r_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Suponha inicialmente que f seja uma fibração. O morfismo g pode ser fatorado na forma $g = p \circ i$, onde $i : A \overset{\sim}{\rightarrowtail} C$ é uma cofibração trivial, e $p : C \twoheadrightarrow B$ é uma fibração. Note que, na verdade, a propriedade 2-de-3 garante que p é também uma equivalência fraca e, portanto, uma fibração trivial. Nosso primeiro objetivo é mostrar que f é uma retração de p, o que garante que f seja também uma fibração trivial pelo item (c) da Proposição 1.2.7 e em particular uma equivalência fraca. Como temos a sequência de igualdades

$$r_2 \circ p \circ i = r_2 \circ g = f \circ r_1,$$

o quadrado indicado abaixo é comutativo, e o fato de i ser uma cofibração trivial e f ser uma fibração garantem a existência do levantamento $r : C \to X$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, tail, "i"', "\wr"] & X \arrow[d, two heads, "f"] \\
C \arrow[r, "r_2 \circ p"'] \arrow[ur, dashed, "r"] & Y
\end{tikzcd}$$

Usando esse morfismo r construímos o diagrama comutativo abaixo, o qual expressa f como uma retração da fibração trivial p, conforme desejado.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i\circ s_1"] \arrow[d, two heads, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_X"] & C \arrow[r, "r"] \arrow[d, two heads, "p", "\wr"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\
Y \arrow[r, "s_2"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_Y"'] & B \arrow[r, "r_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Voltemos agora ao caso geral onde $f : X \to Y$ é um morfismo qualquer. Sabemos da definição de um sistema de fatoração fraca que podemos escrever $f = q \circ j$, onde $j : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} Z$ é uma cofibração trivial, e $q : Z \twoheadrightarrow Y$ é uma fibração. Lembrando que a categoria C em questão é por hipótese bicompleta, podemos em particular formar o pushout do diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, tail, "j"', "\wr"] & A \\
Z &
\end{tikzcd}$$

de forma a obtermos o quadrado comutativo mostrado abaixo. Note que a propriedade (d) da Proposição 1.2.7 aplicado ao sistema de fatoração fraco $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ garante que o morfismo J que aparece no pushout abaixo seja de fato uma cofibração trivial.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, tail, "j"', "\wr"] & A \arrow[d, tail, "J", "\wr"'] \\
Z \arrow[r, "S"'] & P
\end{tikzcd}$$

Uma primeira aplicação da propriedade universal do pushout fornece um morfismo $R : P \to Z$ fazendo comutar o diagram abaixo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, tail, "j"', "\wr"] & A \arrow[d, tail, "J", "\wr"'] \arrow[ddr, bend left, "j\circ r_1"] & \\
Z \arrow[r, "S"'] \arrow[drr, bend right, "\mathrm{id}_Z"'] & P \arrow[dr, dashed, "R"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

Agora, uma segunda aplicação da propriedade universal do pushout nos fornece o morfismo $Q : P \to B$ fazendo comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, tail, "j"', "\wr"] & A \arrow[d, tail, "J", "\wr"'] \arrow[ddr, bend left, "g", "\wr"'] & \\
Z \arrow[r, "S"'] \arrow[drr, bend right, "s_2\circ q"'] & P \arrow[dr, dashed, "Q"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Os morfismos envolvendo o pushout construídos acima podem então ser combinados no diagrammaso comutativo mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, tail, "j"', "\wr"] \arrow[dd, bend right=60, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_X"] & A \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, tail, "J", "\wr"'] & X \arrow[d, tail, "j", "\wr"'] \\
Z \arrow[r, "S"] \arrow[d, two heads, "q"'] & P \arrow[r, "R"] \arrow[d, "Q", "\wr"'] & Z \arrow[d, two heads, "q"] \\
Y \arrow[r, "s_2"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_Y"'] & B \arrow[r, "r_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Veja que a propriedade 2-de-3 garante que o morfismo Q é realmente uma equivalência fraca como indicado acima, pois J e g o são, e por construção temos a igualdade $Q \circ J = g$.

Temos que justificar ainda de alguma forma a comutatividade do quadrado inferior direito, mas vamos assumir isso momentaneamente e dar continuidade ao argumento. Como o morfismo R por construção satisfaz a igualdade $R \circ S = \mathrm{id}_Z$, os dois quadrados comutativos inferiores exibem a fibração $q : Z \twoheadrightarrow Y$ como uma retração da equivalência fraca $Q : P \xrightarrow{\sim} B$, e o caso demonstrado anteriormente nos permite concluir então que q é na verdade uma fibração trivial, sendo em particular uma equivalência fraca também. Ora, segue da igualdade $f = q \circ j$ que f é a composição de duas equivalências fracas, sendo portanto uma equivalência fraca também conforme queríamos mostrar.

A fim de fecharmos a lacuna restante no argumento acima, note que a comutatividade do quadrado inferior direito segue imediatamente da unicidade na propriedade universal do pushout, já que os morfismos $q \circ R$, $r_2 \circ Q : P \to Y$ ambos fazem comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, tail, "j"', "\wr"] & A \arrow[d, tail, "J", "\wr"'] \arrow[ddr, bend left, "f \circ r_1"] & \\
Z \arrow[r, "S"'] \arrow[drr, bend right, "q"'] & P \arrow[dr, shift left, "q \circ R"] \arrow[dr, shift right, "r_2 \circ Q"'] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

■

1.2.3 Fatorações funtoriais

Nessa subseção formalizamos a noção de uma fatoração funtorial de morfismos em uma categoria. O conceito de fatoração funtorial é um tanto peculiar: na teoria ele oferece uma vantagem para descrevermos certas construções, mas na prática o processo de fatoração funtorial pode não ser necessariamente o mais simples ou o mais vantajoso em uma dada situação.

Antes de definirmos uma fatoração propriamente dita, precisamos introduzir um outro tipo de categoria de setas relacionado à categoria $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$ introduzida anteriormente. Dada então uma categoria C qualquer, considere a categoria $\mathsf{C}^{[2]}$ cujos objetos são pares (g, f) de *setas componíveis em* C, ou seja, morfismos satisfazendo a condição $\mathrm{dom} g = \mathrm{cod} f$, situação esta que também representaremos pelo diagrama da forma abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ Y \arrow[d, "g"'] \\ Z \end{tikzcd}$$

Os morfismos em $\mathsf{C}^{[2]}$, como esperado, são triplas de morfismos horizontais fazendo comutar os dois quadrados evidentes. Mais precisamente, dados dois pares de setas componíveis (g, f) e (g', f'), um morfismo do tipo $(g, f) \to (g', f')$ em $\mathsf{C}^{[2]}$ é dado por uma tripla de morfismos ($\alpha : \mathrm{dom} f \to \mathrm{dom} f'$, $\beta : \mathrm{cod} f \to \mathrm{cod} f'$, $\gamma : \mathrm{cod} g \to \mathrm{cod} g'$) fazendo comutar o diagrama a seguir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[d, "g'"] \\ Z \arrow[r, "\gamma"'] & Z' \end{tikzcd}$$

A composição de morfismos é análoga àquela existente na categoria $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$: colamos os dois pares de quadrados comutativos ao longo da "aresta" comum para obtermos um terceiro par de quadrados comutativos representando a composição dos dois morfismos.

1.2.13 Observação. A notação $\mathsf{C}^{[2]}$ escolhida para denotar a categoria introduzida acima não é por acaso. Lembre-se que todo conjunto parcialmente ordenado pode ser encarado como uma categoria. Quando fazemos isso com o conjunto parcialmente ordenado $\{0 \leq 1 \leq 2\}$, obtemos uma categoria comumente denotada por $[2]$, e que pode ser visualizada pictoricamente da forma abaixo (omitindo os morfismos identidade).

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0\leq 1"] \arrow[rr, bend right, "0\leq 2"'] & 1 \arrow[r, "1\leq 2"] & 2 \end{tikzcd}$$

A variante da categoria de setas que introduzimos anteriormente é então *precisamente* a categoria de funtores do tipo $[2] \to \mathsf{C}$, o que justifica o uso da notação $\mathsf{C}^{[2]}$. Note também que, se no lugar de $[2]$ considerarmos a categoria $[1]$ obtida a partir do conjunto parcialmente ordenado $0 \leq 1$, a qual está representada abaixo,

$$0 \xrightarrow{0\leq 1} 1$$

então a categoria $\mathsf{C}^{[1]}$ formada por funtores do tipo $[1] \to \mathsf{C}$ é exatamente a categoria de setas usual $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$ introduzida anteriormente.

Lembremos que a categoria de setas $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$ vem equipada com os funtores domínio e codomínio dom, cod : $\mathrm{Arr}(\mathsf{C}) \to \mathsf{C}$. Analogamente, a categoria de setas componíveis $\mathsf{C}^{[2]}$ vem equipada com três funtores d_0, d_1, comp : $\mathsf{C}^{[2]} \to \mathrm{Arr}(\mathsf{C})$ que vamos agora definir. O funtor d_0 nos objetos registra o primeiro morfismo de um par componível, ou seja, $d_0(g, f) \coloneqq f$, o que podemos visualizar da forma indicada a seguir.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & & \\
Y \arrow[d, "g"'] & \overset{d_0}{\rightsquigarrow} & X \arrow[d, "f"'] \\
Z & & Y
\end{tikzcd}
$$

Já nos morfismos, dado um morfismo $(\alpha, \beta, \gamma) : (g, f) \to (g', f')$, temos por definição $d_0(\alpha, \beta, \gamma) \coloneqq (\alpha, \beta)$. Visualmente, d_0 seleciona o primeiro quadrado comutativo do par de quadrados comutativos que representa o morfismo (α, β, γ) em $\mathsf{C}^{[2]}$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] & & & \\
Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[d, "g'"] & \overset{d_0}{\rightsquigarrow} & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\
Z \arrow[r, "\gamma"'] & Z' & & Y \arrow[r, "\beta"'] & Y'
\end{tikzcd}
$$

O funtor d_1 é análogo: nos objetos ele seleciona o segundo morfismo do par componível, logo $d_1(g, f) \coloneqq g$, e nos morfismos ele seleciona o segundo quadrado comutativo, de forma que $d_1(\alpha, \beta, \gamma) \coloneqq (\beta, \gamma)$. Já o funtor comp : $\mathsf{C}^{[2]} \to \mathrm{Arr}(\mathsf{C})$, como o nome muito sugere, é dado exatamente pela composição das setas componíveis. Dessa forma, nos objetos temos $\mathrm{comp}(g, f) \coloneqq g \circ f$,

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & & \\
Y \arrow[d, "g"'] & \overset{\mathrm{comp}}{\rightsquigarrow} & X \arrow[d, "g\circ f"'] \\
Z & & Z
\end{tikzcd}
$$

enquanto nos morfismos temos $\mathrm{comp}(\alpha, \beta, \gamma) \coloneqq (\alpha, \gamma)$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] & & & \\
Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[d, "g'"] & \overset{\mathrm{comp}}{\rightsquigarrow} & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g\circ f"'] & X' \arrow[d, "g'\circ f'"] \\
Z \arrow[r, "\gamma"'] & Z' & & Z \arrow[r, "\gamma"'] & Z'
\end{tikzcd}
$$

Tendo introduzido a categoria $\mathsf{C}^{[2]}$, podemos enfim falar de fatoraçõs funtoriais.

1.2.14 Definição. Uma **fatoração funtorial** em uma categoria Cé um funtor fac : $\mathrm{Arr}(\mathsf{C}) \to \mathsf{C}^{[2]}$ que é uma seção do funtor de composição comp : $\mathsf{C}^{[2]} \to \mathrm{Arr}(\mathsf{C})$, ou seja, que satisfaz a equação $\mathrm{comp} \circ \mathrm{fac} = \mathrm{id}_{\mathrm{Arr}(\mathsf{C})}$.

Vamos procurar entender o significado prático da existência de fatorações funtoriais em uma categoria. O funtor fac associa a um morfismo $f : X \to Z$ em C um par de morfismos (f_1, f_0) cuja composição $f_1 \circ f_0$ deve ser igual ao morfismo f. Essa última igualdade garante então que tenhamos $\mathrm{dom} f_0 = \mathrm{dom} f = X$ e $\mathrm{cod} f_1 = \mathrm{cod} f = Z$. Se denotarmos $Y \coloneqq \mathrm{cod} f_0 = \mathrm{dom} f_1$, temos a situação indicada abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ Z \end{tikzcd} \quad \overset{\text{fac}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f_0"'] \arrow[dd, bend left, "f_1 \circ f_0 = f"] \\ Y \arrow[d, "f_1"'] \\ Z \end{tikzcd}$$

Dado outro morfismo $f' : X' \to Z'$, e um morfismo $(\alpha : X \to X', \gamma : Z \to Z')$ de f para f' em $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$, a fatoração funtorial fac associa a esse morfismo do tipo $(f_1, f_0) \to (f'_1, f'_0)$ em $\mathsf{C}^{[2]}$, ou seja, uma tripla de morfismos $(\varphi : X \to X', \psi : Y \to Y', \theta : Z \to Z')$ fazendo comutar os dois quadrados adjacentes. Note que, como fac é uma seção de comp, devemos ter $(\alpha, \beta) = \mathrm{comp}(\mathrm{fac}(\alpha, \beta)) = \mathrm{comp}(\varphi, \psi, \theta) = (\varphi, \theta)$, de forma que os morfismos α e β são em certo sentido preservados na fatoração funtorial, conforme indicado abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Z \arrow[r, "\beta"'] & Z' \end{tikzcd} \quad \overset{\text{fac}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_0"'] & X' \arrow[d, "f'_0"] \\ Y \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f_1"'] & Y' \arrow[d, "f'_1"] \\ Z \arrow[r, "\beta"'] & Z' \end{tikzcd}$$

Por fim, introduzimos a noção de um sistema de fatoração fraca funtorial, a noção que será de fato de nosso interesse no estudo de categorias modelo.

1.2.15 Definição. Um sistema de fatoração fraco $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ uma categoria C é dito **funtorial** se existe um funtor $\mathrm{fac} : \mathrm{Arr}(\mathsf{C}) \to \mathsf{C}^{[2]}$ satisfazendo ass seguintes condições:

1. $\mathrm{comp} \circ \mathrm{fac} = \mathrm{id}_{\mathrm{Arr}(\mathsf{C})}$;

2. $d_0(\mathrm{fac}(f)) \in \mathcal{L}$ e $d_1(\mathrm{fac}(f)) \in \mathcal{R}$ para todo $f \in \mathrm{Arr}(\mathsf{C})$.

A primeira condição acima diz simplesmente que o funtor fac define uma fatoração funtorial em C, mas a segunda condição impõe que os morfismos que aparecem nessa fatoração interajam adequadamente com o sistema de fatoração fraco existente: o primeiro morfismo da fatoração deve necessariamente pertence à classe $\mathcal{L}$, enquanto o segundo deve necessariamente pertencer à classe $\mathcal{R}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ Z \end{tikzcd} \quad \overset{\text{fac}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "f_0 \in \mathcal{L}"'] \arrow[dd, bend left, "f_1 \circ f_0 = f"] \\ Y \arrow[d, "f_1 \in \mathcal{R}"'] \\ Z \end{tikzcd}$$

Muitos autores exigem que os sistemas de fatoração fracos $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ e $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ de uma categoria modelo sejam funtoriais no sentido acima. Isso nem sempre é estritamente necessário, mas é algo que facilita a nossa vida em alguns momentos. É importante comentar que, embora nem toda estrutura modelo admita fatorações funtoriais, uma grande parte delas admite, incluindo aquelas obtidas por meio do famigerado Argumento do Objeto Pequeno que estudaremos mais adiante.

1.3 Objetos fibrantes e cofibrantes

Nessa seção introduzimos o conceito de objetos cofibrantes e fibrantes. Estas duas classes de objetos em uma categoria modelo serão de extrema importância em diferentes pontos da teoria, como na construção de um modelo mais simples para a localização de uma categoria modelo e na descrição de uma noção puramente categórica de homotopia.

1.3.1 Definição. Sejam M uma categoria modelo, $\varnothing \in \mathsf{M}$ um objeto inicial qualquer, e $*$ um objeto final qualquer.[1] Um objeto $X \in \mathsf{M}$ é dito **cofibrante** se o morfismo único $!_X : \varnothing \to X$ é uma cofibração, e é dito **fibrante** se o morfismo único $!_X : X \to *$ é uma fibração. Quando um objeto é simultaneamente cofibrante e fibrante, dizemos também que ele é **bifibrante**.

1.3.2 Observação. Veja que a noção de objeto cofibrante não depende do objeto inicial $\varnothing \in \mathsf{M}$ fixado acima. De fato, se $\varnothing$ e $\varnothing'$ são dois objetos iniciais, X é um objeto qualquer, podemos considerar o diagrama comutativo abaixo onde todos os morfismos são aqueles dados pela propriedade que caracteriza um objeto inicial.

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[dr, "!_X"] \arrow[dd, bend right, "!_{\varnothing'}"'] & \\
& X \\
\varnothing' \arrow[ur, "!'_X"'] \arrow[uu, bend right, "!'_{\varnothing}"'] &
\end{tikzcd}$$

Como objetos iniciais possuem apenas a identidade como automorfismo, $!_{\varnothing'}$ e $!'_{\varnothing}$ são isomorfismos, sendo em particular cofibrações. Segue disso que $!_X : \varnothing \to X$ é uma cofibração se, e somente se, $!'_X : \varnothing' \to X$ também o é.

É claro que um raciocínio dual mostra que a noção de um objeto ser fibrante também independe do objeto final considerado na categoria modelo.

Vamos mostrar agora algumas propriedade simples a respeito de objetos cofibrantes e fibrantes.

1.3.3 Lema. *Em uma categoria modelo M qualquer valem as seguintes propriedades:*

(a) Se X é um objeto cofibrante, e $i : X \rightarrowtail Y$ é uma cofibração, então Y também é cofibrante.

(b) Se Y é um objeto fibrante, e $p : X \twoheadrightarrow Y$ é uma fibração, então X também é fibrante.

Demonstração. (a) Queremos mostrar que o morfismo $!_Y : \varnothing \to Y$ é uma cofibração. Ora, como esse morfismo é *único*, certamente vale a igualdade $!_Y = f \circ !_X$, e como $!_X : \varnothing \to X$ é por hipótese uma cofibração, $!_Y$ é a composição de duas cofibrações e, portanto uma cofibração também.

(b) Queremos mostrar que o morfismo $!_X : X \to *$ é uma fibração. Ora, como esse morfismo é *único*, certamente vale a igualdade $!_X = !_Y \circ p$, e como $!_Y : Y \to *$ é por hipótese uma fibração, vemos que $!_X$ é a composição de duas fibrações e, portanto, uma fibração também. ■

Veremos mais adiante que muitas construções categóricas usuais só se comportam de forma homotopicamente adequada quando aplicadas a objetos que são fibrantes ou cofibrantes. Assim, para que possamos realizar tais construções com objetos quaisquer, precisamos antes *substituí-los* por outros que sejam fibrantes ou cofibrantes, uma noção que tornamos precisa na definição abaixo.

1.3.4 Definição. Sejam M uma categoria modelo e $X \in \mathsf{M}$ um objeto qualquer.

[1] O fato de M ser cocompleta e completa garante a existência de objetos iniciais e finais.

1. Uma **substituição cofibrante** para X é um par (X_c, φ), onde X_c é um objeto cofibrante, e $\varphi : X_c \xrightarrow{\sim} X$ é uma equivalência fraca. Quando φ é também uma fibração, ou seja, quando φ é uma fibração trivial, dizemos que o par (X_c, φ) define uma substituição cofibrante forte.
2. Uma **substituição fibrante** para X é um par (X_f, ψ), onde X_f é um objeto fibrante, e $\psi : X \xrightarrow{\sim} X_f$ é uma equivalência fraca. Quando ψ é também uma cofibração, ou seja, quando ψ é uma cofibração trivial, dizemos que o par (X_f, ψ) define uma substituição fibrante **forte**.

1.3.5 Observação. Em alguns trabalhos da Literatura, é comum se referir a uma aproximação cofibrante forte $X_c \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ como uma *aproximação cofibrante fibrante*. Perceba então que nessa terminologia o adjetivo cofibrante se refere ao objeto X_c, equanto o adjetivo fibrante se refere ao morfismo $X_c \to X$. Analogamente, uma aproximação fibrante forte $X_f \overset{\sim}{\rightarrowtail} X$ é também chamada de uma *aproximação fibrante cofibrante*. Não usarei essa terminologia absolutamente horrível em nenhum outro lugar dessas notas, e na verdade espero muito que meu cérebro a esqueça o quanto antes.

Naturalmente somos levados a nos indagar quanto à existência e à unicidade de substituições cofibrantes e fibrantes, e são essas duas questões que iremos investigar agora.

1.3.6 Proposição. *As seguintes afirmações são válidas em uma categoria modelo* M *qualquer:*

1. *Todo objeto possui uma aproximação cofibrante forte e também uma aproximação fibrante forte.*
2. *Se* $\varphi : X_c \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ *é uma aproximação cofibrante forte, dada qualquer outra aproximação cofibrante* $\psi : X'_c \xrightarrow{\sim} X$*, existe uma equivalência fraca* $\theta : X'_c \xrightarrow{\sim} X_c$*.*
3. *Se* $\varphi : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} X_f$ *é uma aproximação fibrante forte, dada qualquer outra aproximação fibrante* $\psi : X \xrightarrow{\sim} X'_f$*, existe uma equivalência fraca* $\theta : X_f \xrightarrow{\sim} X'_f$*.*

Demonstração. 1. Dado um objeto qualquer $X \in \mathsf{M}$, usando o axioma de fatoração (M5) podemos fatorar o morfismo único $!_X : \varnothing \to X$ como uma cofibração seguinda de uma fibração trivial conforme indicado abaixo.

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r, tail, "!_{X_c}"'] \arrow[rr, bend right, "!_X"'] & X_c \arrow[r, two heads, "\sim", "\varphi"'] & X \end{tikzcd}$$

Note então que o objeto X_c é cofibrante e que o par (X_c, φ) define uma aproximação cofibrante forte para X.

Usando novamente o axioma de fatoração podemos reescrever o morfismo único $!_X : X \to *$ como uma cofibração trivial seguida de uma fibração conforme indicado abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "\sim", "\psi"'] \arrow[rr, bend right, "!_X"'] & X_f \arrow[r, two heads, "!_{X_f}"'] & * \end{tikzcd}$$

Basta notar então que o objeto X_f é fibrante e que o par (X_f, ψ) define uma aproximação fibrante forte para X.

2. Usando os morfismos dados podemos montar o quadrado comtuativo mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r, tail, "!_{X_c}"] \arrow[d, tail, "!_{X'_c}"'] & X_c \arrow[d, two heads, "\wr"', "\varphi"] \\ X'_c \arrow[r, "\sim", "\psi"'] & X \end{tikzcd}$$

Note que o quadrado é realmente comutativo, já que as composições $\varphi\circ !_{X_c}$ e $\psi\circ !_{X'_c}$ ambas definem morfismos do tipo $\varnothing \to X$, mas só existe um único morfismo desse tipo. Como $!_{X'_c}$ é uma cofibração, e φ é uma fibração trivial, usando o axioma de levantamento (M4) podemos obter um morfismo diagonal $\theta : X'_c \to X_c$ fazendo comutar o diagrama todo. Em particular, temos a igualdade $\varphi\circ\theta = \psi$, e como φ e ψ são equivalências fracas, segue do axioma 2-de-3 que θ também é uma equivalência fraca.

3. A demonstração é análoga ao que fizemos no item 2. Usando os morfismos dados montamos o quadrado comutativo abaixo,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi", "\sim"'] \arrow[d, tail, "\varphi"', "\wr"] & X'_f \arrow[d, two heads, "!_{X'_f}"] \\ X_f \arrow[r, "!_{X_f}"'] & * \end{tikzcd}$$

o qual admite um levantamento $\theta : X_f \to X'_f$ já que φ é uma cofibraçao trivial, e ψ é uma fibração. Esse levantamento satisfaz a equação $\theta \circ \varphi = \psi$, portanto pelo axioma 2-de-3 concluímos que θ é uma equivalência fraca. ■

Os itens 2 e 3 acima são o mais próximo que temos de uma unicidade para aproximações cofibrantes ou fibrantes. Podemos resumi-lo dizendo que toda aproximação cofibrante ou fibrante é fracamente equivalente a outra aproximação que é forte. Isso certamente não significa que as duas aproximações sejam *isomorfas*, já que equivalências fracas não são invertíveis em geral. É verdade, entretanto, que aproximações diferentes se tornam isomorfas ao passarmos para a categoria homotópica de M, já que esta é obtida por localização na classe das equivalêncas fracas.

1.3.7 Observação (Substituições funtoriais)**.** Suponha que a categoria de modelos M admita fatorações funtoriais, ou seja, que os dois sistemas de fatoração fracos $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\mathcal{F})$ e $(\mathcal{C},\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ sejam funtoriais, sendo fac, fac$'$: $\mathrm{Arr}(\mathsf{M}) \to \mathsf{M}^{[2]}$ os respectivos funtores de fatoração. Usando tais fatorações funtoriais podemos obter funtores de substituição cofibrante e fibrante. Considere inicialmente o funtor init : $\mathsf{M} \to \mathrm{Arr}(\mathsf{M})$ que associa a um objeto X o morfismo único $!_X : \varnothing \to X$, e que associa a um morfismo $f : X \to Y$ o par de morfismos $(\mathrm{id}_\varnothing, f)$, o qual faz comutar o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r, "\mathrm{id}_\varnothing"] \arrow[d, "!_X"'] & \varnothing \arrow[d, "!_Y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

e portanto define um morfismo do tipo $!_X \to !_Y$ na categoria de setas $\mathrm{Arr}(\mathsf{M})$.

Usando o funtor init introdudizo acima, definirmos um funtor subcof : $\mathsf{M} \to \mathrm{Arr}(\mathsf{M})$ por meio da composição mostrada abaixo.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{M} \arrow[r, "\mathrm{init}"] \arrow[rrr, dashed, bend right, "\mathrm{subcof}"'] & \mathrm{Arr}(\mathsf{M}) \arrow[r, "\mathrm{fac}'"] & \mathsf{M}^{[2]} \arrow[r, "d_1"] & \mathrm{Arr}(\mathsf{M}) \end{tikzcd}$$

Veja que, ao aplicarmos o funtor de fatoração fac$'$ ao morfismo $!_X : \varnothing \to X$, obtemos uma fatoração dada por uma cofibração $!_{X_c} : \varnothing \to X_c$ seguida de uma fibração trivial $p_X : X_c \to X$ conforme indicado abaixo.

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[rr, "!_X"] \arrow[dr, tail, "!_{X_c}"'] & & X \\ & X_c \arrow[ur, "p_X"', "\sim"] & \end{tikzcd}$$

Note então que o par (X_c, p_X) define uma substituição cofibrante forte para X. A funtorialidade da construção pode ser entendida da seguinte maneira: se $f : X \to Y$ é um morfismo em M, existe também um morfismo induzido $f_c : X_c \to Y_c$ entre as substituições cofibrantes que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} X_c \arrow[r, dashed, "f_c"] \arrow[d, two heads, "p_X"', "\wr"] & Y_c \arrow[d, two heads, "p_Y", "\wr"'] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1.18}$$

Denotando por M_c a subcategoria plena de M gerada pelos objetos cofibrantes, temos um funtor

$$\mathrm{dom} \circ \mathrm{subcof} : \mathsf{M} \to \mathsf{M}_c,$$

e a comutatividade do quadrado acima diz que a coleção de morfismos $(p_X)_{X \in \mathsf{M}}$ define uma transformação natural do tipo $i \circ (\mathrm{dom} \circ \mathrm{subcof}) \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{M}}$, enquanto a coleção $(p_X)_{X \in \mathsf{M}_c}$ define uma transformação natural do tipo $(\mathrm{dom} \circ \mathrm{subcof}) \circ i \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{M}_c}$, onde $i : \mathsf{M}_c \to \mathsf{M}$ é o funtor de inclusão.

Existe também um processo análogo para obtermos substituições fibrantes funtoriais em uma categoria de modelos equipada com fatorações funtoriais. Consideramos inicialmente o funtor $\mathrm{term} : \mathsf{M} \to \mathrm{Arr}(\mathsf{M})$ que associa a cada objeto $X \in \mathsf{M}$ o morfismo terminal $!_X : X \to *$ e que associa a cada morfismo $f : X \to Y$ o par (f, id_*), o qual faz comutar o quadrado indicado abaixo e, portanto, define um morfismo do tipo $!_X \to !_Y$ na categoria de setas.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!_X"'] & Y \arrow[d, "!_Y"] \\ * \arrow[r, "\mathrm{id}_*"'] & * \end{tikzcd}$$

Consideramos então o funtor $\mathrm{subfib} : \mathsf{M} \to \mathrm{Arr}(\mathsf{M})$ dado pela composição indicada abaixo.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{M} \arrow[r, "\mathrm{term}"] \arrow[rrr, dashed, bend right, "\mathrm{subfib}"'] & \mathrm{Arr}(\mathsf{M}) \arrow[r, "\mathrm{fac}"] & \mathsf{M}^{[2]} \arrow[r, "d_0"] & \mathrm{Arr}(\mathsf{M}) \end{tikzcd}$$

Tal funtor associa a cada objeto $X \in \mathsf{M}$ uma cofibração trivial $j_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} X_f$ que faz comutar o diagrama abaixo,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "!_X"] \arrow[dr, tail, "\sim", "j_X"'] & & * \\ & X_f \arrow[ur, two heads, "!_{X_f}"'] & \end{tikzcd}$$

portanto o par (X_f, j_X) define uma substituição fibrante forte para X. Além disso, o funtor subfib em questão associa também a cada morfismo $g : X \to Y$ em M um morfismo correspondente $g_f : X_f \to Y_f$ entre as substituições fibrantes que faz comutar o quadrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, tail, "j_X"', "\wr"] & Y \arrow[d, tail, "j_Y", "\wr"'] \\ X_f \arrow[r, dashed, "g_f"'] & Y_f \end{tikzcd} \tag{1.19}$$

Denotando por M_f a subcategoria plena de M gerada pelos objeos fibrantes, temos o funtor composto $\mathrm{cod} \circ \mathrm{subfib} : \mathsf{M} \to \mathsf{M}_f$, e a comutatividade do diagrama (1.19) diz que a coleção de morfismos $(j_X)_{X\in\mathsf{M}}$ define uma transformação natural do tipo $\mathrm{id}_{\mathsf{M}} \Rightarrow i\circ(\mathrm{cod}\circ\mathrm{subfib})$, enquanto a coleção de morfismos $(j_X)_{X\in\mathsf{M}_f}$ define uma transformação natural $\mathrm{id}_{\mathsf{M}_f} \Rightarrow (\mathrm{cod}\circ\mathrm{subfib})\circ i$, onde $i : \mathsf{M}_f \to \mathsf{M}$ denota o morfismo de inclusão.

1.4 Teoria de Homotopia em categorias modelo

Nessa seção introduzimos enfim noções homotópicas que podem ser descritas em uma categoria modelo qualquer. Veremos, entretanto, que mesmo a noção básica de homotopia entre dois morfismos possui sutilezas que a tornam mais complexa do que a noção clássica de homotopia entre mapas contínuos de espaços topológicos. Felizmente, também veremos que a noção categórica de homotopia se aproxima muito maisda clássica quando trabalhamos apenas com objetos cofibrantes ou fibrantes, e nesse caso podemos usar a construção usual da categoria homotópica para definirmos uma espécie de localização de uma categoria modelo.

A fim de imitarmos a noção topológica de homotopia, o primeiro passo será darmos uma descrição categórica para a construção do cilindro $B\times I$ associado a um espaço topológico B qualquer, onde é claro que I denota o intervalo unitário da reta.

Lembremos inicialmente que, dado um objeto B de uma categoria C qualquer que admita coprodutos, a propriedade universal dessa construção garante a existência de um único mapa $\nabla : B\sqcup B \to B$ fazendo comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "j_1"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_B"] & & \\
 & B\sqcup B \arrow[r, dashed, "\nabla"] & B \\
B \arrow[ur, "j_2"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

Tal morfismo é comumente chamado de **morfismo codiagonal** ou também de **morfismo de dobra**[2]. Intuitivamente, esse morfismo simplesmente cola duas cópias exatamente uma sobre a outra. Por vezes, se precisarmos distinguir entre os morfismos codiagonais associados a diferentes objetos, utilizaremos também a notação ∇_B para o morfismo descrito acima.

1.4.1 Definição. Sejam M uma categoria modelo e $B\in\mathsf{M}$ um objeto qualquer. Um **objeto cilindro** para B é uma fatoração do morfismo codiagonal $\nabla : B\sqcup B\to B$ como uma cofibração seguida de uma equivalência fraca. Mais explicitamente, um objeto cilindro para B é uma tripla $(\mathrm{Cyl}(B), i, \varepsilon)$, onde $i : B\sqcup B \rightarrowtail \mathrm{Cyl}(B)$ é uma cofibração e $\varepsilon : \mathrm{Cyl}(B) \xrightarrow{\sim} B$ é uma equivalência fraca tais que $\varepsilon\circ i = \nabla$, conforme mostrado no diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd}
B\sqcup B \arrow[d, tail, "i"'] \arrow[dr, "\nabla"] & \\
\mathrm{Cyl}(B) \arrow[r, "\sim", "\varepsilon"'] & B
\end{tikzcd}$$

Dizemos que a tripla $(\mathrm{Cyl}(B), i, \varepsilon)$ define um objeto cilindro **forte** se ε é também uma fibração, ou seja, se ε é uma fibração trivial.

1.4.2 Observação. O axioma de fatoração (M5) garante que o morfismo $\nabla : B\sqcup B\to B$ pode ser fatorado como uma cofibração seguida de uma fibração trivial, portanto todo objeto de uma categoria modelo admite um objeto cilindro forte. Entretanto, por vezes esse modelo

[2]Uma tradução direta do inglês *fold map*.

para o objeto cilindro forte dado pelo axioma de fatoração pode ser muito complicado, por isso é vantajoso trabalharmos com cilindros fracos também, cuja descrição é por vezes mais simples.

Vamos introduzir mais um pouco de terminologia. Dado um objeto cilindro $(\mathrm{Cyl}(B), i, \varepsilon)$ para B, se j_1, $j_2 : B \to B \sqcup B$ são as injeções canônicas, frequentemente denotaremos os morfismos do tipo $B \to \mathrm{Cyl}(B)$ dados pelas composições $i \circ j_1$ e $i \circ j_2$ por i_0 e i_1, respectivamente. Essa diferença nos índices pode parecer estranho, mas a motivação para tal vem do caso topológico clássico, onde um modelo para o objeto cilindro $\mathrm{Cyl}(B)$ é o produto $B \times I$. Nesse caso, a composição $i_0 = i \circ j_1$ mapeia B para a face inferior $B \times \{0\}$ de $B \times I$, enquanto a composição $i_1 = i \circ j_2$ mapeia B para a face superior $B \times \{1\}$ do cilindro $B \times I$, o que justifica a razoabilidade dos índices aparecendo em cada uma das composições.

Antes de vermos como a noção de objeto cilindro nos permite definir uma noção categórica de homotopia, vejamos algumas propriedades simples satisfeitas por tais objetos.

1.4.3 Lema. *Sejam* M *uma categoria modelo,* $B \in \mathsf{M}$ *um objeto qualquer, e* $(\mathrm{Cyl}(B), i, \varepsilon)$ *um objeto cilindro qualquer para* B*.*

(i) Os morfismos i_0, $i_1 : B \to \mathrm{Cyl}(B)$ *são equivalências fracas.*

(ii) Se B *é um objeto cofibrante, então os morfismos* i_0, $i_1 : B \to \mathrm{Cyl}(B)$ *são também cofibrações e, portanto, cofibrações triviais.*

Demonstração. (i) Note que pela definição de i_0 temos

$$\varepsilon \circ i_0 = \varepsilon \circ i \circ j_1 = \nabla \circ j_1 = \mathrm{id}_B.$$

Ora, como id_B é uma equivalência fraca, o mesmo valendo para ε pela definição de objeto cilindro, segue da propriedade 2-de-3 que i_0 é também uma equivalência fraca. A demonstração de que i_1 é uma equivalência fraca segue de um raciocínio completamente análogo.

(ii) Lembremos que em qualquer categoria, o coproduto pode ser interpretado também como um pushout sobre o objeto inicial. Mais precisamente, se $\varnothing$ denota um objeto inicial de M, então o quadrado comutativo abaixo é um pushout.

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r, "!_B"] \arrow[d, "!_B"'] & B \arrow[d, "j_1"] \\ B \arrow[r, "j_2"'] & B \sqcup B \end{tikzcd}$$

Por hipótese B é cofibrante, ou seja, o morfismo único $!_B$ é uma cofibração, mas já sabemos do Corolário 1.2.10 que cofibrações são preservadas por pushouts, portanto j_1 e j_2 são cofibrações. Mas segue então que os morfismos i_0 e i_1 são composições de cofibrações e, portanto, cofibrações também de acordo com o Corolário 1.2.10. ■

Tendo em mãos essas propriedades básicas, podemos enfim definir uma primeira noção de homotopia entre morfismos em uma categoria modelo.

1.4.4 Definição. Dois morfismos f, $g : B \to X$ em uma categoria modelo M são ditos **homotópicos à esquerda** se existe um objeto cilindro $(\mathrm{Cyl}(B), i, \varepsilon)$ para B e um morfismo $h : \mathrm{Cyl}(B) \to X$ tal que $h \circ i = \langle f, g \rangle$, conforme mostrado no diagrama comutativo abaixo. Nesse caso, denotamos essa relação por $f \sim_L g$.

$$\begin{tikzcd} B & B \sqcup B \arrow[l, "\nabla"'] \arrow[r, "{\langle f,g \rangle}"] \arrow[d, tail, "i"] & X \\ & \mathrm{Cyl}(B) \arrow[ul, "\sim", "\varepsilon"'] \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Se interpretarmos os morfismos i_0, $i_1 : B \to \mathrm{Cyl}(B)$ como sendo as faces inferior e superior do cilindro como no caso topológico clássico, então as composições $h \circ i_0$ e $h \circ i_1$ determinam os estágios inicial e final da homotopia h. Usando a definição de tais morfismos e a comutatividade acima vemos que por um lado

$$h \circ i_0 = h \circ i \circ j_1 = \langle f, g\rangle \circ j_1 = f,$$

e por outro

$$h \circ i_1 = h \circ i \circ j_2 = \langle f, g\rangle \circ j_2 = g.$$

Assim, recuperamos em certo sentido a intuição clássica de uma família de morfismos que começa em f e termina em g.

Veja que a definição acima possui uma sutileza: exigimos que a homotopia h esteja definida em *algum* objeto cilindro $\mathrm{Cyl}(B)$, mas B pode muito bem admitir diversos objetos cilindros distintos. Isso pode representar uam dificuldade para "combinarmos" homotopias à esquerda, já que elas podem não estar definidas nos mesmos objetos cilindros.

O resultado abaixo mostra que homotopias à esquerda são preservadas por composição de morfismos à esquerda, o que possivelmente justifica a terminologia usada. Além disso, mostramos que homotopias à esquerda também são preservadas por composição de morfismos à direita quando supomos que o codomínio é fibrante, e essa hipótese também garante a independência do objeto cilindro no qual a homotopia está definida.

1.4.5 Proposição. *Suponha que f, $g : B \to X$ sejam dois morfismos homotópicos à esquerda em uma categoria modelo M.*

1. *Dado um morfismo $\beta : X \to Y$, os morfismos compostos $\beta \circ f$, $\beta \circ g : B \to Y$ são homotópicos à esquerda.*

2. *Se X é fibrante, então a homotopia entre f e g independe do objeto cilindro usado.*

3. *Se X é fibrante, então dado qualquer morfismo $\alpha : A \to B$, os morfismos compostos $f \circ \alpha$, $g \circ \alpha : A \to X$ são homotópicos à esquerda.*

Demonstração. 1. Por hipótese existe um objeto cilindro $(\mathrm{Cyl}(B), i, \varepsilon)$ para B e um morfismo $h : \mathrm{Cyl}(B) \to X$ satisfazendo $h \circ i = \langle f, g\rangle$. Afirmamos que $\beta \circ h$ é a homotopia à esquerda procurada de $\beta \circ f$ para $\beta \circ g$. De fato, basta notar que

$$\beta \circ h \circ i = \beta \circ \langle f, g\rangle = \langle \beta \circ f, \beta \circ g\rangle,$$

onde a última igualdade segue diretamente da propriedade universal do coproduto, já que a composição $\beta \circ \langle f, g\rangle$ satisfaz as igualdades

$$(\beta \circ \langle f, g\rangle) \circ j_1 = \beta \circ f \quad \text{e} \quad (\beta \circ \langle f, g\rangle) \circ j_2 = \beta \circ g.$$

2. Por hipótese sabemos que existe *algum* objeto cilindro $(\mathrm{Cyl}(B), i, \varepsilon)$ para B e um morfismo $h : \mathrm{Cyl}(B) \to X$ tal que $h \circ i = \langle f, g\rangle$. Afirmamos que existe também uma homotopia de f para g definida em um cilindro *forte*. De fato, sabemos do axioma de fatoração que a equivalência fraca $\varepsilon : \mathrm{Cyl}(B) \to B$ pode ser fatorada como uma cofibração seguida de uma fibração trivial conforme indicado abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cyl}(B) \arrow[rr, "\varepsilon", "\sim"'] \arrow[dr, tail, "j"'] & & B \\
& C \arrow[ur, two heads, "p"', "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

Afirmamos então que a tripla $(C, j \circ i, p)$ é um objeto cilindro forte para B. Veja que $j \circ i$ e p fatoram o morfismo de dobra $\nabla : B \to B \sqcup B$ pois

$$p \circ (j \circ i) = (p \circ j) \circ i = \varepsilon \circ i = \nabla,$$

e como p é uma fibração trivial pelo axioma de fatoração, a tripla em questão define de fato um cilindro forte.

Vamos agora mostrar que existe uma homotopia de f para g definida nesse cilindro forte. Note inicialmente que o morfismo $j : \mathrm{Cyl}(B) \to C$ que apareceu na fatoração acima é uma cofibração trivial pela propriedade 2-de-3, já que ε e p são ambos equivalências fracas. Como o morfismo único $!_X : X \to *$ é por hipótese uma fibração, segue do axioma de levantamento que existe um morfismo diagonal $\widetilde{h} : C \to X$ fazendo comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cyl}(B) \arrow[r, "h"] \arrow[d, tail, "j"', "\wr"] & X \arrow[d, two heads, "!_X"] \\
C \arrow[r, "!_C"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{h}"] & *
\end{tikzcd}$$

Note então que $\widetilde{h}$ define uma homotopia de f para g com relação ao cilindro forte $(C, j \circ i, p)$ pois

$$\widetilde{h} \circ (j \circ i) = (\widetilde{h} \circ j) \circ i = h \circ i = \langle f, g \rangle.$$

Vejamos agora como mostrar que a homotopia entre f e g independe do cilindro usado. Segue da discussão acima que podemos assumir sem perda de generalidade que o objeto cilindro $(\mathrm{Cyl}(B), i, \varepsilon)$ no qual está definida a homotopia h por hipótese é forte. Suponha agora que (S, i', ε') seja um outro objeto cilindro qualquer. Queremos construir um morfismo $h' : S \to X$ tal que $h' \circ i' = \langle f, g \rangle$. A ideia é construirmos um morfismo do tipo $S \to \mathrm{Cyl}(B)$ que, ao ser composto com a homotopia h já existente, forneça uma outra homotopia definida agora no objeto cilindro S. A fim de construirmos tal morfismo, note que o quadrado mostrado abaixo é comutativo, pois ambos os pares (i, ε) e (i', ε') são fatorações do morfismo de dobra ∇. Ademais, como i' é uma cofibração, pois S é um objeto cilindro, e ε é uma fibração trivial, pois $\mathrm{Cyl}(B)$ é um cilindro forte; segue do axioma de levantamento que existe um morfismo diagonal $\phi : S \to \mathrm{Cyl}(B)$ como indicado.

$$\begin{tikzcd}
B \sqcup B \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, tail, "i'"'] & \mathrm{Cyl}(B) \arrow[d, two heads, "\varepsilon", "\wr"'] \\
S \arrow[r, "\sim", "\varepsilon'"'] \arrow[ur, dashed, "\phi"] & B
\end{tikzcd}$$

Veja então que a composição $h' \coloneqq h \circ \phi$ define a homotopia desejada, pois da comutatividade acima vemos que

$$h' \circ i' = h \circ \phi \circ i' = h \circ i = \langle f, g \rangle.$$

3. Considere $(\mathrm{Cyl}(A), i_A, \varepsilon_A)$ um objeto cilindro qualquer para A e $(\mathrm{Cyl}(B), i_B, \varepsilon_B)$ seja um objeto cilindro *forte* para B. Sabemos pelo item 2 que certamente existe uma homotopia $h : \mathrm{Cyl}(B) \to X$ de f para g definida nesse cilindro forte. Considere o diagrama de levantamento exibido abaixo.

$$\begin{tikzcd}
A \sqcup A \arrow[r, "i_B \circ \alpha \sqcup \alpha"] \arrow[d, tail, "i_A"'] & \mathrm{Cyl}(B) \arrow[d, two heads, "\varepsilon_B", "\wr"'] \\
\mathrm{Cyl}(A) \arrow[r, "\alpha \circ \varepsilon_A"'] & B
\end{tikzcd}$$

Veja que o quadrado externo é de fato comutativo pois por um lado

$$\alpha \circ \varepsilon_A \circ i_A = \alpha \circ \nabla_A = \alpha \circ \langle \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A \rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle,$$

e por outro

$$\varepsilon_B \circ i_B \circ \alpha \sqcup \alpha = \nabla_B \circ \alpha \sqcup \alpha = \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

Segue do axioma de levantamento que existe o morfismo diagonal $\phi : \mathrm{Cyl}(A) \to \mathrm{Cyl}(B)$ mostrado acima. Note então que $h \circ \phi : \mathrm{Cyl}(A) \to X$ é a homotopia procurada pois

$$h \circ \phi \circ i_A = h \circ i_B \circ (\alpha \sqcup \alpha) = \langle f, g \rangle \circ (\alpha \sqcup \alpha) = \langle f \circ \alpha, g \circ \alpha \rangle. \qquad \blacksquare$$

Uma consequência particularmente útil é que a noção de homotopia à esquerda se torna uma relação de equivalência quando trabalhamos com morfismos tendo codomínio fibrante.

1.4.6 Corolário. *Em uma categoria de modelos* $(\mathsf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$, *se* B *é um objeto cofibrante e* X *é um objeto qualquer, então a relação de homotopia à esquerda* $\simeq_L$ *define uma relação de equivalência no conjunto de morfismos* $\mathsf{M}(B, X)$.

Demonstração. Vejamos primeiro a reflexividade da relação de homotopia à esquerda. Dado um morfismo $f : B \to X$, considere $(\mathrm{Cyl}(B), i, \varepsilon)$ um objeto cilindro qualquer para B. Veja que o quadrado indicado abaixo é comutativo pois

$$f \circ \varepsilon \circ i = f \circ \nabla = f \circ \langle \mathrm{id}_B, \mathrm{id}_B \rangle = \langle f, f \rangle,$$

e como o morfismo idêntico $\mathrm{id}_X : X \to X$ é uma fibração trivial, e $i : B \sqcup B \to \mathrm{Cyl}(B)$ é uma cofibração por hipótese, segue do axioma de levantamento que existe o morfismo diagonal $h : \mathrm{Cyl}(B) \to X$ mostrado, e a comuatividade mostra que tal morfismo define uma homotopia à esquerda de f para si mesmo.

$$\begin{tikzcd} B \sqcup B \arrow[r, "\langle f,f \rangle"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "\mathrm{id}_X", "\wr"'] \\ \mathrm{Cyl}(B) \arrow[r, "f\circ\varepsilon"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & X \end{tikzcd}$$

Note que a demonstração acima não usa em nenhum momento a hipótese de cofibrância sobre B, ou seja, a relação de homotopia à esquerda é *sempre* reflexiva.

Vejamos agora a demonstração da simetria da relação. Dados dois morfismos $f, g : B \to X$ que sejam homotópicos à esquerda, suponhamos que tal homotopia $h : \mathrm{Cyl}(B) \to X$ esteja definido em um objeto cilindro $(\mathrm{Cyl}(B), i, \varepsilon)$ qualquer. A ideia é montarmos um outro objeto cilindro que tenha as "faces trocadas", e faremos isso trocando a ordem das parcelas do coproduto $B \sqcup B$. Mais precisamente, sabemos da propriedade universal do coproduto que existe um único morfismo $\Sigma : B \sqcup B$ tal que $\Sigma \circ j_1 = j_2$ e $\Sigma \circ j_2 = j_1$, onde $j_1, j_2 : B \to B \sqcup B$ denotam as injeções canônicas no coproduto. Intuitivamente, Σ troca as duas cópias de B que compõem o coproduto $B \sqcup B$. Uma propriedade do morfismo Σ que será importante para nós é sua interação com o morfismo codiagonal $\nabla : B \sqcup B \to B$. Mais precisamente, afirmamos que vale a igualdade $\nabla \circ \Sigma = \nabla$. Faz bastante sentido que essa igualdade seja verdadeira, pois se ∇ intuitivamente idetifica as duas cópias de B que formam o coproduto $B \sqcup B$, não faz diferença trocarmos essas cópias de lugar antes de fazermos a identificação. A demonstração dessa igualdade é uma aplicação direta da propriedade universal do coproduto, pois ∇ é caracterizado unicamente por satisfazer as igualdades

$$\nabla \circ j_1 = \nabla \circ j_2 = \mathrm{id}_B,$$

mas a composição $\nabla \circ \Sigma$ satisfaz as mesmas igualdades, pois por um lado

$$(\nabla \circ \Sigma) \circ j_1 = \nabla \circ (\Sigma \circ j_1) = \nabla \circ j_2 = \mathrm{id}_B$$

e por outro

$$(\nabla \circ \Sigma) \circ j_2 = \nabla \circ (\Sigma \circ j_2) = \nabla \circ j_1 = \mathrm{id}_B.$$

Sabendo das propriedades acima, afirmamos que a tripla $(\mathrm{Cyl}(B), i \circ \Sigma, \varepsilon)$ define um outro objeto cilindro para B. Note primeiro que o morfismo de troca Σ é um automorfismo de $B \sqcup B$, já que uma aplicação direta da propriedade universal do coproduto mostra que vale a igualdade $\Sigma \circ \Sigma = \mathrm{id}_B$. Segue em particular que Σ é uma cofibração, portanto o mesmo é válido para a composição $i \circ \Sigma : B \rightarrowtail \mathrm{Cyl}(B)$. Por fim, usando a propriedade de Σ discutida no parágrafo anterior vemos que $i \circ \Sigma$ e ε fatoram o morfismo codiagonal, pois

$$\varepsilon \circ (i \circ \Sigma) = (\varepsilon \circ i) \circ \Sigma = \nabla \circ \Sigma = \nabla.$$

Afirmamos então que o próprio morfismo $h : \mathrm{Cyl}(B) \to X$ define a homotopia desejada de g para f com respeito ao objeto cilindro "trocado" $(\mathrm{Cyl}(B), i \circ \Sigma, \varepsilon)$. De fato, note que por um lado

$$h \circ (i \circ \Sigma) \circ j_1 = (h \circ i) \circ (\Sigma \circ j_1) = \langle f, g \rangle \circ j_2 = g,$$

e por outro

$$h \circ (i \circ \Sigma) \circ j_2 = (h \circ i) \circ (\Sigma \circ j_2) = \langle f, g \rangle \circ j_1 = f;$$

portanto $h \circ (i \circ \Sigma) = \langle g, f \rangle$ conforme desejado. Note que essa demonstração também não necessita da hipótese de cofibrância sobre B, ou seja, a relação de homotopia à esquerda é *sempre* simétrica.

Resta verificarmos a transitividade da relação, e é aqui onde finalmente usamos a hipótese de cofibrância sobre B. Suponha que tenhamos três morfismos f_1, f_2, $f_3 : B \to X$ tais que $f_1 \simeq_L f_2$ e $f_2 \simeq_L f_3$. A primeira homotopia à esquerda é dada por um morfismo $h_1 : \mathrm{Cyl}(B) \to X$, enquanto a segunda é dada por um morfismo $h_2 : \mathrm{Cyl}'(B) \to X$, sendo que $(\mathrm{Cyl}(B), i, \varepsilon)$ e $(\mathrm{Cyl}'(B), i', \varepsilon')$ são objetos cilindros possivelmente *distintos*.[3] A ideia é que podemos colar os dois cilindros juntos de uma forma que vai nos permitir "concatenar" as homotopias h_1 e h_2 de forma a obtermos uma homotopia de f_1 para f_3. Inicialmente, consideramos o objeto $Q \in \mathsf{M}$ dado pelo diagrama de pushout abaixo, onde $i_1 : B \to \mathrm{Cyl}(B)$ e $i'_0 : B \to \mathrm{Cyl}'(B)$ são componentes das cofibrações $i : B \sqcup B \to \mathrm{Cyl}(B)$ e $i' : B \sqcup B \to \mathrm{Cyl}'(B)$, respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i'_0"'] & \mathrm{Cyl}(B) \arrow[d, "b"] \\
\mathrm{Cyl}'(B) \arrow[r, "t"'] & Q
\end{tikzcd}$$

A hipótese de cofibrância sobre B garante por meio do Lema 1.4.3 que os morfismos i_1 e i'_0 são cofibrações triviais, e como esse tipo de morfismo é preservado por pushouts, seque que os morfismos $b : \mathrm{Cyl}(B) \to Q$ e $t : \mathrm{Cyl}'(B) \to Q$ que aparecem acima são também cofibrações triviais. Como os morfismos $\varepsilon : \mathrm{Cyl}(B) \to B$ e $\varepsilon' : \mathrm{Cyl}'(B) \to B$ satisfazem as igualdades $\varepsilon \circ i_1 = \varepsilon' \circ i'_0 = \mathrm{id}_B$, segue da propriedade universal do pushout a existência de um morfismo

[3] Aqui não podemos usar o resultado de independência de objetos cilindro pois isso requer que o codomínio dos morfismos seja fibrante.

$\widetilde{\varepsilon} : Q \to B$ fazendo comutar o diagrama mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_0'"'] & \mathrm{Cyl}(B) \arrow[d, "b"] \arrow[ddr, bend left, "\varepsilon"] & \\
\mathrm{Cyl}'(B) \arrow[r, "t"'] \arrow[drr, bend right, "\varepsilon'"'] & Q \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\varepsilon}"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Note que, como ε e b são equivalências fracas, o mesmo é válido para $\widetilde{\varepsilon}$ por conta da igualdade $\widetilde{\varepsilon} \circ b = \varepsilon$ e da propriedade 2-de-3.

Considere agora o morfismo $\widetilde{i} : B \sqcup B \to Q$ definido como $\widetilde{i} \coloneqq \langle b \circ i_0, t \circ i_1' \rangle$ por meio da propriedade universal do coproduto $B \sqcup B$. Afirmamos que $\widetilde{\varepsilon}$ e $\widetilde{i}$ juntos fatoram o morfismo codiagonal. De fato, por um lado temos

$$\widetilde{\varepsilon} \circ \widetilde{i} \circ j_1 = \widetilde{\varepsilon} \circ b \circ i_0 = \varepsilon \circ i_0 = \mathrm{id}_B,$$

e por outro temos também

$$\widetilde{\varepsilon} \circ \widetilde{i} \circ j_2 = \widetilde{\varepsilon} \circ t \circ i_1' = \varepsilon' \circ i_1' = \mathrm{id}_B;$$

portanto a propriedade universal do coproduto implica a igualdade $\widetilde{\varepsilon} \circ \widetilde{i} = \nabla$ desejada.

Veja que como a homotopia $h_1 : \mathrm{Cyl}(B) \to X$ "termina" em f_2, enquanto a homotopia $h_2 : \mathrm{Cyl}'(B) \to X$ "começa" em f_2, ou seja, temos as igualdades $h \circ i_1 = h \circ i_0' = f_2$, a camada externa do diagrama abaixo comuta, portanto pela propriedade universal do pushout obtemos o morfismo $h : Q \to X$ indicado.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_0'"'] & \mathrm{Cyl}(B) \arrow[d, "b"] \arrow[ddr, bend left, "h_1"] & \\
\mathrm{Cyl}'(B) \arrow[r, "t"'] \arrow[drr, bend right, "h_2"'] & Q \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que o morfismo h construído dessa forma satisfaz a igualdade $h \circ \widetilde{i} = \langle f_1, f_3 \rangle$. De fato, pré-compondo com a injeção j_1 no coproduto vemos que

$$h \circ \widetilde{i} \circ j_1 = h \circ b \circ i_0 = h_1 \circ i_0 = f_1,$$

e pré-compondo com a outra injeção j_2 vemos também que

$$h \circ \widetilde{i} \circ j_2 = h \circ t \circ i_1' = h_2 \circ i_1' = f_3;$$

de forma que a igualdade desejada segue da propriedade universal do coproduto novamente.

Infelizmente, embora isso pareça muito ser verdade, h *não* define uma homotopia de f_1 para f_3, pois a tripla $(Q, \widetilde{i}, \widetilde{\varepsilon})$ *não* define um objeto cilindro para B já que $\widetilde{i}$ pode não ser uma cofibração. Felizmente, podemos usar o axioma de fatoração para corrigirmos esse defeito sem grandes dores de cabeça. Mais precisamente, usando tal axioma podemos reescrever $\widetilde{i}$ como uma cofibração $\widehat{\imath} : B \sqcup B \to \widehat{Q}$ seguida de uma fibração trivial $p : \widehat{Q} \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} C$ conforme mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd}
B \sqcup B \arrow[rr, "\widetilde{\imath}"] \arrow[dr, tail, "\widehat{\imath}"'] & & Q \\
& \widehat{Q} \arrow[ur, two heads, "\sim", "p"'] &
\end{tikzcd}$$

Veja que a tripla $(\widehat{Q}, \widehat{\imath}, \widetilde{\varepsilon} \circ p)$ define realmente um objeto cilindro: $\widehat{\imath}$ é uma cofibração por hipótese, $\widetilde{\varepsilon} \circ p$ é a composição de duas equivalências fracas e, portanto, uma equivalência fraca também; e os dois morfismos em questão fatoram a codiagonal pois

$$\widetilde{\varepsilon} \circ p \circ \widehat{\imath} = \widetilde{\varepsilon} \circ \widetilde{\imath} = \nabla.$$

Note agora que o morfismo composto $h \circ p : \widehat{Q} \to X$ define enfim a homotopia procurada com relação a esse verdadeiro objeto cilindro como mostra a sequeência de igualdades

$$h \circ p \circ \widehat{\imath} = h \circ \widetilde{\imath} = \langle f_1, f_3 \rangle.$$ ■

Tendo em vista o Corolário 1.4.6, se X é um objeto cofibrante, então para qualquer outro objeto Y podemos formar o conjunto quociente

$$[X, Y]_\ell \coloneqq \mathsf{M}(X, Y)/ \simeq_\ell$$

cujos elementos chamaremos de **classes de homotopia à esquerda** de morfismos. Dado um morfismo qualquer$f : X \to Y$, denotaremos por $[f]_\ell$ sua imagem no quociente $[X, Y]_\ell$.

Note que, se $\beta : Y \to Z$ é um morfismo *qualquer*, podemos temos a função $\mathsf{M}(X, \beta) : \mathsf{M}(X, Y) \to \mathsf{M}(X, Z)$ de pushforward (pós-composição) ao longo de β. Sabemos da Proposição 1.4.5 que homotopias à esquerda são preservadas por pushforwards, a composição $\pi_{X,Z} \circ \mathsf{M}(X, \beta) : \mathsf{M}(X, Y) \to [X, Z]_\ell$ é constante nas classes de homotopia à esquerda, portanto existe uma únicafunção induzida $[X, \beta]_\ell : [X, Y]_\ell \to [X, Z]_\ell$ fazendo comutar o diagrama abaixo,

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{M}(X, Y) \arrow[r, "\mathsf{M}(X,\beta)"] \arrow[d, "\pi_{X,Y}"'] & \mathsf{M}(X, Z) \arrow[d, "\pi_{X,Z}"] \\
{[X, Y]_\ell} \arrow[r, dashed, "{[X,\beta]_\ell}"'] & {[X, Z]_\ell}
\end{tikzcd}$$

onde $\pi_{X,Y} : \mathsf{M}(X, Y) \to [X, Y]_\ell$ e $\pi_{X,Z} : \mathsf{M}(X, Z) \to [X, Z]_\ell$ denotam as projeções canônicas no quociente. Explicitamente, dada uma classe de homotopia à esquerda $[f]_\ell \in [X, Y]_\ell$, pela comutatividade do quadrado acima temos

$$[X, \beta]_\ell([f]_\ell) = [\beta \circ f]_\ell.$$

1.4.7 Definição. Sejam M uma categoria modelo e $X \in \mathsf{M}$ um objeto qualquer. Um **objeto de caminhos** para B é uma fatoração do morfismo diagonal $\Delta : X \to X \times X$ como uma equivalência fraca seguida de uma fibração. Mais explicitamente, um objeto de caminhos para B é uma tripla $(P(X), c, p)$, onde $P(X) \in \mathsf{M}$ é um objeto da categoria, $c : X \overset{\sim}{\to} P(X)$ é uma equivalência fraca, e $p : P(X) \twoheadrightarrow X \times X$ é uma fibração tais que $\Delta = p \circ c$, conforme mosrado no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
& P(X) \arrow[d, two heads, "p"] \\
X \arrow[ur, "c", "\sim"'] \arrow[r, "\Delta"'] & X \times X
\end{tikzcd}$$

Quando o morfismo c é também uma cofibração, portanto uma cofibração trivial, dizemos que a tripla $(P(X), c, p)$ define um objeto de caminhos **forte** para X.

1.4.8 Observação. O axioma de fatoração (M5) garante que o morfismo diagonal $\Delta : X \times X \to X$ pode ser fatorado como uma cofibração trivial seguida de uma fibração, portanto todo objeto de uma categoria modelo admite um objeto de caminhos que é até mesmo forte. Como no caso do objetos cilindro, nem sempre esse modelo obtido pelo axioma de fatoração é o mais conveniente para trabalharmos, de forma que é vantajoso considerarmos também objetos de caminhos que não necessariamente sejam fortes.

Neste caso temos também algumas notações associadas. Dado um objeto de caminhos $(P(X), c, p)$ para X, se π_1, $\pi_2 : X \times X \to X$ são as projeções canônicas associadas ao produto, denotaremos os morfismos compostos $\pi_1 \circ p$, $pi_2 \circ p : P(X) \to X$ por p_0 e p_1, respectivamente. Note então que a fibração p é precisamente o morfismo induzido por p_0 e p_1 por meio da propriedade universal do produto, ou seja, $p = (p_0, p_1)$. Como no caso de objetos cilindros, os índices usados na notação ficam claros quando examinamos o caso topológico clássico, onde o objeto de caminhos é dado pelo espaço de mapas X^I munido da topologia compacto-aberta, a equivalência fraca $c : X \to X^I$ associa a cada ponto $x \in X$ o caminho $c(b) : I \to X$ constante naquele ponto, e a fibração $p : X^I \to X \times X$ associa a um caminho $\gamma \in B^X$ seus pontos inicial e final, ou seja, $p(\gamma) \coloneqq (\gamma(0), \gamma(1))$. Nesse caso, os mapas p_0, $p_1 : X^I \to B$ introduzidos acima são simplesmente os mapas de avaliação no instante inicial 0 e no instante final 1, respectivamente, o que justifica nossa escolha de índice na notação usada para tais morfismos.

Vamos agora percorrer um caminho completamente análogo ao que percorremos para objetos cilindros. Começamos inicialmente verificando algumas das propriedades básicas satisfeitas por objetos de caminhos.

1.4.9 Lema. *Sejam* M *uma categoria modelo,* $X \in \mathsf{M}$ *um objeto, e* $(P(X), c, p)$ *um objeto de caminhos qualquer para* X*.*

(i) Os morfismos p_0, $p_1 : P(X) \to X$ *são equivalência fracas.*

(ii) Se X *é um objeto fibrante, então os morfismos* p_0, $p_1 : P(X) \to X$ *são também fibrações e, portanto, fibrações triviais.*

Demonstração. (i) Note que pela definição de p_0 e do morfismo diagonal Δ temos

$$p_0 \circ c = \pi_1 \circ p \circ c = \pi_1 \circ \Delta = \mathrm{id}_X.$$

Ora, como id_X é uma equivalência fraca, o mesmo valendo para c pela definição de objeto de caminhos, segue da propriedade 2-de-3 que p_0 é uma equivalência fraca. A demonstração de que p_1 também é uma equivalência fraca segue de um raciocínio completamente análogo.

(ii) Lembremos que em qualquer categoria, um produto por der interpretado como um pullback sobre o objeto final. Mais precisamente, se $* \in \mathsf{M}$ denota um objeto final qualquer de M, então o quadrado comutativa abaixo é um pullback.

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\pi_1} & B \\ {\scriptstyle \pi_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle !_B} \\ B & \xrightarrow[!_B]{} & * \end{array}$$

Como X é por hipótese fibrante, ou seja, o morfismo $!_X : X \to *$ é uma fibração, e como fibrações são preservadas por pullbacks de acordo com a Corolário 1.2.10, concluímos que as projeções canônicas π_1 e π_2 são fibrações também. Segue então que os morfismos $p_0 = \pi_1 \circ p$ e $p_1 = \pi_2 \circ p$ são composições de fibrações e, portanto, fibrações também de acordo com o Corolário 1.2.10 novamente. ■

Objetos de caminhos dão origem a uma noção de homotopia entre morfismos que é dual à noção de homotopia à esquerda introduzida anteriormente em termos de objetos cilindros.

1.4.10 Definição. Dois morfismos f, $g : B \to X$ em uma categoria modelo M são ditos **homotópicos à direita** se existe algum objeto de caminhos $(P(X), c, p)$ para X e um morfismo $h : B \to P(X)$ tal que $p \circ h = (f, g)$, conforme mostrado no diagrama abaixo. Neste caso, denotamos essa relação por $f \sim_r g$.

$$\begin{tikzcd} & P(X) \arrow[d, two heads, "p"] & \\ B \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "(f,g)"'] & X \times X & X \arrow[ul, "c"', "\sim"] \arrow[l, tail, "\Delta"] \end{tikzcd}$$

Veja que a definição acima recupera a definição clássica da Topologia. O mapa $h : B \to X^I$ define uma família de caminhos em X parametrizada pelos pontos do espaço B. Para cada $b \in B$, o caminho associada $h(b)$ tem $f(b)$ como ponto inicial pois

$$[h(b)](0) = p_0(h(b)) = \pi_1(p(h(b))) = \pi_1(f(b), g(b)) = f(b),$$

e analogamente, $h(b)$ tem como ponto final a imagem $g(b)$. Assim, a família de caminhos definida pela homotopia h em certo sentido "conecta" a imagem do estágio inicial f da homotopia ao estágio final g da mesma.

Nosso objetivo agora é demonstrar um resultado análogo à Proposição 1.4.5 para homotopias à direita.

1.4.11 Proposição. *Suponha que f, $g : B \to X$ sejam dois morfismos homotópicos à direita em uma categoria modelo M.*

1. *Dado um morfismo $\alpha : A \to B$, os morfismos compostos $f \circ \alpha, g \circ \alpha : A \to X$ são homotópicos à direita.*
2. *Se B é cofibrante, então a homotopia entre f e g independe do objeto de caminhos para X.*
3. *Se B é cofibrante, então dado qualquer morfismo $\beta : X \to Y$, os morfismos compostos $\beta \circ f$, $\beta \circ g : B \to Y$ são homotópicos à direita.*

Demonstração. 1. Como f e g são homotópicos à direita, existe *algum* objeto de caminhos $(P(X), c, p)$ para X juntamente com um morfismo $h : B \to P(X)$ tal que $p \circ h = (f, g)$. Afirmamos que o morfismo composto $h \circ \alpha : A \to P(X)$ define uma homotopia à direita de $f \circ \alpha$ para $g \circ \alpha$. De fato, basta para isso notarmos que

$$p \circ h \circ \alpha = (f, g) \circ \alpha = (f \circ \alpha, g \circ \alpha),$$

sendo que a última igualdade é uma consequência direta da propriedade universal que caracteriza o produto $X \times X$.

2. Considere um objeto de caminhos $(P(X), c, p)$ para X juntamente com uma homotopia à direita $h : B \to P(X)$ de f para g com relação a esse objeto de caminhos. Afirmamos inicialmente que podemos encontrar uma outra homotopia à direita entre f e g que esteja definida em um objeto de caminhos *forte* para X. Inicialmente, aplicamos o axioma de fatoração (M5) à equivalência fraca $c : X \to P(X)$ para obtermos uma cofibração trivial $i : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} P$ seguida de uma fibração $q : P \twoheadrightarrow P(X)$ tais que $c = q \circ i$, conforme mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "c", "\sim"'] \arrow[dr, tail, "i"', "\sim"] & & P(X) \\ & P \arrow[ur, two heads, "q"'] & \end{tikzcd}$$

Afirmamos que a tripla $(P, i, p \circ q)$ define um objeto de caminhos forte para X. De fato, i é uma cofibração trivial pela fatoração acima, enquanto $p \circ q$ é a composição de duas fibrações e, portanto, uma fibração também. Além disso, esses morfismos fatoram o morfismo diagonal de X já que

$$(p \circ q) \circ i = p \circ (q \circ i) = p \circ c = \Delta.$$

Tendo em mãos o objeto de caminhos forte acima, vejamos como obter uma homotopia que tome valores nele a partir da homotopia h já existente. Veja inicialmente que o problema de levantamento abaixo admite uma solução $H : B \to P$, já que $!_B : \varnothing \to B$ é uma cofibração pela hipótese de B ser cofibrante, e $q : P \to P(X)$ é uma fibração trivial pela fatoração acima e pela propriedade 2-de-3.

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r, "!_P"] \arrow[d, tail, "!_B"'] & P \arrow[d, two heads, "q", "\wr"'] \\
B \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & P(X)
\end{tikzcd}$$

Esse morfismo H é precisamente a homotopia à direita procurada, pois

$$(p \circ q) \circ H = p \circ (q \circ H) = p \circ h = (f, g).$$

Podemos assumir então sem perda de generalidade que o objeto de caminhos $(P(X), c, p)$ no qual está definida a homotopia à direita entre f e g é forte. Se (P', c', p') é outro objeto de caminhos *qualquer* para X, vejamos como construir uma homotopia à direita $h' : B \to P'$ tomando valores nesse objeto. Note primeiro que o problema de levantamento dado pelo quadrado comutativo abaixo admite uma solução ϕ, já que c é uma cofibração trivial, e p' é uma fibração.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "c'"] \arrow[d, tail, "c"', "\wr"] & P' \arrow[d, two heads, "p'"] \\
P(X) \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, dashed, "\phi"] & X \times X
\end{tikzcd}$$

Basta notar agora que a composição $\phi \circ h : B \to P'$ define a homotopia à direita desejada, pois

$$p' \circ \phi \circ h = p \circ h = (f, g).$$

3. Suponha que $(P(X), c_X, p_X)$ seja um objeto de caminhos forte para X e que $(P(Y), c_Y, p_Y)$ seja um objeto de caminhos qualquer para Y. Sendo B cofibrante, segue do item 2 que certamente existe uma homotopia de f para g em termos do objeto de caminhos $P(X)$, ou seja, um morfismo $h : B \to P(X)$ tal que $p_X \circ h = (f, g)$. A ideia é obtermos um morfismo $\phi : P(X) \to P(Y)$ que nos permita "empurrar" a homotopia h ao longo do morfismo β, e para isso é claro que vamos usar o axioma de levantamento.

Note que o quadrado abaixo é comutativo, pois

$$p_Y \circ c_Y \circ \beta = \Delta_Y \circ \beta = \beta \times \beta = (\beta \times \beta) \circ \mathrm{id}_X = (\beta \times \beta) \circ \Delta_X = (\beta \times \beta) \circ c_X \circ p_X.$$

Aplicando o axioma de levantamento (M4) obtemos então o levantamento $\phi : P(X) \to P(Y)$ conforme indicado.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "c_Y \circ \beta"] \arrow[d, tail, "c_X"', "\wr"] & P(Y) \arrow[d, two heads, "p_Y"] \\
P(X) \arrow[r, "(\beta \times \beta) \circ p_X"'] \arrow[ur, dashed, "\phi"] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que o morfismo composto $\phi \circ h : B \to P(Y)$ define a homotopia à direita desejada então $\beta \circ f$ e $\beta \circ g$. De fato, basta notar que

$$p_Y \circ \phi \circ h = (\beta \times \beta) \circ p_X \circ h = (\beta \times \beta) \circ (f, g) = (\beta \circ f, \beta \circ g). \qquad \blacksquare$$

O próximo passo no nosso estudo de homotopias em categorias de modelos é dualizarmos o Corolário 1.4.6 para obtermos um resultado análogo para homotopias à direita.

1.4.12 Corolário. *Em uma categoria de modelos* $(\mathsf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$*, se* B *é um objeto qualquer, e* X *é um objeto fibrante, então a relação de homotopia à direita* $\simeq_r$ *define uma relação de equivalência no conjunto de morfismos.*

Demonstração. Dado um morfismo $f : B \to X$ qualquer, note primeiro que o morfismo idêntico id_X é certamente homotópico à direita a si mesmo, pois se $(P(X), c, p)$ é um objeto de caminhos qualquer para X, o próprio morfismo $c : X \to P(X)$ define a homotopia à direita mencionada já que $p \circ c = \Delta = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X)$. Ora, sabendo então que $\mathrm{id}_X \simeq_r \mathrm{id}_X$ e que homotopias à direita são preservadas por composições à direita pela Proposição 1.4.11, segue que $\mathrm{id}_X \circ f \simeq_r \mathrm{id}_X \circ f$, ou seja, $f \simeq_r f$; mostrando assim a reflexividade da relação. De forma similar ao que ocorreu com homotopias à esquerda, note que essa demonstração não depende da hipótese de fibrância sobre X, ou seja, a relação de homotopia à direita é *sempre* reflexiva.

Vejamos agora a questão da simetria da relação. A estratégia é completamente análoga à que empregamos na demonstração da simetria da relação de homotopia à esquerda. Dados dois morfismos $f, g : B \to X$ e uma homotopia $h : B \to P(X)$ de f para g tomando valores em um objeto de caminhos $(P(X), c, p)$ qualquer para X, precisamos produzir um outro objeto de caminhos no qual os pontos inicial e final estejam trocados, e a estratégia para conseguirmos isso é trocarmos a ordem dos fatores do produto $B \times B$. Mais precisamente, se π_1, $\pi_2 : X \times X \to X$ denotam as projeções canônicas, consideramos o morfismo $\Sigma \coloneqq (\pi_2, \pi_1) : X \times X \to X \times X$. Note que as igualdades

$$\pi_1 \circ (\Sigma \circ \Delta) = (\pi_1 \circ \Sigma) \circ \Delta = \pi_2 \circ \Delta = \mathrm{id}_X$$

juntamente com as igualdades

$$\pi_2 \circ (\Sigma \circ \Delta) = (\pi_2 \circ \Sigma) \circ \Delta = \pi_1 \circ \Delta = \mathrm{id}_X$$

mostram que o morfismo diagonal é invariante pelo morfismo Δ, ou seja, vale a igualdade $\Sigma \circ \Delta = \Delta$. Uma aplicação similar da propriedade universal do produto mostra que o morfismo Σ satisfaz também a igualdade $\Sigma \circ \Sigma = \mathrm{id}_{X \times X}$, de onde concluímos, em particular, que Σ é um isomorfismo e portanto uma fibração trivial.

Afirmamos agora que a tripla $(P(X), c, \Sigma \circ p)$ define um objeto de caminhos para X. De fato, já sabemos que c é uma equivalência fraca, $\Sigma \circ p : P(X) \to X \times X$ é a composição de duas fibrações, logo uma fibração também, e usando as propriedades acima vemos que

$$(\Sigma \circ p) \circ c = \Sigma \circ (p \circ c) = \Sigma \circ \Delta = \Delta;$$

portanto temos uma outra fatoração do morfismo diagonal. Basta notar agora que $h : B \to P(X)$ satisfaz as igualdades

$$\pi_1 \circ (\Sigma \circ p) \circ h = (\pi_1 \circ \Sigma) \circ (p \circ h) = \pi_2 \circ (f, g) = g$$

e também

$$\pi_2 \circ (\Sigma \circ p) \circ h = (\pi_2 \circ \Sigma) \circ (p \circ h) = \pi_1 \circ (f, g) = f;$$

portanto h define uma homotopia à direita de g para f com relação ao objeto de caminhos "trocado" $(P(X), c, \Sigma \circ p)$. Veja que essa demonstração também não exige a condição de fibrância sobre X, ou seja, a relação de homotopia à direita é *sempre* simétrica.

Resta apenas mostrarmos a transitividade da relação, e aqui a condição de fibrância de X será essencial. Suponha qu tenhamos três morfismos f_1, f_2, $f_3 : B \to X$ juntamente com homotopias à direita $f_1 \simeq_r f_2$ e $f_2 \simeq_r f_3$ dadas, respectivamente, por morfismos $h_1 : B \to P(X)$ e $h_2 : B \to P'(X)$, onde $(P(X), c, p)$ e $(P'(X), c', p')$ são dois objetos de caminhos possivelmente distintos. Analogamente ao que fizemos no caso de homotopias à esquerda, precisamos de alguma forma combinar os objetos $P(X)$ e $P'(X)$ de forma a obtermos um outro objeto de caminhos onde faça sentido a concatenação das homotopias h_1 e h_2. O primeiro passo nesse sentido é formarmos o pullback P indicado abaixo,

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi'"'] & P(X) \arrow[d, "p_1"] \\ P'(X) \arrow[r, "p'_0"'] & X \end{tikzcd}$$

onde $p_1 : P(X) \to X$ e $p'_0 : P'(X) \to X$ são componentes das fibrações $p : P(X) \to X \times X$ e $p' : P'(X) \to X \times X$, respectivamente. A hipótese de fibrância de X garante que tais morfismos sejam fibrações triviais de acordo com o Lema 1.4.3, portanto os morfismos ϕ e ϕ' que aparecem no pullback acima são também fibrações triviais graças ao Corolário 1.2.10.

As igualdades $p_1 \circ c = p'_0 \circ = \mathrm{id}_X$ dão origem por meio da propriedade universal do pullback a um morfismo $\overline{c} : X \to P$ fazendo comutar o diagrama mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\overline{c}"] \arrow[drr, bend left, "c"] \arrow[ddr, bend right, "c'"'] & & \\ & P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi'"'] & P(X) \arrow[d, "p_1"] \\ & P'(X) \arrow[r, "p'_0"'] & X \end{tikzcd}$$

Note que o fato de ϕ e c serem equivalências fracas, juntamente com a igualdade $\phi \circ \overline{c} = c$ garantem que $\overline{c}$ seja uma equivalência fraca também graças à propriedade 2-de-3.

O pullback P vem equipado também com um morfismo $q : P \to X \times X$ devido por meio da propriedade universal do produto como $q \coloneqq (p_0 \circ \phi, p'_1 \circ \phi')$. Esse morfiso q define juntamente com o morfismo $\overline{c}$ obtido acima uma fatoração do morfismo diagonal de X, fato este que segue diretamente das igualdades

$$\pi_1 \circ q \circ \overline{c} = p_0 \circ \phi \circ \overline{c} = p_0 \circ c = \mathrm{id}_X$$

e também das igualdades

$$\pi_2 \circ q \circ \overline{c} = p'_1 \circ \phi' \circ \overline{c} = p'_1 \circ c' = \mathrm{id}_X.$$

As homotopias h_1 e h_2 consideradas inicialmente satisfazem as igualdades $p_1 \circ h_1 = p'_0 \circ h_2 = f_2$, logo a propriedade universal do pullback fornece então um morfismo $h : B \to P$ fazendo comutar o diagrama mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "h_1"] \arrow[ddr, bend right, "h_2"'] & & \\ & P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi'"'] & P(X) \arrow[d, "p_1"] \\ & P'(X) \arrow[r, "p'_0"'] & X \end{tikzcd}$$

Afirmamos que esse morfismo h satisfaz a igualdade $q \circ h = (f_1, f_3)$. De fato, por um lado temos

$$\pi_1 \circ q \circ h = p_0 \circ \phi \circ h = p_0 \circ h_1 = f_1,$$

enquanto por outro temos

$$\pi_2 \circ q \circ h = p_1' \circ \phi' \circ h = p_1' \circ h_2 = f_3;$$

portanto a igualdade desejada segue da propriedade universal do produto.

Infelizmente, embora o morfismo h satisfaça a igualdade acima, ele *não* define uma homotopia à direita de f_1 para f_3 pois a tripla $(P, \overline{c}, q)$ *não* necessariamente define um objeto de caminhos para X já que q pode não ser uma fibração. Felizmente podemos corrigir isso facilmente como no caso da homotopia à esquerda. Usando o axioma de fatoração podemos reescrever $q : P \to X$ como uma cofibração trivial $i : P \to \widetilde{P}$ seguida de uma fibração $\widetilde{q} : \widetilde{P} \to X \times X$ conforme indicado abaixo.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, tail, "i"', "\sim"] & & X \times X \\
& \widetilde{P} \arrow[ur, two heads, "\widetilde{p}"'] &
\end{tikzcd}$$

A tripla $(\widetilde{P}, i \circ \overline{c}, \widetilde{q})$ sim define um objeto de caminhos para X. De fato, o morfismo $i \circ \overline{c} : X \to \widetilde{P}$ é a composição de duas equivalências fracas e, portanto, uma equivalência fraca também, $\widetilde{q} : \widetilde{P} \to X \times X$ é uma fibração por construção; e temos também a igualdade

$$\widetilde{q} \circ (i \circ \overline{c}) = (\widetilde{q} \circ i) \circ \overline{c} = q \circ \overline{c} = \Delta.$$

Notamos enfim que o morfismo composto $i \circ h : B \to \widetilde{P}$ define a homotopia à direita de f_1 para f_3 desejada como mostram as igualdades

$$\widetilde{q} \circ (i \circ h) = (\widetilde{q} \circ i) \circ h = q \circ h = (f_1, f_3). \qquad \blacksquare$$

Como no caso da relação de homotopia à esquerda, se Y é um objeto fibrante, então para qualquer outro objeto X podemos formar o conjunto quociente

$$[X, Y]_r \coloneqq \mathsf{M}(X, Y)/ \simeq_r$$

cujos elementos são chamados de **classes de homotopia à direita** de morfismos. Dado um morfismo $f : X \to Y$, denotamos por $[f]_r$ sua imagem no conjunto quociente $[f]_r$.

Analogamente ao que tínhamos no caso da relação de homotopia à esquerda, se $\alpha : W \to X$ é um morfismo *qualquer*, a compatibilidade de homotopias à direita com pullbacks provada na Proposição 1.4.11 nos permite fatorar a função $\mathsf{M}(\alpha, Y) : \mathsf{M}(X, Y) \to \mathsf{M}(W, Y)$ de pullback (pré-composição) ao longo de α pelas projeções canônicas para obtermos uma única função induzida $[\alpha, Y]_r : [X, Y]_r \to [W, Y]_r$ fazendo comutar o quadrado abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{M}(W, Y) \arrow[d, "\pi_{W,Y}"'] & \mathsf{M}(X, Y) \arrow[l, "\mathsf{M}(\alpha, Y)"'] \arrow[d, "\pi_{X,Y}"] \\
{[W, Y]_r} & {[X, Y]_r} \arrow[l, dashed, "{[\alpha, Y]_r}"]
\end{tikzcd}$$

Explicitamente, dada uma classe de homotopia à direita $[f]_r \in [X, Y]_r$, pela comutatividade acima temos

$$[\alpha, Y]_r([f]_r) = [f \circ \alpha]_r.$$

Encerraremos essa seção comparando as noções de homotopias à esquerda e à direita e procurando entender quando as duas coincidem ou não. Em suma, o resultado abaixo diz que essas duas noções sempre coincidem quando o domínio ou o codomínio são objetos bons do ponto de vista homotópico, ou seja, satisfazem condições de cofibrância ou fibrância.

1.4.13 Proposição. *Seja* $(\mathsf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ *uma categoria de modelos.*

1. *Se B é um objeto cofibrante, X é um objeto qualquer, e $f, g : B \to X$ são dois morfismos homotópicos à esquerda, então f e g são também homotópicos à direita.*

2. *Se B é um objeto qualquer, X é um objeto fibrante, e $f, g : B \to X$ são dois morfismos homotópicos à direita, então f e g são também homotópicos à esquerda.*

Demonstração. 1. Sejam $(\mathrm{Cyl}(B), i, \varepsilon)$ um objeto cilindro qualquer para B e $h : \mathrm{Cyl}(B) \to X$ uma homotopia à esquerda de f para g. A cofibrância de B garante que $i_0 : B \to \mathrm{Cyl}(B)$ seja uma cofibração trivial pelo Lema 1.4.3. Veja que o quadrado mostrado abaixo é comutativo como mostra a sequência de igualdades

$$(f \circ \varepsilon, h) \circ i_0 = (f \circ \varepsilon \circ i_0, h \circ i_0) = (f, f) = \Delta \circ f = p \circ c \circ f.$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "c \circ f"] \arrow[d, tail, "i_0"', "\wr"] & P(X) \arrow[d, two heads, "p"] \\
\mathrm{Cyl}(B) \arrow[r, "(f \circ \varepsilon, h)"'] \arrow[ur, dashed, "\theta"] & X \times X,
\end{tikzcd}$$

O axioma de levantamento garante então a existência do morfismo diagonal $\theta : \mathrm{Cyl}(B) \to P(X)$ fazendo comutar o diagrama todo como mostrado acima.

Vamos tentar entender a função do morfismo θ. Tal morfismo transforma pontos do objeto cilindro $\mathrm{Cyl}(B)$ em pontos do objeto $P(X)$, que pensamos intuitivamnete como caminhos em X. A igualdade $p \circ \theta = (f \circ \varepsilon, h)$ diz que que o ponto inicial desse caminho é determinada por $f \circ \varepsilon$, enquanto o ponto final é determinado pelo valor da própria homotopia h. Ora, como nossa homotopia termina em g, a ideia é que se compormos θ com a cofibração $i_1 : B \overset{\sim}{\rightarrowtail} \mathrm{Cyl}(B)$ que determina a parte superior do cilindro, então teremos um caminho de f até g. De fato, o morfismo composto $H \coloneqq \theta \circ i_1$ satisfaz

$$p \circ H = p \circ \theta \circ i_1 = (f \circ \varepsilon, h) \circ i_1 = (f \circ \varepsilon \circ i_1, h \circ i_1) = (f, g),$$

definindo, portanto, uma homotopia à direita de f para g.

2. A demonstração desse segundo item é simplesmente uma dualização da demonstração do primeiro. Considere $h : B \to P(X)$ uma homotopia à direita de f para g. Aplicando o Lema 1.4.9 concluímos que a projeção $p_0 : P(X) \to X$ é uma fibração trivial. A sequência de igualdades

$$p_0 \circ \langle c \circ f, h \rangle = \langle p_0 \circ c \circ f, p_0 \circ h \rangle = \langle f, f \rangle = f \circ \nabla = f \circ \varepsilon \circ i$$

mostra que o quadrado abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
B \sqcup B \arrow[r, "\langle c \circ f, h \rangle"] \arrow[d, tail, "i"'] & P(X) \arrow[d, two heads, "\wr"', "p_0"] \\
\mathrm{Cyl}(B) \arrow[r, "f \circ \varepsilon"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & X
\end{tikzcd}$$

Aplicando o axioma de levantamento obtemos o mapa diagonal $\psi : \mathrm{Cyl}(B) \to P(X)$ também indicado acima e que faz o diagrama todo comutar ainda. Basta notar então que o morfismo composto $H \coloneqq p_1 \circ \psi$ satisfaz as igualdades

$$H \circ i = p_1 \circ \psi \circ i = p_1 \circ \langle c \circ f, h\rangle = \langle p_1 \circ c \circ f, p_1 \circ h\rangle = \langle f, g\rangle$$

e define, portanto, uma homotopia à esquerda de f para g. ■

1.4.14 Definição. Dois morfismos f, $g : B \to X$ em uma categoria de modelos M são ditos **homotópicos** quando são simultaneamente homotópicos à esquerda e à direita.

Tendo a definição acima em mãos, podemos reformular o enunciado da Proposição 1.4.13 da seguinte forma: quando o domínio é cofibrante, então dois morfismos homotópicos à esquerda são também homotópicos; e quando o codomínio é fibrante, dois morfismos homotópicos à direita são também homotópicos. O caso que nos será mais útil e que deixamos registrados na forma do próximo corolário é aquele onde as condições de cofibrância e fibrância são ambas satisfeitas, de forma que as várias noções de homotopia vistas até agora coincidam.

1.4.15 Corolário. *Em uma categoria de modelos, dados um objeto cofibrante B, um objeto fibrante X, e dois morfismos f $g : B \to X$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f e g são homotópicos à esquerda;*
2. *f e g são homotópicos à direita;*
3. *f e g são homotópicos.*

Dados então um objeto cofibrante X e um objeto fibrante Y em uma categoria de modelos M, sabemos pelo Corolário 1.4.6, ou pelo Corolário 1.4.12 que a relação de homotopia $\simeq$ entre morfismos define uma relação de equivalência no conjunto de morfismos $\mathsf{M}(X, Y)$, de forma que podemos então considerar o conjunto quociente

$$[X, Y] \coloneqq \mathsf{M}(X, Y)/\simeq \tag{1.20}$$

cujos elementos são chamados de **classes de homotopia** de morfismos de X para Y. Veremos na próxima seção que podemos usar estes conjuntos de classes de homotopia de morfismos para construirmos um modelo (a menos de equivalência) explícito para a localização de M na classe das equivalências fracas imitando a construção da categoria homotópica usual vinda da Teoria de Homotopia clássica.

1.5 Localizações

Nessa seção discutimos inicialmente a noção de localização de uma categoria C em uma classe qualquer de morfismos, e em seguida discutimos como as estrutura de uma categoria de modelos nos permite de certa forma simplificar o processo de localização na classe das equivalências fracas, simplificação esta que nos permitirá mais adiante construir modelos muito mais manejáveis para essa localização em termos de classes de homotopia.

Em geral, a única forma possível de compararmos dois morfismos em uma categoria C qualquer é por meio de igualdades. Note, entretanto, que a situação é mais sútil para morfismos na categoria de categorias Cat, já que dois funtores podem estar relacionados por uma igualdade ou também por um isomorfismo natural. Isso significa que construções universais envolvendo *categorias em si* podem ser formuladas de duas formas: uma versão *estrita* usando apenas igualdades entre funtores, e uma versão *fraca* usando isomorfismos naturais entre funtores. A primeira definição de localização que daremos, a qual aparece por exemplo nas referências [HM22, Definição 7.30] e [nLa23], é a versão fraca. Essa é a versão que realmente aparece na teoria de categoria de modelos, já que a construção de uma localização na classe de equivalências fracas por meio das classes de homotopia de morfismos entre objetos bifibrantes satisfaz apenas essa versão fraca da definição. Uma boa discussão comparando estas duas possíveis definições e também outras existentes na literatura também pode ser encontrada em [Shu].

1.5.1 Definição. Sejam C uma categoria e $\mathcal{W}\mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ uma classe qualquer de morfismos. Uma **localização fraca de C em $\mathcal{W}$** é um par (L, γ), onde L é uma categoria e $\gamma : \mathsf{C} \to \mathsf{L}$ é um funtor, satisfazendo as seguintes condições:

(i) O funtor γ transforma os morfismos de $\mathcal{W}$ em isomorfismos de L.

(ii) Dada uma outra categoria D qualquer, o funtor de pré-composição com γ define uma *equivalência* de categorias

$$\mathrm{Fun}(\gamma, \mathsf{D}) : \mathrm{Fun}(\mathsf{L}, \mathsf{D}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Fun}_{\mathcal{W}}(\mathsf{C}, \mathsf{D}),$$

onde $\mathrm{Fun}_{\mathcal{W}}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ denota a subcategoria plena da categoria de funtores $\mathrm{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ gerada por aqueles funtores que transformam morfismos de $\mathcal{W}$ em isomorfismos de D.

O resultado abaixo mostra que a definição acima pode ser reformulada de forma a ficar mais similar a outras definições feitas por meio de propriedades universais.

1.5.2 Proposição. *Sejam C uma categoria e $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ uma classe de morfismos. Dada uma categoria L e um funtor $\gamma : \mathsf{C} \to \mathsf{L}$ que transforma os morfismos de $\mathcal{W}$ em isomorfismos de L, o par (L, γ) define uma localização fraca de C em $\mathcal{W}$ se, e somente se, as duas condições abaixo são satisfeitas para qualquer categoria D:*

1. *Se $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ é um funtor que transforma morfismos de $\mathcal{W}$ em isomorfismos de D, então existe um funtor $\overline{F} : \mathsf{L} \to \mathsf{D}$ e um isomorfismo natural de funtores $\overline{F} \circ \gamma \cong F$.*

2. *Dados dois funtores G_1, $G_2 : \mathsf{L} \to \mathsf{D}$ quaisquer, a função*

$$\mathrm{Fun}(\gamma, \mathsf{D})_{G_1, G_2} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathsf{L}, \mathsf{D})}(G_1, G_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}_{\mathcal{W}}(\mathsf{C}, \mathsf{D})}(G_1 \circ \gamma, G_2 \circ \gamma)$$

associada ao funtor de pré-composição $\mathrm{Fun}(\gamma, \mathsf{D}) : \mathrm{Fun}(\mathsf{L}, \mathsf{D}) \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{W}}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ é uma bijeção.

Demonstração. Lembremos que um funtor $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ define uma equivalência de categorias se, e somente se, ele é essencialmente sobrejetivo, pleno e fiel, ou seja, se ele satisfaz as seguintes condições:

1. Dado um objeto $Y \in \mathsf{D}$ qualquer, existe um objeto $X \in \mathsf{C}$ e um isomorfismo $F(X) \cong Y$.

2. Dados dois objetos X_1, $X_2 \in \mathsf{C}$ quaisquer, a função

$$F_{X_1, X_2} : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(X_1, X_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(X_1), F(X_2))$$

associado a funtor $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ é uma bijeção.

O resultado do enunciado segue então dessa caracterização de equivalência aplicada ao funtor $\mathrm{Fun}(\gamma, \mathsf{D}) : \mathrm{Fun}(\mathsf{L}, \mathsf{D}) \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{W}}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$. ∎

Apesar da formulação de localização acima ser mais similar a outras propriedades unviversais com as quias estamos acostumados, existe uma diferença sútil mas importante: as propriedades universais usuais estabelecem a existência sob certas condições de um morfismo *único* satisfazendo certas *igualdades*. Já a propriedade universal da Proposição 1.5.2 que caracteriza a localização fraca estabelece a existência sob certas hipóteses de *algum* funtor satisfazendo uma condição de *isomorfismo natural* e não de igualdade. Veremos agora que, apesar de não termos a unicidade na caracterização acima, temos uma unicidade a menos de isomorfismos naturais de funtores.

1.5.3 Proposição. *Sejam* C *e* D *categorias,* $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ *uma classe qualquer de morfismos, e* $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ *um funtor que inverte os morfismos de* $\mathcal{W}$*. Se* (L, γ) *é uma localização fraca de* C *em* $\mathcal{W}$*, e* $\overline{F}, \widehat{F} : \mathsf{L} \to \mathsf{D}$ *são dois funtores tais que* $\overline{F} \circ \gamma \cong F$ *e* $\widehat{F} \circ \gamma \cong F$*, então existe também um isomorfismo natural* $\overline{F} \cong \widehat{F}$*.*

O resultado acima segue facilmente do seguinte resultado mais geral a respeito de equivalências de categorias.

1.5.4 Lema. *Suponha que* $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ *seja uma equivalência de categorias. Se* $X, Y \in \mathsf{C}$ *são dois objetos tais que* $F(X) \cong F(Y)$*, então existe também um isomorfismo* $X \cong Y$*.*

Demonstração. Sejam $G : \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ o funtor quase-inverso a F e $\theta : G \circ F \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{C}}$ um isomorfismo natural de funtores. Existe por hipótese um isomorfiso $\alpha : F(X) \to F(Y)$, e aplicando G obtemos então um isomorfismo $G(\alpha) : G(F(X)) \to G(F(Y))$. Considerando então os isomorfismos componentes $\theta_X : G(F(X)) \to X$ e $\theta_Y : G(F(Y)) \to Y$, a composição

$$\theta_Y \circ G(\alpha) \circ \theta_X^{-1} : X \to Y$$

define o isomorfismo desejado. ■

Demonstração da Proposição 1.5.3. Sabemos da definição de localização fraca que o funtor de pré-composição

$$\mathrm{Fun}(\gamma, \mathsf{D}) : \mathrm{Fun}(\mathsf{L}, \mathsf{D}) \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{W}}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$$

é uma equivalência de categorias, mas pelas hipóteses do enunciado temos

$$\mathrm{Fun}(\gamma, \mathsf{D})(\overline{F}) = \overline{F} \circ \gamma \cong F \cong \widehat{F} \circ \gamma = \mathrm{Fun}(\gamma, \mathsf{D})(\widehat{F});$$

logo o resultado segue diretamente do Lema 1.5.4 aplicado à equivalência $\mathrm{Fun}(\gamma, \mathsf{D})$. ■

Uma consequência importante é que, embora duas localizações fracas possam não ser isomorfas, elas serão sempre equivalentes. Isso pode parecer mais fraco do que gostaríamos, mas a experiência mostra que em geral a noção de equivalência entre categorias é mais razoável do que a noção de isomorfismo entre categorias.

1.5.5 Corolário. *Dada uma categoria* C *e uma classe de morfismos* $\mathcal{W} \subseteq \mathsf{C}$*, quaisquer duas localizações de* C *em* $\mathcal{W}$ *são equivalentes.*

Demonstração. Suponha que (L, γ) e (J, δ) sejam duas localizações de C em $\mathcal{W}$. Como $\delta : \mathsf{C} \to \mathsf{J}$ inverte morfismos de $\mathcal{W}$, aplicando a Proposição 1.5.2 ao par (L, γ) obtemos um funtor $\overline{\delta} : \mathsf{L} \to \mathsf{J}$ juntamente com um isomorfismo natural de funtores $\overline{\delta} \circ \gamma \cong \delta$. Ora, como $\gamma : \mathsf{C} \to \mathsf{L}$ também inverte morfismos de $\mathcal{W}$, aplicado o mesmo resultado agora ao par (J, δ) obtemos um funtor $\overline{\gamma} : \mathsf{J} \to \mathsf{L}$ e um isomorfismo natural de funtores $\delta \circ \overline{\gamma} \cong \gamma$.

Afirmamos que $\overline{\delta}$ e $\overline{\gamma}$ são funtores quase-inversos, ou seja, que existem isomorfismos naturais de funtores $\overline{\gamma} \circ \overline{\delta} \cong \mathrm{id}_{\mathsf{L}}$ e $\overline{\delta} \circ \overline{\gamma} \cong \mathrm{id}_{\mathsf{J}}$. No primeiro caso, veja que, como o funtor idêntico id_{L} satisfaz $\mathrm{id}_{\mathsf{L}} \circ \gamma = \gamma$, segue da Proposição 1.5.3 que, se $G : \mathsf{L} \to \mathsf{L}$ é um funtor tal que $G \circ \gamma \cong \gamma$, então necessariamente devemos ter também um isomorfismo natural $G \cong \mathrm{id}_{\mathsf{L}}$. Ora, basta notar agora que

$$\overline{\gamma} \circ \overline{\delta} \circ \gamma \cong \overline{\gamma} \circ \delta \cong \gamma,$$

de onde concluímos que $\overline{\gamma} \circ \overline{\delta} \cong \mathrm{id}_{\mathsf{L}}$. Analogamente, o funtor id_{J} é o único a menos de isomorfismo do seu tipo que fatora δ, mas temos os isomorfismos naturais

$$\overline{\delta} \circ \overline{\gamma} \circ \delta \cong \overline{\delta} \circ \gamma \cong \delta,$$

portanto temos também o isomorfismo natural $\overline{\delta} \circ \overline{\gamma} \cong \mathrm{id}_{\mathsf{J}}$. ■

Tendo em vista essa unicidade a menos de equivalências, é comum denotarmos qualquer localização de C em $\mathcal{W}$ por $\mathsf{C}[\mathcal{W}^{-1}]$.

Tendo estudado algumas propriedade básicas das localizações fracas, a próxima pergunta natural é quanto a sua existência. Será que podemos sempre construir uma localização de uma categoria C em uma classe de morfismos $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$? A resposta é que sim *a menos de tecnicalidades conjuntistas*. Usando a construção da categoria livre gerada por um conjunto de setas, odemos construir no braço uma localização fraca, mas a categoria obtida dessa forma não é localmente pequena, o que nos força então a trabalhar com algum universo de Grothendieck grande o suficiente para que a construção faça sentido. Felizmente, no caso de uma categoria de modelos $(\mathsf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$, a estrutura adicional dada pelas cofibrações e fibrações nos permite construir um *modelo alternativo* para uma localização fraca $\mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}]$ nas equivalências fracas. Essa construção alternativa depende crucialmente do resultado abaixo, o qual diz que podemos obter uma localização fraca para uma categoria de modelos trabalhando apenas com subcategorias de objetos bem comportados.

1.5.6 Teorema. *Seja $(\mathsf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ uma categoria de modelos. Denote por M_c (respectivamente M_f e M_{cf}) a subcategoria plena gerada pelos objetos cofibrantes (respectivamente fibrantes e bifibrantes), e denote por $\mathcal{W}_c$ (respectivamente $\mathcal{W}_f$ e $\mathcal{W}_{cf}$) a classe de morfismos dada pela interseção $\mathcal{W} \cap \mathrm{Mor}(\mathsf{M}_c)$ (respectivamente $\mathcal{W} \cap \mathrm{Mor}(\mathsf{M}_f)$ e $\mathcal{W} \cap \mathrm{Mor}(\mathsf{M}_{cf})$). As seguintes categorias são todas equivalentes:*

(i) $\mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}]$;

(ii) $\mathsf{M}_c[\mathcal{W}_c^{-1}]$;

(iii) $\mathsf{M}_f[\mathcal{W}_f^{-1}]$;

(iv) $\mathsf{M}_{cf}[\mathcal{W}_{cf}^{-1}]$.

Demonstração. Vejamos primeiro a equivalência entre as localizações fracas $\mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}]$ e $\mathsf{M}_c[\mathcal{W}_c^{-1}]$. Se $\gamma : \mathsf{M} \to \mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}]$ e $\gamma_c : \mathsf{M}_c \to \mathsf{M}[\mathcal{W}_c^{-1}]$ são so funtores de localização, e $i : \mathsf{M}_c \to \mathsf{M}$ denota o funtor de inclusão, note que o funtor composto

$$\gamma \circ i : \mathsf{M}_c \to \mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}]$$

inverte os morfismos de $\mathcal{W}_c$, pois γ inverte os morfismos de $\mathcal{W}$, e $\mathcal{W}_c \subseteq \mathcal{W}$. Segue da propriedade universal da localização fraca que existe um funtor induzido $\overline{i} : \mathsf{M}_c[\mathcal{W}_c^{-1}] \to \mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}]$ juntamente com um isomorfismo natural $\overline{i} \circ \gamma_c \cong \gamma \circ i$.

Vejamos agora como construir um funtor no sentido contrário $\mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathsf{M}_c[\mathcal{W}_c^{-1}]$. Seja $\mathrm{subcof} : \mathsf{M} \to \mathrm{Arr}(\mathsf{M})$ o funtor de substituição cofibrante como descrito na Observação 1.3.7. Lembremos que tal funtor associa a cada objeto $X \in \mathsf{M}$ uma fibração trivial $p_X : X_c \to X$, onde

X_c é um objeto cofibrante, e associa a um morfismo $f : X \to Y$ um morfismo correspondente $f_c : X_c \to Y_c$ entre as substituições cofibrantes que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} X_c \arrow[r, "f_c"] \arrow[d, two heads, "p_X"', "\wr"] & Y_c \arrow[d, two heads, "p_Y", "\wr"'] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Afirmamos que o funtor composto

$$\gamma_c \circ \mathrm{dom} \circ \mathrm{subcof} : \mathsf{M} \to \mathsf{M}_c[\mathcal{W}_c^{-1}]$$

inverte os morfismos de $\mathcal{W}$. De fato, note que, se $f : X \to Y$ é uma equivalência fraca, então o mesmo vale para a composição $f \circ p_X$, a qual é igual à composição $p_Y \circ f_c$; mas sendo p_Y uma equivalência fraca também, segue da propriedade 2-de-3 que f_c é uma equivalência fraca, portanto $\gamma_c(f_c)$ é um isomorfismo. Segue da propriedade universal da localização fraca que existe um morfismo induzido $\varphi : \mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathsf{M}_c[\mathcal{W}_c^{-1}]$ juntamente com um isomorfismo natural de funtores $\varphi \circ \gamma \cong \gamma_c \circ \mathrm{dom} \circ \mathrm{subcof}$.

Nosso objetivo agora é mostrar que os funtores $\bar{i}$ e φ são quase-inversos. Vimos na Observação 1.3.7 que a coleção $(p_X)_{X \in \mathsf{M}}$ define uma transformação natural $i \circ \mathrm{dom} \circ \mathrm{subcof} \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{M}}$. Como $\gamma(p_X)$ é um isomorfismo para todo $X \in \mathsf{M}$, segue que a coleção $(\gamma(X))_{X \in \mathsf{M}}$ define um *isomorfismo* natural de funtores

$$\gamma \circ i \circ \mathrm{dom} \circ \mathrm{subcof} \cong \gamma,$$

mas note que pelas propriedades caracterizando os vários funtores acima temos também uma sequência de isomorfismos naturais

$$\gamma \circ i \circ \mathrm{dom} \circ \mathrm{subcof} \cong \bar{i} \circ \gamma_c \circ \mathrm{dom} \circ \mathrm{subcof} \cong \bar{i} \circ \varphi \circ \gamma.$$

Combinando esses vários isomorfismos naturais obtemos o isomorfismo $\bar{i} \circ \varphi \circ \gamma \cong \gamma$, de onde concluímos que $\bar{i} \circ \varphi \cong \mathrm{id}_{\mathsf{M}}$, já que o funtor de pré-composição

$$\mathrm{Fun}(\gamma, \mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}]) : \mathrm{Fun}(\mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}], \mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}]) \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{W}}(\mathsf{M}, \mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}])$$

define uma equivalência de categorias.

O outro isomorfismo é obtido de forma similar. A coleção $(p_X)_{X \in \mathsf{M}_c}$ define uma transformação natural $\mathrm{dom} \circ \mathrm{subcof} \circ i \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathsf{M}_c}$, mas $\gamma_c(p_X)$ é um isomorfismo para todo $X \in \mathsf{M}_c$, portanto $(\gamma_c(p_X))_{X \in \mathsf{M}_c}$ define um *isomorfismo* natural $\gamma_c \circ \mathrm{dom} \circ \mathrm{subcof} \circ i \cong \gamma_c$. Basta ver agora que temos os isomorfismos naturais

$$\gamma_c \circ \mathrm{dom} \circ \mathrm{subcof} \circ i \cong \varphi \circ \circ i \cong \varphi \circ \bar{i} \circ \gamma_c,$$

logo $\varphi \circ \bar{i} \circ \gamma_c \cong \gamma_c$, o que implica o isomorfismo desejado $\varphi \circ \bar{i} \cong \mathrm{id}_{\mathsf{M}_c}$ já que o funtor

$$\mathrm{Fun}(\gamma_c, \mathsf{M}_c[\mathcal{W}_c^{-1}]) : \mathrm{Fun}(\mathsf{M}_c[\mathcal{W}_c^{-1}], \mathsf{M}_c[\mathcal{W}_c^{-1}]) \to \mathrm{Fun}_{\mathcal{W}_c}(\mathsf{M}_c, \mathsf{M}_c[\mathcal{W}_c^{-1}])$$

define uma equivalência de categorias.

O argumento para mostrarmos a equivalência $\mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}] \cong \mathsf{M}_f[\mathcal{W}_f^{-1}]$ é análogo. Por um lado, a composição do funtor de inclusão $i : \mathsf{M}_f \to \mathsf{M}$ com o funtor de localização $\gamma : \mathsf{M} \to \mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}]$ inverte os morfismos de $\mathcal{W}_f$, portanto nesse caso obtemos também um funtor $\bar{i} : \mathsf{M}_f[\mathcal{W}_f^{-1}] \to \mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}]$

juntamente com um isomorfismo natural $\overline{i} \circ \gamma_f \cong \gamma \circ i$. A fim de obtermos um funtor no outro sentido, consideramos inicial o funtor de substituição fibrante

$$\mathrm{subfib} : \mathsf{M} \to \mathrm{Arr}(\mathsf{M})$$

discutido também na Observação 1.3.7, e verificamos que o funtor composto

$$\gamma_f \circ \mathrm{cod} \circ \mathrm{subfib} : \mathsf{M} \to \mathsf{M}_f[\mathcal{W}_f^{-1}]$$

inverte os morfismos de $\mathcal{W}$, induzindo portanto um funtor $\psi : \mathsf{M}[\mathcal{W}^{-1}] \to \mathsf{M}_f[\mathcal{W}_f^{-1}]$ juntamente com um isomorfismo natural $\psi \circ \gamma \cong \gamma_f \circ \mathrm{cod} \circ \mathrm{subfib}$. A demonstração de que os funtores $\overline{i}$ e ψ são quase-inversos é análoga ao que fizemos no caso anterior.

Mostramos por fim a existência de uma equivalência $\mathsf{M}_{cf}[\mathcal{W}_{cf}^{-1}] \cong \mathsf{M}_c[\mathcal{W}_c^{-1}]$. Se $\lambda : \mathsf{M}_{cf} \to \mathsf{M}_c$ denota o funtor de inclusão, como nos outros casos temos que a composição

$$\gamma_c \circ \lambda : \mathsf{M}_{cf} \to \mathsf{M}_c[\mathcal{W}_c^{-1}]$$

inverte os morfismos de $\mathcal{W}_{cf}$, portanto a propriedade universal da localização fraca dá origem a um funtor $\overline{\lambda} : \mathsf{M}_{cf}[\mathcal{W}_{cf}^{-1}] \to \mathsf{M}_c[\mathcal{W}_c^{-1}]$ juntamente com um isomorfismo natural $\gamma_c \circ \lambda \cong \overline{\lambda} \circ \gamma_{cf}$. Denote por $\mathrm{subfib}' : \mathsf{M}_c \to \mathrm{Arr}(\mathsf{M})$ a restrição do funtor de substituição fibrante à categoria M_c gerada pelos objetos cofibrantes. Tal funtor associa a cada objeto cofibrante $X \in \mathsf{M}_c$ uma *cofibração trivial* $j_X : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} X_f$, onde X_f é um objeto fibrante. Note que, sendo X cofibrante e j_X uma cofibração, segue do Lema 1.3.3 que X_f é ainda cofibrante, sendo portanto um objeto *bifibrante*. Dessa forma, a composição $\mathrm{cod} \circ \mathrm{subfib}'$ pode ser vista como um funtor do tipo $\mathsf{M}_c \to \mathsf{M}_{cf}$, e podemos então mostrar que a composição $\gamma_{cf} \circ \mathrm{cod} \circ \mathrm{subfib}' : \mathsf{M}_c \to \mathsf{M}_{cf}[\mathcal{W}_{cf}^{-1}]$ inverte morfismos de $\mathcal{W}_c$, dando origem portanto a um funtor induzido $\theta : \mathsf{M}_c[\mathcal{W}_c^{1}] \to \mathsf{M}_{cf}[\mathcal{W}_{cf}^{-1}]$ juntamente com um isomorfismo natural $\theta \circ \gamma_c \cong \gamma_{cf} \circ \mathrm{cod} \circ \mathrm{subfib}'$. A demonstração de que os funtores $\overline{\lambda}$ e θ são quase-inversos segue, de forma similar aos casos anteriores, das propriedades universais das localizações fracas envolvidas e também do fato de que as coleções de morfismos $(\gamma_c(j_X))_{X \in \mathsf{M}_c}$ e $(\gamma_{cf}(j_X))_{X \in \mathsf{M}_{cf}}$ definem isomorfismos naturais $\gamma \cong \gamma \circ \lambda \circ \mathrm{cod} \circ \mathrm{subfib}'$ e $\gamma_{cf} \cong \gamma_{cf} \circ \mathrm{cod} \circ \mathrm{subfib}' \circ \lambda$, respectivamente. ■

1.6 A categoria homotópica

Nessa seção utilizamos as ferramentas homotópicas desenvolvidas na seção anterior para descrevermos uma construção explícita da localização de uma categoria de modelos na sua classe de equivalências fracas. O arcabouço técnico que sustenta tal construção é uma versão do celebrado Teorema de Whitehead válido para categorias de modelos que relaciona equivalências fracas e equivalências homotópicas.

1.6.1 Lema (Levantamentos a menos de homotopia)**.** *Em uma categoria de modelos* M*, suponha que* $p : X \twoheadrightarrow Y$ *seja uma fibração,* B *seja um objeto cofibrante, e* $f : B \to Y$ *seja um morfismo qualquer. Se existe um morfismo* $f' : B \to X$ *tal que a composição* $p \circ f'$ *seja homotópica à esquerda a* f*, então existe também um morfismo* $\widetilde{f} : B \to X$ *satisfazendo a igualdade* $p \circ \widetilde{f} = f$.

Demonstração. Seja $H : \mathrm{Cyl}(B) \to Y$ uma homotopia à esquerda de $p \circ f'$ para f, e considere o quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, tail, "i_0"', "\wr"] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ \mathrm{Cyl}(B) \arrow[r, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

Veja que o fato de i_0 ser uma cofibração trivial segue da hipótese de cofibrância de B e do Lema 1.4.3. Aplicando o axioma de levantamento obtemos um morfismo $\widetilde{H} : \mathrm{Cyl}(B) \to X$ conforme indicado no diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, tail, "i_0"', "\wr"] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ \mathrm{Cyl}(B) \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & Y \end{tikzcd}$$

Note então que $\widetilde{f} \coloneqq H \circ i_1 : B \to X$ é o morfismo procurado pois

$$p \circ \widetilde{f} = p \circ (\widetilde{H} \circ i_1) = (p \circ \widetilde{H}) \circ i_1 = H \circ i_1 = f. \qquad \blacksquare$$

1.6.2 Lema (Extensão a menos de homotopia)**.** *Em uma categoria de modelos* M, *suponha que* $i : A \rightarrowtail B$ *seja uma cofibração,* X *seja um objeto fibrante, e* $f : A \to X$ *seja um morfismo qualquer. Se existe um morfismo* $f' : B \to X$ *tal que* $f' \circ i \simeq_r f$, *então existe também um morfismo* $\widetilde{f} : B \to X$ *tal que* $\widetilde{f} \circ i = f$.

Demonstração. Seja $h : A \to P(X)$ uma homotopia à direita de $f' \circ i$ para f. Sabemos do Lema 1.4.9 que o morfismo $p_0 : P(X) \to X$ é uma fibração trivial, e aplicando então o axioma de levantamento obtemos o morfismo $H : B \to P(X)$ mostrado no diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, tail, "i"'] & P(X) \arrow[d, two heads, "p_0", "\wr"'] \\ B \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & X \end{tikzcd}$$

Basta notar agora que $\widetilde{f} \coloneqq p_1 \circ H$ é o morfismo procurado pois temos a sequência de igualdades

$$\widetilde{f} \circ i = (p_1 \circ H) \circ i = p_1 \circ (H \circ i) = p_1 \circ h = f. \qquad \blacksquare$$

Vimos na seção anterior que, se B é um objeto cofibrante, então qualquer morfismo $\beta : X \to Y$ dá origem a uma função $[B, \beta]_\ell : [B, X]_\ell \to [B, Y]_\ell$. Inicialmente estudamos condições suficientes para que a função de pushforward

$$[B, p]_\ell : [B, X]_\ell \to [B, Y]_\ell$$

nas classes de homotopia (possivelmente à esquerda apenas) seja uma bijeção. A demonstração que apresentamos aqui é de certa forma uma combinação das demonstrações apresentadas em [HM22, Proposição 7.25] e em [Hov07, Proposição 1.2.5]. Um ponto interessante da demonstração apresentada na segunda referência é que elas dá a oportunidade de apresentar o famigerado *Lema de Brown.* Inicialmente provamos uma versão mais simples deste resultado que é usada para provar a versão usual.

1.6.3 Proposição (Lema de Fatoração)**.** *Seja* $f : X \to Y$ *uma equivalência fraca entre objetos fibrantes de uma categoria de modelos. Então* f *pode ser fatorada como uma cofibração trivial* $i : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} Z$ *seguida de uma fibração trivial* $p : Z \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Y$, *e além disso existe também uma fibração trivial* $q : Z \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ *tal que* $q \circ i = \mathrm{id}_X$.

Demonstração. Podemos fatorar o morfismo induzido $(\mathrm{id}_X, f) : X \to X \times Y$ como uma cofibração trivial $i : X \overset{\sim}{\to} Z$ seguida de uma fibração $\theta : Z \overset{\sim}{\to} X \times Y$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "(\mathrm{id}_X, f)"] \arrow[dr, tail, "\lambda"', "\sim"] & & X \times Y \\ & Z \arrow[ur, two heads, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

Se $\pi_1 : X \times Y \to X$ e $\pi_2 : X \times Y \to Y$ são as projeções canônicas, definimos então

$$q \coloneqq \pi_1 \circ \theta : Z \to X \quad \text{e} \quad p \coloneqq \pi_2 \circ \theta : Z \to Y.$$

Veja que tais morfismos satisfazem as igualdades necessárias, já que por um lado

$$p \circ i = \pi_2 \circ \theta \circ i = \pi_2 \circ (\mathrm{id}_X, f) = f,$$

e por outro

$$q \circ i = \pi_1 \circ \theta \circ i = \pi_1 \circ (\mathrm{id}_X, f) = \mathrm{id}_X.$$

Resta apenas mostrarmos que p e q são fibrações triviais. O fato de p ser uma equivalência fraca segue da propriedade 2-de-3, já que temos a igualdade $p \circ i = f$ onde tanto i quanto f são equivalências fracas. O fato de q ser uam equivalência fraca também segue da propriedade 2-de-3, pois temos a igualdade $q \circ i = \mathrm{id}_X$ onde i e id_X são equivalências fracas. Por fim, para ver que p e q são fibrações, veja que temos um diagrama de pullback

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & X \arrow[d, two heads, "!_X"] \\ Y \arrow[r, two heads, "!_Y"'] & * \end{tikzcd}$$

onde $!_X$ e $!_Y$ são fibrações graças ao fato de X e Y serem fibrantes. Como fibrações são preservadas por pullbacks, segue que as projeções canônicas π_1 e π_2 são fibrações também, logo p e q são ambos composições de fibrações e, portanto, fibrações também. ■

O tradicional Lema de Brown é então uma consequência direta da Proposição 1.6.3.

1.6.4 Corolário (Lema de Brown)**.** *Sejam* $(\mathsf{M}, \mathcal{W}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ *uma categoria de modelos e* $(\mathcal{D}, \mathcal{W}')$ *uma categoria com equivalências fracas, ou seja,* $\mathcal{W}' \subseteq Mor(\mathsf{D})$ *é uma classe de morfismos satisfazendo a propriedade 2-de-3. Suponha que* $F : \mathsf{M} \to \mathsf{D}$ *seja um funtor que transforma fibrações triviais entre objetos fibrantes de* M *em equivalências fracas de* D*. Então* F *também transforma equivalências fracas entre objetos fibrantes de* M *em equivalências fracas de* D*.*

Demonstração. Seja $p : X \xrightarrow{\sim} Y$ uma equivalência fraca entre objetos fibrantes de M. Aplicando o Proposição 1.6.3 obtemos uma cofibração trivial $i : X \overset{\sim}{\rightarrowtail} Z$, uma fibração trivial $p : Z \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Y$ e uma fibração trivial $q : Z \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} X$ tais que $p \circ i = f$ e $q \circ i = \mathrm{id}_X$. Veja que Z é um objeto fibrante, já que ele manda uma fibração para um objeto fibrante. Assim, p é uma fibração trivial entre objetos fibrantes, portanto $F(p) : F(Z) \to F(Y)$ é uma equivalência fraca em D. Se cosneguirmos mostrar que $F(i) : F(X) \to F(Z)$ é também uma equivalência fraca, o resultado desejado seguirá então da igualdade $F(p) \circ F(i) = F(f)$ e da propriedade 2-de-3 em M. Ora, sendo $q : Z \to X$ uma fibração trivial entre objetos fibrantes também, vale que $F(q) : F(Z) \to F(X)$ é uma equivalência fraca, e a propriedade 2-de-3 aplicada à igualdade $F(q) \circ F(i) = \mathrm{id}_{F(X)}$ nos permite concluir que $F(i)$ é uma equivalência fraca, já que o morfismo idêntico $\mathrm{id}_{F(X)}$ é também uma equivalência fraca. ■

Uma aplicação bastante bacana do Lema de Brown é uma demonstração simples de que equivalências fracas entre objetos fibrantes dão origem a bijeções entre classes de homotopia.

1.6.5 Proposição. *Seja* B *um objeto cofibrante de uma categoria de modelos* M*.*

1. *Se* $p : X \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} Y$ *é uma fibração trivial, então* $[B, p]_\ell : [B, X]_\ell \to [B, Y]_\ell$ *é uma bijeção.*

2. *Se $p : X \xrightarrow{\sim} Y$ é uma equivalência fraca entre objetos fibrantes, então $[B,p] : [B,X] \to [B,Y]$ é uma bijeção.*

Demonstração. 1. Nesse caso, a função de pushoforward $\mathsf{M}(B,p) : \mathsf{M}(B,X) \to \mathsf{M}(B,Y)$ a nível de morfismos já é sobrejetora. De fato, dado um morfismo $g : B \to Y$ qualquer, aplicando o axioma de levantamento ao quadrado abaixo, onde $!_B : \varnothing \to B$ é uma cofibração e $p : X \to Y$ é uma fibração trivial,

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r, "!_X"] \arrow[d, tail, "!_B"'] & X \arrow[d, two heads, "p", "\wr"'] \\ B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

obtemos um morfismo $f : B \to X$ tal que $p \circ f = g$. Consequentemente, a nível de classes de homotopia à esquerda temos

$$[B,p]_\ell([f]_\ell) = [p \circ f]_\ell = [g]_\ell,$$

portanto $[B,p]_\ell$ é também uma função sobrejetora.

Vejamos agora a questão da injetividade. Suponha que $[f_1]_\ell$, $[f_2]_\ell \in [B,X]_\ell$ sejam duas classes de homotopia à esquerda tais que $[B,p]_\ell([f_1]_\ell) = [B,p]_\ell([f_2]_\ell)$, ou seja, existe uma homotopia à esquerda $p \circ f_1 \simeq_\ell p \circ f_2$ dada pelo morfismo $h : \mathrm{Cyl}(B) \to Y$. Usando a trivialidade da fibração p podemos obter um levantamento $H : \mathrm{Cyl}(B) \to X$ para o quadrado comutativo indicado abaixo.

$$\begin{tikzcd} B \sqcup B \arrow[r, "\langle f_1, f_2 \rangle"] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "p", "\wr"'] \\ \mathrm{Cyl}(B) \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & Y \end{tikzcd}$$

A condição $H \circ i = \langle f_1, f_2 \rangle$ diz precisamente que H define uma homotopia à esquerda $f_1 \simeq_\ell f_2$, portanto $[f_1]_\ell = [f_2]_\ell$, e $[B,p]_\ell$ é uma função injetora.

2. Vamos aplicar o Lema de Brown (Corolário 1.6.4) de uma forma espertinha. Considere o funtor $[B,-]_\ell : \mathsf{M} \to \mathsf{Set}$ que associa a cada objeto $X \in \mathsf{M}$ a classe de homotopia à esquerda $[B,X]_\ell$ e que associa a um morfismo $f : X \to Y$ a função de pushforward $[B,f]_\ell : [B,X]_\ell \to [B,Y]_\ell$ correspondente. Considere Set como uma categoria com equivalências fracas no sentido do Corolário 1.6.4 tomando a classe $\mathsf{W}' \subseteq \mathrm{Mor}(\mathsf{Set})$ formada por todos as bijeções. O item 1 diz então que o funtor $[B,-]_\ell : \mathsf{M} \to \mathsf{Set}$ introduzido transforma qualquer fibração trivial de M em uma equivalência fraca de Set no sentido acima. Em particular, $[B,-]_\ell$ transforma também fibrações triviais entre objetos fibrantes em equivalências fracas, portanto pelo Lema de Brown concluímos que $[B,-]_\ell$ também transforma equivalência fracas entre objetos fibrantes em equivalências fracas; ou seja, se $p : X \xrightarrow{\sim} Y$ é uma equivalência fraca entre objetos fibrantes, a função de pushforward correspondente $[B,p] : [B,X] \to [B,Y]$ é uma bijeção. ■

Bibliografia

[HM22] Gijs Heuts e Ieke Moerdijk. *Simplicial and Dendroidal Homotopy Theory*. 1ª ed. A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer Cham, 2022.

[Hov07] Mark Hovey. *Model Categories*. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2007.

[nLa23] nLab authors. *Localization*. `https://ncatlab.org/nlab/show/localization`. Revision 78. Nov. de 2023.

[nLa24] nLab authors. *injective or projective morphism*. `https://ncatlab.org/nlab/show/injective+or+projective+morphism`. Revision 8. Jan. de 2024.

[Shu] Mike Shulman. *What is the correct definition of localisation of a category?* MathOverflow. URL:https://mathoverflow.net/q/312123 (version: 2018-10-05). eprint: `https://mathoverflow.net/q/312123`. URL: `https://mathoverflow.net/q/312123`.