Teoria de Homotopia Abstrata

Edmundo Martins

21 de agosto de 2023

1 Categorias modelo

1.1 Definição. Seja M uma categoria localmente pequena, completa e co-completa. Uma **estrutura modelo** em M consiste de três classes de morfismos $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathsf{M})$ cujos elementos são chamados, respectivamente, **equivalências fracas**, **fibrações** e **cofibrações**, as quais devem satisfazer as seguintes condições:

(M1) A categoria M é bicompleta, ou seja, admite todos os limites e colimites indexados por categorias pequenas.

(M2) (Propriedade 2-de-3) Dados morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ em M, se dois dos morfismos do conjunto $\{f, g, g \circ f\}$ estiverem em $\mathcal{W}$, então o terceiro também deve estar.

(M3) (Propriedade de retração) Se um morfismo $f : A \to X$ é retração de um outro morfismo $g : B \to Y$, ou seja, se existe um diagrama comutativo como abaixo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_A"] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

e g pertence a $\mathcal{W}$ (ou a $\mathcal{F}$, ou a $\mathcal{C}$), então f também pertence a $\mathcal{W}$ (ou a $\mathcal{F}$, ou a $\mathcal{C}$, respectivamente). Em suma, as classes $\mathcal{W}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{C}$ são fechadas por retrações.

(M4) (Propriedade de levantamento) Dado um diagrama comutativo como abaixo,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

onde i é uma cofibração, e p é uma fibração; se um dos dois morfismos i ou p é também uma equivalência fraca, então o diagrama admite um levantamento, ou seja, existe um morfismo $f : B \to X$ que faz comutar o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

(M5) (Propriedade de fatoração) Qualquer morfismo $f : X \to Y$ em M pode ser fatorado nas duas formas mostradas abaixo,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & \widehat{X} \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j"'] & & Y \\ & \widetilde{Y} \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

onde p é simultaneamente uma fibração e uma equivalência fraca, enquanto j é simultaneamente uma cofibração e uma equivalência fraca.

Vamos introduzir um pouco de terminologia antes de fazermos alguns comentários sobre a definição acima. Os morfismos de M que pertencem à classe $\mathcal{W} \cap \mathcal{F}$ são chamados de **fibrações triviais** ou **fibrações acíclicas**, enquanto os morfismos que pertencem à classe $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}$ são chamados de **cofibrações triviais** ou **cofibrações acíclicas**.

1.2 Observação. Lembremos que, dados objetos X e Y de uma categoria C qualquer, dizemos que X é um **retrato** de Y se existem morfismos $s : X \to Y$ e $r : Y \to X$ tais que $r \circ s = \mathrm{id}_X$. Comumente nos referimos ao morfismo s por **seção** e ao morfismo r por **retração**. A condição $r \circ s = \mathrm{id}_X$ garante que s seja um monomorfismo. De fato, se f, $g : W \to X$ são morfismos tais que $s \circ f = s \circ g$, então

$$f = \mathrm{id}_X \circ f = r \circ s \circ f = r \circ s \circ g = \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

Isso nos permite encarar X como um subobjeto de Y, e o morfismo r então intuitivamente deforma Y para esse subobjeto, mas de forma a mantê-lo fixado. Note que a condição $r \circ s = \mathrm{id}_X$ garante também que o morfismo r seja um epimorfismo.

A noção de retração que aparece no axioma (M3) de uma estrutura modelo enunciado acima pode ser interpretada nesse sentido em uma categoria adequada. Lembremos que toda categoria C dá origem a uma categoria de setas $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$. Os objetos dessa categorias são precisamente morfismos $f : A \to B$ na categoria incial C, e dados dois tais objetos $f : A \to B$ e $g : X \to Y$, um morfismo do tipo $(f : A \to B) \to (g : X \to Y)$ na categoria de setas (C) é dado por um par de morfismos $(\alpha : A \to X,\, \beta : B \to Y)$ satisfazendo a igualdade $\beta \circ f = g \circ \alpha$. Podemos então visualizar esse morfismo em $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$ na forma de um quadrado comutativo como mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

A composição de morfismos é definida "colando" quadrados comutativos adjacentes. Mais precisamente, dados três objetos $f : X_1 \to Y_1$, $g : X_2 \to Y_2$ e $h : X_3 \to Y_3$ na categoria $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$, e dados também dois morfismos componíveis

$$(\alpha_1 : X_1 \to X_2,\, \beta_1 : Y_1 \to Y_2) \qquad (\alpha_2 : X_2 \to X_3,\, \beta_2 : Y_2 \to Y_3),$$

sua composição é o morfismo

$$(\alpha_2, \beta_2) \circ (\alpha_1, \beta_1) : (f : X_1 \to Y_1) \to (h : X_3 \to Y_3)$$

em $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$ definido pelo par

$$(\alpha_2, \beta_2) \circ (\alpha_1, \beta_1) \coloneqq (\alpha_2 \circ \alpha_1 : X_1 \to X_3,\, \beta_2 \circ \beta_1 : Y_1 \to Y_3).$$

Essa composição pode também ser visualizada como mostrado abaixo.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f"'] & X_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "g"] & X_3 \arrow[d, "h"] \\ Y_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & Y_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & Y_3 \end{tikzcd} \implies \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\alpha_2 \circ \alpha_1"] \arrow[d, "f"'] & X_3 \arrow[d, "h"] \\ Y_1 \arrow[r, "\beta_2 \circ \beta_1"'] & Y_3 \end{tikzcd}$$

A associatividade dessa composição via colagem segue diretamente da associatividade da composição na categoria inicial C. Por fim, dado um objeto $f : X \to Y$ qualquer, o morfismo idêntico associado a ele é dado pelo par $\mathrm{id}_f := (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y)$, conforme mostrado no quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\mathrm{id}_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Note agora que, se o objeto $f : A \to B$ é um retrato do objeto $g : X \to Y$ *na categoria de setas* $\mathrm{Arr}(\mathsf{M})$, então por definição existem morfismos $s_1 : A \to X$, $s_2 : B \to Y$, $r_1 : X \to A$ e $r_2 : Y \to B$ tais que $(r_1, r_2) \circ (s_1, s_2) = \mathrm{id}_f$, o que também pode ser expresso pelo diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_A"] & X \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "s_2"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_B"'] & Y \arrow[r, "r_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Esse é precisamente o diagrama que aparece no axioma de retração na definição de uma estrutura modelo. Podemos então reformular tal axioma dizendo que as classes de equivalências fracas, fibrações e cofibrações são todas fechadas por *retrações na categoria de setas* $\mathrm{Arr}(\mathsf{C})$.