

Sistemi dinamici

M. Cigola

L. Peccati

febbraio 2016

Indice

Indice	iii
1 I numeri complessi	1
1.1 Premessa	1
1.2 Forma algebrica dei numeri complessi	2
1.3 Forma trigonometrica dei numeri complessi	6
1.3.1 Coordinate polari	6
1.3.2 Forma trigonometrica	9
1.4 Forma esponenziale di un numero complesso	12
1.5 Equazioni algebriche e loro soluzioni	14
2 Autovalori e autovettori	17
2.1 Diagonalizzazione per similitudine	24
2.2 Potenza di una matrice e matrice esponenziale	28
3 Sistemi dinamici	33
3.1 Che cos'è un sistema dinamico	33
3.1.1 Il tempo	35
3.2 La legge del moto	37
3.2.1 Legge del moto in tempo continuo	39
3.2.2 Leggi del moto in tempo discreto	41
3.2.3 Equazioni differenziali ed equazioni alle differenze	43
3.2.4 Sistemi autonomi e non autonomi	47
3.2.5 Sistemi lineari	48
3.3 Esistenza e unicità di soluzioni per equazioni differenziali ed equazioni alle differenze	51
3.3.1 Esistenza e unicità in tempo discreto	54
3.3.2 Esistenza e unicità in tempo continuo	55
4 Risoluzione di alcune equazioni notevoli	61
4.1 Equazioni differenziali a variabili separabili	61
4.2 Equazioni differenziali lineari del prim'ordine	70
4.2.1 Il caso autonomo	73

4.2.2	Legame tra le soluzioni di equazioni omogenee e non omogenee	74
4.3	Equazione di Bernoulli	76
4.4	Equazione di Riccati	77
4.5	Equazioni alle differenze lineari del prim'ordine	79
5	Sistemi dinamici lineari di dimensione n con tempo discreto	81
5.1	Sistemi autonomi omogenei	81
5.1.1	Autovalori complessi	85
5.1.2	Difetto di molteplicità	91
5.1.3	Autovalori reali, complessi e ripetuti	93
5.2	Sistemi autonomi non omogenei	96
5.3	Sistemi non autonomi discreti	102
6	Sistemi dinamici lineari di dimensione n con tempo continuo	103
6.1	Sistemi autonomi omogenei	103
6.1.1	Autovalori complessi	107
6.1.2	Difetto di molteplicità	110
6.1.3	Autovalori reali, complessi e ripetuti	112
6.2	Sistemi autonomi non omogenei	113
7	Equazioni lineari discrete e continue di ordine n	117
8	Equilibri e stabilità	125
8.1	Nozione di equilibrio	125
8.2	Stabilità e stabilità asintotica	130
8.3	Stabilità per i sistemi lineari	136
8.3.1	Condizione di Schur	140
8.3.2	Condizione di Hurwitz	142
8.4	Linearizzazione e stabilità locale d'un equilibrio	145
8.5	Tecniche qualitative	148
8.5.1	Diagrammi di fase per sistemi con tempo continuo	148
8.5.2	Diagrammi di fase con tempo discreto	151
8.5.3	"Ragnatele" e "scalinatele"	153
8.5.4	Benvenuti nel mondo del caos!	157
9	Introduzione al controllo ottimo	161
9.1	Controllabilità d'un sistema lineare con tempo discreto	162
9.2	Calcolo delle variazioni	165
9.2.1	Controllo ottimo	168
9.3	Tecniche numeriche	171
10	Appendice	173
10.1	Norma d'una funzione	173
10.2	Distanza tra funzioni	177
10.3	Successioni di funzioni	182
10.3.1	Che accade se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diventa $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$?	184
10.3.2	Successioni fondamentali, la condizione di Cauchy	185
10.4	Autovalori e autovettori: il gatto di (Vladimir) Arnold	194
	Bibliografia	199

Prefazione

Questa dispensa ha l'ambizione di riuscire a presentare le nozioni introduttive ai sistemi dinamici in un numero contenuto di pagine e quindi di crediti/ore.

Due sono le principali motivazioni per produrre (di nuovo!) una dispensa *ad hoc*: in primo luogo gli autori hanno constatato che, nella sterminata letteratura sull'argomento, raramente il caso discreto è trattato in misura eguale (o, per lo meno, analoga) al caso continuo.

Solitamente infatti, la stragrande maggioranza dei testi tratta esclusivamente o quantomeno predilige il caso continuo. Ciò crea qualche disagio perché, nei corsi di Economia, i modelli dinamici discreti sono utilizzati tanto quanto (se non di più) dei modelli dinamici continui.

In secondo luogo, gli ottimi testi già esistenti non sono “tarati”: sono cioè pensati per corsi quasi completi sull'argomento. Difficilmente quindi si riesce a trovare un testo sotto le 200 pagine che contenga anche i prerequisiti necessari per lo studio delle equazioni differenziali e alle differenze.

I capitoli sono deliberatamente costruiti in maniera diversa.

I primi due contengono le nozioni preliminari necessarie per affrontare i sistemi dinamici di tipo lineare.

L'appendice contiene alcuni approfondimenti utili per meglio comprendere dal punto di vista formale (ma non solo) da dove provengono alcuni dei risultati matematici presentati nei capitoli intermedi.

I capitoli centrali riguardano direttamente i sistemi dinamici. In essi si è cercato un compromesso tra un'impostazione analitica ed una euristica: la prima basata principalmente sulla deduzione logica la seconda basata su intuizione e sperimentazione.

Infine, un breve cenno al controllo ottimo è presentato nel capitolo 9.

Doveroso ringraziare Fabrizio Iozzi che ha contribuito leggendo di corsa (per colpa del ritardo degli autori) queste pagine e individuando subito problemi più o meno seri. Resteranno senz'altro molte imprecisioni ed errori veri e propri che sono da imputarsi solo agli autori.

Febbraio 2013

gli autori

Oltre al già citato Fabrizio, devo ringraziare ora anche Marco Boella e gli studenti stessi che mi hanno segnalato sia errori, più o meno vistosi, sia “pezzi” incomprensibili o comunque non chiari.

Aggiustando sarò senz'altro riuscita nella non facile impresa di inserire nuovi errori: unica speranza è che siano meno gravi e meno numerosi dei precedenti.

Marzo 2014

Margherita Cigola

Ecco un'altra edizione che non sarà senz'altro l'ultima. Oltre alla correzione di alcuni errori, segnalo una modifica apportata alla nozione di stabilità. La colpa è sempre di Fabrizio Iozzi...

Spero che, per aggiustamenti successivi, si riuscirà ad avere una versione *stabile* di queste note didattiche

Febbraio 2015

Ultima versione per quest'anno (si auspica). Questa volta la colpa è esclusivamente mia: eliminando precedenti refusi ne ho inseriti di nuovi.

Ringrazio tutti per la collaborazione e la pazienza.

Febbraio 2016

1

I numeri complessi

1.1 Premessa

I progressivi ampliamenti del campo numerico possono essere così brevemente ripercorsi:

- All'inizio l'uomo conosceva soltanto i *numeri interi naturali* $(0, 1, 2, 3, 4, \dots)$ del tutto sufficienti quando i problemi più seri erano contare le pecore d'un gregge o i soldati d'un esercito: il loro insieme \mathbb{N} è "chiuso" rispetto alle operazioni d'addizione e di moltiplicazione. Ciò vuol dire che se $m, n \in \mathbb{N}$, anche $m + n$ e $mn \in \mathbb{N}$.
- \mathbb{N} non è però chiuso rispetto alla sottrazione che si rese necessaria per far di conto nelle operazioni di scambio. Ciò portò a un primo ampliamento da \mathbb{N} a \mathbb{Z} , l'insieme dei *numeri interi (relativi)* $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ in cui divengono possibili, senza eccezioni, le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione.
- \mathbb{Z} non è però chiuso rispetto alla divisione che si rese necessaria, per esempio, per determinare le quote d'un'eredità¹. Ciò portò a un secondo ampliamento da \mathbb{Z} a \mathbb{Q} , l'insieme dei *numeri razionali* (esprimibili come $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$).
- Già Pitagora s'avvide che c'erano "altri numeri" oltre i razionali. Sfruttando il suo celebre teorema, constatò infatti che la diagonale d'un quadrato di lato unitario non poteva essere razionale². Per molti secoli il problema di tali "altri numeri" non fu preoccupante. Lo diventò con gli sviluppi d'una matematica più moderna e, specialmente, con l'operazione di limite, che acquista un assetto accettabile solo ambientata nell'insieme \mathbb{R} dei *numeri reali*. In esso si possono

¹Pensiamo a una Civiltà evoluta ove l'unità monetaria si chiama "criceto", simbolo Ct , e ove un'eredità di $1000Ct$ debba essere divisa in parti uguali tra tre esosi eredi con pari diritti.

²Infatti il suo quadrato deve essere 2 e, se fosse razionale, dovrebbe essere

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

cioè

$$m^2 = 2n^2$$

con m e n interi. Ma ciò non è possibile visto che, scomponendo in fattori primi m^2 e n^2 , il fattore 2 compare un numero pari (eventualmente 0) di volte in m^2 e in numero dispari (almeno una volta) in $2n^2$.

effettuare senza imbarazzi le quattro operazioni elementari (tranne la divisione per 0) e, che conta, il limite di successioni.

- Ma anche l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali, per talune finalità, si rivela troppo angusto. In esso non esistono né i logaritmi di numeri ≤ 0 né le radici d'indice pari dei numeri negativi. Quest'ultima carenza complica non poco la discussione delle equazioni algebriche di grado $n > 1$. Si è proceduto a un ulteriore ampliamento del campo numerico di \mathbb{R} introducendo l'insieme dei *numeri complessi*, indicato con \mathbb{C} .

1.2 Forma algebrica dei numeri complessi

Un numero complesso z è identificato da una coppia di numeri reali. Scriveremo:

$$z = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$

Introduciamo le seguenti operazioni di somma e prodotto:

1. $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \end{bmatrix}$;
2. $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \end{bmatrix}$.

Si noti che, mentre la somma è quella usualmente definita in \mathbb{R}^2 , il prodotto introdotto è una novità che rende *chiuso* l'insieme di tutte le coppie di numeri reali anche rispetto al prodotto di due suoi elementi.

Si può facilmente verificare che le operazioni appena definite godono delle tradizionali proprietà (commutativa, associativa, distributiva) e in particolare:

- esiste un elemento neutro per la somma:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+0 & b+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$

e $\begin{bmatrix} -a & -b \end{bmatrix}$ è l'opposto di $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$.

- esiste un elemento neutro per la moltiplicazione:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot 1 - b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$

e il reciproco di $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ è

$$\begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$$

L'insieme di tutte le coppie di numeri reali con le due operazioni sopra introdotte diventa così un *campo*: il campo dei numeri complessi \mathbb{C} . Possiamo dare una definizione formale:

Definizione 1 Si dice insieme dei numeri complessi, l'insieme \mathbb{C} di tutte le coppie di numeri reali $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ su cui sono definite le operazioni di somma:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

e di prodotto:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Per ogni numero complesso $z = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$, il numero $a \in \mathbb{R}$ è detto parte reale e lo indichiamo con $\text{Re}(z)$, il numero $b \in \mathbb{R}$ è detto coefficiente dell'immaginario e lo indichiamo con $\text{Im}(z)$:

$$\text{Re} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = a \quad \text{e} \quad \text{Im} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = b$$

I numeri complessi con parte immaginaria nulla, ovvero del tipo $z = \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix}$, rappresentano i numeri reali x nel senso che è possibile instaurare una corrispondenza biunivoca tra essi e i numeri reali:

$$\begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

che preserva le operazioni di somma e prodotto. Più precisamente risulta che la somma e il prodotto definiti in campo complesso corrispondono alla somma e prodotto tradizionalmente definiti in campo reale:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x+y & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow x+y \in \mathbb{R} \\ \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x \cdot y & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow x \cdot y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aggiungendo l'ordinamento completo:

$$\begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} y & 0 \end{bmatrix} \iff x \geq y$$

il campo dei numeri reali risulta essere un sottocampo dei numeri complessi e in questo senso si intende la scrittura $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ che consente di vedere l'insieme dei numeri complessi \mathbb{C} come un ampliamento dell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} . Per tale motivo, laddove non vi siano ambiguità, scriveremo:

$$x \in \mathbb{R} \text{ in luogo di } \begin{bmatrix} x & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

con un piccolo abuso di scrittura formale.

I numeri complessi con parte reale nulla, ovvero del tipo $z = \begin{bmatrix} 0 & b \end{bmatrix}$ sono detti *immaginari puri*. È chiaro che ogni numero complesso si può esprimere come somma d'un numero reale e d'un immaginario puro

$$z = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \end{bmatrix}$$

e, con la semplificazione appena introdotta, risulta anche:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ovvero ogni numero complesso z può essere scritto come combinazione lineare di $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Se ora consideriamo il numero immaginario puro $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ e lo moltiplichiamo per sé stesso otteniamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

Abbiamo fatto un'importante scoperta: il quadrato di $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ è il numero reale -1 . È tradizione indicare tale particolare numero immaginario puro con la lettera i (i come "immaginario")³:

$$i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \implies i^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

Il numero i è detto *unità immaginaria*. Ciò autorizza a scrivere qualsiasi numero complesso nella cosiddetta *forma algebrica* o *cartesiana*:

$$\begin{aligned} z = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \boxed{a + ib} \end{aligned}$$

Essa si presta ottimamente a far di conto: basta ricordare, nello svolgere i calcoli con le abituali regole dell'algebra, che $i^2 = -1$.

³Il numero i è dunque definito da

$$i^2 = -1$$

Meno corretto è scrivere $i = \sqrt{-1}$, perché, come vedremo, esistono due radici quadrate di -1 (che sono i e $-i$).

Esempio 2 *Nulla di speciale per la somma e la differenza:*

$$\begin{aligned}(2 + 5i) + (-1 + 3i) &= 2 - 1 + 5i + 3i = 1 + 8i \\ (4 - i) - 3i &= 4 - i - 3i = 4 - 4i\end{aligned}$$

Il prodotto

$$\begin{aligned}(2 + 5i)(-1 + 3i) &= -2 - 5i + 6i + 15i^2 = -17 + i \\ -3i(4 - i) &= -12i + 3i^2 = -3 - 12i\end{aligned}$$

Possiamo anche calcolare il reciproco $z^{-1} = x + iy$ di $z = a + ib \neq 0$ impostando l'equazione nelle incognite x e y :

$$(x + iy) \cdot (a + ib) = ax + i(bx + ay) - yb = 1 \implies \begin{cases} ax - yb = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Il sistema lineare risultante:

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ammette l'unica soluzione:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Ovvero ritroviamo quanto già affermato in precedenza:

$$(a + ib)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Si osservi che

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$$

Il reciproco consente di effettuare la divisione tra due numeri complessi:

Esempio 3 *Abbiamo*

$$(5 - 3i)^{-1} = \frac{5}{34} + i \frac{3}{34}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{-1 - 13i}{5 - 3i} &= (-1 - 13i) \left(\frac{5}{34} + i \frac{3}{34} \right) = \\ &= -\frac{5}{34} - i \left(\frac{3}{34} + \frac{65}{34} \right) - \frac{39}{34} i^2 = \\ &= -\frac{5 + 39}{34} - i \frac{68}{34} = \\ &= 1 - 2i\end{aligned}$$

Anche la potenza con esponente intero positivo z^n si deriva direttamente dalla potenza n -esima di un binomio:

$$z^n = (a + ib)^n = \sum_{k=0}^n a^{n-k} \cdot (ib)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n a^{n-k} \cdot b^k \binom{n}{k} \cdot i^k$$

Tenendo conto che $z^0 = 1$ per ogni $z \neq 0$ e che:

$$i^0 = 1 \quad ; \quad i^1 = i \quad ; \quad i^2 = -1 \quad ; \quad i^3 = -i \quad ; \quad i^4 = 1 \quad ; \quad \dots$$

Ossia le potenze di i si ripetono di quattro in quattro assumendo ciclicamente i valori appena indicati⁴.

⁴La filastrocca “uno ì, uno menì, uno ì, uno menì” è di primo aiuto.

Esempio 4

$$(1 + 2i)^2 = 1 + 4i + 4i^2 = -3 + 4i$$

$$i^7 = i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i = -i$$

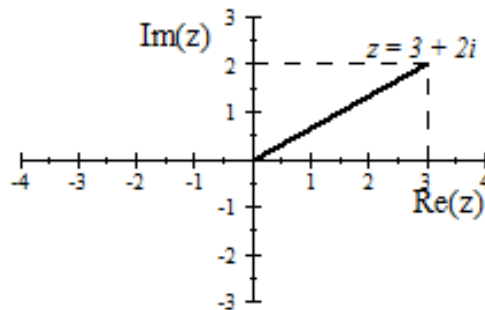
Le potenze con esponente intero negativo sono definite come reciproci delle corrispondenti potenze con esponente positivo

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

Esempio 5

$$(1 + 2i)^{-2} = \frac{1}{-3 + 4i} = -\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

La rappresentazione grafica di un numero complesso può essere fatta in un piano cartesiano, detto *piano di Argand – Gauss*, nel quale l'asse orizzontale è detto *asse reale* e il verticale *asse immaginario* (sul primo sono ospitati tutti i numeri reali, sul secondo tutti gli immaginari puri):

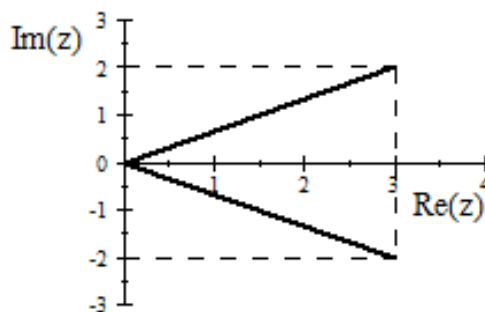


Oltre le operazioni d'addizione e di moltiplicazione, è definita anche l'*operazione di coniugio*:

Definizione 6 Si dice coniugato di $z = a + ib$ il numero \bar{z} con $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$, ovvero in forma algebrica:

$$z = a + ib \implies \bar{z} = a - ib$$

Geometricamente, il coniugato è rappresentato dal punto speculare di z rispetto all'asse reale:



L'operazione di coniugio gode delle seguenti proprietà:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.
- $\overline{(\bar{z})} = z$

Inoltre tutti e soli i numeri reali coincidono con il loro coniugato: $x = \bar{x} \iff x \in \mathbb{R}$ e risulta:

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2$$

ovvero il prodotto di un numero complesso per il suo coniugato è sempre un numero reale (non negativo).

Osserviamo che

$$\frac{1}{a + ib} \cdot \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Dunque la divisione tra numeri complessi può essere effettuata semplicemente moltiplicando e dividendo per il coniugato del denominatore.

Esempio 7 *Riprendiamo uno dei precedenti esempi*

$$\frac{-1 - 13i}{5 - 3i} \cdot \frac{5 + 3i}{5 + 3i} = \frac{34 - 68i}{34} = 1 - 2i$$

Introduciamo ora:

Definizione 8 *Si dice modulo di un numero complesso $z = a + ib$, e lo si indica con $|z|$ il numero reale*

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geometricamente il modulo di un numero complesso rappresenta la lunghezza del vettore $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ nel piano di Argand – Gauss.

Esempio 9

$$\begin{aligned} |2 - 3i| &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \\ |i| &= \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \end{aligned}$$

Osserviamo che se z ha parte immaginaria nulla allora il suo modulo coincide con il classico “valore assoluto” utilizzato per i numeri reali.

Per affrontare altre operazioni conviene introdurre altri modi di scrivere i numeri complessi.

1.3 Forma trigonometrica dei numeri complessi

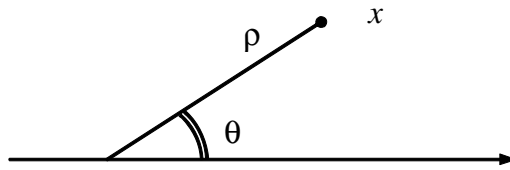
1.3.1 Coordinate polari

Comunemente s’instaura la classica corrispondenza biunivoca tra punti del piano e coppie di numeri reali utilizzando le cosiddette *coordinate cartesiane* (cioè le distanze del punto da due assi tra di loro ortogonali).

Vi sono molte altre possibilità per stabilire una corrispondenza biunivoca tra punti del piano e coppie di numeri reali.

Una piuttosto interessante è rappresentata dalle cosiddette *coordinate polari*.

Si fissa un solo asse orientato (per esempio orizzontale) e dotato d’origine. A ogni punto del piano, distinto dall’origine, si fa corrispondere la coppia (ρ, θ) dove ρ è la distanza del punto dall’origine e θ è l’ampiezza dell’angolo formato dal segmento che congiunge il punto con l’origine e il verso positivo dell’asse:



La distanza ρ è detta *raggio polare*. L'ampiezza θ dell'angolo è detta *anomalia* o *argomento*.

La corrispondenza non è biunivoca. A ogni coppia (ρ, θ) corrisponde un punto nel piano, mentre ad ogni punto, con l'unica eccezione dell'origine per la quale $\rho = 0$ ma θ è indeterminato, non corrisponde un unico valore ma infiniti valori di θ che differiscono tra loro di un multiplo di 2π : se (ρ, θ) sono le coordinate polari di un punto, anche tutte le coppie $(\rho, \theta + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$, rappresentano lo stesso punto.

Spesso conviene indicare un solo argomento anziché indicarli tutti. Per fare ciò basta fissare un intervallo di riferimento I di ampiezza 2π . Tra gli infiniti intervalli di riferimento i più popolari sono:

$$[0, 2\pi) \quad \text{o} \quad (-\pi, \pi]$$

Una volta fissato l'intervallo I , l'unico argomento $\theta \in I$ è detto *argomento principale*.

È immediato passare dalle coordinate polari (ρ, θ) alle coordinate cartesiane (x, y) con la coppia di relazioni:

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

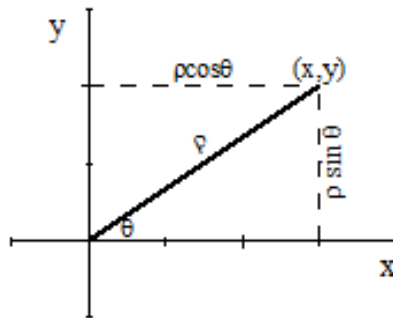
Per trasformare le coordinate cartesiane di un punto $(x, y) \neq (0, 0)$ in coordinate polari si determina ρ calcolando la sua distanza (euclidea) dall'origine:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

mentre θ è soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{cases} \rho \cos \theta = x \\ \rho \sin \theta = y \end{cases} \quad (1.3)$$

Le relazioni sopra scritte si leggono meglio geometricamente “innestando” le coordinate polari nel piano cartesiano:



Si nota subito che se $x = 0$ e $y \neq 0$ allora:

$$\theta = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

Immediato anche il caso in cui sia $y = 0$ e $x \neq 0$:

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ \pi & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Se invece x e y sono entrambi diversi da 0, si può scrivere la soluzione θ del sistema (1.3) nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ utilizzando la funzione $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ in questo modo⁵:

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y < 0 \end{cases}$$

Tutti gli altri argomenti sono poi dati da: $\theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Esempio 10 Le coordinate cartesiane del punto $(\rho, \theta) = (2\sqrt{2}, 3\pi/4)$ sono:

$$(x, y) = \left(2\sqrt{2} \cdot \cos(3\pi/4), 2\sqrt{2} \cdot \sin(3\pi/4)\right) = \left(2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right) = (-2, 2)$$

Le coordinate polari del punto $(x, y) = (-2, 2)$ sono:

$$(\rho, \theta) = \left(\sqrt{2}, \arctan(-1)\right) = \left(\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\pi\right)$$

Infatti

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos(-\pi/4) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}/2 = 1 \\ \sqrt{2} \sin(-\pi/4) = \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}/2) = -1 \end{cases}$$

Le coordinate polari del punto $(x, y) = (3, \sqrt{3})$ sono:

$$(\rho, \theta) = \left(\sqrt{12}, \arctan \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(2\sqrt{3}, \frac{1}{6}\pi\right)$$

Infatti

$$\begin{cases} \sqrt{12} \cos(\pi/6) = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3}/2 = 3 \\ \sqrt{12} \sin(\pi/6) = \sqrt{12} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Le coordinate polari del punto $(x, y) = (-1, -1)$ sono:

$$(\rho, \theta) = \left(\sqrt{2}, \arctan(1) - \pi\right) = \left(\sqrt{2}, -\frac{3}{4}\pi\right)$$

Infatti

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos(-3\pi/4) = \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}/2) = -1 \\ \sqrt{2} \sin(-3\pi/4) = \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}/2) = -1 \end{cases}$$

⁵In molti software è implementata la funzione

$$\arctan2(y, x)$$

che restituisce l'argomento principale $\theta \in (-\pi, \pi]$ di un punto del piano di coordinate cartesiane $(x, y) \neq (0, 0)$.

1.3.2 Forma trigonometrica

Con le coordinate polari, si può rappresentare un numero complesso nella cosiddetta *forma trigonometrica* o *polare*. Anzitutto osserviamo che il raggio polare di un numero complesso $z = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ coincide con il suo modulo

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

Dunque, se $|z| \neq 0$, ovvero se $z \neq 0$, utilizzando la forma algebrica di z si ottiene:

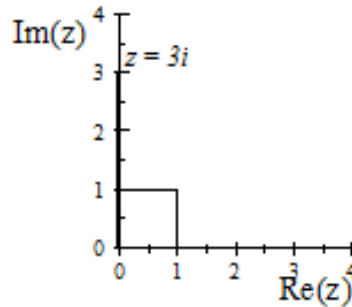
$$z = a + ib = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \boxed{\rho (\cos \theta + i \sin \theta)}$$

dove θ è il suo argomento, frequentemente indicato con $\arg z$. Per i numeri complessi conviene scegliere l'argomento principale nell'intervallo $-\pi < \theta \leq \pi$.

Esempio 11 Per il numero complesso $3i$ il modulo è 3 e l'argomento (principale) è $\pi/2$

$$3i = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

Ciò è ovvio poiché nel piano di Argand-Gauss:



si vede subito che $\arg(3i) = \frac{\pi}{2}$ (infatti $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\sin \frac{\pi}{2} = 1$).

Analogamente si verifica facilmente che per il numero -5 si ha $|5| = 5$ e $\arg(-5) = \pi$, da cui

$$-5 = 5 (\cos \pi + i \sin \pi)$$

Per il numero $1 + i$ si ha $|1 + i| = \sqrt{2}$ e $\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Per il coniugato $1 - i$ si ha $|1 - i| = \sqrt{2}$ e $\arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$, quindi

$$\begin{aligned} 1 - i &= \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) \end{aligned}$$

che mette in evidenza la relazione di coniugio tra i due numeri.

Con la forma trigonometrica, l'interpretazione geometrica d'alcune operazioni tra numeri complessi si semplifica significativamente.

Vediamo come si comportano le coordinate polari rispetto ad alcune operazioni.

È immediato verificare⁶ che il coniugato di $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ è:

$$\bar{z} = \rho(\cos \theta - i \sin \theta) = \rho(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

ovvero:

$$|\bar{z}| = |z| \quad \text{e} \quad \arg \bar{z} = -\arg z$$

Per il prodotto vale il seguente Teorema:

Teorema 12 *Il prodotto tra due numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti*

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad ; \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

Esempio 13 *Risulta $(1+i)(2+i) = 1+3i$. Riscrivendo i due fattori in forma trigonometrica*

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad ; \quad 2+i = \sqrt{5} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$$

il loro prodotto è

$$x \cdot y = 1+i = \sqrt{10} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$$

che coincide con la precedente essendo $\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ e $\sin \frac{3\pi}{8} = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

È una diretta conseguenza del teorema sul prodotto il seguente

Corollario 14 *Il quoziente di due numeri complessi ha modulo il quoziente dei moduli e argomento la differenza degli argomenti*

$$|x/y| = |x|/|y| \quad ; \quad \arg(x/y) = \arg x - \arg y \quad y \neq 0$$

Possiamo considerare anche la potenza:

Corollario 15 *La potenza n -esima ($n \in \mathbb{N}$) d'un numero complesso z ha modulo pari alla potenza n -esima di $|z|$ e argomento n volte l'argomento di z*

$$|z^n| = |z|^n \quad ; \quad \arg(z^n) = n \arg z$$

Esempio 16

$$\begin{aligned} (1+i)^5 &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^5 = \\ &= \left(\sqrt{2} \right)^5 \left(\cos 5 \frac{\pi}{4} + i \sin 5 \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \\ &= 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

se vogliamo restare nell'intervallo $-\pi < \theta \leq \pi$ basta considerare come argomento principale $\frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3}{4}\pi$.

⁶Basta rammentare che \cos è una funzione pari e che \sin è una funzione dispari.

La potenza diventa un po' più semplice utilizzando la forma trigonometrica.

Per discutere delle radici n -esime di numeri complessi è pressoché obbligatorio utilizzare la forma trigonometrica.

Vogliamo calcolare una radice n -esima di z . Indichiamola con y

$$y = \sqrt[n]{z}$$

Il problema si risolve chiedendosi quale debba essere y affinché la sua potenza n -esima coincida con z

$$y^n = z$$

Scriviamo entrambi i membri in forma trigonometrica. Per il numero da trovare y poniamo $|y| = r$ e $\arg y = \alpha$:

$$y = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) \implies y^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$$

Per il numero z assegnato indichiamo con ρ e θ modulo e argomento. Stavolta ci sarà utile ricordare che l'argomento è determinato a meno di multipli di 2π

$$z = \rho[\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)] \quad k \in \mathbb{Z}$$

Chiaramente y^n e z coincidono se e solo se i loro moduli e i loro argomenti coincidono. Dev'essere dunque

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \implies \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

Al variare di $k \in \mathbb{Z}$, si trovano n argomenti diversi. Infatti, dando a k i valori $0, 1, 2, \dots, n-1$ si trovano n argomenti z pari a

$$\frac{\theta}{n}, \quad \frac{\theta + 2\pi}{n}, \quad \frac{\theta + 4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$$

Dando poi a k il valore n si trova

$$z = \frac{\theta + 2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

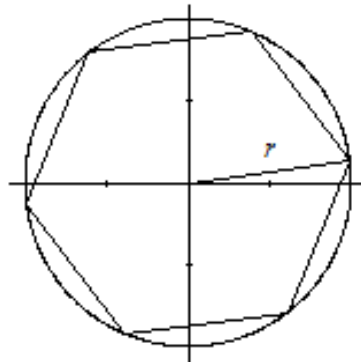
che coincide con il primo valore (a meno d'un giro inessenziale); dando poi a k valori $n+1, n+2, \dots$ oppure valori $-1, -2, \dots$, si ritroverebbero, via via, gli stessi primi n angoli individuati.

Dunque

Teorema 17 Ogni numero complesso $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ non nullo possiede sempre n radici n -esime. Esse hanno tutte lo stesso modulo $\sqrt[n]{\rho}$ e gli argomenti

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Geometricamente, le n radici n -esime d'un numero complesso sono, nel piano d'Argand-Gauss, i vertici d'un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio $r = \sqrt[n]{\rho}$:



Esempio 18 Calcoliamo le (due) radici quadrate di $1+i$. Essendo $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, le radici hanno modulo $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$ e argomenti

$$\frac{\pi/4 + 2k\pi}{2} \quad k = 0, 1 \quad \text{cioè} \quad \frac{\pi}{8} \text{ e } \frac{9\pi}{8}$$

Le sue radici sono perciò

$$\sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \quad ; \quad \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right)$$

Calcoliamo le radici seste di $1+i$. Esse hanno tutte modulo $\sqrt[6]{\sqrt{2}} = \sqrt[12]{2}$ e argomenti

$$\frac{\pi/4 + 2k\pi}{6} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

cioè

$$\frac{\pi}{24}, \frac{9\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{33\pi}{24}, \frac{41\pi}{24}$$

Calcoliamo le radici quarte di 1. Essendo

$$1 = 1 (\cos 0 + i \sin 0)$$

le radici quarte hanno tutte modulo 1 e argomenti

$$\frac{0 + 2k\pi}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

cioè $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Esse sono allora

$$1, i, -1, -i$$

Le radici quadrate di -1 sono i e $-i$. Infatti il loro modulo è 1 e i loro argomenti $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

1.4 Forma esponenziale di un numero complesso

Rammentando gli sviluppi in serie di Maclaurin delle funzioni $\sin \theta, \cos \theta, e^\theta$ (che valgono per ogni $\theta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \\ \sin \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \\ e^\theta &= 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} z &= \rho (\cos \theta + i \sin \theta) = \\ &= \rho \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \right) \right] = \\ &= \rho \left[1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \dots \right] = \\ &= \rho \left[1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \dots \right] = \\ &= \rho e^{i\theta} = \boxed{|z| \exp(i \arg z)} \end{aligned}$$

che è detta *forma esponenziale* del numero complesso z .

Con la forma esponenziale ritroviamo molto facilmente le regole di calcolo per la moltiplicazione, la divisione e la potenza

$$\begin{aligned}\rho e^{i\theta} \cdot r e^{i\delta} &= \rho r e^{i(\theta+\delta)} \\ \rho e^{i\theta} / r e^{i\delta} &= \frac{\rho}{r} e^{i(\theta-\delta)} \\ (\rho e^{i\theta})^n &= \rho^n e^{in\theta}\end{aligned}$$

Si può osservare che

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad ; \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

permettono di ricavare $\cos \theta$ e $i \sin \theta$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (1.4)$$

che sono note come *formule di Eulero*.

In particolare risulta

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

e si giunge così alla mirabolante formula⁷

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

che stabilisce una semplice relazione tra i personaggi più inquietanti della matematica (e, π, i), in cui i mediatori sono 0 e 1, non casualmente. gli elementi neutri delle due più importanti (su quattro) operazioni aritmetiche (addizione e moltiplicazione).

Osserviamo ancora che

$$e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$$

Dunque:

Teorema 19 *L'esponenziale del numero complesso $z = a + ib$ è un numero complesso con modulo e^a e argomento b*

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)} \quad ; \quad \arg(e^z) = \operatorname{Im}(z)$$

Ciò consente di definire il logaritmo naturale d'un numero complesso z

$$\ln z = y \quad \text{ovvero} \quad z = e^y$$

Scriviamo z in forma esponenziale e y in forma algebrica, l'uguaglianza $z = e^y$ diventa

$$\rho e^{i\theta} = e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$$

e perciò

$$\begin{aligned}\rho = e^a &\implies a = \ln \rho \\ e^{i\theta} = e^{ib} &\implies b = \theta\end{aligned}$$

Dunque:

⁷Popoli meno avversi di base alla matematica, come il francese, hanno consentito che in un cortile della Sorbonne fosse posta una lapide con la formula di cui.

Teorema 20 Ogni numero complesso $z \neq 0$ ha infiniti logaritmi naturali. Essi hanno tutti come parte reale il logaritmo del modulo di z e coefficienti dell'immaginario pari all'argomento di z aumentato d'un arbitrario multiplo intero (relativo) di 2π

$$\operatorname{Re}(\ln z) = \ln |z| \quad ; \quad \operatorname{Im}(\ln z) = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Esempio 21 Calcoliamo $\ln(-3)$. Essendo

$$-3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$$

risulta

$$\ln(-3) = \ln 3 + i(\pi + 2k\pi) = \ln 3 + i(1 + 2k)\pi$$

Per chi non si fidasse, controlliamo

$$\begin{aligned} e^{\ln 3 + i(\pi + 2k\pi)} &= e^{\ln 3} \cdot e^{i\pi} \cdot e^{i2k\pi} = \\ &= 3 \cdot (-1) \cdot (-1)^{2k} = \\ &= -3 \end{aligned}$$

Calcoliamo $\ln(1+i)$. Essendo

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

risulta

$$\ln(1+i) = \ln \sqrt{2} + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) = \frac{1}{2} \ln 2 + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right)$$

Chiudiamo richiamando la *serie esponenziale*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

affrontata nel caso reale.

Il risultato è invero più generale, infatti la serie esponenziale converge sempre a e^x per ogni $x \in \mathbb{C}$, cioè anche se $x = a + ib$ risulta

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+ib)^n}{n!} = e^{a+ib} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{C} \quad (1.5)$$

In realtà l'uguaglianza (1.5) rappresenta la *definizione* di funzione esponenziale. Ciò giustifica senz'altro il Teorema 19. Infatti da

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = \rho e^{i\theta}$$

si ottiene che

$$e^a = \rho = |e^{a+ib}| \quad \text{e} \quad b = \theta = \arg(e^{a+ib})$$

1.5 Equazioni algebriche e loro soluzioni

Cominciamo con un

Esempio 22 L'equazione

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \quad x \in \mathbb{R}$$

non ha radici reali. Infatti il suo discriminante è $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$. Essendo però $\sqrt{\Delta} = \pm 2i$, l'equazione ammette due radici complesse (coniugate)

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

Risulta, come verifichiamo subito, $(x - z_1)(x - z_2) = x^2 - 4x + 5$. Infatti

$$\begin{aligned} (x - 2 - i)(x - 2 + i) &= x^2 - (2 + i)x - (2 - i)x + (2 + i)(2 - i) = \\ &= x^2 - 4x + 5 \end{aligned}$$

Consideriamo una generica equazione algebrica di grado n con coefficienti tutti reali

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \quad a_s \in \mathbb{R}, s = 0, 1, \dots, n-1$$

Il celebre *Teorema fondamentale dell'algebra* dovuto a D'Alembert garantisce che tale equazione ammette sempre, se contate con la loro molteplicità, esattamente n radici complesse⁸ z_1, z_2, \dots, z_n .

Teorema 23 Sia

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

un polinomio di grado n in x con tutti i coefficienti a_s , $s = 0, 1, \dots, n-1$, reali. Esistono sempre n numeri complessi z_1, z_2, \dots, z_n , non necessariamente distinti, tali che

$$P(x) = (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)$$

I valori z_1, z_2, \dots, z_n sono evidentemente le radici dell'equazione $P(x) = 0$. Si dice *molteplicità (algebraica)* d'una radice il numero di volte che essa compare nella fattorizzazione appena scritta. Si dimostra che

$$P(\bar{x}) = \overline{P(x)}$$

che consente immediatamente di affermare che, se z^* è soluzione dell'equazione $P(x) = 0$, anche \bar{z}^* ne è soluzione, cioè che le radici complesse di un'equazione algebrica di grado n (con coefficienti tutti reali) sono sempre accompagnate dalla propria coniugata. Le uniche radici "spaiate" sono perciò le reali.

In particolare:

1. un'equazione di secondo grado può avere due radici reali (distinte o coincidenti) oppure due radici complesse coniugate (necessariamente distinte).
2. Un'equazione di terzo grado ha sicuramente almeno una radice reale. le altre due possono essere reali oppure complesse coniugate.
3. Un'equazione di quarto grado può avere quattro radici reali, oppure due complesse coniugate e due reali, oppure quattro complesse a due a due coniugate.

La straordinaria semplicità e simmetria del Teorema fondamentale dell'algebra è molto comoda: se cerchiamo le radici d'un'equazione algebrica di grado n nel campo complesso, ne troviamo esattamente sempre n ; si esce così dall'irregolarità delle radici reali per le quali si può solo affermare che un'equazione di grado n ne possiede *al più* n (ma, magari, non ne ha nessuna).

Segnaliamo infine che si può considerare senza (troppe) difficoltà l'insieme \mathbb{C}^n dei vettori con n componenti complesse. Utilizzando la forma algebrica, un generico vettore di \mathbb{C}^n è dunque un vettore

⁸Le eventuali radici reali sono comunque viste come numeri complessi con coefficiente nullo dell'immaginario.

del tipo:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ib_1 \\ ib_2 \\ \vdots \\ ib_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}, \text{ con } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

identificato da una coppia di vettori reali $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Converremo che, come nel caso dei numeri complessi, \mathbf{a} e \mathbf{b} siano rispettivamente il *vettore delle parti reali* e il *vettore dei coefficienti dell'immaginario*:

$$\operatorname{Re}(\mathbf{z}) = \mathbf{a} \text{ e } \operatorname{Im}(\mathbf{z}) = \mathbf{b}$$

Il coniugato $\bar{\mathbf{z}}$ d'un vettore complesso \mathbf{z} è il vettore che ha come elementi i coniugati degli elementi di \mathbf{z}

$$\mathbf{z} = \mathbf{a} + i\mathbf{b} \implies \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$$

Notiamo inoltre che, così come l'insieme dei numeri reali può essere visto come sottoinsieme dell'insieme dei complessi, anche l'insieme dei vettori con elementi reali può essere visto come un sottoinsieme dell'insieme dei vettori con elementi complessi: $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. Un vettore $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ è a componenti reali se $\operatorname{Im}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

2

Autovalori e autovettori

Presentiamo qui le nozioni di autovalore e autovettore di matrici quadrate con elementi reali. Per farlo useremo sia i numeri complessi sia vettori complessi.

L'individuazione degli autovalori e degli associati autovettori di una matrice quadrata A torna utile in svariati contesti. Infatti offre la possibilità di “sostituire” a una matrice uno scalare, molto più comodo per effettuare calcoli di varia natura.

Per esempio, in molti modelli dinamici, è frequente dover affrontare il calcolo di

$$A^t \mathbf{x} = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{t \text{ volte}} \cdot \mathbf{x} \quad (2.1)$$

Se si riuscisse a trovare uno scalare λ tale che

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

risulterebbe

$$A^t \mathbf{x} = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{t-1 \text{ volte}} \cdot \lambda\mathbf{x} = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{t-2 \text{ volte}} \cdot \lambda^2 \mathbf{x} = \lambda^t \mathbf{x}$$

Si potrebbe così sostituire il calcolo di A^t con il più maneggevole calcolo di λ^t .

Come vedremo tra breve è possibile avvalerci di questa sorta di “scalarizzazione” di una matrice sotto alcune precise condizioni.

Partiamo dalla seguente

Definizione 24 *Sia A una matrice reale quadrata d'ordine n . Uno scalare $\lambda \in \mathbb{C}$ è detto autovalore di A se esiste un vettore non nullo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, detto autovettore di A associato a λ , tale che*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

In particolare gli autovalori e gli autovettori potrebbero essere reali. Per esempio, si verifica facilmente che la matrice diagonale di ordine 2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è dotata di un autovalore reale $\lambda = 3$ al quale sono associati autovettori con componenti reali. Per esempio

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

infatti:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{x}$$

D'altro canto anche $\lambda^* = 2$ è autovalore reale di A e, per esempio, il vettore

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

è un autovettore associato in quanto:

$$A\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda^*\mathbf{y}$$

Se A è una matrice con elementi reali, accade sempre che ad autovalori reali siano associati autovettori reali; ad autovalori complessi sono associati invece autovettori complessi.

Riconsideriamo il caso:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dall'esempio si vede subito che a $\lambda = 3$ si potevano associare infiniti altri autovettori: per esempio $\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix}^T$, ecc.. Ciò non è casuale, vale infatti

Proposizione 25 *Ad ogni autovalore λ di una matrice quadrata A di ordine n sono associati infiniti autovettori \mathbf{x} che, con l'aggiunta del vettore nullo, formano un sottospazio vettoriale di \mathbb{C}^n detto autospazio o spazio invariante associato a λ .*

Dimostrazione. Dall'equazione definitoria di autovalori e autovettori

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

si ricava il sistema lineare omogeneo

$$(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (2.2)$$

che è sempre possibile perché ammette almeno la soluzione nulla $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ che non interessa. Affinché il sistema ammetta anche soluzioni non nulle deve essere

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

ovvero il sistema omogeneo (2.2) deve essere indeterminato. Dunque A ammette sempre infiniti autovettori associati a ogni autovalore λ che, con l'aggiunta del vettore nullo, formano l'insieme $\mathcal{X}(\lambda) \subset \mathbb{C}^n$ di tutte le possibili soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Per ogni coppia di vettori $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in \mathcal{X}(\lambda)$ e di scalari α e β si ha

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_n)(\alpha\mathbf{x}^1 + \beta\mathbf{x}^2) &= (A - \lambda I_n)\alpha\mathbf{x}^1 + (A - \lambda I_n)\beta\mathbf{x}^2 = \\ &= \alpha(A - \lambda I_n)\mathbf{x}^1 + \beta(A - \lambda I_n)\mathbf{x}^2 = \\ &= \alpha\mathbf{0} + \beta\mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

ovvero il vettore $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}^1 + \beta\mathbf{x}^2 \in \mathcal{X}(\lambda)$. Quindi $\mathcal{X}(\lambda)$, essendo chiuso rispetto alle combinazioni lineari, è un sottospazio vettoriale di \mathbb{C}^n . ■

Dalla dimostrazione precedente si deduce anche come trovare in pratica gli autovalori (e gli autovettori).

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Osservando che

$$\det(\lambda I_n - A) = \det[-(A - \lambda I_n)] = (-1)^n \det(A - \lambda I_n) = \begin{cases} \det(A - \lambda I_n) & n \text{ pari} \\ -\det(A - \lambda I_n) & n \text{ dispari} \end{cases}$$

e dunque

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \iff \det(\lambda I_n - A) = 0$$

gli autovalori sono le soluzioni anche dell'equazione:

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

detta *equazione caratteristica* di A .

Lo sviluppo di $\det(\lambda I_n - A)$ dà sempre luogo a un polinomio $P(\lambda)$ di grado n in λ , detto *polinomio caratteristico* di A

$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = P(\lambda)$$

con coefficienti *reali* $a_s, s = 0, 1, \dots, n-1$, che dipendono dagli elementi $a_{r,k}$ della matrice A .

Quindi l'equazione caratteristica è sempre un'equazione di grado n in λ :

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

con coefficienti reali.

Osservazione 26 Anche $\det(A - \lambda I_n)$ è un polinomio di grado n in λ . Infatti

$$\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)$$

L'unica differenza è che occorrerebbe introdurre anche per il termine λ^n il coefficiente a_n :

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Quindi è solo per comodità che si adotta l'espressione $\det(\lambda I_n - A)$ come caratteristica: in essa non occorre specificare a_n in quanto è sempre pari a 1. Ovviamente, dal punto di vista del calcolo degli autovalori non cambia nulla usando l'una o l'altra espressione.

Tale equazione, in virtù del Teorema fondamentale dell'algebra, ammette sempre n soluzioni, reali o complesse, contate con la loro molteplicità. In particolare, la realtà dei coefficienti garantisce anche che ogni soluzione complessa

$$\lambda^* = a + ib$$

sia sempre accompagnata dalla sua coniugata

$$\overline{\lambda^*} = a - ib$$

Per matrici reali, gli autovalori complessi viaggiano sempre in coppia!

Ribadiamo il tutto nella seguente

Proposizione 27 Una matrice A quadrata di ordine n ammette sempre n autovalori, reali o complessi, contati con la loro molteplicità. Essi sono le soluzioni dell'equazione caratteristica di A

$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Inoltre, quando A è una matrice con elementi tutti reali, se A ammette un autovalore complesso $\lambda^* = a + ib$, anche $\overline{\lambda^*} = a - ib$ è un suo autovalore.

L'insieme $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ di tutti gli autovalori di una matrice A è chiamato *spettro* di A .

Una volta individuati gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, gli autovettori loro associati si trovano risolvendo altrettanti sistemi lineari omogenei del tipo

$$(A - \lambda_s I) \mathbf{x}^s = \mathbf{0} \quad s = 1, 2, \dots, n$$

La determinazione degli autovalori di una matrice di ordine n richiede la risoluzione di un'equazione di grado n il che non è sempre agevole.

Possiamo dare alcuni risultati che semplificano un po' la vita:

1. Per una matrice triangolare (superiore o inferiore) e, a maggior ragione, diagonale gli autovalori coincidono con gli elementi della diagonale principale:

$$\lambda_s = a_{ss} \quad s = 1, \dots, n$$

2. Una matrice simmetrica ha autovalori tutti reali:

$$A = A^T \implies \lambda_s \in \mathbb{R}, \quad s = 1, \dots, n$$

3. Autovettori associati ad autovalori complessi coniugati hanno componenti complesse coniugate tra loro. Più precisamente è *sempre possibile scegliere* autovettori coniugati.

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + i\mathbf{b} \text{ è un autovettore associato a } \lambda = a + ib$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{a} - i\mathbf{b} \text{ è un autovettore associato a } \overline{\lambda} = a - ib$$

4. Una matrice ha (almeno) un autovalore nullo se e solo se è singolare.
5. Una matrice con elementi tutti positivi ha almeno un autovalore reale positivo.

Esempio 28 La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ha equazione caratteristica¹

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

con le $n = 2$ soluzioni reali e distinte:

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 5} = 2 \pm 3 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ e } \lambda_2 = 5$$

¹Essendo $n = 2$ pari, risulta

$$\det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A)$$

che sono gli autovalori di A . Troviamo gli autovettori.

Per $\lambda_1 = -1$ abbiamo il sistema

$$(A + 1 \cdot I_2) \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1+1 & 2 \\ 4 & 3+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che porge l'unica condizione $x_1 = -x_2$ ovvero, posto $x_2 = k$ arbitrario, si hanno infiniti autovettori del tipo

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} -k \\ k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad k \neq 0$$

Aggiungendo il vettore nullo, ovvero accettando anche il valore $k = 0$, si ottiene l'autospazio $\mathcal{X}(-1)$.

Per $\lambda_1 = 5$ abbiamo il sistema

$$(A - 5I_2) \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che porge l'unica condizione $x_2 = 2x_1$ ovvero, posto $x_1 = h$ arbitrario si hanno infiniti autovettori

$$\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} h \\ 2h \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad h \neq 0$$

Aggiungendo il vettore nullo, ovvero accettando anche il valore $h = 0$, si ottiene l'autospazio $\mathcal{X}(5)$.

Esempio 29 La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ha equazione caratteristica

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 11 = 0$$

con le $n = 2$ soluzioni complesse (e coniugate):

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-11} = 2 \pm i\sqrt{7} \Rightarrow \lambda_1 = 2 - i\sqrt{7} \text{ e } \lambda_2 = 2 + i\sqrt{7}$$

Dunque A presenta due autovalori complessi (e coniugati).

Per $\lambda_1 = 2 - i\sqrt{7}$ abbiamo il sistema

$$(A - (2 - i\sqrt{7}) I_2) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

\Downarrow

$$\begin{bmatrix} 1-2+i\sqrt{7} & -2 \\ 4 & 3-2+i\sqrt{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (i\sqrt{7}-1)x_1 - 2x_2 \\ 4x_1 + (i\sqrt{7}+1)x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ricavando x_2 dalla prima equazione e sostituendo nella seconda, si ottiene

$$x_2 = \frac{i\sqrt{7}+1}{2} x_1 \quad x_1 = k \text{ arbitrario}$$

Gli autovettori associati sono dunque

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} k \\ \frac{i\sqrt{7}+1}{2} k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{i\sqrt{7}+1}{2} \end{bmatrix} = k \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{7}/2 \end{bmatrix} \right), \quad k \neq 0$$

Aggiungendo il vettore nullo, ovvero accettando anche il valore $k = 0$, si ottiene l'autospazio $\mathcal{X}(2 - i\sqrt{7})$.

Per il coniugato autovalore $\lambda_2 = 2 + i\sqrt{7}$ non è necessario ripetere la procedura: ad esso sono associati autovettori “coniugati” di quelli associati a λ_1 , ovvero del tipo

$$\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} h \\ \frac{1-i\sqrt{7}}{2}h \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} = h \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{7}/2 \end{bmatrix} \right), \quad h \neq 0$$

Esempio 30 La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ha equazione caratteristica

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 = 0$$

con le $n = 2$ soluzioni reali ma coincidenti:

$$\lambda_1 = 2 \text{ e } \lambda_2 = 2$$

ovvero 2 è un autovalore “doppio” di A .

Per trovare gli autovettori associati a entrambi gli autovalori è sufficiente risolvere l'unico sistema

$$(A - 2I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che porge l'unica condizione $x_1 = -x_2$, ovvero, posto $x_2 = k$ arbitrario, si hanno infiniti autovettori, tutti del tipo

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} -k \\ t \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad k \neq 0$$

Aggiungendo il vettore nullo, ovvero accettando anche il valore $k = 0$, si ottiene l'autospazio $\mathcal{X}(2)$.

Diamo ora la seguente

Definizione 31 Sia λ_s un autovalore di una matrice quadrata A . Si chiama

- molteplicità geometrica di λ_s la dimensione $g(\lambda_s)$ dell'autospazio $\mathcal{X}(\lambda_s)$, ovvero il numero (massimo) di autovettori linearmente indipendenti associati a λ_s ;
- molteplicità algebrica di λ_s il numero $a(\lambda_s)$ di autovalori coincidenti con λ_s , ovvero il numero di volte che λ_s è ripetuto nella fattorizzazione in termini di primo grado del polinomio caratteristico

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

Esiste un legame importante tra molteplicità algebrica e geometrica. Si dimostra che la molteplicità geometrica non può mai eccedere l'algebrica:

$$1 \leq g(\lambda_s) \leq a(\lambda_s) \quad \forall s$$

In particolare

Definizione 32 Si dice che una matrice A ha difetto di molteplicità se

$$g(\lambda_s) < a(\lambda_s) \text{ per qualche } s$$

In caso contrario, ovvero se $g(\lambda_s) = a(\lambda_s) \quad \forall s$, si dice che A non ha difetto di molteplicità.

Gli autovalori λ senza difetto di molteplicità, ovvero con $g(\lambda) = a(\lambda)$, sono detti *regolari*. Dunque una matrice presenta difetto di molteplicità se almeno uno dei suoi autovalori non è regolare. Nei precedenti esempi la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

era l'unica che presentava difetto di molteplicità: $g(2) = 1$ e $a(2) = 2$.

Per verificare la presenza o meno di difetto di molteplicità si può far ricorso alla

Proposizione 33 *Una matrice A , quadrata di ordine n , non ha difetto di molteplicità se e solo se per ogni suo autovalore λ_s*

$$a(\lambda_s) + r(A - \lambda_s I_n) = n \quad s = 1, \dots, n$$

dove $r(\cdot)$ indica il rango di una matrice.

Dimostrazione. Poiché l'autospazio associato a un autovalore λ_s altri non è che il nucleo dell'applicazione lineare

$$(A - \lambda_s I_n) \mathbf{x}$$

la molteplicità geometrica $g(\lambda_s)$ coincide con la sua dimensione. Si ha allora

$$g(\lambda_s) = n - r(A - \lambda_s I_n)$$

Segue immediatamente l'asserto. ■

Il difetto di molteplicità sta a indicare, in un certo senso, una perdita di dimensione. Infatti, in presenza di alcuni autovalori ripetuti, ovvero di soli $k < n$ autovalori distinti, si ha sempre

$$a(\lambda_1) + a(\lambda_2) + \dots + a(\lambda_k) = n$$

Se qualche autospazio ha dimensione inferiore alla corrispondente molteplicità algebrica accade invece che

$$g(\lambda_1) + g(\lambda_2) + \dots + g(\lambda_k) < n$$

ovvero, anche usando tutti gli autovettori di una matrice, non si riesce a ricostruire uno spazio di dimensione n poiché non esistono n autovettori linearmente indipendenti (ma solo $k < n$).

Il prossimo risultato mette in evidenza come questa "perdita" dipenda esclusivamente dalla presenza di un difetto di molteplicità e non dal fatto che autospazi associati ad autovalori distinti possano avere elementi tra loro linearmente dipendenti.

Teorema 34 *Ad autovalori distinti sono sempre associati autovettori linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che una matrice A abbia m autovalori distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_m$ ai quali sono associati m autovettori $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m$ linearmente dipendenti, ovvero che solo k , con $1 \leq k < m$, autovettori siano tra loro linearmente indipendenti: possiamo sempre ipotizzare che gli autovettori linearmente indipendenti siano i primi k . Ma ciò implica che ognuno dei rimanenti $m - k$ autovettori può essere scritto come combinazione lineare dei primi k autovettori. Per esempio, prendendo l'ultimo autovettore \mathbf{x}^m , si avrebbe:

$$\mathbf{x}^m = \alpha_1 \mathbf{x}^1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}^k$$

con i coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ non tutti nulli, dato che $\mathbf{x}^m \neq \mathbf{0}$ perchè è un autovettore.

Premoltiplicando per la matrice A ambo i membri della precedente uguaglianza si ottiene:

$$A\mathbf{x}^m = A(\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}^k) = \alpha_1 A\mathbf{x}^1 + \dots + \alpha_k A\mathbf{x}^k = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \dots + \alpha_k \lambda_k \mathbf{x}^k$$

D'altro canto risulta anche

$$A\mathbf{x}^m = \lambda_m \mathbf{x}^m = \lambda_m (\alpha_1 \mathbf{x}^1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}^k) = \alpha_1 \lambda_m \mathbf{x}^1 + \dots + \alpha_k \lambda_m \mathbf{x}^k$$

quindi deve essere

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}^1 + \dots + \alpha_k \lambda_k \mathbf{x}^k = \alpha_1 \lambda_m \mathbf{x}^1 + \dots + \alpha_k \lambda_m \mathbf{x}^k$$

ovvero

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_m) \mathbf{x}^1 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_m) \mathbf{x}^k = \mathbf{0}$$

Essendo i vettori $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k$ linearmente indipendenti, l'ultima uguaglianza è possibile se e solo se tutti i coefficienti sono nulli:

$$\begin{cases} \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_m) = 0 \\ \dots \\ \alpha_k (\lambda_k - \lambda_m) = 0 \end{cases}$$

Ma, ricordando che i valori $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ non possono essere tutti nulli, ciò contraddice l'ipotesi che $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_m$: quindi gli autovettori $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^m$ devono essere linearmente indipendenti. ■

Possiamo dunque concludere che esistono n autovettori linearmente indipendenti se e solo se non c'è difetto di molteplicità.

2.1 Diagonalizzazione per similitudine

Da quanto detto sin'ora, risulta evidente che possiamo scrivere:

$$A^t \mathbf{x} = \lambda^t \mathbf{x}$$

se \mathbf{x} è un autovettore della matrice A associato all'autovalore λ .

Il problema è che si vorrebbe sfruttare questa sorta di scalarizzazione anche con vettori \mathbf{x} generici, che non siano necessariamente autovettori di A .

Come sovente accade possiamo procedere in questa direzione sotto alcune precise condizioni che presentiamo ora.

Anzitutto diamo la seguente

Definizione 35 Due matrici A e B , quadrate di ordine n , si dicono simili se esiste una matrice S quadrata di ordine n e invertibile tale che

$$A = SBS^{-1}$$

ovvero che

$$B = S^{-1}AS$$

In particolare se A è simile a una matrice diagonale D si dice che A è diagonalizzabile per similitudine.

Si può verificare che

1. la similitudine tra matrici è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.
2. Due matrici simili hanno la stessa equazione caratteristica e dunque gli stessi autovalori. In generale gli autospazi non coincidono.
3. Due matrici simili hanno uguale determinante. Infatti

$$\begin{aligned} \det A &= \det (SBS^{-1}) = \det S \det B \det S^{-1} = \\ &= \det S \det B \frac{1}{\det S} = \det B \end{aligned}$$

Non tutte le matrici possono essere diagonalizzate. Vale infatti il

Teorema 36 Una matrice A , quadrata di ordine n , è diagonalizzabile se e solo se non presenta difetto di molteplicità ovvero se e solo se ammette n autovettori linearmente indipendenti. Inoltre se A è diagonalizzabile risulta sempre

$$A = X\Lambda X^{-1} \quad (2.3)$$

dove

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

è la matrice che riporta in diagonale principale i suoi autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 & \cdots & \mathbf{x}^n \end{bmatrix}$$

è la matrice che ordinatamente presenta come colonne gli autovettori \mathbf{x}^s associati a λ_s .

Dimostrazione. Ogni autovalore λ_s e ogni autovettore \mathbf{x}^s ad esso associato soddisfanno

$$A\mathbf{x}^s = \lambda_s \mathbf{x}^s \quad s = 1, \dots, n$$

ovvero deve essere soddisfatto il sistema

$$\begin{cases} A\mathbf{x}^1 = \lambda_1 \mathbf{x}^1 \\ \vdots \\ A\mathbf{x}^n = \lambda_n \mathbf{x}^n \end{cases}$$

Indicando con Λ la matrice diagonale che riporta gli autovalori di A in diagonale principale e con X la matrice che ordinatamente presenta come colonne gli autovettori \mathbf{x}^s associati a λ_s , il sistema si può scrivere nella forma più compatta

$$AX = X\Lambda$$

Se A non presenta difetto di molteplicità, è sempre possibile scegliere n autovettori linearmente indipendenti, ovvero è possibile ottenere una matrice X con colonne linearmente indipendenti, quindi non singolare e cioè invertibile. Moltiplicando a destra entrambi i membri della precedente uguaglianza per l'inversa di X si ottiene

$$AXX^{-1} = A = X\Lambda X^{-1}$$

Per completare la dimostrazione occorre far vedere che la (2.3) rappresenta l'unica maniera per diagonalizzare una matrice. Supponiamo che esista un'altra diagonalizzazione per A

$$A = SDS^{-1}$$

con

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

ma allora deve essere

$$AS = SD$$

ovvero ogni colonna \mathbf{s}^k di S e ogni corrispondente elemento della matrice diagonale d_k devono soddisfare le equazioni

$$A\mathbf{s}^k = d_k \mathbf{s}^k \quad k = 1, \dots, n$$

Essendo S invertibile, nessuna sua colonna \mathbf{s}^k può essere nulla il che implica, per definizione, che d_k è un autovalore di A e \mathbf{s}^k è un associato autovettore. ■

Si noti che per ogni matrice quadrata (anche se non diagonalizzabile) si può comunque scrivere

$$AX = X\Lambda$$

Nel caso in cui sia $\det X \neq 0$ si riesce a portare a termine il processo di diagonalizzazione invertendo la matrice di trasformazione X .

Per matrici di ordine elevato si pone seriamente il problema di sapere *a priori* se siano o meno diagonalizzabili: il calcolo degli autovalori e degli associati autovettori diventa infatti sempre più laborioso con il crescere delle dimensioni della matrice stessa.

Oltre alla condizione necessaria e sufficiente fornita dalla Proposizione 33 relativa al difetto di molteplicità, un primo risultato è diretta conseguenza del Teorema 34

Corollario 37 *Se una matrice quadrata A possiede n autovalori distinti allora è diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Poiché ad autovalori diversi sono sempre associati autovettori linearmente indipendenti, la presenza di n autovalori diversi tra loro implica l'esistenza di n autovettori linearmente indipendenti. Per il Teorema 36 la matrice è diagonalizzabile. ■

Vediamo un paio di esempi:

Esempio 38 *Consideriamo la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Essa ha autovalori reali distinti $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$: si tratta di una matrice diagonalizzabile. Si trovano infatti i due autovettori linearmente indipendenti

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

associati a λ_1 e λ_2 rispettivamente. Dunque possiamo scrivere A nella forma diagonale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Esempio 39 *Consideriamo ora*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Troviamo i due autovalori complessi coniugati $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. Sono distinti, quindi B è diagonalizzabile. Troviamo due autovettori ad essi ordinatamente associati

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$$

Dunque

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}^{-1}$$

Un altro risultato riguarda invece le matrici simmetriche:

Teorema 40 *Se una matrice quadrata A è simmetrica allora:*

1. *ad autovalori distinti sono associati autovettori ortogonali;*

2. A è sempre diagonalizzabile e può essere sempre diagonalizzata tramite una matrice X ortonormale ovvero dotata di inversa coincidente con la sua trasposta²

$$X^{-1} = X^T$$

Segue che

$$A = X\Lambda X^T$$

Omettiamo volentieri la dimostrazione, ma vediamo un

Esempio 41 *La matrice simmetrica*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ha equazione caratteristica

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

da cui

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \Rightarrow \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3$$

Per $\lambda_1 = -1$ si ricava il sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con soluzioni

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} k$$

Per $\lambda_2 = 3$ si ricava il sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con soluzioni

$$\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} h$$

Si nota subito l'ortogonalità tra autovettori associati ai due diversi autovalori

$$(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} kh = (1-1)kh = 0 \quad \text{per ogni } h, k$$

Scegliendo poi autovettori di norma unitaria in entrambi i casi, ovvero scegliendo

$$h = k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

si ottiene una matrice

$$X = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

²Una matrice X è ortonormale solo se le sue colonne \mathbf{x}^k (righe) sono vettori ortogonali tra loro e sono di norma pari a 1. Infatti in tal caso si ha

$$\left[XX^T \right]_{k,s} = (\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^s) = \begin{cases} 0 & \text{per } k \neq s \\ \|\mathbf{x}^k\| = 1 & \text{per } k = s \end{cases}$$

dunque

$$XX^T = X^T X = I \Rightarrow X^T = X^{-1}$$

che risulta essere ortonormale, infatti

$$XX^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dunque

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Concludendo: le matrici simmetriche presentano svariate proprietà. Esse sono sempre diagonalizzabili, presentano sempre autovalori reali, possono sempre essere diagonalizzate tramite una matrice di trasformazione X ortonormale, consentendo di sostituire il calcolo della sua inversa con una semplice operazione di trasposizione.

Prima di chiudere l'argomento, segnaliamo che *tutte* le matrici quadrate sono comunque *triangularizzabili* nel senso che ogni matrice quadrata A può essere resa simile a una matrice triangolare T (inferiore o superiore, a scelta):

$$A = STS^{-1}$$

Inoltre si può mostrare che la matrice T riporta in diagonale principale gli autovalori λ_s di A

$$t_{ss} = \lambda_s, s = 1, \dots, n$$

Ciò comporta sempre che

$$\det A = \det T = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

2.2 Potenza di una matrice e matrice esponenziale

Come anticipato, la forma diagonale di una matrice agevola alcuni tipi di calcoli. Per esempio, se A è diagonalizzabile, il calcolo della *matrice potenza* A^t può essere ricondotto al calcolo di Λ^t , in quanto

$$\begin{aligned} A^t &= (X\Lambda X^{-1})^t = \underbrace{X\Lambda X^{-1} \cdot X\Lambda X^{-1} \cdot \dots \cdot X\Lambda X^{-1}}_{t \text{ volte}} = \\ &= X \underbrace{\Lambda \Lambda \dots \Lambda}_{t \text{ volte}} X^{-1} = X\Lambda^t X^{-1} \end{aligned}$$

Il vantaggio sta nel fatto che, per una matrice diagonale, risulta

$$\Lambda^t = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^t \end{bmatrix}$$

Quindi la potenza t -esima di una matrice quadrata $n \times n$ può essere ricondotto, previa diagonalizzazione, al calcolo della potenza t -esima degli n scalari λ_s .

Esempio 42 Per calcolare

$$A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^6$$

anziché moltiplicare A per sé stessa 6 volte si può ricorrere alla sua diagonalizzazione. Avevamo già individuato i suoi autovalori

$$\lambda_1 = -1 \text{ e } \lambda_2 = 5$$

e i relativi autovettori

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} -k \\ k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad k \neq 0 \quad e \quad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} h \\ 2h \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad h \neq 0$$

Scegliendo, per esempio $k = 1$ e $h = 1$, si ottengono due autovettori che, accostati, formano la matrice

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

dotata di inversa

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$A^{36} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^6 & 0 \\ 0 & 5^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Si noti che la scelta di un'altra coppia di autovettori avrebbe comunque portato allo stesso risultato finale tramite due differenti matrici di trasformazione X e X^{-1} : in tal senso la scelta degli autovettori è arbitraria.

Siamo pronti per introdurre la *matrice esponenziale*.

Consideriamo la seguente espressione:

$$I_n + A + \frac{A^2}{2} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Essa ricorda molto la serie esponenziale ma si tratta di una *serie* non numerica: il generico addendo è infatti una matrice quadrata di ordine n . Si dimostra che tale serie *converge sempre* a una matrice quadrata (di ordine n) detta appunto matrice esponenziale di A .

Definizione 43 Sia A una matrice quadrata di ordine n . Si dice matrice esponenziale di A e la si indica con $\exp(A)$ o con e^A la matrice data da

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + A + \frac{A^2}{2} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots$$

Come è fatta una matrice esponenziale? Come la si può calcolare? Se A è diagonalizzabile le risposte sono relativamente facili:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X \Lambda^k X^{-1}}{k!} = X \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} \right) X^{-1} = \\ &= X \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \right) X^{-1} = \\ &= X \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} \lambda_1^k/k! & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^k/k! \end{bmatrix} \right) X^{-1} = \\ &= X \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} X^{-1} \end{aligned}$$

Esempio 44 Consideriamo il precedente esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Risulta

$$\begin{aligned} e^A &= \exp \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}e^{-1} + \frac{1}{3}e^5 & \frac{1}{3}e^5 - \frac{1}{3}e^{-1} \\ \frac{2}{3}e^5 - \frac{2}{3}e^{-1} & \frac{1}{3}e^{-1} + \frac{2}{3}e^5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nulla cambia qualora la matrice possieda autovalori complessi. Vediamo un esempio.

Esempio 45 Consideriamo la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Risolvendo la sua equazione caratteristica si trovano i due autovalori complessi coniugati

$$\lambda_1 = 2 - i\sqrt{5} \text{ e } \lambda_2 = 2 + i\sqrt{5}$$

a cui sono associati autovettori complessi e coniugati. Per esempio la coppia

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 + i\sqrt{5} \\ -3 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 1 - i\sqrt{5} \\ -3 \end{bmatrix}$$

sono autovettori associati rispettivamente a $\lambda_1 = 2 - i\sqrt{5}$ e $\lambda_2 = 2 + i\sqrt{5}$. Utilizzandoli per la matrice di trasformazione X , risulta

$$\det X = \det \begin{bmatrix} 1 + i\sqrt{5} & 1 - i\sqrt{5} \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = -3(1 + i\sqrt{5}) + 3(1 - i\sqrt{5}) = -6i\sqrt{5}$$

Poiché

$$\arg(-6i\sqrt{5}) = -\pi/2 \quad e \quad |-6i\sqrt{5}| = 6\sqrt{5}$$

risulta

$$-6i\sqrt{5} = 6\sqrt{5}e^{-i\pi/2} \implies \frac{1}{6\sqrt{5}e^{-i\pi/2}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}e^{i\pi/2} = \frac{i}{6\sqrt{5}}$$

Quindi

$$\begin{aligned} X^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 + i\sqrt{5} & 1 - i\sqrt{5} \\ -3 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{i}{6\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 + i\sqrt{5} & 1 + i\sqrt{5} \end{bmatrix}^T = \\ &= \frac{i}{6\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -3 & -1 + i\sqrt{5} \\ 3 & 1 + i\sqrt{5} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-3i}{6\sqrt{5}} & \frac{i}{6\sqrt{5}}(-1 + i\sqrt{5}) \\ \frac{3i}{6\sqrt{5}} & \frac{i}{6\sqrt{5}}(1 + i\sqrt{5}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-i}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{6} - \frac{i}{6\sqrt{5}} \\ \frac{i}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{6} - \frac{i}{6\sqrt{5}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Infine otteniamo

$$\begin{aligned}
 e \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1+i\sqrt{5} & 1-i\sqrt{5} \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2-i\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & e^{2+i\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-i}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{6} - \frac{i}{6\sqrt{5}} \\ \frac{i}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{6} - \frac{i}{6\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} e^2 \cos \sqrt{5} - \frac{1}{5} \sqrt{5} e^2 \sin \sqrt{5} & -\frac{2}{5} \sqrt{5} e^2 \sin \sqrt{5} \\ \frac{3}{5} \sqrt{5} e^2 \sin \sqrt{5} & e^2 \cos \sqrt{5} + \frac{1}{5} \sqrt{5} e^2 \sin \sqrt{5} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Con quest'ultimo esempio si sono evidenziate un paio di cose:

- (i) in presenza di autovalori complessi la matrice di trasformazione X è a elementi complessi. Per determinarne l'inversa valgono comunque le stesse regole del caso reale: basta dividere la sua matrice aggiunta per il suo determinante.
- (ii) Attraverso la diagonalizzazione, una matrice può essere espressa come prodotto tra tre matrici. Se vi sono autovalori complessi le tre matrici utilizzate sono a elementi complessi: ciò nonostante il loro prodotto è reale come la matrice di partenza. Usando altri termini: il viaggio nel mondo complesso è solo un transito temporaneo, se si parte dal mondo reale si ritorna inesorabilmente in esso. Ma grazie a questo "transito" riusciamo a calcolare la matrice esponenziale (a elementi reali) di *ogni* matrice diagonalizzabile.

Chiudiamo elencando alcune delle proprietà della matrice esponenziale.

- Per ogni matrice diagonale Λ risulta

$$e^\Lambda = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

dove $\lambda_k, k = 1, \dots, n$ sono gli elementi della diagonale principale di Λ . In particolare per la matrice nulla O si ha:

$$e^O = \begin{bmatrix} e^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^0 \end{bmatrix} = I_n$$

- La matrice esponenziale non è mai singolare e si ha sempre

$$\det e^A = e^{\text{Tr } A}$$

dove $\text{Tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ è la cosiddetta *traccia* della matrice A .

- L'inversa di una matrice esponenziale è

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}$$

- Se A e B commutano allora anche le loro matrici esponenziali commutano e vale la formula

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B}$$

3

Sistemi dinamici

3.1 Che cos'è un sistema dinamico

Poche volte il nome *standard* d'una cosa è più appropriato di questa volta.

La parola *sistema* evoca un oggetto che potrebbe avere più dimensioni tra loro collegate. La parola *dinamico* ci suggerisce che esso si muove nel tempo. Ci vogliamo occupare proprio di modelli del genere.

Cominciamo con tre esempi concreti, che conducono naturalmente a sistemi dinamici.

Esempio 46 Gatti e topi — *In una certa area vivono gatti e topi. Come d'uso, tra gli sport preferiti dei gatti sta catturare e mangiare topi e la preoccupazione principale dei topi è decisamente antisportiva... Se i gatti mangiano tanti topi, scopano allegramente e si riproducono con entusiasmo, ma se ne mangiano troppi, dopo un po' non ne catturano poi così tanti, s'intristiscono e ci lasciano (figuratamente) le penne. I topi crescono con velocità legata al loro numero, ma la consistenza della loro popolazione è determinata anche dalle politiche sportive dei gatti. È abbastanza chiaro che in casi del genere non si possono scrivere separatamente le due storie: l'una dei felini e, l'altra, dei roditori, ma bisogna considerare congiuntamente quanto accade agli uni e agli altri. La lettera t sarà usata in questo libretto per indicare il tempo, pertanto non potremo usarla per indicare il numero di topi. Useremo allora le iniziali in inglese (c per i gatti e m per i topi), non tanto per amore, ma quanto per il ruolo consolidato dell'inglese come lingua veicolare, il vettore:*

$$\begin{bmatrix} c(t) \\ m(t) \end{bmatrix}$$

ci dice quanti gatti $c(t)$ e quanti topi $m(t)$ sono in quell'area al tempo t . Ecco un buon esempio di sistema dinamico.

Esempio 47 Mercati oligopolistici — *In un mercato di dentifrici competono due produttori, numerati con 1 e 2. I consumatori non hanno tutte preferenze stabili per l'una o l'altra marca e alcuni di loro passano allegramente ogni mese da 1 a 2 e da 2 a 1. Se volessimo studiare l'evoluzione nel tempo delle quote di mercato rispettive $x_1(t), x_2(t)$, o, che è lo stesso, del vettore:*

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

ancora una volta non potremmo districare la storia della quota di mercato del primo produttore dalla storia parallela dell'altro.

Esempio 48 *Un sistema poco sistema* — Investiamo C a interessi composti per t anni con tasso d'interesse i . Tutti sanno che il montante dell'impiego è

$$M(t) = C(1+i)^t$$

Il montante è dinamico, ma in questa versione ipersemplificata non è un sistema perché unidimensionale. Magnanimente attribuiremo anche a casi semplicissimi come questo i galloni di “sistema dinamico”, ma, perché non s'allarghino troppo li diremo “unidimensionali”. Consacreremo oltre il fatto che, nei due casi precedenti, avevamo a che fare con sistemi dinamici “bidimensionali”, o, che è lo stesso, di dimensione 2.

Siamo pronti per formalizzare una definizione di sistema dinamico.

Definizione 49 Diciamo sistema dinamico un'applicazione $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, cioè, secondo la terminologia standard, una funzione vettoriale d'uno scalare, pensato come il tempo. Il numero n è detto dimensione del sistema dinamico. Le componenti del vettore:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

si dicono variabili di stato del sistema¹. Il vettore $\mathbf{x}(t)$ si chiama vettore di stato.

Se conoscessimo \mathbf{x} , questo sarebbe, probabilmente, il libro più corto della storia, perché finirebbe qui. Conoscendo \mathbf{x} , possiamo calcolare la posizione del sistema a ogni tempo t che ci dovesse interessare.

L'immagine geometrica dell'evoluzione d'un sistema è frequentemente chiamata *traiettoria*. Se, per esempio, riconsideriamo l'esempio 48. Se $C = 1000$, $i = 0.05$, cosicché:

$$M(t) = 1000 \cdot 1.05^t$$

abbiamo la traiettoria:

Nel caso d'un sistema bidimensionale si può pensare a una traiettoria come una curva nello spazio 3D.

¹Ovviamente perché ne descrivono lo stato al tempo t .

Dalla dimensione 3 in su, niente da fare, perché servirebbero almeno 4 assi, che sono troppi per noi poveri esseri.

È il momento di capire perché serve il resto del libretto.

Vi sono numerose situazioni concrete, nelle quali un sistema dinamico $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un modello appropriato per descrivere, capire, gestire un oggetto che evolve nel tempo. In tali situazioni, però, $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ non è nota. Se ne conoscono alcune proprietà e ci si propongono obiettivi ambiziosi del tipo:

- trovare \mathbf{x} ; o meno ambiziosi, del tipo:
- dedurre dalle proprietà note di \mathbf{x} altre proprietà del sistema stesso, in particolare, le *proprietà asintotiche* ossia il comportamento di $\mathbf{x}(t)$ quando $t \rightarrow +\infty$.

È chiaro che, se si trova \mathbf{x} , è poi immediato dedurne le proprietà asintotiche. È cruciale anche capire perché, in ambito economico, anche gli obiettivi meno ambiziosi possano essere rilevanti.

Riprendiamo l'esempio 47, degli allegri consumatori di dentifricio. Più avanti scopriremo un fatto estremamente interessante. Si può provare che, dopo un po' di anche drastici cambiamenti nelle quote di mercato dei due produttori, esse si stabilizzano, per cui un fenomeno che nasce dinamico, diviene statico e, quindi, più facile da studiare.

La nozione chiave per il resto del libretto è *legge del moto*, cui dedichiamo le prossime pagine.

È un'idea che tutti dovremmo aver appreso quando abbiamo cominciato a studiare fisica e, in particolare, la legge di caduta d'un grave. Ci hanno parlato dell'accelerazione di gravità g e ci hanno detto che, conseguentemente, dopo un certo tempo t , il grave avrebbe percorso lo spazio $s(t) = v_0 + \frac{1}{2}gt^2$, dove v_0 è la velocità iniziale del grave.

L'informazione sull'accelerazione è stata, probabilmente, la prima importante "legge del moto", che ci è stata propinata. La funzione $s(t)$, conseguente, è forse il primo sistema dinamico delle nostre vite, determinato compiutamente (obiettivo "ambizioso") a partire dalla proprietà nota di costanza dell'accelerazione di gravità.

3.1.1 Il tempo

Considereremo due tipi di sistemi dinamici, che differiscono tra loro nella modellazione del tempo, che può essere inserita in un modello in due modi, in alternativa:

- (A) tempo *continuo*;
- (B) tempo *discreto*.

Si lavora con tempo continuo quando t può assumere tutti i valori in un intervallo reale. Tipicamente l'intervallo è:

$$0 \leq t < +\infty$$

o, equivalentemente:

$$t \in \mathcal{T} = [0, +\infty)$$

che indichiamo di solito con \mathbb{R}_+ . Si lavora con tempo discreto quando t può assumere solo valori discreti, solitamente scelti equidistanziati:

$$t \in \mathcal{T} = \{t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, \dots, t_0 + (n-1)h, t_0 + nh, \dots\}$$

ove $h > 0$ è detto *passo* del sistema dinamico.

Possiamo decidere che $t_0 = 0$ e scegliere come unità di misura del tempo proprio h . La conseguenza è che:

$$\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

che denotiamo di solito con \mathbb{N} , insieme dei naturali.

Scopriremo oltre l'importanza del *punto di partenza* d'un sistema dinamico $\mathbf{x} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ che merita un nome apposito.

Definizione 50 *Si chiama posizione iniziale d'un sistema dinamico \mathbf{x} il vettore $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$. Quando decidiamo che la posizione iniziale d'un sistema dinamico deve essere un certo vettore $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, cioè decidiamo che $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$, si dice che assegniamo una condizione iniziale.*

Esempio 51 *Se riconsideriamo l'esempio 46 e sappiamo che oggi, data 0, in quell'area vivono 10 gatti e 100 topi, la posizione iniziale del sistema è:*

$$\begin{bmatrix} c(0) \\ m(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Se vogliamo studiare l'evoluzione delle due collettività se partissero da 1000 gatti e 10000 topi e, quindi, imponessimo:

$$\begin{bmatrix} c(0) \\ m(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 10000 \end{bmatrix}$$

avremmo assegnato una condizione iniziale.

Si può dire qualcosa dei rapporti tra sistemi con tempo continuo e sistemi con tempo discreto? Ci limitiamo a un breve elenco:

- Ciascun tipo può pensarsi come approssimazione dell'altro tipo.
- I sistemi con tempo continuo si possono trattare analiticamente meglio dei sistemi con tempo discreto.
- I sistemi con tempo discreto si possono trattare numericamente meglio degli altri, quindi, spessissimo si studia un sistema dinamico con tempo continuo per via numerica, dapprima approssimandolo con un sistema con tempo discreto e studiando poi numericamente questo.
- I sistemi con tempo discreto sono più “difficili”, nel senso che possono avere comportamenti decisamente molto complicati, anche in casi apparentemente molto semplici. Ne vedremo un assaggio nel penultimo capitolo.

3.2 La legge del moto

In linea di principio, l'idea di legge del moto non è *per se* difficile. Si tratta d'una relazione che lega ciò che accade in un dato istante a un sistema dinamico, per esempio come esso si sta muovendo, alla posizione o, financo la storia del sistema stesso.

Consideriamo due esempi e vediamo come, in ciascuno di essi, dalla legge del moto si riesca a ricostruire l'evoluzione del sistema dinamico.

Esempio 52 *Risparmio* — *Un bambino risparmia ogni settimana 2€ della paghetta che riceve. Diciamo $x(t)$ l'ammontare dei suoi risparmi alla data t . Questo sistema dinamico ha legge del moto (tempo in settimane, variabile di stato in €):*

$$x(t+1) = x(t) + 2$$

Vediamo elementarmente come dalla legge del moto si possa risalire all'evoluzione globale del sistema. Scriviamo in successione le equazioni che s'ottengono dalla legge del moto assegnando al tempo i valori $0, 1, 2, \dots, (t-1)$. Si ha:

$$\begin{aligned} x(1) &= x(0) + 2 \\ x(2) &= x(1) + 2 \\ x(3) &= x(2) + 2 \\ &\dots \\ x(t) &= x(t-1) + 2 \end{aligned}$$

Sommando membro a membro abbiamo:

$$\sum_1^t x(s) = \sum_0^{t-1} x(s) + 2t$$

onde, fatte le debite semplificazioni:

$$x(t) = x(0) + 2t$$

Come si vede, anche conoscendo la legge del moto, non possiamo determinare univocamente il contenuto del salvadanaio del nostro piccolo risparmiatore, se non conosciamo la posizione iniziale $x(0)$. Troveremo più avanti, in generale, questa situazione con poche eccezioni

$$\text{Legge del moto e basta} \Rightarrow \text{infinite traiettorie} \quad (3.1)$$

$$\text{Legge del moto} + \text{condizione iniziale} \Rightarrow \text{una traiettoria}$$

Prendiamo un altro esempio, stavolta con tempo continuo.

Esempio 53 Capitalizzazione continua — *Un investitore impiega mezzi finanziari, chiede gli siano pagati interessi ad ogni istante e tali interessi sono immediatamente reinvestiti e, conseguentemente, produrranno interessi a loro volta. Si tratta d'un modello d'ampio uso in Finanza, quando si vuole approssimare il risultato d'impieghi molto frequenti. Chiamiamo $x(t)$ il montante dell'impiego in t . Ne analizziamo la dinamica locale (o, come spesso si dice, "in piccolo"). Pensiamo a una durata di tempo breve h e costruiamo $x(t+h)$ a partire da $x(t)$. Il montante alla data $t+h$ avrà, in più rispetto al montante in t , gli interessi (semplici) maturati tra t e $t+h$ a tasso ρ e anche gli "interessini" da reinvestimento tra t e $t+h$, che saranno, fatalmente, proporzionali a potenze di h con esponente maggiore di 1. In breve:*

$$x(t+h) = x(t) + x(t) \cdot \rho \cdot h + o(h) \quad (3.2)$$

ove, come a solito, $o(h)$ sta per una quantità che va a zero con h e più rapidamente di h (ossia: $o(h)/h \rightarrow 0$ per $h \rightarrow 0$). La "fotografia" in piccolo della legge del moto (3.2) può riscriversi:

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \rho x(t) + \frac{o(h)}{h} \quad (3.3)$$

Il primo membro è il rapporto incrementale di x . Esso è identico al secondo membro. Se $h \rightarrow 0$, i due membri hanno necessariamente lo stesso comportamento. Il secondo membro converge a $\rho x(t)$, allora anche il rapporto incrementale converge e, quindi, x è differenziabile e deve averci:

$$x'(t) = \rho x(t) \quad (3.4)$$

Abbiamo ottenuto una relazione tra la derivata della variabile di stato e il suo valore, il tutto al tempo t . Vediamo ora come costruire l'evoluzione "in grande" della variabile di stato. Dividendo ambo i membri della (3.4) per $x(t)$ e rammentando la nozione di derivata logaritmica, si ha:

$$D[\ln |x(t)|] = \rho$$

Poiché, in questo esempio, la variabile di stato non può assumere solo valori negativi, possiamo lasciar perdere il modulo:

$$D[\ln x(t)] = \rho$$

Le funzioni con derivata costante su un intervallo sono solo le lineari affini, quindi:

$$\ln x(t) = \rho t + k$$

con $k \in \mathbb{R}$ onde:

$$x(t) = Ce^{\rho t}$$

avendo posto $C = e^k$.

Il lettore attento avrà notato come, anche in questo esempio, ricorra la situazione già vista nel precedente (tabella (3.1)). Dalla legge del moto otteniamo infinite traiettorie di crescita esponenziale del montante. Precisando la posizione iniziale (ossia l'ammontare inizialmente investito C) s'ottiene una traiettoria.

Dopo quest'introduzione passiamo a dichiarare di quali tipi di leggi del moto intendiamo occuparci: sono tra le più comunemente usate nella teoria economica.

L'idea intuitiva è abbastanza semplice. È opportuno presentarla separatamente in tempo continuo e in tempo discreto.

3.2.1 Legge del moto in tempo continuo

Consideriamo un sistema dinamico $\mathbf{x} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, in tempo continuo. Consideriamo il vettore di stato in t e in $t+h$. Possiamo chiamare rapporto incrementale (vettoriale) il vettore:

$$\frac{1}{h} [\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)] = \frac{1}{h} \left(\begin{bmatrix} x_1(t+h) \\ x_2(t+h) \\ \dots \\ x_n(t+h) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h} \\ \frac{x_2(t+h) - x_2(t)}{h} \\ \dots \\ \frac{x_n(t+h) - x_n(t)}{h} \end{bmatrix}$$

assumiamo che esso si possa esprimere in una maniera molto generale, ma, per certi versi analoga alla (3.3):

$$\frac{1}{h} [\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)] = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] + \frac{1}{h} \mathbf{o}(h) \quad (3.5)$$

ove $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ e ove $\mathbf{o}(h)$ è un vettore di quantità infinitesime d'ordine superiore a h quando $h \rightarrow 0$.

Riscriviamo la (3.5) in maniera più esplicita al fine di comprenderne a fondo l'essenza.

$$\begin{cases} \frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h} = f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] + \frac{o_1(h)}{h} \\ \frac{x_2(t+h) - x_2(t)}{h} = f_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] + \frac{o_2(h)}{h} \\ \dots \\ \frac{x_n(t+h) - x_n(t)}{h} = f_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] + \frac{o_n(h)}{h} \end{cases}$$

I rapporti incrementali a primo membro sono le velocità medie di cambiamento delle variabili di stato tra l'epoca t e l'epoca $t+h$. Tali velocità dipendono dalla posizione corrente del sistema e, quindi, in linea di principio dal valore di tutte le variabili di stato oltre che dal tempo. Tale dipendenza è descritta da \mathbf{f} ed è "sporcata" dagli addendi $o_r(h)/h$, con $r = 1, 2, \dots, n$. Quando però h tende a 0 l'effetto di questi ultimi svanisce.

Facciamo tendere h a zero. I secondi membri ammettono i limiti rispettivi:

$$\begin{aligned} & f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] \\ & f_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] \\ & \dots \\ & f_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] \end{aligned}$$

convergono allora anche i primi membri con gli stessi limiti. La convergenza implica che le variabili di stato siano funzioni differenziabili del tempo e deve valere questo sistema d'equazioni²:

$$\begin{cases} x'_1(t) = f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] \\ x'_2(t) = f_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] \\ \dots \\ x'_n(t) = f_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] \end{cases} \quad (3.6)$$

o, più compattamente:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

ove abbiamo indicato con $\mathbf{x}'(t)$ il vettore $\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \dots \\ x'_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, che raccoglie ordinatamente le derivate delle variabili di stato.

Esempio 54 Ancora gatti e topi — Vediamo come si può illustrare questo tipo di legge del moto nel caso sopra visto nell'esempio 46. Scriviamo un sistema di due equazioni che descriva un possibile modo di variare dei numeri di gatti e topi nell'intervallo di tempo $[t, t+h]$. Cominciamo dai gatti. Assumiamo che il loro numero vari secondo l'equazione:

$$c(t+h) - c(t) = g[m(t), t]c(t)h + o_c(h)$$

A primo membro sta l'incremento del numero di gatti tra le due date. Il primo addendo ne è la parte principale ed è proporzionale al numero di gatti esistenti ($c(t)$), alla lunghezza del periodo d'osservazione (h). La costante di proporzionalità g è tutt'altro che costante perché dipende dal numero di topi disponibili e dal tempo. Possiamo pensare che g (come growth rate) sia una funzione crescente del numero di topi e la dipendenza dal tempo si spiega con le note abitudini sessuali dei gatti, notoriamente poco costanti nel tempo (per fortuna!). Passiamo ai topi:

$$m(t+h) - m(t) = \gamma[c(t), t]m(t)h + o_m(h)$$

Il tasso di crescita γ dipende dal numero di gatti esistenti e dalla stagione. La struttura della parte principale è affatto analoga alla struttura del caso felino. Mettiamo a sistema le due equazioni e ne dividiamo ambo i membri per h :

$$\begin{cases} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} = g[m(t), t]c(t) + \frac{o_c(h)}{h} \\ \frac{m(t+h) - m(t)}{h} = \gamma[c(t), t]m(t) + \frac{o_m(h)}{h} \end{cases}$$

Facciamo tendere h a 0 e la storia è la solita, i secondi membri convergono, allora anche i primi e i limiti dei due membri sono gli stessi. Si ha:

$$\begin{cases} c'(t) = g[m(t), t]c(t) \\ m'(t) = \gamma[c(t), t]m(t) \end{cases}$$

²Nelle scienze della natura (fisica, chimica, biologia), per indicare la derivata d'una funzione $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ove la variabile indipendente è il tempo, invece della più comune notazione $x'(t)$ è in voga l'uso della notazione che usava Isaac Newton $\dot{x}(t)$, per la derivata seconda $\ddot{x}(t)$ ecc.

Noi preferiamo non adottare quest'usanza e indicheremo le derivate (generalmente) con apici.

Useremo, se del caso (v. p. 61 e segg.), anche la notazione di Leibniz:

$$\frac{dx(t)}{dt} \text{ o anche } \frac{dx}{dt}$$

È un caso speciale della (3.6) con

$$\begin{aligned}x_1 &= c \text{ e } x_2 = m \\f_1[x_1(t), x_2(t); t] &= g[x_2(t), t] x_1(t) \\f_2[x_1(t), x_2(t); t] &= \gamma[x_1(t), t] x_2(t)\end{aligned}$$

3.2.2 Leggi del moto in tempo discreto

Possiamo procedere più spediti, sulla base di quanto appena visto in tempo continuo. Abbiamo un sistema dinamico in tempo discreto $\mathbf{x} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Consideriamo due epoche consecutive: t e $t+1$. Il vettore di \mathbb{R}^n :

$$\mathbf{x}(t+1) - \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \dots \\ x_n(t+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t+1) - x_1(t) \\ x_2(t+1) - x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t+1) - x_n(t) \end{bmatrix}$$

raccoglie le variazioni delle n variabili di stato osservate passando dall'epoca t all'epoca successiva $t+1$. Possiamo procedere (all'incirca) come in tempo continuo, pensando che tali variazioni dipendano dallo stato del sistema $\mathbf{x}(t)$, dal tempo t stesso:

$$\mathbf{x}(t+1) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), t]$$

essendo $\mathbf{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Più in chiaro:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) - x_1(t) \\ x_2(t+1) - x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t+1) - x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] \\ g_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] \\ \dots \\ g_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] \end{bmatrix}$$

Ora, si noti che le ultime due equazioni possono essere riscritte come segue:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), t]$$

Definiamo la nuova applicazione $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] = \mathbf{x}(t) + \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), t]$$

Abbiamo allora:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

o, più in chiaro:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] \\ x_2(t+1) = f_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] \\ \dots \\ x_n(t+1) = f_n[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); t] \end{cases}$$

Vediamo questo:

Esempio 55 Mercati oligopolistici 2 — Torniamo all'esempio 47. Supponiamo che le percentuali di consumatori fedeli del dentifricio 1 e del dentifricio 2 siano, rispettivamente, le due funzioni del tempo $\alpha(t)$ e $\beta(t)$. Le due percentuali complementari $1 - \alpha(t)$ e $1 - \beta(t)$ sono le percentuali degli "infedeli". La prima di coloro che passano dall'1 al 2, la seconda dei passatori da 2 a 1. Scriviamo le due equazioni che descrivono la dinamica delle quote di mercato $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \alpha(t) x_1(t) + (1 - \beta(t)) x_2(t) \\ x_2(t+1) = (1 - \alpha(t)) x_1(t) + \beta(t) x_2(t) \end{cases}$$

Esse si possono scrivere anche come segue:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(t) & 1-\beta(t) \\ 1-\alpha(t) & \beta(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

o, più compattamente:

$$\mathbf{x}(t+1) = A(t) \mathbf{x}(t)$$

ove:

$$A(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) & 1-\beta(t) \\ 1-\alpha(t) & \beta(t) \end{bmatrix}$$

è la cosiddetta matrice di transizione.

Potremo spesso trattare congiuntamente sistemi in tempo continuo e in tempo discreto scrivendo:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}(t+1) \end{array} \right\} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] \quad (3.7)$$

È importante sottolineare che le due leggi del moto non sono approssimativamente equivalenti, anche se i loro secondi membri sono uguali. Se si vuole “discretizzare” il sistema continuo:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

si deve considerare il sistema:

$$\mathbf{x}(t+1) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

ovvero

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), t]$$

la legge del moto discreta \mathbf{g} , dev'essere legata alla legge del moto continua \mathbf{f} dalla relazione:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

Illustriamo tutto ciò con un esempio.

Esempio 56 Capitalizzazione annua e continua — Investiamo l'ammontare C a interessi composti, con tasso annuo i . Il montante $x(t)$ ha legge del moto:

$$x(t+1) = (1+i)x(t)$$

se ne ricava facilmente³:

$$x(t) = C(1+i)^t$$

Nell'Esempio 48 avevamo trovato:

$$x(t) = Ce^{\rho t}$$

Si tratta di due funzioni esponenziali. Per i tempi interi la variabile di stato assume lo stesso valore sse ⁴:

$$1+i = e^{\rho}$$

da cui le note espressioni del tasso annuo d'interesse in funzione dell'intensità istantanea e viceversa⁵.

³ Come nell'Esempio 48, ma stavolta moltiplicando le uguaglianze membro a membro.

⁴ Sta per “se e solo se”. In inglese si scrive “iff” per “if and only if”.

⁵ Cioè:

$$i = e^{\rho} - 1$$

e:

$$\rho = \ln(1+i)$$

Esempio 57 La ragnatela — Esploriamo come il giuoco congiunto di domanda e offerta determini l'evoluzione nel tempo del prezzo d'una merce. Conosciamo la funzione di domanda $d(p)$, che ci dice quanto sarà domandato d'una merce, se offerta al prezzo p . La pensiamo strettamente decrescente. Conosciamo anche la funzione d'offerta⁶ $s(p)$, che, analogamente, ci dice quanto sarà offerto se il prezzo di vendita è p . La pensiamo strettamente crescente⁷. Il prezzo d'equilibrio p^* risolve l'equazione:

$$d(p) = s(p)$$

La dinamica che esaminiamo è affatto naturale: i produttori scelgono il prezzo p che loro consente d'intercettare la domanda. Fin qui chiacchiere. passiamo al modello. Il passo non è difficile. Siamo in tempo discreto. Nel mercato è proposto in t un prezzo $p(t)$. La quantità offerta in $t + 1$ dipende dal prezzo in t :

$$s[p(t+1)] = d[p(t)]$$

onde:

$$p(t+1) = s^{-1}[d[p(t)]] = f[p(t)]$$

Questo modello è associato all'idea di ragnatela, perché, come vedremo più avanti, sotto opportune condizioni, graficamente le traiettorie formano una ragnatela.

3.2.3 Equazioni differenziali ed equazioni alle differenze

I sistemi dinamici di cui ci siamo appena occupati si dicono di *prim'ordine*.

Nel caso continuo perché la derivata che compare è la derivata prima (derivata di prim'ordine). Nel caso discreto perché la differenza tra le date coinvolte è:

$$(t+1) - t = 1$$

È naturale pensare a situazioni più generali.

Ne citiamo alcune.

Esempio 58 Numeri di Fibonacci — Ha assunto recentemente popolarità, vedi, per esempio [15], una sequenza di numeri, che si può pensare generata dalla legge del moto d'un sistema dinamico in tempo discreto, più generale dei tipi visti finora:

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t)$$

In questo caso la massima distanza tra date coinvolte è:

$$(t+2) - t = 2$$

e fa venir voglia di dire che si tratta d'un sistema di second'ordine.

Esempio 59 Acceleratore 1 — Consideriamo un sistema economico estremamente semplice. Vediamo quanto accade tra due date vicine, t e $t+h$, il tutto a meno di $o(h)$. Il PIL prodotto è: $Y(t)h$. Il consumo è $C(t)h = cY(t)h$ (con $c \in [0, 1]$, la propensione al consumo). Gli investimenti pubblici sono $G(t)h$ mentre gli investimenti privati sono $J(t)h$. Le imprese private investono tenendo conto dell'evoluzione dei consumi e, più precisamente della loro accelerazione $C''(t)$. Sia $J(t)h = kC''(t)h = kCY''(t)h$ con $k > 0$, il coefficiente d'accelerazione. In equilibrio deve essere:

$$Y(t)h = J(t)h + G(t)h + C(t)h$$

⁶Scegliamo s , che evoca *supply*.

⁷Ciò implica che $q = s(p)$ può essere invertita in $p = s^{-1}(q)$.

Dividiamo per h ed esprimiamo tutto in termini della variabile di stato $Y(t)$. Si ha:

$$Y(t) = cY(t) + G(t) + kcY''(t) \quad (3.8)$$

Abbiamo una legge del moto che collega la variabile di stato in t (ossia $Y(t)$), la sua derivata seconda in t (ossia $Y''(t)$), ma non ci scandalizzeremmo se facesse capolino pure $Y'(t)$ e il tempo t stesso (attraverso la volubile scelta del Governo di $G(t)$). L'equazione ricade nel "tipo":

$$x''(t) = f[x'(t), x(t); t]$$

e crediamo che a tutti punga vaghezza di parlare d'una relazione di second'ordine proprio perché la derivata d'ordine più elevato in ballo è la seconda.

I sistemi dinamici costituiscono la spina dorsale dello sviluppo della matematica degli ultimi cinque secoli. Newton ha costruito il calcolo differenziale per maneggiare ed esprimere le leggi del moto della fisica. Di nuovo problemi dinamici hanno determinato la nascita dell'analisi funzionale (l'analisi, dove gli oggetti di base non sono più semplici numeri o impudenti vettori, ma sono funzioni da qualche spazio verso un altro spazio). L'enorme impatto della matematica in ambito finanziario, che ha cambiato ogni (allora) ragionevole scenario da giusto quarant'anni a questa parte, originando la "nuova finanza", è ancora una volta legato alla versione aleatoria dei sistemi dinamici, che, in famiglia, si chiamano *processi stocastici*.

Questa presenza, un po' *sub specie aeternitatis*, ha, come generalmente hanno le cose quasi eterne, costi senza pari da pagare quando occorre.

Un primo costo è di nomenclatura. È essenziale acquistare familiarità con come tradizionalmente si chiamano questi schemi, anche solo per poter accedere senza problemi a risultati vari, talora d'estremo interesse.

Una raffica di definizioni ci aiuterà a collocare quanto abbiamo visto finora nel linguaggio tradizionale dell'Analisi matematica.

Definizione 60 Consideriamo la legge del moto d'un sistema dinamico di dimensione n in tempo continuo del tipo:

$$\mathbf{x}^{(m)}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}^{(m-1)}(t), \mathbf{x}^{(m-2)}(t), \dots, \mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t); t]$$

ove $\mathbf{x}^{(s)}(t) \in \mathbb{R}^n$, $s = 0, 1, \dots, m$ raccoglie le derivate s -esime delle componenti del vettore di stato in tempo continuo (con la convenzione che $\mathbf{x}^{(0)}(t) = \mathbf{x}(t)$), ove $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esso si chiama sistema d'equazioni differenziali ordinarie di dimensione n e d'ordine m .

Esempio 61 Questo sistema d'equazioni:

$$\begin{cases} x_1''(t) = tx_1'(t) - t^2x_2'(t) + tx_1(t) + x_2(t) - x_3(t) + 2t \\ x_2''(t) = tx_2'(t) - 2tx_1(t) + x_2(t) - x_3(t) + 2t \\ x_3''(t) = -x_2'(t) + x_1(t) + 3t \end{cases}$$

è un sistema d'equazioni differenziali di dimensione 3 e d'ordine 2.

Definizione 62 Consideriamo la legge del moto d'un sistema dinamico di dimensione n in tempo discreto del tipo:

$$\mathbf{x}(t+m) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t+m-1), \mathbf{x}(t+m-2), \dots, \mathbf{x}(t+1), \mathbf{x}(t); t]$$

ove $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ raccoglie le componenti del vettore di stato in t , ove $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, si chiama sistema d'equazioni alle differenze di dimensione n e d'ordine m .

Esempio 63 Questo sistema d'equazioni:

$$\begin{cases} x_1(t+2) = t^3 x_1(t+1) - t^2 x_2(t+1) + t x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) + 2t \\ x_2(t+2) = t x_2(t+1) - 2t x_1(t) + x_2(t) - x_3(t) + 2t \\ x_3(t+2) = -x_2(t+1) + x_1(t) + 3t \end{cases}$$

è un sistema d'equazioni alle differenze di dimensione 3 e d'ordine 2.

Definizione 64 Quando $n = 1$, ossia, quando il vettore di stato si riduce a uno scalare si parla di equazione differenziale ordinaria o di equazione alle differenze ordinaria d'ordine m :

$$x^{(m)}(t) = f \left[x^{(m-1)}(t), x^{(m-2)}(t), \dots, x'(t), x(t); t \right]$$

ovvero:

$$x(t+m) = f \left[x(t+m-1), x^{(m-2)}(t+m-2), \dots, x'(t), x(t); t \right]$$

Le due equazioni degli Esempi 58 e 59 sono esempi di sistemi dinamici scalari di secondo ordine.

Dunque un sistema dinamico può avere dimensione n e ordine m qualsiasi.

Per quanto concerne la teoria dei sistemi dinamici d'ordine $m > 1$, vige un'ampia sanatoria, incredibile ma vera:

Teorema 65 Ogni sistema d'equazioni differenziali ordinarie e ogni sistema d'equazioni alle differenze d'ordine m e di dimensione n equivale a un sistema di prim'ordine:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}(t+1) \end{array} \right\} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

ove la dimensione del vettore di stato è $n \cdot m$.

Detto in altri termini, ogni equazione differenziale o alle differenze di ordine $m > 1$ può essere riscritta come un sistema di equazioni del primo ordine ma di dimensione m .

Nel caso continuo il trucco consiste nel considerare come nuova variabile di stato ogni derivata s -esima, posto:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) \\ x'(t) &= x_2(t) \implies x'_1(t) = x_2(t) \\ &\dots \end{aligned}$$

$$x^{(m-1)}(t) = x_m(t) \implies x'_m(t) = x^{(m)}(t)$$

l'equazione

$$x^{(m)}(t) = f \left[x^{(m-1)}(t), x^{(m-2)}(t), \dots, x'(t), x(t); t \right]$$

diventa il sistema del prim'ordine

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = x_3(t) \\ \dots \\ x'_m(t) = f[x_{m-1}(t), x_{m-2}(t), \dots, x_2(t), x_1(t); t] \end{cases}$$

Nel caso discreto ponendo

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) \\ x(t+1) &= x_2(t) \implies x_1(t+1) = x_2(t) \\ &\dots \\ x(t+m-1) &= x_m(t) \implies x_m(t+1) = x(t+m) \end{aligned}$$

l'equazione

$$x(t+m) = f[x(t+m-1), x(t+m-2), \dots, x(t+1), x(t); t]$$

diventa il sistema del prim'ordine

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_3(t) \\ \dots \\ x_m(t+1) = f[x_{m-1}(t), x_{m-2}(t), \dots, x_2(t), x_1(t); t] \end{cases}$$

Nel caso di un sistema di n equazioni di ordine m , operando le sostituzioni viste per ogni equazione si ottiene un "sistemone" del prim'ordine ma di dimensioni $n \cdot m$. Vediamo due esempi.

Esempio 66 Abbiamo a che fare con un sistema unidimensionale d'ordine 2. Per es., il modello dell'acceleratore:

$$Y(t) = cY(t) + G(t) + kcY''(t)$$

Lo riscriviamo civilmente:

$$Y''(t) = \frac{-(1-c)Y(t) - G(t)}{kc}$$

Per trasformarlo in un modello di prim'ordine, dobbiamo passare attraverso una nuova variabile. Proviamo con la variabile $X(t) = Y'(t)$. Possiamo ridescrivere il moto come segue:

$$\begin{cases} X'(t) = \frac{-(1-c)Y(t) - G(t)}{kc} \\ Y'(t) = X(t) \end{cases}$$

Non si violano le regole. Nel sistema di partenza $n = 1$ e $m = 2$. Il sistema di prim'ordine d'arrivo dovrebbe essere di dimensione $n \cdot m = 1 \cdot 2 = 2$. Torna.

Vediamo ora la versione *standard* dello stesso modello (vedi, per esempio, [19]), dovuta a P.A. Samuelson, Nobel 1970, dopo che i primi due per l'Economia furono assegnati l'anno precedente.

Esempio 67 Acceleratore 2 — Andremo veloci, supponendo che il lettore abbia in mente la versione in tempo continuo dell'esempio 59. Si consuma oggi una percentuale di quanto prodotto ieri:

$$C(t) = cY(t-1)$$

L'investimento privato J è proporzionale alla variazione dei consumi osservata;

$$J(t) = k[C(t) - C(t-1)] = kc[Y(t-1) - Y(t-2)]$$

Dall'equazione contabile (in cui assumiamo la spesa pubblica costante e pari a G):

$$Y(t) = C(t) + J(t) + G$$

s'ottiene:

$$Y(t) = cY(t-1) + kc[Y(t-1) - Y(t-2)] + G$$

Se spostiamo indietro di due anni otteniamo:

$$Y(t+2) = cY(t+1) + kc[Y(t+1) - Y(t)] + G \quad (3.9)$$

Impareremo oltre a trovare $Y(t)$ e scopriremo che il suo andamento può essere di tipo oscillatorio: è questa una delle prime (e credibili) spiegazioni dell'esistenza dei cicli economici (espansione, recessione e... via andando). Mostriamo ora come questa equazione alle differenze del secondo ordine,

possa esser trasformata in un sistema dinamico bidimensionale di prim'ordine. L'idea è semplice: un biennio coinvolge tre date: inizio, intermedio, fine. Descriviamo l'evoluzione sul biennio attraverso due evoluzioni: “inizio, intermedio” e “intermedio, fine”. Poniamo $Y(t+1) = X(t)$, cosicché ci liberiamo dell'imbarazzante $Y(t+2)$, sostituendolo con $X(t+1)$. Lasciamo stare $Y(t)$. Possiamo rimpiazzare la (67) col sistema d'equazioni alle differenze del prim'ordine, ma di dimensione 2:

$$\begin{cases} Y(t+1) = X(t) \\ X(t+1) = cX(t) + kc[X(t) - Y(t)] + G \end{cases}$$

Abbiamo euristicamente mostrato che una legge del moto d'ordine m e di dimensione n può ricondursi a una legge del prim'ordine per un sistema con dimensione $n \cdot m$. Per tale motivo tratteremo principalmente sistemi di equazione del prim'ordine. Questa è una vittoria non gratuita. Quando, oltre, ci occuperemo della questione delicata se la legge del moto univocamente implichi un certo moto e ne usciremo, un po' scornati, esamineremo procedure specifiche per trattare direttamente sistemi unidimensionali d'ordine m , senza trasformarli in sistemi del primo ordine.

3.2.4 Sistemi autonomi e non autonomi

Sappiamo che la legge del moto ci dice come evolve in t lo stato d'un sistema dinamico.

Data $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$, l'equazione (3.7) “bipartisan”⁸:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}(t+1) \end{array} \right\} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

ci dice che il futuro del sistema dipende dal suo presente ($\mathbf{x}(t)$), ma che la regola evolutiva può cambiare nel tempo. Infatti l'($n+1$)-esimo argomento di \mathbf{f} è proprio il tempo t .

Sono di uso più semplice i sistemi dinamici nei quali la legge evolutiva non dipende esplicitamente dal tempo:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}(t+1) \end{array} \right\} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]$$

Se si ritorna alla seconda versione del modello dell'acceleratore (Esempio 67), a differenza del primo, ove la spesa del Governo poteva dipendere dal tempo, qui non v'è tale dipendenza diretta.

Consacriamo questa situazione con la seguente:

Definizione 68 Se la legge del moto d'un sistema dinamico è del tipo:

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] \quad \forall t \quad (3.10)$$

si dice che esso è un sistema autonomo. Non autonomo altrimenti.

Detto in altri termini: un sistema di dimensione n è autonomo se $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ovvero se la legge del moto dipende solo dalle n variabili di stato.

Abbiamo visto prima che, per quanto concerne l'ordine d'un sistema, “pagando” in termini di dimensione possiamo avere il prim'ordine sempre. La dimensione d'un sistema dinamico è un'ottima carta di credito. Essa ci consente di ridurre sempre a sistemi autonomi. L'idea è la solita: si affianca al vettore di stato $\mathbf{x}(t)$ il tempo $t = x_{n+1}(t)$. Il nuovo vettore di stato (in \mathbb{R}^{n+1}) è:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ t \end{bmatrix}$$

⁸Nel senso che va bene sia nel caso di tempo continuo ($\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$), sia nel caso di tempo discreto ($\mathcal{T} = \mathbb{N}$).

La legge del moto è, in tempo continuo:

$$\mathbf{y}'(t) = [\mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] | 1]$$

in quanto, ovviamente:

$$x'_{n+1}(t) = \frac{d}{dt}t = 1$$

e, in tempo discreto:

$$\mathbf{y}(t+1) = [\mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] | x_{n+1}(t) + 1]$$

Due esempi e un'osservazione.

Esempio 69 *Sia:*

$$x'(t) = x(t) + t \quad (3.11)$$

Non si tratta d'un sistema dinamico autonomo, ma passando a due dimensioni, guadagniamo... l'autonomia! Basta porre $x_1(t) = x(t)$, la vecchia variabile di stato, e $x_2(t) = t$. Il sistema bidimensionale:

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x'_2(t) = 1 \end{cases}$$

equivale all'equazione (3.11) qui sopra.

Esempio 70 *Sia⁹:*

$$x(t+1) = (t+1)x(t) \quad (3.12)$$

Poniamo $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = t$. Possiamo rimpiazzare l'equazione non autonoma con il sistemino autonomo:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t)[x_2(t) + 1] \\ x_2(t+1) = x_2(t) + 1 \end{cases}$$

Osservazione 71 *La riconducibilità all'autonomia è importante, ma non troppo. Come vedremo oltre, è cruciale studiare problemi in cui, al divergere di t il vecchio vettore di stato $\mathbf{x}(t)$ si stabilizza al divergere di t a $+\infty$. Per sistemi "autonomizzati" attraverso l'annessione del tempo s'avrà a che fare con comportamenti disomogenei tra $\mathbf{x}(t)$ e t , con conseguenti pochi vantaggi dal punto di vista pratico.*

Per trattare in parallelo sistemi dinamici continui e discreti, d'ora in poi considereremo e scriveremo $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ anziché la più generale e precisa $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si tratta di una semplificazione che nulla toglie a quanto osservato in precedenza: nel caso occorra specificheremo diversamente di volta in volta.

3.2.5 Sistemi lineari

Quando in Economia si pensa a una funzione $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, per esempio regredendo y su osservazioni di \mathbf{x} , è sovente accettato come naturale che f sia una funzione lineare affine:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\mathbf{x} + b = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b = \sum_{s=1}^n a_s x_s + b$$

⁹Con $x(0) = 1$ genera i fattoriali dei numeri interi positivi:

$$\begin{aligned} x(1) &= 1 \\ x(2) &= 2 \\ x(3) &= 6 \\ &\dots \end{aligned}$$

Nel mondo dei sistemi dinamici si ritrova tutto ciò. Tra le specificazioni più frequentemente considerate del modello (3.7) sta la seguente:

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}(t+1) \end{matrix} \right\} = A(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (3.13)$$

ossia, più in chiaro:

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}(t+1) \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{bmatrix}$$

Questi sistemi d'equazioni differenziali o d'equazioni alle differenze sono detti *lineari*.

La (3.13) può essere letta in modo interessante. Il secondo membro è somma di due addendi. Il primo contiene il vettore di stato $\mathbf{x}(t)$, il secondo no. Si può pensare allora che la direzione del moto in t , rappresentata da $\mathbf{x}'(t)$ si possa scomporre per somma in due parti, la prima endogena, la seconda esogena:

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}(t+1) \end{matrix} \right\} = \underbrace{A(t)\mathbf{x}(t)}_{\text{endo}} + \underbrace{\mathbf{b}(t)}_{\text{eso}}$$

Frequentemente il termine esogeno $\mathbf{b}(t)$ è detto *termine forzante*.

Vediamo un esempio:

Esempio 72 Consideriamo questo sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1(t) + bt^2x_2(t) + ct^2x_2^3(t) + \sqrt{t} \\ kx_1(t) + ht^3x_2(t) + mt^2 \end{bmatrix}$$

Esso non è lineare. La seconda equazione lo è, ma la prima no per la presenza, a secondo membro, dell'addendo $ct^2x_2^3(t)$ in cui il fattore ct^2 non dà fastidio: la linearità è spezzata dall'altro fattore, ove la seconda variabile di stato è al cubo.

Il sistema che otterremmo sopprimendo quell'addendo, sarebbe, per contro, lineare:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1(t) + bt^2x_2(t) + \sqrt{t} \\ kx_1(t) + ht^3x_2(t) + mt^2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Riassumiamo il tutto nella seguente

Definizione 73 Il sistema dinamico

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}(t+1) \end{matrix} \right\} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

è detto sistema lineare se $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione lineare affine del vettore \mathbf{x} delle variabili di stato, ovvero se:

$$\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] = A(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

La matrice quadrata d'ordine n :

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

si chiama matrice dei coefficienti del sistema. I suoi elementi sono funzioni di t , che, in particolare possono essere funzioni costanti. Quando tutte tali funzioni sono costanti, ovvero quando $A(t) = A$ per ogni t , si dice che il sistema è a coefficienti costanti.

Il vettore $\mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \dots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

è detto termine noto o termine forzante.

Esempio 74 Riprendiamo il sistema (3.14):

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1(t) + bt^2x_2(t) + \sqrt{t} \\ kx_1(t) + ht^3x_2(t) + mt^2 \end{bmatrix}$$

La sua matrice dei coefficienti è:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a & bt^2 \\ k & ht^3 \end{bmatrix}$$

salvo il caso specialissimo $b = h = 0$, in cui essa si riduce a: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}$ il sistema non è a coefficienti costanti. Mentre lo è nel caso specialissimo citato. È importante segnalare che l'etichetta “a coefficienti costanti” non riguarda il termine forzante. Per esempio, il minisistema:

$$x'(t) = x(t) + t$$

è a coefficiente costante (ciò che moltiplica $x(t)$ è la costante 1), nonostante il termine forzante vari nel tempo.

Ci sarà utile un'altra classificazione dei sistemi lineari:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}(t+1) \end{array} \right\} = A(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

basata sul termine forzante.

Definizione 75 Un sistema lineare è detto omogeneo se il termine forzante è identicamente nullo¹⁰:

$$\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$$

dove $\mathbf{0}$ è il vettore nullo di \mathbb{R}^n .

Per esempio:

$$x'(t) = x(t) + t \text{ e } x'(t) = x(t) + 1$$

non sono omogenei perché i loro termini forzanti sono, rispettivamente, $b(t) = t$ e $b(t) = 1$, nessuno dei quali identicamente nullo. Per contro il sistema:

$$x'(t) = x(t)$$

¹⁰ “Identicamente uguale a...” sta per “sempre uguale a...” e simbolicamente si può usare \equiv . Per esempio scrivere

$$\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$$

è la stessa cosa che scrivere

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{0} \forall t$$

è omogeneo perché, per esso, $b(t) \equiv 0$.

Osserviamo che se un sistema a coefficienti costanti è omogeneo allora è anche autonomo.

Abbiamo annunciato sopra che può non convenire ridurre sistematicamente la legge del moto allo schema di prim'ordine, soprattutto quando si vogliano trovare effettivamente le traiettorie percorse da un sistema dinamico. Per questo motivo, per essere sicuri che il lettore abbia ben presente questo punto, consacriamo in un paio di definizioni, condite con altrettanti esempi, i termini che useremo.

Definizione 76 Si chiama equazione differenziale lineare d'ordine n la seguente:

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t)x^{(n-2)}(t) + \dots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

si dice che è a coefficienti costanti se $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ sono tutte funzioni costanti. L'equazione si dice omogenea se $b(t) \equiv 0$.

Definizione 77 Si chiama equazione alle differenze lineare d'ordine n la seguente:

$$x(t+n) = a_{n-1}(t)x(t+n-1) + a_{n-2}(t)x(t+n-2) + \dots + a_1(t)x(t+1) + a_0(t)x(t) + b(t)$$

si dice che è a coefficienti costanti se $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ sono tutte funzioni costanti. L'equazione si dice omogenea se $b(t) \equiv 0$.

Esempio 78 Acceleratore 3 — Possiamo riscrivere l'equazione (3.8) dell'acceleratore in tempo continuo come segue:

$$Y''(t) = \frac{(1-c)}{kc}Y(t) - \frac{G(t)}{kc}$$

Si tratta d'un'equazione differenziale lineare del second'ordine a coefficienti costanti. Se l'intensità di spesa del governo non è identicamente nulla l'equazione non è omogenea. Riprendiamo l'equazione (67) dell'acceleratore in tempo discreto:

$$Y(t+2) = kcY(t+1) - kcY(t) + G$$

Si tratta d'un'equazione alle differenze lineare del second'ordine a coefficienti costanti. Se l'investimento governativo fosse nullo ($G = 0$) sarebbe omogenea, sennò no.

3.3 Esistenza e unicità di soluzioni per equazioni differenziali ed equazioni alle differenze

Partiamo da due semplici esempi per cercar di capire subito il punto centrale di questa sezione.

Esempio 79 — Consideriamo il sistema dinamico in tempo discreto, già incontrato nell'esempio 70, con la legge del moto (3.12):

$$x(t+1) = (t+1)x(t)$$

Diamo la condizione iniziale: $x(0) = c$. Scriviamo le uguaglianze che s'ottengono dalla (3.12) dando al tempo i valori successivi: 0, 1, 2, ... e fermiamoci a $t-1$:

$$x(1) = 1 \cdot x(0) = c$$

$$x(2) = 2 \cdot x(1) = 2c$$

$$x(3) = 3 \cdot x(2) = 6c$$

...

$$x(t) = tx(t-1) = t! \cdot c$$

L'ultima uguaglianza ci dice il valore della variabile di stato per qualunque intero naturale di t in funzione del parametro $c = x(0)$.

Esempio 80 Basta rileggere l'esempio 53 di p. 37:

$$x'(t) = \rho x(t) \implies x(t) = c \cdot e^{\rho t}$$

Osservando che $x(0) = c \cdot e^{0t} = c$, anche in questo caso ritroviamo il valore della variabile di stato per ogni t reale in funzione di un parametro $c = x(0)$.

In questi esempi abbiamo individuato una famiglia di funzioni, dipendente da un parametro reale c , i cui elementi $x(t, c)$ soddisfano l'equazione alle differenze o l'equazione differenziale proposta.

Detto in altri termini: cercando una traiettoria definita dalla legge del moto ne abbiamo trovate infinite. Tutte queste traiettorie sono tra loro imparentate in quanto soluzioni della stessa equazione: si distinguono tra loro perché ognuna di esse "parte" da un differente valore di $x(0)$.

Questo fatto ha validità generale.

Se assegniamo la legge del moto per un sistema dinamico n -dimensionale:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}(t+1) \end{array} \right\} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

e cerchiamo tutte le traiettorie con essa compatibili, dobbiamo pensare a una famiglia d'infinito funzioni $\mathbf{x}(t, \mathbf{c})$ del tempo, che sono definite a meno d'un vettore $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ di costanti arbitrarie. Serve un po' di terminologia:

Definizione 81 La famiglia di funzioni $\mathbf{x}(t; \mathbf{c})$ che soddisfa il sistema d'equazioni alle differenze o d'equazioni differenziali si chiama *soluzione generale* o anche *integrale generale*. Quando fissiamo $\mathbf{c} = \mathbf{c}^*$ abbiamo una sola funzione $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t; \mathbf{c}^*)$, che si chiama *soluzione particolare* o anche *integrale particolare del sistema d'equazioni alle differenze o d'equazioni differenziali*.

Generalmente una soluzione particolare è individuata attraverso la richiesta che a una certa data t_0 (che potrebbe sempre esser pensata 0) la posizione del sistema sia assegnata:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

Tale condizione aggiuntiva è detta in generale *condizione al contorno* o anche *condizione iniziale* quando $t_0 = 0$. Noi non faremo distinzioni commettendo quindi una lieve imprecisione di linguaggio.

Detto in altri termini, imponendo che:

$$\mathbf{x}(t_0; \mathbf{c}) = \mathbf{x}^0$$

s'ottiene un'equazione (vettoriale) che risolta rispetto a \mathbf{c} permette di individuare la soluzione particolare $\mathbf{x}(t, \mathbf{c}^*)$ che soddisfa la condizione al contorno $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$. Scriveremo direttamente:

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)$$

per indicare ogni traiettoria che risolva il sistema in funzione della condizione al contorno \mathbf{x}^0 scelta.

Vediamo un paio d'esempi.

Esempio 82 La legge del moto sia:

$$x'(t) = \gamma x(t) \quad \text{con } \gamma \in \mathbb{R} \quad (3.15)$$

Si può controllare facilmente che tutte le funzioni $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$x(t) = ce^{\gamma t} = x(t, c) \quad (3.16)$$

con $c \in \mathbb{R}$ qualsiasi, soddisfano la (3.15):

$$\frac{d(ce^{\gamma t})}{dt} = \gamma \cdot ce^{\gamma t} = \gamma x(t)$$

Vedremo meglio più avanti che la (3.16) rappresenta la soluzione generale nel senso include tutte le soluzioni (3.15) in funzione di un parametro reale c . Selezionando un particolare valore di c , per esempio 2, si seleziona nel mucchio la soluzione particolare:

$$x^*(t) = 2e^{\gamma t} = x(t, 2)$$

Per selezionare c , quindi una soluzione particolare, di solito si ricorre a una condizione al contorno. Per esempio, con la richiesta che:

$$x(1) = 3$$

si ottiene l'equazione nell'incognita c :

$$x(1; c) = ce^{\gamma \cdot 1} = 3 \implies c^* = \frac{3}{e^{\gamma}} \quad (3.17)$$

che individua la soluzione particolare desiderata:

$$x^*(t) = \frac{3}{e^{\gamma}} e^{\gamma t} = 3e^{\gamma(t-1)} = x(t, c^*)$$

Se vogliamo la soluzione particolare che soddisfa la condizione iniziale:

$$x(0) = 2$$

dall'equazione:

$$2 = ce^{\gamma \cdot 0} \implies c^* = 2$$

ricaveremmo a buon mercato la soluzione particolare:

$$x^*(t) = 2e^{\gamma t}$$

Si vede facilmente che è sempre $c = x(0)$.

Esempio 83 Consideriamo il sistema bidimensionale discreto:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

che può riscriversi più semplicemente come:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) + 1 \\ x_2(t+1) = x_2(t) - 2 \end{cases}$$

La legge del moto è banale. A ogni passo la prima variabile di stato aumenta di 1 e la seconda diminuisce di 2. Supponiamo che la prima parta da $x_1(0) = c_1$ e la seconda da $x_2(0) = c_2$. Detto

$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ si intuisce che possiamo scrivere la soluzione generale così¹¹:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t; \mathbf{c}) &= \mathbf{c} + t\mathbf{b} = \\ &= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ove \mathbf{c} è l'arbitrario punto di partenza. Se decidiamo che il punto di partenza è:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

otteniamo la soluzione particolare:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 100 + t \\ 100 - 2t \end{bmatrix}$$

¹¹Si tratta d'una versione generalizzata della nozione di *progressione aritmetica*.

In questi semplici esempi abbiamo individuato una magica combinazione: legge del moto e condizione iniziale generano *univocamente* la storia evolutiva del sistema.

Una domanda naturale è questa: “È sempre così o, in generale, può accadere altrimenti?”.

Può cioè darsi che, una volta fissata la legge del moto, a una condizione iniziale non corrisponda alcuna traiettoria o sia possibile individuarne più d’una?

La risposta è differente a seconda che siamo in tempo discreto o continuo.

3.3.1 Esistenza e unicità in tempo discreto

In tempo discreto ci chiediamo se il problema:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.18)$$

ammette una e una sola soluzione. O per meglio dire che ipotesi devono essere verificate affinché esista una sola traiettoria $\mathbf{x}(t)$ che soddisfa legge del moto con l’assegnata condizione iniziale. Nel caso discreto la risposta è facile.

Consideriamo la legge del moto:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

Se \mathbf{f} è definita su tutto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{N}$ possiamo scegliere arbitrariamente il punto di partenza $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ e calcolare la successiva posizione del sistema:

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(0), 0] = \mathbf{f}[\mathbf{x}^0, 0]$$

Calcoliamo poi:

$$\mathbf{x}(2) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(1), 1]$$

e via! In particolare nel caso autonomo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

si può scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)) = \mathbf{f}^2(\mathbf{x}^0) \\ \mathbf{x}(3) &= \mathbf{f}(\mathbf{f}^2(\mathbf{x}^0)) = \mathbf{f}^3(\mathbf{x}^0) \\ &\dots \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{f}^{t-1}(\mathbf{x}^0)) = \mathbf{f}^t(\mathbf{x}^0) \end{aligned}$$

dove \mathbf{f}^t indica l’*iterata* t -esima¹² della funzione \mathbf{f} ottenuta applicando ricorsivamente \mathbf{f} alle immagini via via ottenute: è lo stesso procedimento utilizzato nell’esempio 70. L’unicità della traiettoria è ovvia: se \mathbf{f} è una funzione, essa assegna sempre un’unica immagine. La sua esistenza incontra solo un muro: il dominio di \mathbf{f} rispetto alle variabili di stato \mathbf{x} . Qualora $\mathbf{f} : D \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $D \subset \mathbb{R}^n$, iterando la legge del moto si potrebbe ottenere un vettore di stato $\mathbf{x}(t)$ che non appartiene ad D e quindi non si potrebbe calcolare la traiettoria da lì in poi.

Vediamo un esempio in cui ciò potrebbe accadere.

¹²Da non confondersi con la potenza t -esima di una funzione. Per esempio:

$$\ln(\ln x) = \ln^2 x$$

mentre:

$$(\ln x)(\ln x) = (\ln x)^2 \quad .$$

Esempio 84 Consideriamo il sistema dinamico autonomo:

$$x(t+1) = \sqrt{x(t)} - 10$$

e la condizione iniziale:

$$x(0) = 666$$

Calcoliamo lo stato in $t = 1$:

$$x(1) = \sqrt{666} - 10 \approx 15.807$$

Passiamo al successivo stato $x(2)$:

$$x(2) \approx \sqrt{15.807} - 10 = -6.0242$$

e qui la traiettoria non può continuare, perché dovremmo calcolare $\sqrt{-6.0242}$, che, in \mathbb{R} ... presenta qualche problema. Chi si fosse appassionato ai numeri complessi potrebbe proporre d'usarli, continuando nel campo complesso \mathbb{C} , ma picchierebbe subito il naso perché avrebbe, come di dovere, due radici complesse. Quindi la legge del moto $\sqrt{x(t)} - 10$ considerata in campo complesso non sarebbe più una... funzione.

Riassumiamo il tutto con la seguente.

Proposizione 85 Se \mathbf{f} è definita su $D \times \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ allora per ogni $(\mathbf{x}^0, t_0) \in D \times \mathbb{N}$ esiste un'unica soluzione al problema (3.18). Inoltre, se:

$$\mathbf{f}(D, \mathbb{N}) \subseteq D$$

l'unica soluzione $\mathbf{x}(t)$ è definita per ogni $t \geq t_0$. In particolare nel caso autonomo se

$$\mathbf{f}(D) \subseteq D$$

per ogni condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, l'unica soluzione è definita per ogni $t \geq t_0$.

Osserviamo che nel caso di sistemi lineari:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

la legge del moto non ha problemi di esistenza rispetto alle variabili di stato ma solo nei confronti di t . Se tutti i coefficienti a_{rs} e i termini forzanti sono definiti su \mathbb{N} , allora esiste sempre una e una sola soluzione per ogni $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$. In particolare nel caso lineare autonomo:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$$

l'esistenza e unicità sono sempre garantite.

3.3.2 Esistenza e unicità in tempo continuo

Il problema

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.19)$$

è detto *Problema di Cauchy* in onore al matematico che ha trovato per primo le condizioni di unicità della sua soluzione. Anche nel caso continuo chiamiamo *soluzione (particolare)* del problema di Cauchy ogni traiettoria $\mathbf{x}(t)$ che soddisfi sia la legge del moto sia l'assegnata condizione di partenza.

Per quanto riguarda l'esistenza abbiamo:

Teorema 86 Peano — Se \mathbf{f} è continua in un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, allora per ogni $(\mathbf{x}^0, t_0) \in A$ esiste almeno una soluzione al problema di Cauchy (3.19).

Osservazione 87 *Se \mathbf{f} è continua allora anche \mathbf{x}' lo è, quindi $\mathbf{x} \in C^1$: ovvero ogni soluzione \mathbf{x} è differenziabile con continuità.*

Questo risultato, dovuto a Giuseppe Peano, è matematicamente importante, ma nelle applicazioni è importante sapere anche se la soluzione è unica, ovvero se la coppia $(\mathbf{x}^0, \mathbf{f})$ individua una e una sola traiettoria. Per la questione dell'unicità di tale soluzione, mentre in tempo discreto ce la siamo cavata a buon mercato, in tempo continuo la questione diventa difficile e un po' sottile. Partiamo da un esempio molto semplice, ma, assolutamente mefitico.

Esempio 88 Il pennello di Peano — Abbiamo un sistema autonomo unidimensionale:

$$x'(t) = f[x(t)]$$

con f continua:

$$x'(t) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x(t)} \quad (3.20)$$

Una funzione $x(t)$ che la soddisfa è, ovviamente la funzione costante:

$$x(t) \equiv 0 \quad (3.21)$$

Anticipando una tecnica che vedremo sistematicamente oltre (v. p. 61), dividiamo ambo i membri della (3.20) per $\sqrt[3]{x(t)}$ e moltiplichiamo per dt . Si ha:

$$\frac{2}{3} x^{-1/3} dx = dt$$

onde, integrando membro a membro:

$$x^{2/3} = t + c$$

con c costante arbitraria, da cui¹³:

$$x(t) = (t + c)^{3/2}$$

Il diagramma seguente ne raccoglie alcuni grafici ($c = -3, -2, -1$), insieme col grafico della soluzione nulla (3.21)¹⁴.

¹³Il lettore incredulo può controllare che, per qualsiasi c tali funzioni obbediscono all'equazione differenziale.

¹⁴Il diagramma ricorda il pennello d'un imbianchino, onde il nome di "pennello di Peano".

È evidente che se, nell'esempio precedente, scegliamo la condizione iniziale $x(0) = 0$, ci sono infinite traiettorie che partono da lì e che sono rette dalla legge del moto indicata. Basta prendere $x(t)$ così definita;

$$x_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq k \\ (t-k)^{3/2} & \text{per } t > k \end{cases}$$

con $k \geq 0$. Il diagramma seguente mostra la traiettoria con $k = 2$:

Gli inconvenienti evidenziati dal pennello di Peano hanno un'origine ben precisa: l'evoluzione locale del sistema è talora *troppo sensibile* rispetto allo stato del sistema. Il sistema dinamico che origina tale indeterminazione è, omettendo l'esplicitazione dell'ovvia dipendenza dal tempo, del tipo:

$$x' = f(x) \quad (3.22)$$

I problemi nascono, nel piano (t, x) , lungo l'asse delle ascisse t (ove $x = 0$). Se prendiamo la (3.20):

$$f(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x}$$

in $x = 0$ essa non è differenziabile. Infatti, se calcoliamo la derivata di f in 0, in base alla definizione:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3\sqrt[3]{h}/2 - 0}{h} = +\infty$$

Ciò precisa la troppa sensibilità di cui scrivevamo sopra.

Abbiamo visto, in un assetto semplice, che se \mathbf{f} è troppo sensibile al variare dello stato ci possono problemi d'unicità: si pensi al "pennello di Peano".

Possiamo dunque intuire che l'unicità discende da come la legge del moto $\mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$ dipenda dallo stato $\mathbf{x}(t)$. Cominciamo con un caso molto semplice. Abbiamo un sistema unidimensionale, con legge del moto:

$$x'(t) = f[x(t), t] \quad (3.23)$$

individuata dalla funzione $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Per esempio:

$$x'(t) = x(t) + t^2$$

Consideriamo una specifica epoca t_0 e il corrispondente stato del sistema:

$$x_0 = x(t_0) \quad (3.24)$$

Consideriamo altresì un intervallo di tempo $(t_0 - h, t_0 + h)$, centrato in t_0 . La seguente osservazione ci fornisce due modi per descrivere il moto del sistema quando f è una funzione ovunque continua.

Osservazione 89 Se f è ovunque continua, allora questi due fatti sono equivalenti:

(a) — La funzione x è differenziabile (con continuità) e soddisfa la (3.23) su $(t_0 - h, t_0 + h)$, oltre che la (3.24);

(b) — La funzione x è continua e soddisfa la condizione:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f[x(s), s] ds$$

$\forall t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. Quest'equivalenza è dovuta ai risultati fondamentali del calcolo integrale, che supponiamo noti.

Si diceva sopra dei pericoli dipendenti da un eccesso di sensibilità di f rispetto allo stato.

Introduciamo un'importante condizione che limita tale sensibilità, detta *condizione di Lipschitz*. Procediamo per gradi.

Anzitutto vediamo la seguente:

Definizione 90 Una funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta *lipsciziana* con costante di Lipschitz k su $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se esiste una costante $k > 0$ tale che:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq k \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A \quad (3.25)$$

Un modo per leggere la condizione di Lipschitz è offerto dalla riscrittura della (3.25):

$$\frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \leq k \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$$

La “lipscizianità”¹⁵ significa, in sostanza, limitatezza dei rapporti incrementali. Si prova infatti:

Proposizione 91 Se la funzione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ha tutte le derivate parziali $\frac{\partial f_r}{\partial x_s}$ ovunque continue allora \mathbf{f} è lipsciziana su ogni insieme compatto $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Osserviamo inoltre che se \mathbf{f} è lipsciziana allora, a maggior ragione, è continua.

Vediamo ora come possiamo applicare questa condizione di regolarità a una legge del moto $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$:

Definizione 92 Consideriamo una legge del moto $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e un'intervallo temporale $[t_0 - h, t_0 + h]$, in cui t può variare. Diciamo che \mathbf{f} soddisfa la condizione di Lipschitz con costante $k > 0$ nell'intervallo $[t_0 - h, t_0 + h]$ se:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)\| \leq k \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall t \in [t_0 - h, t_0 + h] \quad (3.26)$$

ovvero se \mathbf{f} è lipsciziana rispetto alle variabili di stato per ogni¹⁶ $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$.

Osservazione 93 Senza perdere generalità possiamo anche supporre che sia $hk < 1$. Ci si convince di ciò riprendendo la definizione 92 condizione di Lipschitz. Poiché possiamo scegliere come vogliamo la semiampiezza h dell'intervallo temporale rilevante, avendo l'avvertenza di scegliere:

$$h < \frac{1}{k}$$

si avrà sempre $hk < 1$.

A questo punto siamo pronti per enunciare il risultato generale.

¹⁵O “lipsciziosità”, come uno degli autori ama chiamarla, visto che ormai stiamo viaggiando fuori dalla lingua italiana.

¹⁶Si dice *uniformemente* in t .

Teorema 94 Cauchy — Si consideri il sistema dinamico con legge del moto:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

Se $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

(1) è continua;

(2) soddisfa la condizione di Lipschitz (3.26) con costante k per ogni $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, con $hk < 1$, allora esiste un'unica funzione $\mathbf{x} : (t_0 - h, t_0 + h) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \end{cases}$$

$\forall t \in (t_0 - h, t_0 + h)$.

La dimostrazione d'esistenza e unicità non è ovvia analiticamente: nell'appendice il lettore può trovare le nozioni necessarie per la dimostrazione e la dimostrazione nel caso unidimensionale.

Il teorema che abbiamo visto, ci garantisce esistenza e unicità d'una traiettoria in epoche vicine a t_0 ovvero si garantisce l'esistenza di una e una sola soluzione definita *almeno* nell'intervallo $(t_0 - h, t_0 + h)$: si parla in tal senso di *soluzioni locali*. Come vedremo più avanti, può benissimo darsi che non sia possibile estendere globalmente tali traiettorie. Precisiamo che a noi interesserà principalmente la possibilità di prolungare verso *destra* l'esistenza delle soluzioni: ci preoccupiamo cioè di stabilire un intervallo massimale di esistenza del tipo $I = [t_0, t^*) \subseteq \mathbb{R}_+, t_0 \geq 0$ e parleremo di soluzioni ovunque definite¹⁷ quando $I = [0, +\infty)$.

Rivisitiamo il “pennello di Peano”:

$$f(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x}$$

Prendiamo due stati $x_1 = 0 < x_2 = x$. La differenza (in modulo) tra i valori di f , in corrispondenza a essi, è:

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} - 0 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x}$$

La differenza (in modulo) tra i due stati è:

$$x - 0 = x$$

Il rapporto incrementale (in modulo) è:

$$\frac{\frac{3}{2} (\sqrt[3]{x} - 0)}{x} = \frac{3}{2x^{2/3}} \rightarrow +\infty \text{ per } x \rightarrow 0.$$

È affatto chiaro che questi rapporti incrementali non cascano nella rete Lipschitz e, quindi, non ci meravigliamo che la coppia (condizione iniziale, legge del moto) individui più di una soluzione. Attenzione! La condizione di Lipschitz è sufficiente ma non è necessaria per l'unicità, comunque... è un buon carabiniere.

Una domanda naturale riguarda la differenza tra sistemi con tempo continuo e sistemi con tempo discreto. Perché, per questi ultimi, l'unicità è banale, mentre nel caso continuo è necessario mettere qualche filtro (per es. la condizione di Lipschitz) per proteggersi da subdole non unicità (pennello di Peano)? La risposta sta nell'*output* del “trasformatore” legge del moto. In tempo discreto f produce esattamente la posizione del sistema alla data $t + 1$. Con tempo continuo, f produce soltanto il valore della derivata di $x(t)$ in t , informazione ben più povera. Pensiamo, per esempio alle tre funzioni:

$$x(t) = \begin{cases} (t - t_0)^3 \\ 0 \\ -(t - t_0)^3 \end{cases}$$

¹⁷Trascureremo cioè sia gli intervalli che contengano valori negativi di t , sia intervalli del tipo $[t_{\min}, +\infty)$ con $t_{\min} > 0$.

Se le differenziamo in t_0 , otteniamo:

$$x'(t_0) = 0$$

in tutti e tre i casi. Guardando al loro comportamento “in grande”, si vede che la prima va a $+\infty$, la seconda è e resta a 0, mentre la terza va a $-\infty$. Tutto ciò scaturisce dal debole *background* $x'(t_0) = 0$. Il grafico seguente (con $t_0 = 0$) aiuta.

Chiudiamo occupandoci del caso particolare dei sistemi lineari

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

Rispetto alle variabili di stato \mathbf{f} è continua e derivabile con $\mathbf{f}' = A(t)$. A ciò consegue che se tutti i coefficienti a_{rs} e i termini forzanti b_r sono funzioni continue in $[t_0 - h, t_0 + h]$ allora \mathbf{f} :

- (i) è continua su $\mathbb{R}^n \times [t_0 - h, t_0 + h]$;
- (ii) soddisfa la condizione di Lipschitz su $\mathbb{R}^n \times [t_0 - h, t_0 + h]$;
- (iii) Il problema di Cauchy ammette una e una sola soluzione particolare $\mathbf{x} : (t_0 - h, t_0 + h) \rightarrow \mathbb{R}^n$ per ogni condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

In particolare nel caso autonomo

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$$

non vi sono problemi di sorta: l'esistenza e unicità sono sempre garantite. Inoltre tutte le soluzioni sono di tipo globale, definite su tutto \mathbb{R} .

4

Risoluzione di alcune equazioni notevoli

Molti modelli di pratico interesse hanno dimensione 1 e conviene trattarli separatamente, sia per la frequenza con cui ricorrono, sia perché, almeno in alcuni casi, s'ottengono interessanti risultati a buon mercato.

I modelli con tempo discreto non sono molto prodighi di risultati. Fondamentalmente essi si basano su sommatorie e produttorie: esamineremo solo il caso lineare. I modelli in tempo continuo si basano invece sugli integrali. Uno dei più potenti metodi d'integrazione che il lettore conosce è l'integrazione per sostituzione e, sul cambiamento di variabili negl'integrali, in linea di principio, non vi sono vincoli sostanziali.

Esaminiamo allora per primi alcuni sistemi con tempo continuo, per i quali si trovano risultati interessanti.

Sarà nostro compito mostrarne l'applicazione in ambito economico.

4.1 Equazioni differenziali a variabili separabili

Consideriamo una legge del moto unidimensionale:

$$x' = f(x, t)$$

in cui abbiamo ommesso la dipendenza di x da t per alleggerire un po' la notazione.

Introduciamo subito la:

Definizione 95 *Un'equazione differenziale:*

$$x' = f(x, t)$$

si dice a variabili separabili, se:

$$f(x, t) = a(x) b(t)$$

ovvero:

$$x'(t) = a(x) b(t)$$

In sostanza $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è il prodotto di due funzioni $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Esempio 96 *L'equazione differenziale:*

$$x' = x^2 \cdot t^3$$

è a variabili separabili, per esempio¹, con:

$$\begin{cases} a(x) = x^2 \\ b(t) = t^3 \end{cases}$$

mentre l'equazione differenziale:

$$x' = x^2 \cdot t^3 + 1$$

non lo è.

È incredibilmente ricca la collezione di modelli economici che rientrano in questa categoria. Ne presentiamo tre, ma si potrebbe continuare... *ad infinitum*.

Esempio 97 *Crescita neoclassica unisetoriale* — Partiamo col modello di crescita unisetoriale di Solow. Consideriamo un'economia ove si produce un solo bene. La funzione di produzione, $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, associa a ogni coppia (K, L) di stock del capitale (K) e di lavoro (L) il prodotto

$$Y = F(K, L)$$

In Economia s'assume che F sia (positivamente) omogenea di grado 1, ossia:

$$F(\alpha K, \alpha L) = \alpha F(K, L) \quad \forall \alpha > 0$$

Indicheremo con k il rapporto:

$$k = \frac{K}{L}$$

che è semplicemente l'ammontare del capitale per addetto in quell'economia. Il modello s'occupa della dinamica di $k = k(t)$. Nello schema in esame s'assume che la forza di lavoro L cresca esponenzialmente:

$$\frac{L'(t)}{L(t)} = g \Rightarrow L(t) = L(0) e^{gt}$$

Calcoliamo la derivata di k :

$$k' = D\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{LK' - KL'}{L^2} = \frac{1}{L} \cdot K' - kg$$

Assumiamo che in quest'economia la porzione $s \in (0, 1)$ del prodotto sia risparmiata e portata a incremento dello stock di capitale:

$$K' = sY = sF(K, L)$$

Si ha allora, sfruttando l'omogeneità di F :

$$k' = s \frac{1}{L} F(K, L) - gk = sF\left(\frac{K}{L}, 1\right) - gk$$

La funzione:

$$\frac{1}{L} F(K, L) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f(k)$$

si chiama funzione di produzione intensiva e non è altro che il prodotto per addetto. È una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Usandola possiamo scrivere l'equazione differenziale (nota come equazione di Solow):

$$k' = s \cdot f(k) - g \cdot k$$

È un'equazione a variabili separabili con:

$$a(k) = s \cdot f(k) - g \cdot k \text{ e con } b(t) \equiv 1$$

¹E' chiaro che se a, b vanno bene, allora vanno bene anche $ka, \frac{1}{k}b$ per ogni $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$.

Esempio 98 Crescita d'una popolazione in presenza di risorse limitate — Si tratta d'un modello di largo uso in demografia, biologia, studi di mercato. Questo modello si dice modello logistico. Consideriamo una popolazione di animali che viva in un certo territorio, contando su un ammontare dato di risorse. Ne diciamo $x = x(t)$ la consistenza all'epoca t . Supponiamo che l'incremento della stessa tra t e $t + h$ sia determinato dall'azione congiunta di due forze: da un lato la consistenza stessa della popolazione ne spinge la crescita (tanti animali hanno maggiori occasioni d'incontro e di riproduzione) dall'altro lato, quando la consistenza della popolazione s'avvicina al livello di saturazione M , determinato dalle risorse disponibili, v'è un naturale freno alla crescita. Modelliamo l'incremento col solito metodo:

$$x(t+h) - x(t) = \alpha x(t) [M - x(t)] h + o(h)$$

onde:

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \alpha x(t) [M - x(t)] + \frac{o(h)}{h}$$

Se $h \rightarrow 0$, il secondo membro converge a $\alpha[M - x]$, quindi converge anche il primo, quindi x è differenziabile e si deve avere:

$$x' = \alpha x (M - x) \quad (4.1)$$

Anche questa è un'equazione a variabili separabili, con $a(x) = \alpha x(M - x)$ e con $b(t) \equiv 1$. Se complichissimo il modello assumendo che α , invece d'essere costante nel tempo, ne dipenda: $\alpha = \alpha(t)$ la legge del moto diverrebbe:

$$x' = \alpha(t) x (M - x) \quad (4.2)$$

e saremmo di nuovo a un'equazione a variabili separabili, stavolta con:

$$a(x) = x(M - x) \text{ e con } b(t) = \alpha(t)$$

Se, presi dall'entusiasmo, attentissimo alla costanza di M , immaginando, realisticamente, che anche il livello di saturazione vari nel tempo: $M = M(t)$... picchieremmo il naso nel muro, perché la nuova (e legittima) equazione differenziale sarebbe:

$$x' = \alpha(t) x [M(t) - x] \quad (4.3)$$

ma il suo secondo membro non si può scrivere come "funzione dello stato \times funzione del tempo". Mentre nel caso d'equazioni a variabili separabili, si possono trovarne le soluzioni attraverso il calcolo d'opportuni integrali. Ciò è ancora possibile per la (4.3), ma a prezzo di conti ben più complicati. Se introducessimo un ulteriore raffinamento del modello. Per es.:

$$x' = \alpha(t) x^\beta [M(t) - x]^\gamma$$

per generici β, γ , tale possibilità sparirebbe come neve al sole.

Esempio 99 Dinamica dei prezzi e aggiustamenti di mercato — Un classico della Teoria Economica è il modello dell'equilibrio economico generale, usualmente ascrivito a Léon Walras e a Vilfredo Pareto. Una volta stabilita la sua esistenza, per esempio attraverso teoremi del punto fisso (si veda l'Appendice), si pose in maniera naturale il problema di stabilità di tale equilibrio. Vedremo oltre in dettaglio che cosa esattamente vuol dire "stabilità". Per il momento ci accontentiamo dell'idea intuitiva che un sistema dinamico in equilibrio... non è più dinamico, perché sta fermo. Se noi lo mettiamo fuori dall'equilibrio, ritornerà nello stesso? Se sì, si parla di sistemi stabili. Nello studio della stabilità dell'equilibrio sono stati considerati alcuni modelli d'evoluzione dei prezzi dei beni. Noi ci accontentiamo, per ora, d'un'economia supersemplificata, ove c'è un solo bene² (è poi il mondo di due esempi fa, quando abbiamo costruito il modello di Solow). La variabile di stato è il prezzo $p(t)$ di quel bene. Il prezzo d'equilibrio è p^* , noto. Se il prezzo corrente $p(t)$ è troppo alto, la domanda

²Vedremo oltre il caso, ben più eccitante, di $n > 1$ beni.

si contrarrà e i produttori lo ridurranno. Se è troppo basso viceversa, la domanda s'espanderà e i produttori alzeranno il prezzo. È affatto intuitivo allora modellare l'evoluzione del prezzo tra t e $t+h$ come segue:

$$p(t+h) - p(t) = -\alpha(t)[p(t) - p^*]h + o(h)$$

ove $\alpha(t) > 0$ si chiama velocità d'aggiustamento del prezzo di mercato che potrebbe dipendere dal tempo. Il lettore dovrebbe ormai conoscere a memoria la cerimonia che segue:

$$\frac{p(t+h) - p(t)}{h} = -\alpha(t)[p(t) - p^*] + \frac{o(h)}{h}$$

La convergenza del secondo membo e la forzata del primo conducono alla legge del moto:

$$p'(t) = -\alpha(t)[p(t) - p^*]$$

Si tratta, ancora una volta, d'un'equazione differenziale a variabili separabili con:

$$a[p(t)] = p(t) - p^* \text{ e con } b(t) = -\alpha(t)$$

Fatti questi esempi passiamo alla tecnica risolutiva standard. Anzitutto conviene riscrivere un'equazione a variabili separabili usando la notazione di Leibniz:

$$\frac{dx}{dt} = a(x)b(t) \quad (4.4)$$

Vi sono due possibilità:

(a) La funzione $a(x)$ non si annulla mai. In tal caso la (4.4) equivale all'equazione:

$$\frac{dx}{a(x)} = b(t) dt \quad \forall x$$

in cui abbiamo separato la variabile x (che compare solo a sinistra dell'uguale) dalla variabile t (che compare esplicitamente a destra dell'uguale).

(b) La funzione $a(x)$ si annulla per qualche valore x^* . Possiamo ancora separare le variabili come prima ma solo per i valori x che non annullano a :

$$\frac{dx}{a(x)} = b(t) dt \quad x \neq x^*$$

Otteniamo un'equazione che non è perfettamente equivalente all'originale (4.4) in quanto tra le sue soluzioni non possono comparire le soluzioni costanti del tipo:

$$x^*(t) \equiv x^*$$

che invece risolvono la (4.4) com'è facile verificare:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^*(t) \equiv x^* \\ a(x^*) = 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} dx^*/dt \equiv 0 \\ a(x^*)b(t) \equiv 0 \end{array} \right\} \implies \frac{dx^*}{dt} = a(x^*)b(t)$$

La cosa importante è che l'equazione

$$\frac{dx}{a(x)} = b(t) dt \quad (4.5)$$

può essere risolta integrando ambo i membri (rispetto a x il primo, rispetto a t il secondo). Occorrerà poi aggiungere le eventuali soluzioni costanti x^* nel caso (b) per trovare la soluzione generale dell'equazione (4.4) di partenza.

Esempio 100 Riprendiamo il modello logistico (4.1). L'equazione $a(x) = 0$ riesce:

$$\alpha x (M - x) = 0$$

Le sue due sole soluzioni 0 e M generano le due soluzioni costanti:

$$x_1^*(t) \equiv 0 \text{ e } x_1^*(t) \equiv M$$

che non risolvono l'equazione a variabili separate

$$\frac{dx}{\alpha x (M - x)} = 1 \cdot dt$$

siamo nel caso (b).

A questo punto s'aprono due possibilità d'integrazione:

(i) **Per integrali indefiniti**, integriamo indefinitamente ambo i membri della (4.5):

$$\int \frac{dx}{a(x)} = \int b(t) dt$$

con $c \in \mathbb{R}$, arbitraria. Ponendo

$$A(x) = \int \frac{dx}{a(x)} \text{ e } B(t) + c = \int b(t) dt$$

si ha:

$$A(x) = B(t) + c$$

Se A è invertibile:

$$x(t; c) = A^{-1}[B(t) + c]$$

ci dà la soluzione generale, eventualmente completata con soluzioni costanti non incluse per valori adeguati di c che le individuerrebbero. La soluzione generale è così descritta tramite una costante arbitraria c .

(ii) **Per integrali definiti**, previo un cambiamento di nome della variabile di stato ($x \rightarrow \xi$) e del tempo ($t \rightarrow \tau$), che ci fa riscrivere la (4.5):

$$\frac{d\xi}{a(\xi)} = b(\tau) d\tau$$

Per ogni condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ ammissibile otteniamo la soluzione particolare:

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{a(\xi)} = \int_{t_0}^t b(\tau) d\tau$$

Ponendo

$$A_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{a(\xi)} \text{ e } B_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t b(\tau) d\tau$$

si ha

$$A_{x_0}(x) = B_{t_0}(t)$$

Come prima, se $A_{x_0}(x)$ è invertibile, l'espressione:

$$x(t; x_0) = A_{x_0}^{-1}[B_{t_0}(t)]$$

eventualmente completata con le soluzioni costanti x^* non incluse, ci dà la soluzione generale in funzione della condizione iniziale x_0 .

Vediamo i due procedimenti all'opera nei seguenti tre esempi:

Esempio 101 Consideriamo l'equazione differenziale:

$$x'(t) = -tx^2(t)$$

che è del tipo in esame con:

$$a(x) = x^2 \text{ e con } b(t) = -t$$

È anzitutto evidente che:

$$x^*(t) \equiv 0 \quad (4.6)$$

è la sola soluzione costante. Separando le variabili otteniamo:

$$-\frac{dx}{x^2} = t dt, x \neq 0 \quad (4.7)$$

Procediamo dapprima con integrali indefiniti. Integrando a membro a membro:

$$\int -\frac{1}{x^2} dx = \int t dt \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{t^2}{2} + c \Rightarrow x(t) = \frac{1}{c + t^2/2} \quad (4.8)$$

con $c \in \mathbb{R}$ qualunque. Naturalmente questa famiglia di soluzioni va completata con la (4.6), che potremmo però pensare già censita dalla (4.8) con $c = \infty$, ma riconosciamo si tratta d'un'idea un po' ardita. Riassumendo, la soluzione generale dell'equazione differenziale, che ci fornisce la storia del sistema dinamico, per es., da 0 in là è:

$$x(t; c) = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{c + t^2/2} \end{cases} \text{ con } c \in \mathbb{R} \text{ qualunque}$$

Se la condizione iniziale è $x(0) = 0$ la soluzione costante è l'unica che la soddisfa, se $x(0) = x_0 \neq 0$ la condizione:

$$x(0) = \frac{1}{c + 0^2/2}$$

porge $c = 1/x(0) = 1/x_0$. Possiamo allora elencare tutte le soluzioni particolari dell'equazione differenziale come segue:

$$x(t; x_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } x(0) = 0 \\ \frac{1}{1/x_0 + t^2/2} & \text{se } x(0) = x_0 \neq 0 \end{cases}$$

Facciamo notare che se $x_0 < 0$ le corrispondenti soluzioni divergono a $-\infty$ quando $t \rightarrow \sqrt{-2/x_0}$ da sinistra e sono quindi definite solo nell'intervallo $[0, \sqrt{-2/x_0})$. Se invece $x_0 \geq 0$, le soluzioni sono definite su tutto $[0, +\infty)$.

Vediamo ora come procedere con integrali definiti. Partiamo dalla (4.7) e cambiamo nome alle variabili:

$$-\frac{d\xi}{\xi^2} = \tau d\tau$$

Integriamo poi il primo membro tra $x(0) = x_0 \neq 0$ e $x(t) = x$, il secondo tra $t_0 = 0$ e t :

$$\int_{x_0}^x -\frac{d\xi}{\xi^2} = \int_0^t \tau d\tau$$

Si ha³:

$$\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x_0} = \frac{t^2}{2} - \frac{0^2}{2}$$

onde facilmente:

$$x(t; x_0) = \frac{1}{1/x_0 + t^2/2}$$

come visto sopra. Se associamo a queste soluzioni particolari la soluzione “particolarissima” (4.6) abbiamo ricostruito, anche per questa via, la soluzione generale.

Il diagramma seguente illustra le diverse dinamiche del sistema, innescate da diverse condizioni iniziali $x(0) = 1, 0$ e -0.1 :

Si noti la “stranezza” che il diagramma suggerisce. Se il sistema parte da $x(0) \geq 0$, la variabile di stato, almeno nel lungo andare converge a 0, qualunque sia il punto di partenza. Se il sistema parte da $x(0) < 0$, magari anche molto vicino a 0 la variabile di stato sta vicino a 0 per un po’ di tempo e poi... scappa. Ci occuperemo oltre (v. la sezione 8) di questi fenomeni e ne comprenderemo la rilevanza anche pratica.

Esempio 102 Modello logistico — Riprendiamo l’esempio 98 nella versione della (4.2):

$$x' = \alpha(t) x (M - x)$$

Sono affatto evidenti le due soluzioni costanti:

$$x(t) \equiv 0 = x^* \text{ e } x(t) \equiv M = x^{**}$$

Per trovare le altre, riscriviamo la legge del moto, come si dice, “ai differenziali”:

$$\frac{dx}{x(M-x)} = \alpha(t) dt$$

e integriamo, membro a membro:

$$\int \frac{dx}{x(M-x)} = \int \alpha(t) dt + c$$

³Si noti che, per poter effettuare quest’integrazione, abbiamo chiesto che $x_0 \neq 0$. Altrimenti l’integrale a primo membro (che è un integrale generalizzato) non avrebbe avuto senso.

Poiché⁴:

$$\frac{1}{x(M-x)} = \frac{1}{M} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{M-x} \right)$$

risulta

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(M-x)} &= \frac{1}{M} \left(\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{M-x} \right) = \\ &= \frac{1}{M} (\ln|x| - \ln|M-x|) \end{aligned}$$

Ponendo $A(t) = \int \alpha(t) dt$ otteniamo:

$$\frac{1}{M} \ln \left| \frac{x}{M-x} \right| = A(t) + k$$

onde, con qualche passaggio, s'ottiene:

$$x(t) = \frac{M}{1 + e^{-MA(t)/c}} \quad (4.9)$$

ove $c = \pm e^{kM}$ è una costante arbitraria non nulla. Si noti che l'espressione (4.9) non è la soluzione generale in quanto non include le due soluzioni costanti x^* e x^{**} sopra individuate.

La versione più popolare del modello prevede $\alpha(t) \equiv \alpha$ costante, onde $A(t) = \alpha t$ e, quindi, la versione standard del modello logistico:

$$x(t) = \frac{M}{1 + e^{-\alpha Mt/c}} \quad (4.10)$$

Cerchiamo il collegamento tra la scelta di c e la condizione iniziale $x(0)$. Se $x(0) = 0$ o $x(0) = M$ non c'è storia, nel senso che il sistema da lì non si sposterà mai. Altrimenti, scegliendo $x(0) = x_0$ diverso sia da 0 sia da M , dalla (4.10) otteniamo:

$$x_0 = \frac{M}{1 + 1/c}$$

onde:

$$c = \frac{x_0}{M - x_0}$$

Possiamo permetterci il lusso di riscrivere la soluzione generale in funzione di x_0

$$x(t; x_0) = \frac{Mx_0}{x_0 + e^{-\alpha Mt} \cdot (M - x_0)}$$

che offre il notevolissimo vantaggio di includere tutte le soluzioni (anche le due costanti 0 e M) in una sola espressione.

Esempio 103 Torniamo al modello dell'esempio 99:

$$p'(t) = -\alpha(t) [p(t) - p^*]$$

e, stavolta, usiamo gl'integrali definiti. Si vede subito che v'è una sola soluzione costante:

$$p(t) \equiv p^*$$

⁴Rammenti il lettore quanto ha sofferto imparando a integrare le funzioni razionali fratte, magari chiedendosi (allora) anche il perché. Che ora è evidente.

Separiamo le variabili, cambiandone pure i nomi:

$$\frac{d\pi}{\pi - p^*} = -\alpha(\tau) d\tau$$

onde, integrando, troviamo:

$$[\ln |\pi - p^*|]_{p(0)}^{p(t)} = -[A(t) - A(0)]$$

con $A(t) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau$. Se ne trae:

$$\frac{|p(t) - p^*|}{|p(0) - p^*|} = e^{A(0) - A(t)} \Rightarrow |p(t) - p^*| = \underbrace{|p(0) - p^*| e^{A(0)}}_{\text{Una nuova costante } C > 0} \cdot e^{-A(t)} = C e^{-A(t)}$$

La differenza di prezzo in modulo $|p(t) - p^*|$ ha comportamento che, nel lungo andare, dipende dal comportamento della funzione (positiva) $A(t)$. I modelli più semplici, per loro natura “semplificano” e, piuttosto naturalmente, assumono che $\alpha(t) \equiv \alpha > 0$. Segue $A(t) = \alpha t$, segue $C e^{-\alpha t} \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ e, quindi, il prezzo di mercato converge al prezzo d’equilibrio. Torniamo al nostro modello, in cui si rimuove l’ipotesi che α sia costante. Tale velocità d’aggiustamento del prezzo è un ingrediente cruciale del modello. Che cos’accade se essa, per esempio, diminuisce nel tempo? È ovvio che se $\alpha(t) \rightarrow \alpha^* > 0$ non ci sono problemi, perché riuscirà a schiacciare $|p(t) - p^*|$ col semplice passare del tempo. Ma che accadrebbe se la velocità d’aggiustamento tendesse a 0 per t tendente a $+\infty$? La risposta è agevole perché l’elemento cruciale è $A(t) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau$ e c’interessa il suo comportamento per $t \rightarrow +\infty$. Il lettore sa che cosa vuol dire integrale generalizzato d’una funzione α tra 0 e $+\infty$. La sua esistenza dipende da:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau$$

Se tale limite esiste finito si dice che α è integrabile in senso generalizzato tra 0 e $+\infty$. A questo punto possiamo asserire che il prezzo di mercato p converge al prezzo d’equilibrio p^* se e solo se $\alpha(t)$ non è integrabile in senso generalizzato tra 0 e $+\infty$.

Osservazione 104 Le equazioni differenziali a variabili separabili costituiscono un “guscio” molto utile per la costruzione di modelli dinamici con tempo continuo unidimensionali e deterministici. Nella corrente letteratura economica e finanziaria sono di largo impiego modelli in cui l’evoluzione è stocastica. Nel volumetto [6], alle pp. 130-131, è indicato, per la prima volta, un modo per costruire l’analogo stocastico per questo guscio.

Vediamo ora un esempio assolutamente rilevante. Il lettore sa che molti fenomeni aleatori, non solo nell’ambito delle scienze sociali, generano osservazioni ben descritte da una legge di probabilità, detta “legge di Poisson”.

Esempio 105 Processo di Poisson — In quest’esempio la variabile di stato è una probabilità. Pensiamo d’essere in un mercato finanziario. Possono giungere, casualmente nel tempo, informazioni choc, che spostano bruscamente gli equilibri di mercato. Contiamo nel tempo questi choc. Indichiamo con⁵ $\tilde{N}(t)$ il numero di choc arrivati non oltre la data t . Azzeriamo il contatore: $\tilde{N}(0) = 0$ con probabilità 1. Il modello di Poisson è a basso costo e altissimo rendimento. Si basa su due ipotesi di base: (1) In un intervallo d’ampiezza infinitesima: $(t, t+h)$ la probabilità d’un arrivo è $\lambda h + o(h)$, la probabilità di più arrivi è $o(h)$.

⁵Di solito s’usa il **neretto** per indicare i numeri aleatori. Poiché in questo volumetto essi non svolgeranno un ruolo cruciale (almeno in questa prima edizione) e poiché abbiamo già assegnato il neretto a vettori, incontrando un numero aleatorio, lo contraddistingueremo con la tilde sopra, che, ondeggiando, ne richiama l’aleatorietà.

(2) Se consideriamo due intervalli temporali disgiunti I, J , i numeri d'arrivi nei due intervalli sono numeri aleatori stocasticamente indipendenti:

$$\Pr[(k \text{ arrivi in } I) \cap (h \text{ arrivi in } J)] = \Pr(k \text{ arrivi in } I) \cdot \Pr(h \text{ arrivi in } J)$$

Mostriamo come calcolare $P_0(t)$, la probabilità che il numero d'arrivi entro t sia 0. Sappiamo che $P_0(0) = 1$, per l'azzeramento del contatore. Supponiamo che in t il contatore sia ancora azzerato (la probabilità di ciò è $P_0(t)$), per la probabilità che esso sia ancora azzerato in $t+h$ deve aver⁶:

$$P_0(t+h) = P_0(t) [1 - \lambda h + o(h)]$$

Ne deduciamo⁷:

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}$$

Col solito cerimoniale generato da $h \rightarrow 0$, otteniamo:

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) \text{ con la condizione iniziale } P_0(0) = 1$$

Procediamo con integrali definiti. Da:

$$d\Pi = -\lambda \Pi d\tau$$

integrando, troviamo:

$$\int_1^{P_0(t)} \frac{1}{\Pi} d\Pi = \int_0^t -\lambda d\tau$$

onde:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Concludiamo con un'importante osservazione. Abbiamo esplicitamente visto nell'esempio (101) un caso in cui alcune soluzioni *non* sono definite su tutto \mathbb{R}_+ ma solo su di un intervallo limitato $I = I(x_0) = [0, t_{x_0})$ dipendente dal punto di partenza x_0 . Abbiamo giustificato l'impossibilità di proseguire con il fatto che

$$x(t, x_0) \rightarrow \pm\infty$$

per t che tende (da sinistra) a t_{x_0} . Ebbene quanto detto è vero in generale: ogni soluzione particolare che soddisfa le ipotesi del Teorema di Cauchy può estendersi a destra (o a sinistra) di t_0 solo fino a quando resta limitata.

4.2 Equazioni differenziali lineari del prim'ordine

Questo schema è utilizzato molto frequentemente. Già l'abbiamo definito le equazioni differenziali lineari come equazioni del tipo :

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \quad (4.11)$$

Non vi sono problemi d'unicità delle soluzioni se, per esempio, $a(t)$ è una funzione continua. Prima d'imparare a trattare questo modello evolutivo è opportuno darne un'interpretazione, che potrebbe aiutare il lettore nel suo uso.

Pensiamo allo sviluppo d'una popolazione umana, che vive in un certo territorio. Esso è determinato da due tipi di spinte: ve n'è una endogena, proporzionale al valore corrente della variabile di stato. A essa se n'aggiunge una esogena:

$$x'(t) = \underbrace{a(t)x(t)}_{\text{endo}} + \underbrace{b(t)}_{\text{eso}}$$

⁶La probabilità dello zero in $t+h$ è, per l'ipotesi d'indipendenza stocastica fatta, il prodotto della probabilità dello zero fino a t con la probabilità di 0 arrivi tra t e $t+h$.

⁷Con le disinvoltture sugli $o(h)$, che il galateo consente.

Se vogliamo materializzare lo schema, pensiamo alla popolazione umana che vive in un certo territorio. Il suo incremento tra t e $t + h$:

$$x(t + h) - x(t)$$

s'assume sia (a meno dei soliti $o(h)$) somma di due addendi: il primo proporzionale allo stato corrente $x(t)$, con il fattore di proporzionalità $a(t)$ che può variare nel tempo, legato essenzialmente a nascite e morti della popolazione corrente, il secondo indipendente dallo stato del sistema, ma dipendente solo dal tempo, determinato da emi/immigrazione tra t e $t + h$:

$$\begin{aligned} x(t + h) - x(t) &= a(t)x(t)h + b(t)h + o(h) \approx \\ &\approx \underbrace{a(t)x(t)h}_{\text{endo}} + \underbrace{b(t)h}_{\text{eso}} \end{aligned}$$

Con le solite cerimonie, otteniamo la (4.11):

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

Se $b(t) \equiv 0$, saremmo a cavallo perché essa si ridurrebbe a:

$$x'(t) = a(t)x(t)$$

a variabili separabili, con ovvia soluzione (lavorando con integrali indefiniti):

$$x(t) = ce^{\int a(t)dt} \quad (4.12)$$

ma non è sempre *champagne*. Ma noi siamo irriducibili⁸ e, un po' follemente, ci chiediamo che cosa potrebbe accadere se c , invece d'essere una grigia costante, fosse una funzione del tempo:

$$c = c(t)$$

Ci prendiamo il rischio, quasi pokeristico, d'andare a vedere, nel senso che ci chiediamo se c'è una funzione $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che, dalla (4.12), conduca a una soluzione.

Estendiamo allora la (4.12):

$$x(t) = c(t)e^{\int a(t)dt} \quad (4.13)$$

e differenziamo:

$$x'(t) = c(t)a(t)e^{\int a(t)dt} + c'(t)e^{\int a(t)dt}$$

Se vogliamo che la (4.13) sia davvero una soluzione dell'equazione, dev'essere soddisfatta l'uguaglianza:

$$c(t)a(t)e^{\int a(t)dt} + c'(t)e^{\int a(t)dt} = a(t)c(t)e^{\int a(t)dt} + b(t)$$

da cui:

$$c'(t) = b(t)e^{-\int a(t)dt}$$

onde:

$$c(t) = \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt + c$$

La soluzione cercata è allora del tipo:

$$x(t; c) = e^{\int a(t)dt} \left(\int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt + c \right) \quad (4.14)$$

con $c \in \mathbb{R}$, costante arbitraria.

⁸L'idea è d'un italiano, spesso pensato francese: Giuseppe Luigi di Lagrange, in cui già il lettore sarà inciampato. Il metodo si chiama di "variazione delle costanti", che, per chi è familiare, è piuttosto incredibile. La categoria morale delle costanti e delle variabili è qui messa in discussione, ma crediamo sia uno degli inizi di cui ciò che oggi si chiama *euristica*.

Osservazione 106 *La soluzione generale può essere scritta anche in funzione della condizione iniziale $x(0) = x_0$ tramite integrali definiti:*

$$x(t; x_0) = e^{\int_0^t a(\tau) d\tau} \left(x_0 + \int_0^t b(\tau) e^{-\int_0^\tau a(s) ds} d\tau \right) \quad (4.15)$$

Consideriamo questo

Esempio 107 *Sia:*

$$x'(t) = 0.1x(t) + 2 + 0.5t$$

In questo caso $a(t) = 0.1$ costante e $b(t) = 2 + 0.5t$. Applicando la (4.14) si ottiene l'integrale generale:

$$\begin{aligned} x(t; c) &= e^{\int 0.1 dt} \left(\int (2 + 0.5t) e^{-\int 0.1 dt} dt + c \right) = \\ &= e^{0.1t} \left(\int (2 + 0.5t) e^{-0.1t} dt + c \right) = \\ &= e^{0.1t} \left((2 + 0.5t) \int e^{-0.1t} dt - 0.5 \int e^{-0.1t} dt + c \right) = \\ &= e^{0.1t} \left((2 + 0.5t) \frac{e^{-0.1t}}{-0.1} - 0.5 \frac{e^{-0.1t}}{-0.1} + c \right) = \\ &= e^{0.1t} (c - 5te^{-0.1t} - 15e^{-0.1t}) \end{aligned}$$

Se cerchiamo poi la soluzione particolare assegnata da $x(0) = x_0$, troviamo:

$$x(0) = c - 15 = x_0 \implies c = x_0 + 15$$

per cui ogni soluzione particolare è data da

$$x(t) = e^{0.1t} (x_0 + 15 - 5te^{-0.1t} - 15e^{-0.1t})$$

analogamente a quella che avremmo trovato per integrali definiti. Infatti:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\int_0^t 0.1 d\tau} \left(x_0 + \int_0^t (2 + 0.5\tau) e^{-\int_0^\tau 0.1 ds} d\tau \right) = \\ &= e^{0.1t} \left(x_0 + \int_0^t (2 + 0.5\tau) e^{-0.1\tau} d\tau \right) = \\ &= e^{0.1t} \left(x_0 + [-5\tau e^{-0.1\tau} - 15e^{-0.1\tau}]_0^t \right) = \\ &= e^{0.1t} (x_0 - 5te^{-0.1t} - 15e^{-0.1t} + 0 + 15) = \\ &= e^{0.1t} (x_0 + 15 - 5te^{-0.1t} - 15e^{-0.1t}) \end{aligned}$$

Più importante è quest'altro:

Esempio 108 Processo di Poisson — *Consideriamo, in accordo con l'esempio 105, come variabile di stato, la probabilità $P_1(t)$, che tra 0 e t si sia osservato un solo arrivo. La legge del moto per P_1 può descriversi banalmente. Se in $t + h$ c'è stato un solo arrivo, esso è avvenuto prima di t e, dopo, non ce n'è stato un altro, oppure, fino a t non c'è stato alcun arrivo e ve n'è stato uno tra t e $t + h$. Si ha allora:*

$$P_1(t + h) = P_0(t) [\lambda h + o(h)] + P_1(t) [1 - \lambda h - o(h)]$$

onde:

$$\frac{P_1(t + h) - P_1(t)}{h} = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}$$

Ne segue l'equazione differenziale:

$$P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

ossia:

$$P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}$$

che è un'equazione differenziale del prim'ordine con $a(t) \equiv -\lambda$ e $b(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Troviamo grazie alla (4.15):

$$P_1(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda \tau} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau = \lambda t e^{-\lambda t}$$

La possibilità d'ottenere P_1 da P_0 ha valenza più generale. Possiamo scrivere infatti:

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

e, riapplicando il ragionamento⁹, troviamo:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

4.2.1 Il caso autonomo

Consideriamo ora il caso speciale di un'equazione differenziale lineare autonoma:

$$x'(t) = ax(t) + b \quad (4.16)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. Essa è banale se $a = 0$. In tal caso, si riduce a:

$$x'(t) = b$$

che ha soluzione generale:

$$x(t) = bt + c$$

con $c \in \mathbb{R}$ qualunque: graficamente si tratta di un fascio di rette parallele, con pendenza comune b .

Assumiamo ora $a \neq 0$.

Vediamo esplicitamente come l'espressione della soluzione generale (4.14) si declina nel caso autonomo:

$$\begin{aligned} x(t; c) &= e^{\int a dt} \left(\int b e^{-\int a dt} dt + c \right) = \\ &= e^{at} \left(b \int e^{-at} dt + c \right) = \\ &= e^{at} \left(-\frac{b}{a} e^{-at} + c \right) = \\ &= -\frac{b}{a} + c e^{at} \end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$ qualunque. Se vogliamo la soluzione particolare che soddisfa $x(0) = x_0$, dall'equazione:

$$x_0 = -\frac{b}{a} + c$$

⁹Volendo formalizzare, la formula provata per P_n vale per $n = 0$. E' facile provare che se vale per $n - 1$, allora vale per n , per ogni $n \in \mathbb{N}$, con $n > 0$. Il principio d'induzione ci garantisce che vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

otteniamo:

$$c = x_0 + \frac{b}{a}$$

onde:

$$x(t) = -\frac{b}{a} + \left(x_0 + \frac{b}{a}\right)e^{at} = x_0 e^{at} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)$$

È importante notare che se $a < 0$ ogni soluzione converge a $x^* = -\frac{b}{a}$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\frac{b}{a}$$

4.2.2 Legame tra le soluzioni di equazioni omogenee e non omogenee

Partiamo molto in generale e poi, stringi stringi, giungiamo a occuparci del nostro problema. Sia X uno spazio vettoriale. Consideriamo un'applicazione $L : X \rightarrow Y$, dove Y è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Diciamo che L è *lineare* se additiva e omogenea:

$$L(\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2) = L(\mathbf{x}^1) + L(\mathbf{x}^2) \text{ e } L(\alpha \mathbf{x}) = \alpha L(\mathbf{x})$$

$\forall \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x} \in X$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Consideriamo il problema:

trovare tutti gli $\mathbf{x} \in X$ tali che $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$

con $\mathbf{b} \in Y$. La soluzione di questo problema ha sempre la stessa struttura legata indissolubilmente all'associato problema omogeneo:

$$L(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$$

le cui soluzioni \mathbf{z} formano sempre un sottospazio vettoriale di X , detto *nucleo* dell'applicazione lineare e indicato con $\ker L$. Infatti si dimostra facilmente¹⁰ che:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{z}$$

ove \mathbf{x}^* è una soluzione particolare, non importa quale, del problema non omogeneo $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Queste nozioni sono già state introdotte e utilizzate nel caso specialissimo di sistemi di equazioni algebriche lineari:

trovare tutti gli $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$

In questo caso straspeciale $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Possiamo incredibilmente applicare queste nozioni anche alle equazioni differenziali lineari.

Infatti introducendo l'operatore lineare¹¹:

$$L : X \rightarrow Y \text{ definito da } L(x) = \left(\frac{d}{dt} - a(t)\right)x$$

l'equazione

$$x'(t) = a(t)x(t)$$

¹⁰Sia L un operatore lineare. Siano $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$ due soluzioni di $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Da:

$$L(\mathbf{x}^1) = \mathbf{b} \text{ e da } L(\mathbf{x}^2) = \mathbf{b}$$

si ha, sottraendo membro a membro:

$$L(\mathbf{x}^1) - L(\mathbf{x}^2) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2 \text{ risolve } L(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$$

che equivale a quanto asserito.

¹¹Provarne la linearità.

può essere riscritta come:

$$\left(\frac{d}{dt} - a(t)\right)x = 0$$

Le sue soluzioni, che denotiamo con $x_{\text{omo}}(t)$, costituiscono quindi un sottospazio vettoriale di X : il nucleo di L . Bene, la soluzione generale dell'equazione non omogenea:

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

s'ottiene sommando una soluzione particolare $x^*(t)$ della stessa con le soluzioni dell'omogenea associata:

$$x(t) = x^*(t) + x_{\text{omo}}(t)$$

Nel caso non autonomo riesce:

$$x(t) = e^{\int a(t)dt} \int b(t) e^{-\int a(t)dt} dt + ce^{\int a(t)dt}$$

con

$$x_{\text{omo}}(t) = ce^{\int a(t)dt} \quad e \quad x^*(t) = e^{\int a(t)dt} \int b(t) e^{-\int a(t)dt} dt$$

Nel caso autonomo:

$$x'(t) = ax(t) + b$$

con $a \neq 0$ per evitare banalità, l'equazione omogenea associata è $x'(t) = ax(t)$, che ha soluzione generale $x_{\text{omo}}(t) = ce^{at}$. Per trovare una soluzione particolare, una buona idea è cercarne una dello stesso tipo del termine forzante, che è costante. Proviamo con:

$$x^*(t) \equiv k$$

Se ne ottiene:

$$x^{*'}(t) \equiv 0$$

onde, sostituendo nella (4.16):

$$0 = ak + b$$

onde $k = -b/a$ e, pertanto:

$$x(t; c) = -\frac{b}{a} + ce^{at}$$

che gloriosamente coincide con l'espressione già trovata per altra via.

Ecco un altro esempio interessante, che useremo dopo: veda il lettore oltre la sezione 8.5.4.

Esempio 109 Modello di Keynes — Il prodotto tra e e $t+h$ varia secondo la legge, affatto naturale:

$$Y(t+h) - Y(t) = \gamma [D(t) - Y(t)]h + o(h)$$

ove $D(t)h$, è la domanda aggregata tra t e $t+h$. In questi schemi è usuale scomporre la domanda in tre componenti: i consumi, gli investimenti esogeni e la spesa pubblica. Liquidiamo gli ultimi due con un'ipotesi selvaggia di costanza nel tempo. I primi sono d'ammontare $Ih + o(h)$, i secondi d'ammontare $Gh + o(h)$. I consumi, per contro, dipendono fatalmente dal prodotto:

$$C(t)h = [a + bY(t)]h + o(h)$$

Sostituendo:

$$Y(t+h) - Y(t) = [I + G + a + bY(t)]h + o(h)$$

onde:

$$Y'(t) = I + G + a + bY(t)$$

Essa è del tipo appena visto. Lasciamo al lettore il piacere di ricavare $Y(t)$.

4.3 Equazione di Bernoulli

Alle equazioni lineari sono riconducibili due altri tipi d'equazioni non lineari, che sono d'interesse per l'Economia.

La prima che vedremo è la cosiddetta "Equazione di Bernoulli":

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^m(t), \text{ con } m \neq 0, 1 \quad (4.17)$$

si noti che la condizione $m \neq 0, 1$ esclude il caso di equazione lineare.

Questo tipo di equazioni sono utilizzate, per esempio, nel modello di Solow¹² (esempio 97), che peraltro non esaminiamo, e nel modello logistico generalizzato:

$$x'(t) = \alpha(t)x(t)[M(t) - x(t)]$$

che già abbiamo incontrato (si veda sopra la (4.3)). Anzi, partiamo proprio da questo esempio:

Esempio 110 Modello logistico con livello di saturazione variabile — Possiamo riscrivere la legge del moto come segue:

$$x'(t) = \alpha(t)M(t)x(t) - \alpha(t)x^2(t)$$

che è di Bernoulli con:

$$a(t) = \alpha(t)M(t); \quad b(t) \equiv -\alpha(t) \quad e \quad m = 2$$

Per economia di spazio e di pensiero, riscriviamo l'equazione di Bernoulli omettendo d'esplicitare che a, b, x, x' sono funzioni di t :

$$x' = ax + bx^m, \text{ con } m \neq 0, 1 \quad (4.18)$$

Osserviamo subito che se $m > 0$ una soluzione per l'equazione è la soluzione identicamente nulla $x(t) \equiv 0$. Effettuiamo la seguente sostituzione¹³:

$$x = z^{\frac{1}{1-m}}, \text{ con } z \text{ nuova funzione incognita}$$

Differenziando si ha:

$$x' = \frac{1}{1-m} z^{\frac{m}{1-m}} \cdot z'$$

e, sostituendo nella (4.18), otteniamo:

$$\frac{1}{1-m} z^{\frac{m}{1-m}} \cdot z' = az^{\frac{1}{1-m}} + bz^{\frac{m}{1-m}}$$

da cui s'ottiene l'equazione lineare:

$$z' = (1-m)az + (1-m)b$$

¹²Precisamente, quando s'assume che la funzione di produzione $F(K, L)$ sia la popolarissima funzione di Cobb-Douglas:

$$F(K, L) = aK^\alpha L^{1-\alpha}$$

la funzione di produzione intensiva risulta:

$$f(k) = ak^\alpha$$

e l'equazione di Solow è:

$$k'(t) = -gk(t) + ask^\alpha$$

che, come il lettore può controllare poco sotto è proprio del tipo Bernoulli.

¹³Dovuta a Johann Bernoulli nel 1697. Che trovò pure il modo di ricondurre l'equazione allo schema delle variabili separabili.

Risolvendo in z e ripristinando le dipendenze da t s'ottiene:

$$z(t; c) = e^{\int (1-m)a(t)dt} \left[\int (1-m)b(t) e^{-\int (1-m)a(t)dt} dt + c \right]$$

e infine si giunge all'espressione:

$$x(t; c) = \left\{ e^{\int (1-m)a(t)dt} \left[\int (1-m)b(t) e^{-\int (1-m)a(t)dt} dt + c \right] \right\}^{\frac{1}{1-m}} \quad (4.19)$$

che, abbinata a eventuali soluzioni particolari costanti, fornisce la soluzione generale dell'equazione di Bernoulli.

Esempio 111 *Applichiamo immediatamente questo procedimento al modello logistico del precedente esempio, che riscriviamo più semplicemente come:*

$$x' = ax - bx^2$$

dove abbiamo posto $a(t) = \alpha(t) M(t)$ e $b(t) = -\alpha(t)$. La sostituzione opportuna è

$$x = z^{\frac{1}{1-2}} = \frac{1}{z} \quad \text{onde} \quad x' = -\frac{z'}{z^2}$$

Sostituendo s'ottiene:

$$-\frac{z'}{z^2} = az^{-1} - bz^{-2} \implies z' = -az + b$$

ovvero un'equazione lineare non omogenea

$$z'(t) = -\alpha(t) M(t) z(t) + \alpha(t) \quad (4.20)$$

che ha soluzione

$$\begin{aligned} z(t; c) &= e^{\int -\alpha(t)M(t)dt} \left[\int \alpha(t) e^{-\int -\alpha(t)M(t)dt} dt + c \right] = \\ &= e^{-\int \alpha(t)M(t)dt} \left[\int \alpha(t) e^{\int \alpha(t)M(t)dt} dt + c \right] \end{aligned}$$

Da $x = z^{-1}$ si trae infine:

$$x(t; c) = \left\{ e^{-\int \alpha(t)M(t)dt} \left[\int \alpha(t) e^{\int \alpha(t)M(t)dt} dt + c \right] \right\}^{-1} = \frac{1}{e^{-\int \alpha(t)M(t)dt} \left[\int \alpha(t) e^{\int \alpha(t)M(t)dt} dt + c \right]}$$

che largamente generalizza il modello logistico. Lasciamo al lettore volenteroso la ricostruzione attraverso integrali definiti.

4.4 Equazione di Riccati

Tutti noi (lettori e autori) abbiamo apprezzato le competenze acquisite sulle funzioni quadratiche:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

che può essere utilizzata come legge del moto.

L'equazione di Riccati è appunto l'analoga versione di legge del moto:

$$x'(t) = a(t)x^2(t) + b(t)x(t) + c(t) \quad (4.21)$$

L'equazione di Riccati è utile perché ricorre in problemi di ottimizzazione dinamica, ossia in problemi ove si vuole trovare la traiettoria ottima d'evoluzione d'un sistema dinamico, che possa, almeno entro limiti, essere controllato. Cfr., per esempio [11], p. 286.

Anche qui possiamo ridurci alle equazioni lineari. Vediamo come.

Dobbiamo conoscere una soluzione particolare $x_1(t)$ dell'equazione di Riccati, ovvero, omettendo al solito le dipendenze da t , tale che:

$$x_1' = ax_1^2 + bx_1 + c$$

Indicando $x(t)$ la generica soluzione dell'equazione di Riccati, consideriamo ora la differenza tra soluzione generica e soluzione particolare:

$$z(t) = x(t) - x_1(t) \implies x(t) = x_1(t) + z(t)$$

Abbiamo, con notazioni risparmiose:

$$x = x_1 + z \text{ e quindi } x' = x_1' + z'$$

Sostituendo nella (4.21) dev'essere:

$$\begin{aligned} x_1' + z' &= a(x_1 + z)^2 + b(x_1 + z) + c = \\ &= ax_1^2 + 2ax_1z + az^2 + bx_1 + bz + c = \\ &= \underbrace{ax_1^2 + bx_1 + c}_{=x_1'} + (2ax_1 + b)z + az^2 \end{aligned}$$

Si ottiene infine un'equazione differenziale in z :

$$z' = (2ax_1 + b)z + az^2$$

che è del tipo Bernoulli con $m = 2$.

Utilizzando l'espressione (4.19) e ripristinando le dipendenze da t si giunge all'espressione finale di z :

$$\begin{aligned} z(t; c) &= \left\{ e^{\int (1-2)[2a(t)x_1(t)+b(t)]dt} \left[\int (1-2)a(t) e^{-\int (1-2)[2a(t)x_1(t)+b(t)]dt} dt + c \right] \right\}^{\frac{1}{1-2}} = \\ &= \frac{1}{e^{-\int [2a(t)x_1(t)+b(t)]dt} \left[-\int a(t) e^{\int [2a(t)x_1(t)+b(t)]dt} dt + c \right]} \end{aligned}$$

in cui c è una costante arbitraria. Infine x sarà data da:

$$x(t; c) = z(t) + x_1(t)$$

Il punto “debole” di questa procedura sta nell'individuazione di una soluzione particolare $x_1(t)$. Se però il sistema dinamico ha qualche traiettoria costante basta individuarne una da usare come soluzione particolare. Vediamo un esempio:

Esempio 112 — Consideriamo l'equazione di Riccati autonoma:

$$x'(t) = x^2(t) - 2x(t) + 1$$

Si verifica facilmente che:

$$x_1(t) \equiv 1$$

è una sua soluzione particolare costante. Ponendo:

$$x = 1 + z \Rightarrow x' = z'$$

otteniamo:

$$z' = z^2$$

che è di Bernoulli¹⁴, con $a(t) \equiv 0$, $b(t) \equiv 1$ e $m = 2$. Quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} z(t; c) &= \left\{ e^{\int (1-2) \cdot 0 dt} \left[\int (1-2) \cdot 1 \cdot e^{-\int (1-2) 0 dt} dt + c \right] \right\}^{\frac{1}{1-2}} = \\ &= \left[- \int 1 \cdot dt + c \right]^{-1} = \\ &= \frac{1}{c-t} \end{aligned}$$

e infine otteniamo tutte le residue soluzioni (diverse da $x_1 = 1$):

$$x(t) = 1 + \frac{1}{c-t}$$

Se vogliamo esprimere in funzione della condizione iniziale $x(0) = x_0$, dobbiamo risolvere rispetto a c :

$$1 + \frac{1}{c-0} = x_0 \Rightarrow c = \frac{1}{x_0 - 1}$$

e otteniamo la soluzione generale desiderata

$$x(t; x_0) = \begin{cases} 1 + \frac{x_0 - 1}{1 - (x_0 - 1)t} & x_0 \neq 1 \\ 1 & x_0 = 1 \end{cases}$$

4.5 Equazioni alle differenze lineari del prim'ordine

Con tempo continuo ci siamo occupati di dinamiche con legge del moto:

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$$

Ci occupiamo ora dell'analogo discreto:

$$x(t+1) = a(t)x(t) + b(t)$$

Si verifica facilmente che se a, b sono definite $\forall t \in \mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$, ogni condizione di partenza $x(0) = x_0$ univocamente identifica la traiettoria evolutiva del sistema dinamico. Infatti tali equazioni altri non sono altro che successioni definite per ricorrenza e quindi partendo dalla condizione iniziale possono essere risolte ricorsivamente:

$$\begin{aligned} x(1) &= a(0)x_0 + b(0) \\ x(2) &= a(1)x(1) + b(1) = a(1)[a(0)x_0 + b(0)] + b(1) = a(1)a(0)x_0 + a(1)b(0) + b(1) \\ &\dots \end{aligned}$$

¹⁴È anche più semplicemente a variabili separabili. Il lettore provi, per esercizio, a risolverla come tale.

Possiamo intuire quale sarà la struttura della soluzione. La formula finale:

$$x(t) = x_0 \prod_{s=0}^{t-1} a(s) + \sum_{s=0}^{t-1} b(s) \prod_{k=s+1}^{t-1} a(k) \quad (4.22)$$

può essere provata per induzione su t . Questa formula merita alcuni commenti.

Osservazione 113 (i) Il simbolo \prod sta per “produttoria” di più fattori¹⁵, più precisamente:

$$\prod_{s=m}^n x_s, \text{ con } m, n \in \mathbb{N} \text{ sta per } \begin{cases} x_m x_{m+1} \dots x_n & \text{se } n > m \\ x_m & \text{se } m = n \\ 1 & \text{se } n < m \end{cases}$$

(ii) Se $a(t) \equiv a$ costante la (4.22) diviene:

$$x(t) = x_0 a^t + \sum_{s=0}^{t-1} b(s) a^{t-s-1}$$

(iii) Se $b(t) \equiv b$ costante la (4.22) diviene:

$$x(t) = x_0 \prod_{s=0}^{t-1} a(s) + b \sum_{s=0}^{t-1} \prod_{u=s+1}^{t-1} a(u)$$

(iv) Se sia $a(t) \equiv a$, sia $b(t) \equiv b$, costanti, la (4.22) diviene:

$$x(t) = x_0 a^t + b \sum_{s=0}^{t-1} a^{t-s-1} = \begin{cases} x_0 + bt & \text{se } a = 1 \\ x_0 a^t + b \frac{a^t - 1}{a - 1} & \text{se } a \neq 1 \end{cases}$$

Chiudiamo con un’avvertenza.

Nella (4.22) i vari prodotti di $a(\cdot)$ sono normali prodotti tra numeri. Sono commutativi, onde l’ordine non conta. Quando, oltre, passeremo a sistemi di dimensione superiore a 1 i numeri $a(t)$ diverranno matrici $A(t)$. il loro prodotto non è commutativo, e dovremo tenerne conto.

¹⁵ Analogamente al simbolo \sum che sta per “sommatoria” di più addendi.

5

Sistemi dinamici lineari di dimensione n con tempo discreto

5.1 Sistemi autonomi omogenei

Cominciamo dal caso più semplice di un sistema di equazioni lineare, autonomo e omogeneo:

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$$

ove A è una matrice quadrata d'ordine n

Per esempio, in dimensione 2:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1 \\ a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2 \end{bmatrix}$$

che rientra nello schema con:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Nel caso unidimensionale:

$$x(t+1) = \lambda x(t)$$

È immediato trovare:

$$x(t) = \lambda^t x(0)$$

e convincersi che se $x(0) = 0$, la dinamica (un po' piatta) riesce:

$$x(t) \equiv 0$$

Ovvero per ogni condizione iniziale $x(0) = x_0$, troviamo l'unica traiettoria:

$$x(t) = \lambda^t x_0$$

Ci possiamo aspettare che, in grande, cioè, in dimensione n , accada una cosa simile. Consideriamo una condizione iniziale del tipo $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$. Risolvendo ricorsivamente il problema:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \end{cases}$$

s'ottiene effettivamente l'unica soluzione

$$\mathbf{x}(t) = A^t \mathbf{x}^0$$

Ottima notizia: basta saper calcolare A^t . Purtroppo il calcolo di A^t non è, in generale, banale.

Sappiamo da quanto illustrato in precedenza che se A è diagonalizzabile allora, sfruttando autovalori e autovettori di A , possiamo scrivere:

$$A^t = X \Lambda^t X^{-1}$$

il che ci conforta ma ci lascia un po' perplessi sull'onerosità dei conti da fare.

Ci aiuta in parte il seguente:

Teorema 114 *Il sistema di equazioni alle differenze:*

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$$

se A non ha difetto di molteplicità (ovvero se A è diagonalizzabile) ha la soluzione generale:

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{c}) = c_1 \mathbf{x}^1 \lambda_1^t + c_2 \mathbf{x}^2 \lambda_2^t + \dots + c_n \mathbf{x}^n \lambda_n^t = \sum_{s=1}^n c_s \mathbf{x}^s \lambda_s^t \quad (5.1)$$

dove λ_s sono gli autovalori di A , \mathbf{x}^s sono autovettori associati e c_s sono costanti arbitrarie.

Dimostrazione. Fissiamo una generica condizione iniziale del tipo $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$. Ricorsivamente si può facilmente verificare che ogni punto $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ definisce l'unica soluzione

$$\mathbf{x}(t) = A^t \mathbf{x}^0$$

Se A è diagonalizzabile allora

$$A = X \Lambda X^{-1} \implies A^t = X \Lambda^t X^{-1} \implies A^t \mathbf{x}^0 = X \Lambda^t X^{-1} \cdot \mathbf{x}^0$$

dove

$$\Lambda^t = \text{diag}(\lambda_s^t) = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^t \end{bmatrix}$$

è la matrice diagonale che riporta in diagonale principale le potenze t -esime degli autovalori λ_s e

$$X = [\mathbf{x}^1 | \dots | \mathbf{x}^n]$$

è la matrice che ordinatamente raccoglie i corrispondenti autovettori. La trasformazione

$$\mathbf{c} = X^{-1} \cdot \mathbf{x}^0$$

consente di ottenere al variare di $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ tutti i possibili vettori $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Dunque la soluzione si può riscrivere come

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t; \mathbf{c}) &= X \Lambda^t \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{x}^1 | \dots | \mathbf{x}^n] \begin{bmatrix} \lambda_1^t & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \\ &= c_1 \mathbf{x}^1 \lambda_1^t + c_2 \mathbf{x}^2 \lambda_2^t + \dots + c_n \mathbf{x}^n \lambda_n^t = \sum_{s=1}^n c_s \mathbf{x}^s \lambda_s^t \end{aligned}$$

Osservando infine che al variare di \mathbf{x}^0 , ovvero di \mathbf{c} , si ottengono tutte le soluzioni, si può concludere che la (5.1) rappresenta la soluzione generale del sistema di equazioni alle differenze. ■

Quanto abbiamo visto sulla diagonalizzazione è ciò che serve. Vediamo un esempio:

Esempio 115 Consideriamo il sistema di equazioni alle differenze di dimensione 3:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = 2x_1(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) + 3x_2(t) \\ x_3(t+1) = x_1(t) + x_2(t) + 4x_3(t) \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è triangolare:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Lo spettro di A è dunque $\{2, 3, 4\}$. Essendo i tre autovalori distinti, A è diagonalizzabile. Individuiamo gli autospazi associati risolvendo i corrispondenti sistemi lineari omogenei

$$(A - \lambda_s I) \mathbf{x} = \mathbf{0}, s = 1, 2, 3$$

Per $\lambda_1 = 2$ abbiamo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Segue che l'autospazio associato a $\lambda_1 = 2$ è dato da tutti i vettori del tipo:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Per $\lambda_2 = 3$ abbiamo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo allora l'autospazio formato dai vettori:

$$\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ -\beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ con } \beta \in \mathbb{R}$$

Per l'autospazio associato $\lambda_3 = 4$ abbiamo:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Ovvero vettori del tipo:

$$\mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ con } \gamma \in \mathbb{R}$$

Possiamo allora scrivere la soluzione generale del sistema:

$$\mathbf{x}(t; \alpha, \beta, \gamma) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} 2^t + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} 3^t + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 4^t \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

che, come previsto, dipende da tre parametri (reali) arbitrari. Se poi cercassimo la soluzione particolare che soddisfa la condizione iniziale:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

non dobbiamo far altro che trovare i corrispondenti parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ risolvendo:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} 2^0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ -\beta \end{bmatrix} 3^0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} 4^0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta - \alpha \\ \gamma - \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 6 \end{cases}$$

L'unica soluzione particolare è quindi

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} 2^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} 3^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} 4^t = \begin{bmatrix} 2^t \\ 3^{t+1} - 2^t \\ 6 \cdot 4^t - 3^{t+1} \end{bmatrix}$$

Osserviamo che le costanti arbitrarie potevano anche trovarsi calcolando

$$X^{-1} \cdot \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Esempio 116 Sia:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Qui:

$$\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 2$$

Lo spazio invariante associato a $\lambda_1 = 1$ è:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

quindi, il contributo di λ_1 alla soluzione generale è costante:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 1^t = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Per quanto concerne l'altro autovalore $\lambda_2 = 2$ abbiamo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^2 = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ con } \beta \in \mathbb{R}$$

quindi, il contributo di λ_2 alla soluzione generale è:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} 2^t \text{ con } \beta \in \mathbb{R}$$

La soluzione generale è dunque funzione di 2 parametri arbitrari:

$$\mathbf{x}(t; \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} 2^t \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

In questi due esempi pare sia tutto bello, tutto liscio, tutto semplice. La matrice A ha educatamente autovalori distinti, cosicché non vi sono problemi di molteplicità. Inoltre essi sono tutti reali, col che, possiamo pensare che le traiettorie evolutive del sistema sono combinazioni lineari (con coefficienti vettoriali) delle funzioni esponenziali con base gli autovalori di A . Due domande sorgono a questo punto:

- (1) Cosa succede se però almeno uno (anzi due) autovalori sono complessi? Apparentemente sembra che la soluzione d'un problema che nasce in \mathbb{R}^n si trovi in \mathbb{C}^n . Da un punto di vista matematico non v'è problema. Da un punto di vista sostanziale la cosa non sta in piedi: parto da $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$. Definisco una legge del moto attraverso un'applicazione lineare (affine) in termini assolutamente reali. So che, usando la forza bruta, potrei ricorsivamente calcolare $\mathbf{x}(1)$ da $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(2)$ da $\mathbf{x}(1)$ e così via, ottenendo tutti stati reali.
- (2) Che succede se un autovalore è radice multipla dell'equazione caratteristica e v'è difetto di molteplicità? La dimostrazione del Teorema 114 mostra che se A non è diagonalizzabile allora l'espressione generale (5.1) non è più valida.

Queste due questioni meritano attenzione differente. La prima è largamente la più importante. La seconda serve per “chiudere” una vicenda matematica, di scarso interesse per le applicazioni¹.

Mostriamo subito come gestire la legittima inquietudine di cui alla prima domanda.

5.1.1 Autovalori complessi

Supponiamo che la matrice dei coefficienti abbia un autovalore complesso. Sappiamo che gli autovalori complessi sono sempre presenti in coppia e coniugati, quindi se:

$$\lambda = a + ib$$

è autovalore, anche:

$$\bar{\lambda} = a - ib$$

è un autovalore. Ad essi sono abbinati autovettori complessi e coniugati:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + i\mathbf{b} \text{ e } \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a} - i\mathbf{b} \text{ con } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

Il contributo alla soluzione generale imputabile alla coppia di autovalori complessi sarebbe dunque costruibile attraverso le combinazioni lineari di due traiettorie del tipo:

$$\mathbf{x}\lambda^t \text{ e } \bar{\mathbf{x}}\bar{\lambda}^t$$

che sono nella solita forma ma hanno l'inconveniente di essere complesse. Come abbiamo già osservato poco fa, ciò può creare sconcerto perchè ogni soluzione dovrebbe essere a componenti reali.

Si supera l'ostacolo grazie alla seguente:

Proposizione 117 *Dato il sistema di equazioni alle differenze:*

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$$

se A ammette un autovalore λ complesso e non ripetuto, allora la parte di soluzione generale del sistema dovuta all'autovalore λ e al suo coniugato $\bar{\lambda}$ è:

$$\mathbf{s}(t; c_1, c_2) = c_1 \operatorname{Re}(\mathbf{x}\lambda^t) + c_2 \operatorname{Im}(\mathbf{x}\lambda^t) \quad (5.2)$$

con $c_{1,2} \in \mathbb{R}$.

¹Le matrici “vere” presentano solitamente autovalori distinti e sono quindi solitamente diagonalizzabili.

Detto in altri termini, se $\lambda = a + ib$ è un autovalore semplice, allora al posto di $\mathbf{x}\lambda^t$ e $\overline{\mathbf{x}}\overline{\lambda}^t$, si possono usare:

$$\operatorname{Re}(\mathbf{x}\lambda^t) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(\mathbf{x}\lambda^t)$$

L'inconveniente è eliminato: tutte le traiettorie descritte da \mathbf{s} sono in \mathbb{R}^n e completano la soluzione generale utilizzando esattamente due costanti arbitrarie come da "regolamento".

Osservazione 118 Vale la pena di notare che l'espressione (5.2) ha validità anche nel caso reale. Infatti, se λ fosse reale, si avrebbe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e dunque si ricadrebbe nel solito caso in quanto:

$$\operatorname{Re}(\mathbf{x}\lambda^t) = \mathbf{x}\lambda^t \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(\mathbf{x}\lambda^t) = \mathbf{0}$$

La dimostrazione della Proposizione è facile ma necessita di alcune nozioni che non abbiamo presentato. Ci limitiamo quindi a sviluppare l'espressione di \mathbf{s} per vedere com'è fatta.

Anzitutto possiamo riscrivere $\mathbf{x}\lambda^t$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\lambda^t &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})(a + ib)^t = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})\rho^t e^{i\theta t} = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})\rho^t [\cos(\theta t) + i\sin(\theta t)] = \\ &= \rho^t [\mathbf{a}\cos(\theta t) + i\mathbf{a}\sin(\theta t) + i\mathbf{b}\cos(\theta t) - \mathbf{b}\sin(\theta t)] \\ &= \rho^t [\mathbf{a}\cos(\theta t) - \mathbf{b}\sin(\theta t)] + i\rho^t [\mathbf{b}\cos(\theta t) + \mathbf{a}\sin(\theta t)] \end{aligned}$$

dove $\theta = \arg(\lambda)$ e $\rho = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dunque la parte reale e la parte immaginaria di $\mathbf{x}\lambda^t$ sono:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathbf{x}\lambda^t) &= \rho^t [\mathbf{a}\cos(\theta t) - \mathbf{b}\sin(\theta t)] \\ \operatorname{Im}(\mathbf{x}\lambda^t) &= \rho^t [\mathbf{b}\cos(\theta t) + \mathbf{a}\sin(\theta t)] \end{aligned}$$

Combinandole linearmente con coefficienti $c_{1,2} \in \mathbb{R}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} c_1\rho^t [\mathbf{a}\cos(\theta t) - \mathbf{b}\sin(\theta t)] + c_2\rho^t [\mathbf{b}\cos(\theta t) + \mathbf{a}\sin(\theta t)] &= \\ = \rho^t [c_1\mathbf{a}\cos(\theta t) - c_1\mathbf{b}\sin(\theta t) + c_2\mathbf{b}\cos(\theta t) + c_2\mathbf{a}\sin(\theta t)] &= \\ = \rho^t [(c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b})\cos(\theta t) + (c_2\mathbf{a} - c_1\mathbf{b})\sin(\theta t)] \end{aligned}$$

ovvero

$$\mathbf{s}(t; c_1, c_2) = \rho^t [(c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b})\cos(\theta t) + (c_2\mathbf{a} - c_1\mathbf{b})\sin(\theta t)] \quad (5.3)$$

Infine, battezzando:

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} \quad ; \quad \mathbf{v} = c_2\mathbf{a} - c_1\mathbf{b}$$

otteniamo:

$$\mathbf{s}(t) = \rho^t [\mathbf{u}\cos(\theta t) + \mathbf{v}\sin(\theta t)] \quad (5.4)$$

che implicitamente contiene i due parametri reali c_1 e c_2 . Questa forma finale della soluzione permette di individuare i vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} direttamente, senza manipolare gli autovettori, ma imponendo solo che siano compatibili con la legge del moto. Vediamo un esempio.

Esempio 119 Sia:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

L'equazione caratteristica della matrice dei coefficienti è:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i = \lambda \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -i = \overline{\lambda}$$

Si ha facilmente:

$$\rho = |\lambda| = 1 \quad \text{e} \quad \theta = \arg \lambda = \frac{\pi}{2}$$

Cerchiamo gli autospazi associati. Per $\lambda = i$, da

$$A - iI = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -ix_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - ix_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 = ix_1 \\ -x_1 - i^2 x_1 = -x_1 + x_1 = 0 \end{cases} \implies \mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \alpha \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Quindi, scelto $\alpha = 1$, abbiamo

$$\operatorname{Re}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \operatorname{Im}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo infine scrivere la soluzione generale come

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t; c_1, c_2) &= 1^t \left[\left(c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \left(c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right] = \\ &= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \begin{bmatrix} c_2 \\ -c_1 \end{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \\ &= \begin{bmatrix} c_1 \cos\frac{\pi}{2}t + c_2 \sin\frac{\pi}{2}t \\ c_2 \cos\frac{\pi}{2}t - c_1 \sin\frac{\pi}{2}t \end{bmatrix} \quad \text{con } c_{1,2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Per trovare poi la soluzione particolare che soddisfi la condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$, basta osservare che la soluzione generale in $t = 0$ è:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}0\right) + \begin{bmatrix} c_2 \\ -c_1 \end{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}0\right) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Esempio 120 Riprendiamo il precedente esempio con matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

di autovalori $\lambda = i$ e $\bar{\lambda} = -i$. Poiché, come abbiamo già visto, $|\lambda| = 1$ e $\theta = \arg \lambda = \frac{\pi}{2}$, dalla (5.4) ereditiamo la forma della soluzione generale:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{u} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \mathbf{v} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \\ &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{aligned}$$

Per individuare gli infiniti vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} , sostituiamo ora l'espressione trovata nella legge del moto. Calcoliamo prima:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ricordando le due classiche formule:

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha \quad e \quad \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \\ &= \begin{bmatrix} v_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - u_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ v_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - u_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calcoliamo ora anche:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) = \\ &= \begin{bmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \\ &= \begin{bmatrix} u_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + v_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ -u_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - v_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Imponiamo infine che $\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$ per ogni t :

$$\begin{bmatrix} v_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - u_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ v_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - u_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + v_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ -u_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - v_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{bmatrix}$$

L'eguaglianza è identicamente vera se e solo se i coefficienti delle due funzioni del tempo in ambo i membri sono identici. Tale richiesta genera il sistema d'equazioni nelle componenti di \mathbf{u}, \mathbf{v} :

$$\begin{cases} v_1 = u_2 \\ -u_1 = v_2 \\ v_2 = -u_1 \\ u_2 = v_1 \end{cases}$$

È un sistema chiaramente ridondante: le due ultime equazioni equivalgono alle prime. Eliminando le prime due otteniamo il sistema ridotto:

$$\begin{cases} v_2 = -u_1 \\ u_2 = v_1 \end{cases}$$

Assegniamo valori arbitrari a u_1 e v_1 :

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \\ v_1 = \beta \end{cases} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} v_2 = -\alpha \\ u_2 = \beta \end{cases}$$

Abbiamo individuato la soluzione generale in funzione di due parametri arbitrari:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t; \alpha, \beta) \\ x_2(t; \alpha, \beta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ \beta \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \end{bmatrix} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

del tutto equivalente a quella già trovata. Si noti che non è stato necessario individuare gli autovettori della matrice dei coefficienti. Per trovare poi la soluzione particolare che soddisfa la condizione iniziale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$, basta osservare che la soluzione generale in $t = 0$ è:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{u} \cos\left(\frac{\pi}{2}0\right) + \mathbf{v} \sin\left(\frac{\pi}{2}0\right) = \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Osservazione 121 Le due funzioni del tempo $\cos\frac{\pi}{2}t$ e $\sin\frac{\pi}{2}t$ sono periodiche, con periodo 4:

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}t = 1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots \\ \sin\frac{\pi}{2}t = 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots \end{cases} \quad \text{per } t = 0, 1, 2, \dots$$

Non è difficile descriverne i valori presi ricorrentemente:

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} 2t = (-1)^t & \text{mentre } \cos \frac{\pi}{2} (2t+1) = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} 2t = 0 & \text{mentre } \sin \frac{\pi}{2} (2t+1) = (-1)^t \end{cases}$$

La periodicità 4 esce anche dalla sequenza delle potenze della matrice dei coefficienti $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Troviamo:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e poi:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e anche (sorpresa!):

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ la matrice unità } I_2$$

e qui il ciclo riparte:

$$A^5 = A^4 A = A$$

Se volessimo estendere alle matrici l'estrazione di radici e cercassimo, per esempio, le radici quarte di I_2 , ne abbiamo un'ovvia: I_2 stessa:

$$I_2^4 = I_2$$

ma abbiamo inciampato in un'altra: anche $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ gode della stessa proprietà.

Sappiamo che nelle pagine precedenti abbiamo sommerso il lettore con calcoli facili, ancorché noiosi. Proponiamo di fare una pausa e di riflettere su un punto veramente importante. Consideriamo un sistema dinamico n -dimensionale con legge del moto:

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) \quad (5.5)$$

Mettiamoci nel caso più semplice: la matrice A possiede n autovalori distinti e reali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Essa è diagonalizzabile per similitudine:

$$A = X\Lambda X^{-1}$$

con Λ , matrice diagonale che porta in diagonale principale lo spettro di A . Ponendo $Y = X^{-1}$, possiamo riscrivere l'equazione così:

$$A = Y^{-1}\Lambda Y$$

La (5.5) diventa:

$$\mathbf{x}(t+1) = Y^{-1}\Lambda Y\mathbf{x}(t)$$

onde:

$$Y\mathbf{x}(t+1) = \Lambda Y\mathbf{x}(t) \quad (5.6)$$

L'equazione:

$$\mathbf{y} = Y\mathbf{x} \quad (5.7)$$

definisce un cambio di coordinate in \mathbb{R}^n . I nuovi assi sono orientati come gli autovettori di A e le unità di misura sugli stessi sono eventualmente modificate. L'equazione (5.6) può riscriversi come:

$$\mathbf{y}(t+1) = \Lambda\mathbf{y}(t)$$

o, più in chiaro:

$$\begin{cases} y_1(t+1) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2(t+1) = \lambda_2 y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t+1) = \lambda_n y_n(t) \end{cases} \quad (5.8)$$

che è semplicemente sensazionale. La (5.8) ci dice che:

- (1) Il sistema dinamico, “visto” attraverso il sistema di coordinate di partenza, il sistema di coordinate di \mathbf{x} , esibisce potenziale dipendenza della storia d’una variabile di stato da ogni altra.
- (2) Se introduciamo il sistema di coordinate in alternativa, definito dalla (5.7), l’evoluzione di ciascuna delle nuove variabili di stato è a sé stante.

Questo fenomeno, in inglese, si chiama *decoupling*, che i dizionari suggeriscono equivalga a *sdoppiamento*, che in italiano non va bene perché presuppone di muoversi in dimensione 2. Meglio parlare di “*disanellamento*” tra le storie delle nuove variabili di stato.

Riprendiamo l’Esempio (116):

Esempio 122 *Consideriamo*

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

ossia:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases}$$

I legami tra le variabili di stato sono piuttosto chiari: la prima (x_1) si fa i fatti suoi, nella fattispecie rimane costante, mentre la seconda (x_2) ha dinamica che dipende dal valore della prima. In ischema:

$$\begin{cases} x_1(t) \rightarrow x_1(t+1) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{cases} \rightarrow x_2(t+1)$$

La freccia \rightarrow vuol dire “determina”. Conosciamo dall’esempio (116) la matrice X , che raccoglie una coppia d’autovettori di A , associati ai due autovalori 1 e 2, scegliendo $\alpha = \beta = 1$:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Troviamo:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Immergiamo il nostro sistema dinamico nel nuovo sistema di coordinate:

$$\mathbf{y} = Y\mathbf{x}$$

ossia, meno cripticamente:

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

otteniamo:

$$\mathbf{y}(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t)$$

ossia:

$$\begin{cases} y_1(t+1) = y_1(t) \\ y_2(t+1) = 2y_2(t) \end{cases}$$

nel nuovo mondo le due variabili di stato evolvono senza interferenze.

5.1.2 Difetto di molteplicità

Nella realtà gli autovalori ripetuti si presentano con probabilità 0, ciò non vuol dire che è impossibile, ma solo che se capita è un caso di sfortuna evidente. Non è un'opinione esclusiva degli AA. Si veda, per es., [10], p. 80.

Per completezza, illustriamo che cosa accade nel caso d'autovalori multipli della matrice dei coefficienti A , quando la molteplicità geometrica dello spazio invariante per un dato autovalore riesce inferiore all'algebrica.

Consideriamo un primo esempio:

Esempio 123 *La legge del moto sia:*

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$$

con²:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice possiede il solo autovalore 1 con molteplicità 2. Per rendersi conto di ciò basta considerare l'equazione caratteristica di A :

$$\det[A - \lambda I_2] = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

Se cerchiamo lo spazio invariante:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

otteniamo:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

C'è un chiaro difetto di molteplicità.

Un po' d'intuizione ci può aiutare a trovare altre soluzioni associabili all'autovalore deficitario. Gli AA. sanno che occorre un po' di fantasia, ma ci provano. Nel caso d'un autovalore *single*³ la struttura del suo contributo alla soluzione generale è:

$$\text{vettore costante} \times \text{autovalore}^{\text{tempo}}$$

Una costante, vista da un matematico libertario, è un polinomio seppur di grado 0.

Una struttura simile sarebbe del tipo:

$$\text{vettore di polinomi} \times \text{autovalore}^{\text{tempo}} \quad (5.9)$$

Questa è un'idea vincente! Cominciamo col provarlo sull'esempio precedente:

Esempio 124 *Troviamo le soluzioni di:*

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

²Più minimalisti di così... Però il lettore attento noti che ci siamo messi in un caso decisamente difficile: la matrice ammette come unico autovalore 1 e, come sappiamo, esso è pure bastardo. Vi sono quindi *due* ragioni di preoccupazione: la bastardaggine di 1 e il fatto che esso è ripetuto. Vedremo tra poco che ciò comporta il pagamento d'un dazio doppio!

³Un modo carino per dire non ripetuto.

Il fenile non è vuoto perché l'autovalore 1 già ci ha fornito una prima infinità di soluzioni:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \cdot 1^t = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \quad (5.10)$$

Cerchiamo una soluzione del tipo:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} at + b \\ ct + d \end{bmatrix} \cdot 1^t, \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

La ricerca dei parametri a, b, c, d si fa con la forza bruta. Inseriamo $\begin{bmatrix} at + b \\ ct + d \end{bmatrix}$ nella legge del moto e vediamo che cosa accade. Si ha:

$$\begin{bmatrix} a(t+1) + b \\ c(t+1) + d \end{bmatrix} \cdot 1^{t+1} \equiv \begin{bmatrix} at + b \\ ct + d \end{bmatrix} \cdot 1^t$$

onde:

$$\begin{cases} a + b = b \\ c + d = d \end{cases} \Rightarrow a = c = 0$$

quindi dovremmo provare con una soluzione del tipo $\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. La inseriamo nella legge del moto:

$$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{cases} b = b \\ d = b + d \end{cases} \Rightarrow b = 0$$

e ritroviamo quanto già abbiamo, cioè lo spazio invariante descritto dalla (5.10). L'autovalore 1, come sappiamo oltre è molto problematico (cioè bastardo), ma chi ce la fa contro di lui può farcela sempre. Nella (5.9) abbiamo scelto un vettore di polinomi di primo grado. Proviamo con un vettore di polinomi di secondo grado:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} at^2 + bt + c \\ dt^2 + et + f \end{bmatrix} \cdot 1^t, \text{ con } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

Come sopra:

$$\begin{bmatrix} a(t+1)^2 + b(t+1) + c \\ d(t+1)^2 + e(t+1) + f \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} at^2 + bt + c \\ dt^2 + et + f \end{bmatrix}$$

Facendo i conti, ci riduciamo a:

$$\begin{cases} 2at + a + b \equiv 0 \\ 2dt + d + e \equiv at^2 + bt + c \end{cases}$$

onde:

$$\begin{cases} a = b = d = 0 \\ e = c \end{cases}$$

abbiamo trovato un'altra infinità di soluzioni:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta t \end{bmatrix}$$

avendo indicato con β il valore comune dei parametri e e c . Possiamo pertanto scrivere la soluzione generale come segue:

$$\mathbf{x}(t; \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \beta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha + \beta t \end{bmatrix} \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (5.11)$$

La storia di questo esempio suggerisce un teorema:

Teorema 125 *Se λ è un autovalore con molteplicità algebrica a e molteplicità geometrica $g < a$, allora esistono infinite soluzioni particolari del tipo:*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t) \lambda^t \quad (5.12)$$

con $\mathbf{Q}(t)$ vettore di polinomi di grado pari al difetto di molteplicità $d = a - g$:

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 t + \dots + \mathbf{q}_d t^d$$

dove $\mathbf{q}_k, k = 0, 1, \dots, d$ sono vettori di n componenti da determinarsi che dipendono da d parametri arbitrari.

Omettiamo la dimostrazione. Proponiamo però al lettore un'intuizione del perché il marchingegno funzioni.

Sia:

$$f(\lambda) = 0$$

l'equazione caratteristica di A . Ne sia λ^* una radice semplice⁴. Poiché f è un polinomio, avremo:

$$f(\lambda^*) = 0 \text{ e } f'(\lambda^*) \neq 0$$

in questo caso abbiamo soluzioni del tipo $\mathbf{c} \cdot (\lambda^*)^t$, con $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$. Supponiamo ora che λ^* sia una radice doppia di f . In questo caso sarà:

$$f(\lambda^*) = f'(\lambda^*) = 0 \text{ e } f''(\lambda^*) \neq 0$$

Se differenziamo la soluzione rispetto a λ , troviamo:

$$\mathbf{c} \cdot t (\lambda^*)^{t-1} = \mathbf{c}' \cdot t (\lambda^*)^t$$

Così procedendo si può intuire il risultato annunciato.

5.1.3 Autovalori reali, complessi e ripetuti

L'espressione (5.12) riguarda infinite soluzioni ma non tutte le soluzioni. Solo la parte imputabile al difetto di molteplicità di un autovalore ripetuto necessita di polinomi, la residua parte può utilizzare gli autovettori linearmente indipendenti nel solito modo. Detto in altri termini, se λ è un autovalore ripetuto a volte a cui sono associati solo $g < a$ autovettori linearmente indipendenti $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^g$, allora il contributo complessivo di λ alla formazione della soluzione generale è dato dai due addendi:

$$(\beta_1 \mathbf{y}^1 + \dots + \beta_g \mathbf{y}^g) \lambda^t + \mathbf{Q}(t) \lambda^t$$

ove $\beta_k, k = 1, \dots, g$ sono costanti arbitrarie.

I residui $n - a$ autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-a}$ producono anch'essi infinite soluzioni esprimibili nella forma prima introdotta.

La soluzione generale sarà infine formata dalla somma dei contributi di ogni autovalore.

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{c_1 \mathbf{x}^1 \lambda_1^t + \dots + c_{n-a} \mathbf{x}^{n-a} \lambda_{n-a}^t}_{\text{autovalori distinti}} + \underbrace{\left(\overbrace{\beta_1 \mathbf{y}^1 + \dots + \beta_g \mathbf{y}^g}^{g \text{ autovettori LI di } \lambda} \right) \lambda^t + \left(\overbrace{\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 t + \dots + \mathbf{q}_d t^d}^{\text{polinomio di grado } d=a-g} \right) \lambda^t}_{\text{autovalore ripetuto } a \text{ volte}} \quad (5.13)$$

dove c_s, β_s e γ sono tutti parametri reali arbitrari.

⁴Cioè con molteplicità 1.

Osservazione 126 Se \mathbf{x}^s è un autovettore di A abbinato all'autovalore semplice λ_s allora $c_s \mathbf{x}^s$ indica ogni elemento dell'autospazio $\mathcal{X}(\lambda_s)$. Analogamente se $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^g$ sono g autovettori linearmente indipendenti abbinati all'autovettore λ (ripetuto a volte) allora l'espressione:

$$\mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{y}^1 + \dots + \beta_g \mathbf{y}^g$$

indica ogni elemento dell'autospazio $\mathcal{X}(\lambda)$ associato a λ . La soluzione generale (5.13) può dunque scriversi come:

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\mathbf{x}^1 \lambda_1^t + \dots + \mathbf{x}^n \lambda_n^t}_{\text{autovalori distinti}} + \underbrace{[\mathbf{y} + (\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 t + \dots + \mathbf{q}_d t^d)] \lambda^t}_{\text{autovalore ripetuto } a \text{ volte}} \quad \mathbf{x}^s \in \mathcal{X}(\lambda_s), \mathbf{y} \in \mathcal{X}(\lambda)$$

ove le costanti arbitrarie sono implicitamente considerate.

Vediamo un esempio di “grande dimensione” che coinvolga tutti gli addendi.

Esempio 127 Consideriamo la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

che presenta $a = 3$ autovalori coincidenti $\lambda = 2$ e $n - a = 1$ autovalore distinto $\lambda_1 = 3$. L'autospazio associato a $\lambda_1 = 3$ è dato dalle soluzioni di

$$(A - 3I_4) \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2-3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

L'autospazio associato a $\lambda = 2$ è dato dalle soluzioni di

$$(A - 2I_4) \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \\ \beta \end{bmatrix}, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

ed ha palesemente dimensione $g = 2$. L'autovalore $\lambda = 2$ ha un difetto di molteplicità $d = 1$. Il sistema

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$$

ha quindi infinite soluzioni del tipo:

$$\mathbf{x} \cdot 3^t + \mathbf{y} \cdot 2^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} 3^t + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \\ \beta \end{bmatrix} 2^t$$

che dipendono da soli $3 < n$ parametri arbitrari. Mancano delle soluzioni. Per trovare le rimanenti cerchiamo anche soluzioni del tipo

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{p}t + \mathbf{q}) \cdot 2^t$$

associate all'autovalore con difetto di molteplicità. Poiché

$$\mathbf{x}(t+1) = [\mathbf{p}(t+1) + \mathbf{q}] \cdot 2^{t+1} = 2 \cdot (\mathbf{p}t + \mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot 2^t$$

e

$$A\mathbf{x}(t) = A(\mathbf{p}t + \mathbf{q}) \cdot 2^t = (A\mathbf{p}t + A\mathbf{q}) \cdot 2^t$$

i due vettori \mathbf{p} e \mathbf{q} devono, per ogni t , soddisfare la condizione

$$A(\mathbf{p}t + \mathbf{q}) \cdot 2^t = 2 \cdot (\mathbf{p}t + \mathbf{p} + \mathbf{q}) \cdot 2^t$$

\Downarrow

$$A\mathbf{p}t + A\mathbf{q} = 2\mathbf{p}t + 2(\mathbf{p} + \mathbf{q})$$

Uguagliando addendo per addendo abbiamo la coppia di condizioni (vettoriali):

$$\begin{cases} A\mathbf{p} = 2\mathbf{p} \\ A\mathbf{q} = 2(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \end{cases} \implies \begin{cases} A\mathbf{p} = 2\mathbf{p} \\ (A - 2I)\mathbf{q} = 2\mathbf{p} \end{cases}$$

che mostra come \mathbf{p} sia un autovettore di A associato a $\lambda = 2$ e come \mathbf{q} dipenda⁵ da \mathbf{p} . Dunque:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \\ \beta \end{bmatrix}$$

Risolviamo ora il sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\beta \\ 2\gamma \\ 2\beta \end{bmatrix} \implies \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 2\beta \implies \boxed{\beta = 0} \\ q_1 = 2\gamma \\ -q_2 + q_4 = 0 \end{cases}$$

Otteniamo

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2\gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \delta \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$$

che ci consente di aggiungere a quelle già trovate un altro pacchetto di soluzioni del tipo:

$$\left(\begin{bmatrix} 2\gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \delta \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \right) 2^t = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \delta \\ \epsilon \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \right) 2^t$$

Si vede subito che il nuovo pacchetto contiene anche parte delle soluzioni già trovate (abbinate a $\lambda = 2$ e qui sopra evidenziate in grassetto) che è inutile inserire due volte. La soluzione generale risulta quindi:

$$\mathbf{x}(t) = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 3^t + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \delta \\ \epsilon \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \right) 2^t = \begin{bmatrix} 2\gamma \cdot 2^t \\ \delta \cdot 2^t \\ (\epsilon + \gamma t) \cdot 2^t \\ \alpha \cdot 3^t + \delta \cdot 2^t \end{bmatrix}$$

Se cercassimo la soluzione particolare con

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

⁵Si parla di autovettore generalizzato.

Dobbiamo individuare le costanti tali che

$$\begin{cases} 2\gamma = 1 \\ \delta = 2 \\ \epsilon = 3 \\ \alpha + \delta = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} \gamma = 1/2 \\ \delta = 2 \\ \epsilon = 3 \\ \alpha = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

ottenendo la soluzione particolare

$$\mathbf{x}^0(t) = \begin{bmatrix} 2^t \\ 2^{t+1} \\ (3 + t/2) \cdot 2^t \\ 2 \cdot 3^t + 2^{t+1} \end{bmatrix}$$

L'espressione della soluzione generale (5.13) può complicarsi ulteriormente prevedendo:

- più di un autovalore ripetuto: sarà necessario introdurre altrettanti polinomi;
- autovalori complessi: si può esplicitare la forma trigonometrica abbinabile a ogni coppia coniugata;

autovalori complessi e ripetuti. Utilizzando la forma trigonometrica e polinomi si ottengono addendi del tipo:

$$|\lambda|^t (\mathbf{u}(t) \cos \theta t + \mathbf{v}(t) \sin \theta t)$$

In buona sostanza tutte le espressioni viste possono entrare in gioco. Gli esempi che le includano tutte sono dimensionalmente proibitivi ma la struttura della soluzione generale resta importante per meglio comprendere in seguito il comportamento asintotico delle soluzioni.

5.2 Sistemi autonomi non omogenei

Sono sistemi del tipo:

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \quad (5.14)$$

con A quadrata d'ordine n e termine forzante $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

È facile rendersi conto che due soluzioni $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ dell'equazione non omogenea (5.14), differiscono per una soluzione dell'omogenea associata:

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) \quad (5.15)$$

Infatti da:

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \text{ e } \mathbf{y}(t+1) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}$$

sottraendo membro a membro s'ottiene:

$$\mathbf{x}(t+1) - \mathbf{y}(t+1) = A[\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)]$$

Se poniamo $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$, onde:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + \mathbf{z}(t)$$

ci rendiamo conto, dunque, del fatto che *tutte* le soluzioni del sistema non omogeneo s'ottengono da una qualsiasi di esse, sommandole tutte le soluzioni dell'omogeneo associato:

$$\text{soluzione generale non omo} = \text{soluzione particolare non omo} + \text{soluzione generale omo}$$

Cioè, esprimendo le soluzioni generali in funzione di un vettore \mathbf{c} di n parametri, arbitrari si ha:

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{c}) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{z}(t; \mathbf{c})$$

Diviene quindi cruciale trovare almeno una soluzione $\mathbf{x}(t)$ per il sistema non omogeneo che *non* sia soluzione dell'omogeneo associato: $\mathbf{x}(t) \notin \mathbf{z}(t; \mathbf{c})$.

Ciò non è mai un problema quando 1 non è nello spettro di A . Poiché il termine forzante è costante, possiamo cercare una soluzione costante:

$$\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$$

Per esso deve aversi:

$$\mathbf{x}^* = A\mathbf{x}^* + \mathbf{b}$$

onde:

$$(I - A)\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$$

Se 1 non è un autovalore di A , si trova, in un attimo:

$$\mathbf{x}^* = (I - A)^{-1} \mathbf{b}$$

Qualora 1 sia un autovalore per A e, quindi, $(I - A)$ sia singolare e, quindi, $(I - A)^{-1}$ non esista, bisogna rassegnarsi a trovare con la forza bruta, soluzioni particolari non costanti.

Abbiamo però provato un:

Teorema 128 *Dato il sistema dinamico autonomo:*

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$$

Se $I - A$ non è singolare, allora esso ammette una sola soluzione particolare costante data da:

$$\mathbf{x}^*(t) \equiv (I - A)^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{x}^*$$

Corollario 129 *Se $I - A$ non è singolare, allora il sistema dinamico autonomo e non omogeneo:*

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$$

ha soluzione generale:

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{c}) = \mathbf{z}(t; \mathbf{c}) + (I - A)^{-1} \mathbf{b}$$

dove $\mathbf{z}(t; \mathbf{c})$ è la soluzione generale del sistema omogeneo associato $\mathbf{z}(t+1) = A\mathbf{z}(t)$ e $(I - A)^{-1} \mathbf{b}$ è l'unica soluzione costante \mathbf{x}^ del sistema non omogeneo.*

Vediamo un esempio.

Esempio 130 *Sia:*

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha due autovalori distinti (2 e 3), cui sono associati i due autovettori:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

arbitrariamente selezionati. La soluzione generale dell'omogeneo è allora:

$$\mathbf{z}(t; c_1, c_2) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 2^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3^t = \begin{bmatrix} c_1 2^t + c_2 3^t \\ c_2 3^t \end{bmatrix} \text{ con } c_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo una soluzione particolare costante per la non omogenea:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

È un sistema di G. Cramer con l'unica soluzione:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

segue che la soluzione generale del sistema non omogeneo è:

$$\mathbf{x}(t; c_1, c_2) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\text{sol. part.}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 2^t + c_2 3^t \\ c_2 3^t \end{bmatrix}}_{\text{sol. gen. omo.}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 2^t + c_2 3^t \\ c_2 3^t - 1 \end{bmatrix}}_{\text{sol. gen. non omo.}} \text{ con } c_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Cosa succede se lo spettro di A contiene uno o più autovalori unitari? Come abbiamo visto in precedenti esempi, il sistema omogeneo associato presenta, oltre alla soluzione nulla, altre infinite soluzioni costanti $\mathbf{z}^* \neq \mathbf{0}$. Questo comporta che, cercando una soluzione costante \mathbf{x}^* del sistema non omogeneo, corriamo il rischio di trovare in realtà una soluzione costante dell'omogeneo associato, cioè una \mathbf{z}^* . Se così fosse la scrittura

$$\mathbf{z}^* + \mathbf{z}(t; \mathbf{c})$$

non rappresenterebbe la soluzione generale del sistema non omogeneo, bensì quella dell'omogeneo associato.

È dunque importante assicurarsi sempre che eventuali soluzioni particolari di

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$$

non risolvano anche l'omogeneo associato. Vi sono due possibilità:

- (i) esiste almeno una soluzione costante \mathbf{x}^* del sistema non omogeneo distinta da ogni soluzione costante \mathbf{z}^* dell'omogeneo associato: si può utilizzare la procedura appena vista per trovare la soluzione generale del sistema non omogeneo.
- (ii) Non esistono soluzioni costanti diverse da quelle dell'omogeneo associato: in tal caso occorre cercare una soluzione particolare $\mathbf{x}(t)$ non costante del sistema non omogeneo (distinta da ogni soluzione $\mathbf{z}(t)$ dell'omogeneo associato). Tipicamente basta cercare soluzioni polinomiali di grado $r > 1$.

Vediamo subito degli esempi

Esempio 131 Prendiamo un sistema analogo al precedente, ma, stavolta, ci capita 1 come autovalore. Sia:

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha due autovalori distinti (1 e 3), cui sono associati gli spazi invarianti $\mathcal{X}(1)$ e $\mathcal{X}(3)$:

$$\mathcal{X}(1) = \left\{ \mathbf{u} : \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \right\}; \mathcal{X}(3) = \left\{ \mathbf{v} : \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \beta/2 \\ \beta \end{bmatrix} \text{ con } \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

La soluzione generale dell'omogenea è:

$$\mathbf{z}(t; \alpha, \beta) = \mathbf{u} + \mathbf{v}3^t = \begin{bmatrix} \alpha + \beta/2 \cdot 3^t \\ \beta 3^t \end{bmatrix}$$

Essa contiene già un vettore costante, anzi infiniti: tutti i vettori \mathbf{u} dell'autospazio $\mathcal{X}(1)$ sono soluzioni particolari costanti dell'omogeneo associato. Ciò potrebbe escludere l'esistenza d'una soluzione particolare costante \mathbf{x}^* del non omogeneo distinta da ogni $\mathbf{z}^* = \mathbf{u}$, ma, mai dire mai. Non riuscissimo, potremmo alzare la posta con una soluzione del tipo:

$$\begin{bmatrix} at + b \\ ct + d \end{bmatrix} \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Vediamo però se la cosa funziona con una soluzione costante;

$$\mathbf{x}^* \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

Deve aversi:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ne esce il sistema:

$$\begin{cases} a = a + b + 1 \\ b = 3b + 2 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} a \text{ qualsiasi} \\ b = -1 \end{cases}$$

Quindi abbiamo trovato le infinite soluzioni particolari del non omogeneo:

$$\mathbf{x}^* \equiv \begin{bmatrix} a \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

che non risolvono anche il sistema omogeneo. Ne possiamo scegliere una, non importa quale. Preso $a = 0$, la soluzione generale del non omogeneo è quindi:

$$\mathbf{x}(t; \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha + \beta/2 \cdot 3^t \\ \beta 3^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \beta/2 \cdot 3^t \\ \beta 3^t - 1 \end{bmatrix}$$

Vediamo un caso ove l'autovalore 1 compare ripetutamente:

Esempio 132 Assumiamo ora che:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

In questo caso, riabbiamo la bastarda radice unitaria e pure ripetuta. Lasciamo perdere, per il momento, il termine forzante. La soluzione del sistema omogeneo associato:

$$\mathbf{z}(t+1) = A\mathbf{z}(t)$$

è già in nostro possesso (vedi l'esempio 124 a pagina 91):

$$\mathbf{z}(t; \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha + \beta t \end{bmatrix} \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Apriamo la caccia a una soluzione particolare della non omogenea del tipo:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} at + b \\ ct + d \end{bmatrix}$$

La cosa si rivela un buco nell'acqua. Infatti da:

$$\begin{bmatrix} a(t+1) + b \\ c(t+1) + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} at + b \\ ct + d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} at + a + b \equiv at + b + 1 \\ ct + c + d \equiv at + b + ct + d + 2 \end{cases}$$

La prima ci dà: $a = 1$, che, però non va bene nella seconda. Alziamo allora la posta cercando un vettore di polinomi di grado fino a 2:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} at^2 + bt + c \\ dt^2 + et + f \end{bmatrix}$$

Ne ricaviamo il sistema:

$$\begin{cases} at^2 + 2at + a + bt + b + c \equiv at^2 + bt + c + 1 \\ dt^2 + 2dt + d + et + e + f \equiv at^2 + t + c + dt^2 + et + f + 2 \end{cases}$$

che produce:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = e - 5/2 \\ d = -1/2 \\ e \text{ qualsiasi} \\ f \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

Segue:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e - t - 5/2 \\ et + f - t^2/2 \end{bmatrix}$$

con $e, f \in +\mathbb{R}$. Abbiamo trovato la soluzione generale. Infatti:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e - t - 5/2 \\ et + f - t^2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ et + f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t - 5/2 \\ -t^2/2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}(t; e, f)$$

rappresenta una famiglia di funzioni dipendenti da due parametri reali (che possono essere ribattezzati come si vuole) ed è data dalla somma della soluzione generale dell'omogeneo associato:

$$\mathbf{z}(t; \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha + \beta t \end{bmatrix}$$

con la funzione:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} -t - 5/2 \\ -t^2/2 \end{bmatrix}$$

che, evidentemente, è una soluzione particolare del non omogeneo (quella che si ottiene con $\alpha = \beta = 0$).

Concludiamo con un altro modo di scrivere la soluzione del problema:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \end{cases}$$

Possiamo infatti risolvere ricorsivamente ogni sistema di equazioni alle differenze. Nel caso autonomo basta trovare l'iterata t -esima della legge del moto \mathbf{f} .

Nel nostro caso, reiterando la funzione:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

dopo t volte si giunge all'espressione:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^t(\mathbf{x}) &= A^t\mathbf{x} + A^{t-1}\mathbf{b} + \cdots + A\mathbf{b} + \mathbf{b} = \\ &= A^t\mathbf{x} + (A^{t-1} + A^{t-2} + \cdots + A + I)\mathbf{b} = \\ &= A^t\mathbf{x} + (I + A + \cdots + A^{t-2} + A^{t-1})\mathbf{b} = \\ &= A^t\mathbf{x} + \left(\sum_{s=0}^{t-1} A^s\right)\mathbf{b} \end{aligned}$$

in cui $A^0 = I$.

La soluzione del problema, trovata ricorsivamente, è dunque:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}^t(\mathbf{x}^0) = A^t\mathbf{x}^0 + \left(\sum_{s=0}^{t-1} A^s\right)\mathbf{b}$$

Proviamo a spingerci in là con i conti. Consideriamo la matrice quadrata d'ordine n :

$$S = I + A + \cdots + A^{t-1} = \sum_{s=0}^{t-1} A^s$$

Moltiplichiamo a destra per A :

$$SA = A + A^2 + \cdots + A^{t-1} + A^t$$

e, sottraendo a membro a membro, troviamo:

$$S - SA = I + A - A + \cdots + A^{t-1} - A^{t-1} - A^t = I - A^t$$

onde:

$$S(I - A) = I - A^t$$

Se $I - A$ non è singolare⁶, otteniamo:

$$S = (I - A)^{-1}(I - A^t)$$

che elegantemente generalizza la formula che dà la somma di termini in progressione geometrica.

Dunque ogni soluzione particolare, se $I - A$ è invertibile può essere scritta come:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= A^t\mathbf{x}^0 + (I - A)^{-1}(I - A^t)\mathbf{b} = \\ &= A^t\mathbf{x}^0 + (I - A)^{-1}\mathbf{b} - (I - A)^{-1}A^t\mathbf{b} = \\ &= A^t\left[\mathbf{x}^0 - (I - A)^{-1}\mathbf{b}\right] + (I - A)^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

⁶Dire che $I - A$ è singolare equivale a dire che 1 non è un autovalore per A . Come già scritto sopra, non costa nulla assumere che A non ammetta esattamente 1 come autovalore e possiamo quindi ritenere le nostre conclusioni adeguatamente solide e generali.

Quest'ultima espressione è facilmente collegabile con quanto visto in precedenza considerando che se il sistema non omogeneo parte da $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ allora l'associato sistema omogeneo parte da

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^0 - (I - A)^{-1} \mathbf{b}$$

Qualche riga sopra abbiamo “moltiplicato a destra”. Perché? Che cosa sarebbe accaduto “moltiplicando a sinistra”? La risposta è: niente di diverso. Infatti ogni matrice commuta con se stessa e quindi anche il risultato finale che avremmo trovato:

$$S = (I - A^t) (I - A)^{-1}$$

sarebbe stato identico. Ovvero si ha che $(I - A^t)$ e $(I - A)^{-1}$ commutano $\forall t$ naturale

Teorema 133 Se $I - A$ non è singolare, allora $(I - A^t)$ e $(I - A)^{-1}$ commutano.

Dimostrazione. Moltiplicando per A a destra, per S abbiamo trovato:

$$S = (I - A)^{-1} (I - A^t) \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

Moltiplicando per A a sinistra otteniamo:

$$S = (I - A^t) (I - A)^{-1} \quad \forall t \in \mathbb{N}$$

■

5.3 Sistemi non autonomi discreti

Nel caso discreto possiamo prenderci il lusso di considerare il sistema lineare non autonomo:

$$\mathbf{x}(t+1) = A(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (5.16)$$

con: $\mathbf{x}, \mathbf{b} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $A(t)$ quadrata d'ordine n .

Fissato il punto di partenza, ogni soluzione particolare identificata da:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = A(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

può essere individuata ricorsivamente:

$$\mathbf{x}(1) = A(0) \mathbf{x}^0 + \mathbf{b}(0)$$

$$\mathbf{x}(2) = A(1) \mathbf{x}(1) + \mathbf{b}(1) = A(1) A(0) \mathbf{x}^0 + A(1) \mathbf{b}(0) + \mathbf{b}(1)$$

$$\mathbf{x}(3) = A(2) \mathbf{x}(2) + \mathbf{b}(2) = A(2) A(1) A(0) \mathbf{x}^0 + A(2) A(1) \mathbf{b}(0) + A(2) \mathbf{b}(1) + \mathbf{b}(2)$$

...

Si prova per induzione su t che:

$$\mathbf{x}(t) = \left(\prod_{s=1}^t A(t-s) \right) \mathbf{x}^0 + \sum_{s=0}^{t-1} \left[\left(\prod_{k=1}^{t-1-s} A(t-k) \right) \mathbf{b}(s) \right] \quad (5.17)$$

Valga il seguente esempio:

Esempio 134 Per il sistema bidimensionale:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2t \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

troviamo:

$$\mathbf{x}(t) = \left(\prod_{s=1}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2(t-s) \end{bmatrix} \right) \mathbf{x}^0 + \sum_{s=0}^{t-1} \left[\left(\prod_{k=s+1}^{t-1-s} \begin{bmatrix} 1 & 2(t-k) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

6

Sistemi dinamici lineari di dimensione n con tempo continuo

6.1 Sistemi autonomi omogenei

Come vedremo nelle prossime pagine, un grande parallelismo vige tra caso discreto e caso continuo.

Possiamo dunque ripercorrere la strada fatta iniziando dal caso autonomo e omogeneo:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \quad (6.1)$$

con A matrice quadrata di ordine $n \geq 1$ e $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 .

Concediamoci il lusso di lavorare in dimensione 1, ossia, con $A = [a]$, con $a \in \mathbb{R}$. La (6.1) degenera nell'equazione differenziale

$$x'(t) = ax(t)$$

con soluzione generale:

$$x(t; c) = ce^{at} \quad c \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi}$$

Se poi consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

scopriamo che l'unica soluzione è sempre data da:

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

ovvero che la costante arbitraria c dipende (anzi coincide) con il desiderato punto di partenza $x(0)$: al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ si ottengono tutte le soluzioni dell'equazione differenziale e dunque:

$$x(t; x_0) = x_0 e^{at} \quad x_0 \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi}$$

è un altro modo di scrivere la soluzione generale¹.

Anche nel caso continuo ci possiamo aspettare che in grande, cioè in dimensione $n > 1$, accada una cosa simile. Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \end{cases}$$

¹Si parla di *flusso* del sistema dinamico.

ci aspettiamo una soluzione del tipo:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \cdot \mathbf{x}^0$$

dove $e^{At} = \exp(At)$ è la matrice esponenziale di At e che può essere vista come potenza t -esima della matrice esponenziale e^A che abbiamo già incontrato nella parte iniziale. Effettivamente le cose stanno proprio così; per mostrarlo introduciamo il seguente:

Lemma 135 *Per ogni matrice quadrata A si ha che la funzione $\Psi(t) = e^{At}$ è ovunque differenziabile e risulta*

$$\Psi'(t) = \frac{d e^{At}}{dt} = A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

Segue immediatamente il seguente:

Teorema 136 *Per ogni condizione iniziale $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ il problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \end{cases}$$

ammette l'unica soluzione:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}^0$$

Dimostrazione. Per il precedente Lemma, se $\mathbf{x}(t) = e^{At} \cdot \mathbf{x}^0$ allora

$$\mathbf{x}'(t) = A \cdot e^{At} \cdot \mathbf{x}^0 = A \cdot \mathbf{x}(t)$$

e inoltre

$$\mathbf{x}(0) = e^{A \cdot 0} \mathbf{x}^0 = I_n \cdot \mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0$$

Ovvero $\mathbf{x}(t)$ è una soluzione del problema di Cauchy. Essa è forzosamente l'unica in quanto sono soddisfatte le condizioni di esistenza e di unicità. ■

Basterebbe dunque saper calcolare e^{At} . Purtroppo il calcolo di una matrice esponenziale non è banale.

Sappiamo da quanto illustrato in precedenza che se A è diagonalizzabile allora, sfruttando autovalori e autovettori di A , possiamo semplificarci un po' la vita. Vediamo subito il risultato principale:

Teorema 137 *Il sistema di equazioni differenziali:*

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$$

se A non ha difetto di molteplicità (ovvero se A è diagonalizzabile) ha la soluzione generale:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{x}^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \mathbf{x}^n e^{\lambda_n t} = \sum_{s=1}^n c_s \mathbf{x}^s e^{\lambda_s t} \quad (6.2)$$

dove λ_s è un autovalore di A , \mathbf{x}^s è un autovettore ad esso associato e c_s è una costante arbitraria.

Dimostrazione. Fissiamo una generica condizione iniziale del tipo $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$. Il Teorema 136 garantisce che ogni punto $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ definisce l'unica soluzione

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}^0$$

Se A è diagonalizzabile allora

$$e^A = X e^\Lambda X^{-1} \implies e^{A \cdot t} = X e^{\Lambda \cdot t} X^{-1} \implies \mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}^0 = X e^{\Lambda t} X^{-1} \cdot \mathbf{x}^0$$

dove

$$e^{\Lambda t} = \text{diag} (e^{\lambda_s t}) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

è la matrice diagonale che riporta in diagonale principale le potenze t - esime di $\exp \lambda_s$ e

$$X = [\mathbf{x}^1 | \dots | \mathbf{x}^n]$$

è la matrice che ordinatamente raccoglie i corrispondenti autovettori. La trasformazione

$$\mathbf{c} = X^{-1} \cdot \mathbf{x}^0$$

consente di ottenere al variare di $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ tutti i possibili vettori $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Dunque la soluzione si può riscrivere come

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= X e^{\Lambda t} \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{x}^1 | \dots | \mathbf{x}^n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \\ &= c_1 \mathbf{x}^1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{x}^2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \mathbf{x}^n e^{\lambda_n t} = \sum_{s=1}^n c_s \mathbf{x}^s e^{\lambda_s t} \end{aligned}$$

Osservando infine che al variare \mathbf{x}^0 , ovvero di \mathbf{c} , si ottengono tutte le soluzioni, si può concludere che la (6.2) rappresenta la soluzione generale del sistema di equazioni alle differenziali. ■

Abbiamo la strada spianata: possiamo ripercorrere quanto visto nel caso discreto.

Cominciamo con un facile esempio.

Esempio 138 — *Sia:*

$$\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

essendo A simmetrica, essa è senz'altro diagonalizzabile. L'equazione caratteristica:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0$$

porge i tre autovalori reali e distinti:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 - \sqrt{2} \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Gli spazi invarianti associati agli stessi sono rispettivamente:

$$\mathcal{X}(2 - \sqrt{2}) = \left\{ \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{X}(2) = \left\{ \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \beta, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{X}(2 + \sqrt{2}) = \left\{ \mathbf{x}^3 : \mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} \gamma, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

e, quindi, la soluzione generale è:

$$\mathbf{x}(t; \alpha, \beta, \gamma) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} e^{(2-\sqrt{2})t} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix} e^{(2+\sqrt{2})t} \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Esempio 139 Sia:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

essendo A triangolare i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$$

reali e distinti: non c'è difetto di molteplicità. Gli spazi invarianti associati agli stessi sono rispettivamente:

$$\mathcal{X}(1) = \left\{ \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{X}(2) = \left\{ \mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \beta, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{X}(0) = \left\{ \mathbf{x}^3 : \mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \gamma, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

La soluzione generale è dunque:

$$\mathbf{x}(t; \alpha, \beta, \gamma) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0t} \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Si noti che, in questo caso, la presenza di un autovalore nullo genera infinite soluzioni costanti dipendenti dal parametro reale γ : il ruolo dell'autovalore unitario nel caso discreto è qui svolto dagli autovalori nulli.

Esempio 140 Riprendiamo il precedente esempio e consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

Per trovare l'unica soluzione particolare $\hat{\mathbf{x}}$ possiamo avvalerci della soluzione generale già trovata per determinare le costanti α, β, γ :

$$\mathbf{x}(0; \alpha, \beta, \gamma) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^0 + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^0 + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Ricavando dunque

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{0t} = \begin{bmatrix} e^t \\ 2e^{2t} \\ e^t + 2 \end{bmatrix}$$

Le costanti potevano anche essere trovate con

$$X^{-1}\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Anche nel caso continuo dobbiamo affrontare due questioni:

- (i) Cosa succede se la matrice dei coefficienti possiede autovalori complessi?
- (ii) Che succede se un autovalore è radice multipla dell'equazione caratteristica e v'è difetto di molteplicità?

Mostriamo subito come gestire la legittima inquietudine di cui alla prima domanda.

6.1.1 Autovalori complessi

Supponiamo che la matrice A dei coefficienti sia diagonalizzabile ma possieda la coppia di autovalori complessi coniugati:

$$\lambda = a + ib \quad \text{e} \quad \bar{\lambda} = a - ib$$

I corrispondenti autovettori possono essere scelti coniugati tra loro:

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + i\mathbf{b} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a} - i\mathbf{b} \quad \text{con} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad (6.3)$$

Segue che la parte di soluzione generale imputabile a λ e $\bar{\lambda}$ è determinata, come al solito, da due traiettorie del tipo:

$$\mathbf{x}e^{\lambda t} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{x}}e^{\bar{\lambda}t}$$

che hanno il difetto di essere a elementi complessi.

Però, analogamente al caso discreto, anche nel caso continuo si può mostrare che, se $\lambda = a + ib$ è un autovalore semplice, allora la coppia complessa $\mathbf{x}e^{\lambda t}$ e $\bar{\mathbf{x}}e^{\bar{\lambda}t}$, può essere sostituita dalla coppia reale:

$$\operatorname{Re}(\mathbf{x}e^{\lambda t}) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(\mathbf{x}e^{\lambda t})$$

per determinare le corrispondenti soluzioni. Più precisamente vale la seguente:

Proposizione 141 *Dato il sistema di equazioni differenziali:*

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$$

se A ammette un autovalore λ complesso e non ripetuto, allora la parte di soluzione generale del sistema dovuta all'autovalore λ e al suo coniugato $\bar{\lambda}$ è:

$$\mathbf{s}(t; c_1, c_2) = c_1 \operatorname{Re}(\mathbf{x}e^{\lambda t}) + c_2 \operatorname{Im}(\mathbf{x}e^{\lambda t}) \quad (6.4)$$

con $c_{1,2} \in \mathbb{R}$.

L'inconveniente è eliminato: tutte le traiettorie descritte da \mathbf{s} sono in \mathbb{R}^n e completano la soluzione generale utilizzando esattamente due costanti reali.

Osservazione 142 *Osserviamo che l'espressione (6.4) è valida anche nel caso reale. Se fosse $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si avrebbe come al solito:*

$$\operatorname{Re}(\mathbf{x}e^{\lambda t}) = \mathbf{x}e^{\lambda t} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(\mathbf{x}e^{\lambda t}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{s}(t; c_1, c_2) = c_1 \mathbf{x}e^{\lambda t}$$

Non dimostriamo la Proposizione ma ci limitiamo a esplicitare l'espressione di \mathbf{s} .
Anzitutto abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}e^{\lambda t} &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{(a+ib)t} = e^{at}(\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{ibt} = \\ &= e^{at}(\mathbf{a} + i\mathbf{b})[\cos(bt) + i\sin(bt)] = \\ &= e^{at}[\mathbf{a}\cos(bt) + i\mathbf{a}\sin(bt) + i\mathbf{b}\cos(bt) - \mathbf{b}\sin(bt)] = \\ &= e^{at}[\mathbf{a}\cos(bt) - \mathbf{b}\sin(bt)] + ie^{at}[\mathbf{a}\sin(bt) + \mathbf{b}\cos(bt)]\end{aligned}$$

Quindi la parte reale e la parte immaginaria di $\mathbf{x}e^{\lambda t}$ sono:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\mathbf{x}e^{\lambda t}) &= e^{at}[\mathbf{a}\cos(bt) - \mathbf{b}\sin(bt)] \\ \operatorname{Im}(\mathbf{x}e^{\lambda t}) &= e^{at}[\mathbf{a}\sin(bt) + \mathbf{b}\cos(bt)]\end{aligned}$$

Combinandole linearmente otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}(t; c_1, c_2) &= c_1e^{at}[\mathbf{a}\cos(bt) - \mathbf{b}\sin(bt)] + c_2e^{at}[\mathbf{a}\sin(bt) + \mathbf{b}\cos(bt)] = \\ &= e^{at}[c_1\mathbf{a}\cos(bt) - c_1\mathbf{b}\sin(bt) + c_2\mathbf{a}\sin(bt) + c_2\mathbf{b}\cos(bt)] = \\ &= e^{at}[(c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b})\cos(bt) + (c_2\mathbf{a} - c_1\mathbf{b})\sin(bt)]\end{aligned}$$

Infine battezzando:

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = c_2\mathbf{a} - c_1\mathbf{b}$$

otteniamo l'espressione:

$$\mathbf{s}(t) = e^{at}(\mathbf{u}\cos bt + \mathbf{v}\sin bt) \quad (6.5)$$

che dove $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ dipendono dai due parametri reali $c_{1,2}$ e sono determinabili anche sostituendo direttamente $\mathbf{s}(t)$ nella legge del moto.

Vediamo subito un esempio.

Esempio 143 Consideriamo il sistema:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

La matrice dei coefficienti ha equazione caratteristica:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

Gli autovalori sono:

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

Troviamo lo spazio invariante associato a $\lambda = i$. Tra le infinite soluzioni del sistema:

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

scegliendo l'autovettore

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

troviamo

$$\mathbf{a} = \operatorname{Re}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \operatorname{Im}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Possiamo allora scrivere la soluzione generale:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t; c_1, c_2) &= e^{0 \cdot t} \left[\left(c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \cos t + \left(c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \sin t \right] = \\ &= \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} \sin t \text{ con } c_{1,2} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Esempio 144 Consideriamo nuovamente il precedente esempio. Avendo trovato gli autovalori $\lambda_{1,2} = \pm i$ della matrice dei coefficienti, ci aspettiamo una soluzione del tipo

$$\mathbf{x}(t) = e^{0 \cdot t} (\mathbf{u} \cos t + \mathbf{v} \sin t) = \mathbf{u} \cos t + \mathbf{v} \sin t = \begin{bmatrix} u_1 \cos t + v_1 \sin t \\ u_2 \cos t + v_2 \sin t \end{bmatrix}$$

Procediamo per sostituzione per trovare \mathbf{u} e \mathbf{v} . Calcoliamo

$$\mathbf{x}'(t) = -\mathbf{u} \sin t + \mathbf{v} \cos t = \begin{bmatrix} -u_1 \sin t + v_1 \cos t \\ -u_2 \sin t + v_2 \cos t \end{bmatrix}$$

e

$$A\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \cos t + v_1 \sin t \\ u_2 \cos t + v_2 \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_2 \cos t - v_2 \sin t \\ u_1 \cos t + v_1 \sin t \end{bmatrix}$$

Imponendo che $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ per ogni t troviamo l'uguaglianza:

$$\begin{bmatrix} -u_1 \sin t + v_1 \cos t \\ -u_2 \sin t + v_2 \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_2 \cos t - v_2 \sin t \\ u_1 \cos t + v_1 \sin t \end{bmatrix}$$

che è identicamente soddisfatta se e solo se le componenti dei vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} rispettano le condizioni

$$\begin{cases} v_2 = u_1 \\ v_1 = -u_2 \end{cases}$$

Abbiamo trovato infiniti vettori del tipo

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

quindi la soluzione generale è

$$\mathbf{x}(t; \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} \sin t = \begin{bmatrix} \alpha \cos t - \beta \sin t \\ \beta \cos t + \alpha \sin t \end{bmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Del tutto equivalente alla precedente ponendo:

$$\alpha = c_1 = -\beta \quad e \quad \beta = -c_2$$

Mostriamo un altro esempio.

Esempio 145 Sia:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

e, quindi, la matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

La soluzione dell'equazione caratteristica porge i due autovalori:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$$

Troviamo un autovettore associato a $\lambda = 1 + i$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \implies \mathbf{a} = \operatorname{Re}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{b} = \operatorname{Im}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo allora scrivere la soluzione generale:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t; c_1, c_2) &= e^t \left[\left(c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \cos t + \left(c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \sin t \right] = \\ &= e^t \left(\begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} -c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \sin t \right) \quad \text{con } c_{1,2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Se vogliamo la soluzione particolare che parte da

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Basta porre

$$\mathbf{x}(0; c_1, c_2) = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ottenendo immediatamente la soluzione particolare

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^t (4 \cos t - 7 \sin t) \\ e^t (7 \cos t + 4 \sin t) \end{bmatrix}$$

L'ultimo esempio ci offre lo spunto per la seguente:

Osservazione 146 Si ha sempre:

$$\mathbf{s}(0; c_1, c_2) = e^{a \cdot 0} (\mathbf{u} \cos 0 + \mathbf{v} \sin 0) = \mathbf{u}$$

Se il sistema dinamico è bidimensionale, l'espressione di \mathbf{s} è la soluzione generale e non un semplice contributo ad essa. Pertanto, se $n = 2$, si ha sempre che:

$$\mathbf{x}(0; c_1, c_2) = \mathbf{u} = c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b}$$

ovvero il vettore \mathbf{u} altri non è che lo stato del sistema in $t = 0$.

6.1.2 Difetto di molteplicità

Nel caso di autovalori ripetuti con difetto di molteplicità si cercheranno soluzioni non del tipo:

$$\text{vettore di polinomi} \times e^{\text{autovalore} \times \text{tempo}}$$

al posto di:

$$\text{vettore costante} \times e^{\text{autovalore} \times \text{tempo}}$$

Infatti:

Teorema 147 *Se λ è un autovalore con molteplicità algebrica a e molteplicità geometrica $g < a$, allora esistono infinite soluzioni particolari del tipo:*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t) e^{\lambda t} \quad (6.8)$$

con $\mathbf{Q}(t)$ vettore di polinomi di grado pari al difetto di molteplicità $d = a - g$:

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 t + \dots + \mathbf{q}_d t^d$$

con $\mathbf{q}_k, k = 0, 1, \dots, d$ vettore di n componenti da determinarsi.

L'espressione (6.8) riguarda infinite soluzioni ma non tutte le soluzioni. Solo la parte imputabile al difetto di molteplicità di un autovalore ripetuto necessita di polinomi, la residua parte può utilizzare gli autovettori linearmente indipendenti nel solito modo. Detto in altri termini, se λ è un autovalore ripetuto a volte a cui sono associati solo $g < a$ autovettori linearmente indipendenti $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^g$, allora il contributo complessivo di λ alla formazione della soluzione generale è dato dai due addendi:

$$(\beta_1 \mathbf{y}^1 + \dots + \beta_g \mathbf{y}^g) e^{\lambda t} + \mathbf{Q}(t) e^{\lambda t}$$

ove $\beta_k, k = 1, \dots, g$ sono costanti arbitrarie.

Esempio 148 *Consideriamo il sistema:*

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ x'_2(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x'_3(t) = x_3(t) \end{cases} \quad (6.9)$$

Stavolta la matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Essa possiede l'autovalore triplo:

$$\lambda_{1,2,3} = 1$$

L'autospazio associato risolve:

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde l'infinità di vettori:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, c \in \mathbb{R}$$

V'è difetto di molteplicità $d = a - g = 3 - 1 = 2$. Oltre a soluzioni del tipo

$$c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t \quad (6.10)$$

occorre cercare soluzioni del tipo:

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{q} + \mathbf{r}t + \mathbf{s}t^2) e^t = \begin{bmatrix} q_1 + r_1 t + s_1 t^2 \\ q_2 + r_2 t + s_2 t^2 \\ q_3 + r_3 t + s_3 t^2 \end{bmatrix} e^t$$

restringendo il numero dei parametri arbitrari attraverso il rispetto della legge del moto assegnata. Procediamo al solito. Calcoliamo:

$$\mathbf{x}'(t) = (\mathbf{q} + \mathbf{r}t + \mathbf{s}t^2) e^t + (\mathbf{r} + 2\mathbf{s}t) e^t = [\mathbf{q} + \mathbf{r} + (\mathbf{r} + 2\mathbf{s})t + \mathbf{s}t^2] e^t$$

Sostituendo nella (6.9), otteniamo:

$$[\mathbf{q} + \mathbf{r} + (\mathbf{r} + 2\mathbf{s})t + \mathbf{s}t^2] e^t = A(\mathbf{q} + \mathbf{r}t + \mathbf{s}t^2) e^t \quad \forall t$$

Ovvero:

$$\begin{cases} A\mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{r} \\ A\mathbf{r} = \mathbf{r} + 2\mathbf{s} \\ A\mathbf{s} = \mathbf{s} \end{cases} \implies \begin{cases} A\mathbf{s} = \mathbf{s} \\ (A - I_3)\mathbf{r} = 2\mathbf{s} \\ (A - I_3)\mathbf{q} = \mathbf{r} \end{cases}$$

Dove si evince che \mathbf{s} è un autovettore di A associato a $\lambda = 1$ e, a cascata, \mathbf{q} e \mathbf{r} dipendono dalla sua scelta. Proviamo a ragionare per un generico \mathbf{s} :

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e troviamo i corrispondenti \mathbf{r} :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \beta \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

Troviamo ora \mathbf{q} :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \implies \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta - 2\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix}$$

Dunque la soluzione generale dipende da tre parametri arbitrari:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t; \alpha, \beta, \gamma) &= \left(\begin{bmatrix} \gamma \\ \beta - 2\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t^2 \right) e^t = \\ &= \left(\begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta - 2\alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t^2 \right) e^t \end{aligned}$$

che include anche la (6.10) con $c = \gamma$.

6.1.3 Autovalori reali, complessi e ripetuti

Anche nel caso continuo possiamo trovare sia autovalori distinti sia autovalori ripetuti. Ovviamente, a fianco delle infinite soluzioni prodotte da un autovalore ripetuto a volte, occorre aggiungere le soluzioni dovute ai residui $n - a$ autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-a}$.

La soluzione generale sarà infine formata dalla somma dei contributi di ogni autovalore.

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{c_1 \mathbf{x}^1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_{n-a} \mathbf{x}^{n-a} e^{\lambda_{n-a} t}}_{\text{autovalori distinti}} + \underbrace{\left(\overbrace{\beta_1 \mathbf{y}^1 + \dots + \beta_g \mathbf{y}^g}^{g \text{ autovettori LI di } \lambda} \right) e^{\lambda t} + \left(\overbrace{\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 t + \dots + \mathbf{q}_d t^d}^{\text{polinomio di grado } d=a-g} \right) e^{\lambda t}}_{\text{autovalore ripetuto } a \text{ volte}} \quad (6.11)$$

dove c_s, β_s sono tutti parametri reali arbitrari.

Osservazione 149 Se \mathbf{x}^s è un autovettore di A abbinato all'autovalore semplice λ_s allora $c_s \mathbf{x}^s$ indica ogni elemento dell'autospazio $\mathcal{X}(\lambda_s)$. Analogamente se $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^g$ sono g autovettori linearmente indipendenti abbinati all'autovettore λ (ripetuto a volte) allora l'espressione:

$$\mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{y}^1 + \dots + \beta_g \mathbf{y}^g$$

indica ogni elemento dell'autospazio $\mathcal{X}(\lambda)$ associato a λ . La soluzione generale (6.11) può dunque scriversi come:

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\mathbf{x}^1 \lambda_1^t + \dots + \mathbf{x}^n \lambda_n^t}_{\text{autovalori distinti}} + \underbrace{[\mathbf{y} + (\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 t + \dots + \mathbf{q}_a t^a)] \lambda^t}_{\text{autovalore ripetuto } a \text{ volte}} \quad \mathbf{x}^s \in \mathcal{X}(\lambda_s), \mathbf{y} \in \mathcal{X}(\lambda)$$

ove le costanti arbitrarie sono implicitamente considerate.

L'espressione della soluzione generale (6.11) può complicarsi ulteriormente prevedendo:

- più di un autovalore ripetuto: sarà necessario introdurre altrettanti polinomi;
- autovalori complessi: si può esplicitare la forma trigonometrica abbinabile a ogni coppia coniugata;
- autovalori complessi e ripetuti. Utilizzando la forma trigonometrica e polinomi di ordine appropriato si ottengono addendi del tipo:

$$e^{at} (\mathbf{u}(t) \cos \theta t + \mathbf{v}(t) \sin \theta t)$$

In buona sostanza tutte le espressioni viste possono entrare in gioco. Gli esempi che le includano tutte sono dimensionalmente proibitivi ma la struttura della soluzione generale resta importante per meglio comprendere in seguito il comportamento asintotico delle soluzioni.

6.2 Sistemi autonomi non omogenei

Consideriamo la legge del moto:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \quad (6.12)$$

con $\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{b}(t) \in \mathbb{R}^n$, e A quadrata d'ordine n .

Mostriamo che, anche in questo caso, due soluzioni differiscono per una soluzione dell'omogenea associata:

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t)$$

Siano $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$ due soluzioni:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \end{cases}$$

Sottraiamo, membro a membro:

$$[\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)]' = A[\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)]$$

ponendo $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$ abbiamo la prova provata.

La strategia seguita del caso discreto promette bene:

$$\text{sol. generale non omo} = \text{sol. particolare non omo} + \text{sol. generale omo}$$

D'ora in poi assumeremo:

$$\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \text{ costante} \quad (6.13)$$

Se A non è singolare siamo a cavallo. In tal caso è facilissimo trovare una soluzione particolare per la (6.12).

Proviamo con una soluzione costante:

$$\mathbf{x}^*(t) \equiv \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbf{x}^{*'}(t) \equiv \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$$

Sostituendo nella (6.12), restringendoci al caso di termine forzante costante (6.13) abbiamo:

$$\mathbf{0} = A\mathbf{x}^* + \mathbf{b}$$

onde:

$$\mathbf{x}^* = -A^{-1}\mathbf{b}$$

La soluzione generale è allora:

$$\mathbf{x}(t) = -A^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{z}(t)$$

Come prima abbiamo provato *en passant* un:

Teorema 150 *Dato il sistema dinamico autonomo:*

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$$

Se A non è singolare, allora esso ammette l'unica soluzione particolare costante:

$$\mathbf{x}^*(t) \equiv -A^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x}^*$$

Corollario 151 *Il sistema lineare non autonomo*

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$$

ha soluzione generale

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) - A^{-1}\mathbf{b}$$

ove $\mathbf{z}(t)$ è la soluzione generale del sistema omogeneo associato e $-A^{-1}\mathbf{b}$ è l'unica soluzione costante del non omogeneo..

Vediamo un:

Esempio 152 *Sia:*

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'omogenea associata è una vecchia conoscenza: si veda l'esempio 143 a pag. 108. La sua soluzione generale è:

$$\mathbf{z}(t; \alpha, \beta) = \alpha \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo allora una soluzione particolare costante del non omogeneo:

$$\mathbf{x}^* = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Conseguentemente:

$$\mathbf{x}(t; \alpha, \beta) = \alpha \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Analogamente al caso discreto, anche nel caso continuo, la procedura sopra illustrata non è sempre sufficiente.

Cosa succede se lo spettro di A contiene uno o più autovalori nulli? Come abbiamo visto in precedenti esempi, il sistema omogeneo associato presenta anche (infinite) soluzioni costanti \mathbf{z}^* . Questo comporta che, cercando una soluzione costante \mathbf{x}^* del sistema non omogeneo, corriamo il rischio di trovare in realtà una soluzione costante dell'omogeneo associato, cioè \mathbf{z}^* . Se così fosse la scrittura

$$\mathbf{z}^* + \mathbf{z}(t)$$

non rappresenterebbe la soluzione generale del sistema non omogeneo, bensì quella dell'omogeneo associato.

È dunque importante assicurarsi sempre che eventuali soluzioni particolari di

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$$

non risolvano anche l'omogeneo associato. Ripetiamo quanto già detto nel caso discreto. Vi sono due possibilità:

- esiste almeno una soluzione costante \mathbf{x}^* del sistema non omogeneo distinta da ogni soluzione costante \mathbf{z}^* dell'omogeneo associato: si può utilizzare la procedura appena vista per trovare la soluzione generale del sistema non omogeneo.
- Non esistono soluzioni costanti diverse da quelle dell'omogeneo associato: in tal caso occorre cercare una soluzione particolare $\mathbf{x}^*(t)$ non costante del sistema non omogeneo (distinta da ogni soluzione $\mathbf{z}(t)$ dell'omogeneo associato). Tipicamente basta cercare soluzioni polinomiali di grado $r > 1$.

Vediamo subito degli esempi.

Esempio 153 Riprendiamo l'esempio 139. Sia

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Avevamo già individuato la soluzione generale dell'omogeneo associato

$$\mathbf{z}(t; \alpha, \beta, \gamma) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Che presenta infinite soluzioni costanti in quanto la matrice dei coefficienti ha un autovalore nullo. Proviamo ugualmente a trovare altre differenti soluzioni costanti del non omogeneo resolvendo il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x_1^* = -1 \\ x_2^* = -2 \\ x_3^* = \delta \text{ qualsiasi} \end{cases}$$

Troviamo infinite soluzioni del tipo

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ \delta \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che non sono soluzione dell'omogeneo. Dunque la soluzione generale è data da

$$\mathbf{x}(t) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Il caso generale, analogo alla (5.16), di sistema di equazioni differenziali è:

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

La trattazione analitica delle soluzioni non è elementare per $n > 1$ pertanto in questa sede non le tratteremo.

7

Equazioni lineari discrete e continue di ordine n

Come promesso dedichiamo un capitolo a parte per trattare di equazioni alle differenze e differenziali *lineari* di ordine $n > 1$.

Ci limiteremo al caso autonomo e omogeneo.

Ovvero nel caso discreto consideriamo un'equazione del tipo:

$$x(t+n) + a_{n-1}x(t+n-1) + \dots + a_1x(t+1) + a_0x(t) = 0 \quad (7.1)$$

e nel caso continuo un'equazione del tipo:

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = 0 \quad (7.2)$$

Si noti che in entrambe le equazioni si è scelto di portare a sinistra dell'uguale ciò che abbiamo sempre considerato a destra: cambiando segno non costa nulla riscriverle entrambe nella solita forma.

In base al Teorema 65, siamo in grado di trasformare entrambe le equazioni in un sistema di equazioni del prim'ordine ma di dimensione n . Aggiungiamo che, partendo da un'equazione lineare (autonoma), si giungerebbe a un sistema di equazioni lineari (autonome).

Vediamo un esempio declinato nel discreto e nel continuo.

Esempio 154 *Consideriamo*

$$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

ovvero

$$x(t+2) = 3x(t+1) - 2x(t)$$

Ponendo

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = x(t+1) \end{cases}$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = x(t+2) = 3x_2(t) - 2x_1(t) \end{cases}$$

Cioè il sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Esempio 155 Consideriamo

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0$$

ovvero

$$x''(t) = 3x'(t) - 2x(t)$$

Ponendo

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = x'(t)$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x'_1(t) = x'(t) = x_2(t) \\ x'_2(t) = x''(t) = 3x_2(t) - 2x_1(t) \end{cases}$$

Cioè il sistema lineare omogeneo

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Saremmo dunque già in grado di risolvere ogni equazione lineare omogenea basandoci sul quanto illustrato nei precedenti capitoli.

Ciò che vedremo ora è come evitare di effettuare davvero la trasformazione in un sistema di equazioni e risolvere direttamente l'equazione di ordine n .

Anzitutto cominciamo con la seguente

Definizione 156 L'equazione

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

è detta equazione caratteristica dei sistemi dinamici unidimensionali di ordine n :

$$x(t+n) + a_{n-1}x(t+n-1) + \dots + a_1x(t+1) + a_0x(t) = 0$$

e

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = 0$$

Come già visto, l'equazione caratteristica ammette sempre n soluzioni $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, reali o complesse, non necessariamente distinte.

Per scrivere la soluzione generale delle nostre due equazioni dobbiamo distinguere tra i due casi:

- (a) le radici dell'equazione caratteristica sono tutte distinte ovvero hanno tutte molteplicità algebrica 1. In tal caso la soluzione generale dell'equazione discreta (7.1) è

$$x(t; \mathbf{c}) = c_1\lambda_1^t + \dots + c_n\lambda_n^t$$

e la soluzione generale dell'equazione continua (7.2) è

$$x(t; \mathbf{c}) = c_1e^{\lambda_1 t} + \dots + c_ne^{\lambda_n t}$$

Ove c_1, \dots, c_n sono costanti reali arbitrarie.

- (b) Alcune radici sono ripetute ovvero alcune radici hanno molteplicità algebrica superiore a 1. In tal caso a ogni radice λ ripetuta $r > 1$ volte si possono associare infinite soluzioni del tipo:

$$(c_1 + c_2t + \dots + c_rt^{r-1})\lambda^t$$

nel caso discreto o, nel caso continuo, del tipo:

$$(c_1 + c_2t + \dots + c_rt^{r-1})e^{\lambda t}$$

Riprendiamo i due precedenti esempi:

Esempio 157 *L'equazione caratteristica di*

$$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0$$

è

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

che porge le due radici reali e distinte

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Quindi la soluzione generale è data da

$$x(t; c_1, c_2) = c_1 2^t + c_2$$

Facciamo notare che

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Dunque la scelta della denominazione “equazione caratteristica” non è casuale, anzi...

Esempio 158 *La soluzione generale di*

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 0$$

è

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t$$

Esempio 159 *Consideriamo l'equazione differenziale*

$$x''(t) = 2x'(t) - x(t)$$

La sua equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

ha due soluzioni coincidenti

$$\lambda_{1,2} = 1$$

Dunque la soluzione generale dell'equazione è

$$x(t; c_1, c_2) = (c_1 + c_2 t) e^t$$

Specifichiamo cosa succede se alcune radici sono coniugate complesse, eventualmente ripetute.

Se

$$\lambda = a + ib \text{ e quindi } \bar{\lambda} = a - ib$$

sono radici dell'equazione caratteristica di molteplicità $r \geq 1$, allora il loro contributo alla soluzione generale è

$$[\alpha_1 \cos(\theta t) + \beta_1 \sin(\theta t) + (\alpha_2 \cos(\theta t) + \beta_2 \sin(\theta t)) t + \cdots + (\alpha_r \cos(\theta t) + \beta_r \sin(\theta t)) t^{r-1}] |\lambda|^t$$

nel caso discreto e

$$[\alpha_1 \cos(bt) + \beta_1 \sin(bt) + (\alpha_2 \cos(bt) + \beta_2 \sin(bt)) t + \cdots + (\alpha_r \cos(bt) + \beta_r \sin(bt)) t^{r-1}] e^{at}$$

nel caso continuo.

Facciamo un esempio:

Esempio 160 *L'equazione alle differenze*

$$x(t+2) = x(t+1) - x(t)$$

ha equazione caratteristica

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

con soluzioni

$$\lambda = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Poiché

$$|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \quad e \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi$$

la soluzione generale è:

$$x(t) = \left[\alpha \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \right] \cdot 1^t = \alpha \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

Nell'analogo caso continuo

$$x''(t) = x'(t) - x(t)$$

la soluzione generale è

$$x(t; \alpha, \beta) = \left[\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] e^{0.5t}$$

Si noti come:

- per scrivere la soluzione generale occorre utilizzare sempre n parametri reali. Ciò implica che occorre porre n condizioni al contorno per trovare una soluzione particolare. Più precisamente, nel caso discreto abbiamo condizioni al contorno del tipo:

$$x(t_0) = x_0; x(t_0 + 1) = x_1; \dots; x(t_0 + n - 1) = x_{n-1}$$

mentre nel caso continuo le condizioni al contorno sono del tipo:

$$x(t_0) = x_0; x'(t_0) = x_1; \dots; x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

- L'equivalenza con un sistema di equazioni lineari autonome consente di mostrare anche che a ogni insieme di condizioni al contorno corrisponde una e una sola soluzione particolare ovunque definita.
- tra le infinite soluzioni v'è sempre la soluzione particolare costante $x^* = 0$ individuata da condizioni di partenza nulle:

$$x_0 = x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$$

sia nel caso discreto sia nel caso continuo.

Riprendiamo i precedenti esempi :

Esempio 161 *Consideriamo il problema*

$$\begin{cases} x(t+2) = 3x(t+1) - 2x(t) \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 3 \end{cases}$$

Dalla soluzione generale sopra trovata

$$x(t; c_1, c_2) = c_1 2^t + c_2$$

ricaviamo, imponendo il rispetto delle condizioni al contorno, il sistema:

$$\begin{cases} x(0; c_1, c_2) = c_1 2^0 + c_2 = 0 \\ x(1; c_1, c_2) = c_1 2^1 + c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 = 3 \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene il valore (unico) dei parametri:

$$c_1 = 3 \quad e \quad c_2 = -3$$

quindi l'unica soluzione del problema è

$$\hat{x}(t) = 3 \cdot 2^t - 3$$

Si osservi che, nel sistema dinamico esaminato, la presenza di una radice unitaria dell'equazione caratteristica genera infinite soluzioni costanti $x^* \in \mathbb{R}$. Ognuna di esse soddisfa al contorno del tipo

$$x(0) = x(1) = x^*$$

consentono di individuarle tutte.

Esempio 162 Consideriamo il problema

$$\begin{cases} x''(t) = 3x'(t) - 2x(t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 3 \end{cases}$$

Dalla soluzione generale sopra trovata

$$x(t; c_1, c_2) = c_1 e^{2t} + c_2 e^t =$$

ricaviamo, imponendo il rispetto delle condizioni al contorno, il sistema:

$$\begin{cases} x(0; c_1, c_2) = c_1 e^{2 \cdot 0} + c_2 e^0 = 0 \\ x'(0; c_1, c_2) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^t \big|_{t=0} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 = 3 \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene il valore (unico) dei parametri:

$$c_1 = 3 \quad e \quad c_2 = -3$$

quindi l'unica soluzione del problema è

$$\hat{x}(t) = 3e^{2t} - 3e^t$$

Esempio 163 Riprendiamo il sistema dinamico dell'esempio 159 e consideriamo il problema

$$\begin{cases} x''(t) = 2x'(t) - x(t) \\ x(0) = 5 \\ x'(0) = 7 \end{cases}$$

Dalla soluzione generale già trovata

$$x(t; c_1, c_2) = (c_1 + c_2 t) e^t =$$

ricaviamo, imponendo il rispetto delle condizioni di partenza, il sistema:

$$\begin{cases} x(0; c_1, c_2) = (c_1 + c_2 \cdot 0) e^0 = 5 \\ x'(0; c_1, c_2) = c_2 e^t + (c_1 + c_2 t) e^t|_{t=0} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 5 \\ c_2 + c_1 = 7 \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene il valore (unico) dei parametri:

$$c_1 = 5 \quad e \quad c_2 = 2$$

quindi l'unica soluzione del problema è

$$\hat{x}(t) = (5 + 2t) e^t$$

Anche in questo caso, la presenza di una radice nulla dell'equazione caratteristica genera infinite soluzioni costanti $x^* \in \mathbb{R}$. Ognuna di esse soddisfa condizioni al contorno del tipo

$$\begin{cases} x(0) = x^* \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Chiudiamo con l'esempio, lasciato in sospeso a pag. 43, della sequenza di Fibonacci:

Esempio 164 *L'equazione alle differenze*

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t)$$

è lineare del second'ordine. La sua equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Essa porge le due radici reali e distinte:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Dunque la soluzione generale è:

$$x(t; c_1, c_2) = c_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^t + c_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^t$$

La famosa sequenza di numeri del Fibonacci è la soluzione particolare del problema

$$\begin{cases} x(t+2) = x(t+1) + x(t) \\ x(0) = x(1) = 1 \end{cases}$$

ovvero, quella individuata da:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases}$$

Risolvendo s'ottiene

$$c_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \quad e \quad c_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} x_{\text{FIB}}(t) &= \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^t + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^t = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{t+1} \right] \end{aligned}$$

Osserviamo che la sequenza $x_{\text{FIB}}(t)$ è forzosamente di numeri naturali:

$$\{x_{\text{FIB}}\}_{t \in \mathbb{N}} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\} \subset \mathbb{N}$$

Incredibile che si possa trovarne un'espressione chiusa in cui è protagonista il numero irrazionale $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, noto come “sezione aurea”, ricorrente in campi innumerevoli¹. Il lettore curioso può leggere, per esempio, [15].

¹Tra cui, non ultima, l'architettura dell'antica Grecia.

8

Equilibri e stabilità

8.1 Nozione di equilibrio

Abbiamo già incontrato per sistemi dinamici, sia discreti, sia continui, traiettorie evolutive costanti. Per esempio le abbiamo utilizzate per l'individuazione di tutte le soluzioni di sistemi lineari autonomi e non-omogenei.

Nei sistemi dinamici le soluzioni costanti sono importanti: esse rappresentano un *equilibrio* del sistema e sono perciò dette *punti di equilibrio* o anche *stato stazionario*.

Fermo restando che un sistema dinamico può descriversi con equazioni di ordine n qualsiasi, concentriamo la nostra attenzione sulle equazioni del prim'ordine.

Guardiamo la cosa in grande e poi troviamo un aggiustamento.

Abbiamo una legge del moto per un sistema n -dimensionale:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{x}'(t) \end{array} \right\} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

C'interessano soluzioni costanti:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* \quad \forall t \implies \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}^* \\ \mathbf{x}'(t) = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

Se sostituiamo nelle corrispondenti equazioni troviamo:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, t) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{x}^* & \text{nel caso discreto} \\ \mathbf{0} & \text{nel caso continuo} \end{array} \right. \quad (8.1)$$

In generale, risolvendo le due equazioni precedenti rispetto a \mathbf{x}^* , si ottiene una soluzione \mathbf{x}_t^* che può dipendere da t , quindi non costante e non accettabile come punto di equilibrio.

Se invece il sistema è autonomo, risolvendo le corrispondenti equazioni d'equilibrio:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{x}^* & \text{nel caso discreto} \\ \mathbf{0} & \text{nel caso continuo} \end{array} \right.$$

non si corre alcun rischio di cadere in contraddizione.

Con questa precisazione in mente, diamo comunque la definizione nel caso generale:

Definizione 165 Si dice punto di equilibrio del sistema discreto:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

ogni punto $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$, non dipendente da t , che soddisfa

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{x}^* \quad \forall t \quad (8.2)$$

Si dice punto di equilibrio del sistema continuo:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

ogni punto \mathbf{x}^* , non dipendente da t , che soddisfa:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{0} \quad \forall t \quad (8.3)$$

Ribadiamo il tutto nel caso autonomo con la seguente:

Proposizione 166 I punti di equilibrio \mathbf{x}^* di un sistema dinamico discreto autonomo $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]$ sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$$

I punti di equilibrio \mathbf{x}^* di un sistema dinamico continuo autonomo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]$ sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

Osserviamo che, per quanto detto sopra, ogni punto di equilibrio rappresenta una soluzione particolare nel senso che, se esiste un equilibrio \mathbf{x}^* allora esso è la soluzione particolare del problema

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^* \end{cases}$$

nel caso discreto ovvero la soluzione particolare del problema

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^* \end{cases}$$

nel caso continuo.

Ecco una batteria d'esempi.

Esempio 167 Nel modello logistico discreto autonomo:

$$x(t+1) = x(t) + ax(t)[M - x(t)]$$

l'equazione d'equilibrio riesce:

$$x = x + ax(M - x)$$

onde i due punti d'equilibrio:

$$\begin{aligned} x^* &= 0 \\ x^{**} &= M \end{aligned}$$

Esempio 168 Nel modello logistico continuo:

$$x'(t) = ax(t)[M - x(t)]$$

da

$$ax(M - x) = 0$$

Ritroviamo:

$$\begin{aligned} x^* &= 0 \\ x^{**} &= M \end{aligned}$$

La particolare struttura della legge del moto nei due esempi precedenti, fa sì che se anche fosse $a = a(t)$, 0 e M sarebbero ancora equilibri, ancorché per un sistema *non autonomo*.

Esempio 169 Consideriamo un tratto di mare in cui le sardelle crescono e son pescate in numero costante c (come capture). Il numero di sardelle in $t + 1$ è il numero di sardelle in t , naturalmente variato per nascite e morti (il tasso di crescita è g (come growth), che pensiamo positivo):

$$s(t+1) = (1+g)s(t) - c$$

L'equilibrio soddisfa:

$$s^* = (1+g)s^* - c \Rightarrow s^* = \frac{c}{g}$$

Quest'equazione, che si dice d'equilibrio ha un'interpretazione interessante. Essa può essere riscritta come:

$$gs^* = c$$

Ci dice che, in equilibrio, il numero delle nuove sardelle gs^* uguaglia il numero c delle sottratte alla popolazione.

Esempio 170 Consideriamo un tratto di mare in cui le sardelle decrescono per motivi naturali o per cattura ($g = -\gamma < 0$) e son ripopolate in numero costante r . Il numero di sardelle in $t + 1$ è il numero di sardelle in t , naturalmente variato per nascite e morti (il tasso di "crescita" è g (come growth)):

$$s(t+1) = (1-\gamma)s(t) + r$$

L'equilibrio soddisfa:

$$s^* = (1-\gamma)s^* + r \Rightarrow s^* = \frac{r}{\gamma}$$

Quest'equazione d'equilibrio ha la solita interpretazione interessante. Essa può essere riscritta come:

$$\gamma s^* = r$$

ossia, le sardelle introdotte per ripopolamento sono in numero uguali alle morte o catturate.

Scopriremo tra breve la sostanziale differenza tra questi due ultimi equilibri.

Esempio 171 Consideriamo un sistema d'adattamento dei prezzi, sia nella versione con tempo continuo, sia con tempo discreto:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{p}(t+1) \\ \mathbf{p}'(t) \end{array} \right\} = A[\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*]$$

Separiamo il caso discreto dal continuo. Nel discreto:

$$\mathbf{p}(t+1) - \mathbf{p}(t) = (I - A)[\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*]$$

Nel continuo

$$\mathbf{p}'(t) = A[\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*]$$

Abbiamo, in ambo i casi il punto di equilibrio:

$$\mathbf{p}(t) \equiv \mathbf{p}^*$$

Esempio 172 Riprendiamo l'esempio di pag.34, l'evoluzione nel tempo del valore d'un impiego a interessi composti è retta dalla legge del moto:

$$x(t+1) = (1+i)x(t)$$

con $i > 0$. Il sistema possiede un unico equilibrio x^* :

$$x^* = (1+i)x^* \Rightarrow x^* = 0$$

Esempio 173 Risparmio — Abbiamo visto a pagina 37 la legge del moto:

$$x(t+1) = x(t) + 2$$

Per questo sistema l'equazione d'equilibrio:

$$x^* = x^* + 2 \Rightarrow 0 = 2$$

è impossibile. Non vi sono equilibri.

Esempio 174 Capitalizzazione continua — Vedi p. 37. La legge del moto è qui:

$$x'(t) = \rho x(t) \quad \text{con } \rho > 0$$

Vi è l'unico equilibrio:

$$x^* = 0$$

Esempio 175 Acceleratore 2 — Riprendiamo l'esempio di p. 46. Qui la legge del moto è:

$$\begin{cases} Y(t+1) = X(t) \\ X(t+1) = kc[X(t) - Y(t)] + G \end{cases}$$

onde il sistema d'equazioni d'equilibrio:

$$\begin{cases} Y^* = X^* \\ X^* = kc[X^* - Y^*] + G \end{cases}$$

che si riduce a

$$Y^* = X^* = G$$

Consideriamo un sistema dinamico, lineare omogeneo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{x}(t+1) \end{cases} = A\mathbf{x}(t)$$

Esso ammette sempre l'origine $\mathbf{0}$ come equilibrio. Esso ne è l'unico equilibrio se le matrici:

$$\begin{cases} A \\ I - A \end{cases} \text{ non sono singolari}$$

In ambo i casi i sistemi (lineari omogenei) d'equilibrio:

$$\begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ (I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

sono di Cramer e la soluzione nulla è la sola. Quando però tali matrici sono singolari, sappiamo che tali sistemi lineari ammettono infinite soluzioni. Sono gl'infiniti equilibri del corrispondente sistema dinamico. Vediamo un paio di casi numerici:

Esempio 176 Consideriamo

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

La matrice dei coefficienti è platealmente singolare. L'equazione d'equilibrio è:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che fornisce gl'infiniti equilibri:

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha/2 \end{bmatrix} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Esempio 177 Consideriamo il caso discreto:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

La matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

è visibilmente singolare. Gli equilibri sono definiti da:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} \text{ con } \beta \in \mathbb{R}$$

La situazione delineata nel precedente esempio si ritrova nelle cosiddette *matrici di transizione*. Vediamo un semplice esempio.

Esempio 178 Quote di mercati di dentifrici — La facciamo con le marche di dentifrici, ma funziona anche con i presidenti USA. Consideriamo due marche 1 e 2 di dentifricio. Chiamiamo α la probabilità che chi usa nella settimana t il dentifricio 1, lo faccia anche la settimana successiva $t+1$: quindi $(1-\alpha)$ è la probabilità complementare che passi al dentifricio 2. Analogamente sia β la probabilità che chi usa in una settimana il dentifricio 2, lo faccia anche la settimana successiva. La matrice:

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{bmatrix}$$

con $\alpha, \beta \in (0, 1)$ è detta matrice di transizione da dentifricio a dentifricio che descrive come si evolvono settimanalmente le quote di mercato x_1 e x_2 dei due dentifrici attraverso il sistema:

$$\mathbf{x}(t+1) = P\mathbf{x}(t)$$

Cerchiamo gli equilibri del sistema. Anzitutto osserviamo che:

$$\begin{aligned} \det(P - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} \alpha - \lambda & 1 - \beta \\ 1 - \alpha & \beta - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + \alpha + \beta - 1 = \\ &= \lambda^2 - 1 + \alpha + \beta - (\alpha + \beta)\lambda = \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 1) - (\alpha + \beta)(\lambda - 1) = \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1 - \alpha + \beta) = 0 \end{aligned}$$

quindi la matrice di transizione ha sempre due autovalori reali di cui uno unitario:

$$\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = \alpha + \beta - 1$$

Ci aspettiamo infiniti equilibri che corrispondono all'autospazio di $\lambda_1 = 1$:

$$(P - 1 \cdot I) \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Risolvendo s'ottengono vettori del tipo:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ (1-\alpha)/(1-\beta) \end{bmatrix} k \text{ con } k \in \mathbb{R}$$

Questi infiniti equilibri ci mostrano come nel lungo andare la popolazione di consumatori si distribuisce tra i due dentifrici. Dato che le quote di mercato devono avere somma 1:

$$x_1^* + x_2^* = k + k \frac{1-\alpha}{1-\beta} = 1$$

risolvendo rispetto a k , possiamo trovare l'unico vero equilibrio di mercato \mathbf{x}^{**} . Otteniamo:

$$x_1^{**} = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} \text{ e } x_2^{**} = \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}.$$

Esempio 179 Crescita neoclassica unisetoriale — Abbiamo visto a p. 62 un popolarissimo modello di crescita economica unisetoriale, il modello di Solow:

$$k'(t) = sf[k(t)] - gk(t)$$

ove s è la propensione media al risparmio, f la funzione di produzione intensiva (i.e. per addetto), g il tasso di crescita della forza di lavoro. L'equazione d'equilibrio riesce:

$$0 = sf(k) - gk \quad (8.4)$$

L'equilibrio banale:

$$k(t) \equiv 0$$

non è economicamente interessante. Su f sono comunemente accettate le proprietà di Inada:

$$f'_+(0) = +\infty \text{ e } f'(+\infty) = 0$$

In tal caso esiste un'unica soluzione positiva per la (8.4). Nel caso Cobb-Douglas:

$$f(k) = k^\alpha \text{ con } 0 < \alpha < 1$$

l'equazione d'equilibrio è:

$$sk^\alpha - gk$$

e porge:

$$k^* = \left(\frac{s}{g}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

8.2 Stabilità e stabilità asintotica

L'idea è questa. Un sistema dinamico (non importa se con tempo discreto o continuo) ammette un equilibrio \mathbf{x}^* . Se esso parte da lì, ivi resta per sempre:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^* \Rightarrow \mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^* \text{ per ogni } t > 0$$

Ciò vuole sostanzialmente dire che il sistema dinamico, lungo tale traiettoria, non è molto dinamico, perché sta nel suo c.d. *stato stazionario*. Possiamo anche permetterci di dedurre una *relazione asintotica*:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* \quad (8.5)$$

che è peraltro banale, vista la costanza di $\mathbf{x}(t)$.

Consideriamo una situazione un po' più eccitante: spostiamo il punto di partenza, cosicché $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{x}^*$. Quale sarà il comportamento del sistema? Il sistema perturbato si scosterà significativamente dall'equilibrio o resterà comunque vicino ad esso? Sarà ancora vera la (ora) non più banale (8.5)?

Rispondere a queste domande comporta avventurarsi in uno dei più begli aspetti dei sistemi dinamici. Se uno conosce le soluzioni generali, può rispondere semplicemente calcolandone il limite per $t \rightarrow +\infty$.

Ma anche non conoscendo la soluzione generale, quindi senza risolvere l'equazione che descrive il sistema dinamico, spesso si può dire molto anche solo "guardando" la legge del moto \mathbf{f} . Ciò è senz'altro vero nel caso di sistemi autonomi.

Due precisazioni sono ora necessarie:

- Se ci si vuole spostare dall'equilibrio, considerando una condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \neq \mathbf{x}^*$, senza preoccuparsi della direzione dello spostamento occorre che \mathbf{x}^* sia interno $\text{Dom}(\mathbf{f})$: ciò è sempre vero se $\text{Dom}(\mathbf{f}) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto.
- Se si vuole che a una condizione iniziale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \in \text{Dom}(\mathbf{f})$ sia associata un'unica soluzione particolare, cosicché la scrittura $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0) = \hat{\mathbf{x}}(t)$ sia inequivocabile, occorre che siano soddisfatte le condizioni di esistenza e unicità.

Daremo per scontati questi due prerequisiti e, inoltre, ci limiteremo ad esaminare il caso autonomo.

Definizione 180 Consideriamo un sistema dinamico con legge del moto:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{x}'(t) \end{array} \right\} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]$$

Supponiamo che esso ammetta un punto d'equilibrio \mathbf{x}^* . L'equilibrio \mathbf{x}^* è detto:

(1) stabile se per ogni intorno V_ε di \mathbf{x}^* esiste un intorno U_δ di \mathbf{x}^* tale che se $\mathbf{x}^0 \in U_\delta$ allora la corrispondente traiettoria $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$ sia definita e appartenga a V_ε per ogni $t \geq t_0$. Più esplicitamente, per ogni $\varepsilon > 0$ deve esistere un $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che

$$\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \implies \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon \text{ per ogni } t \geq t_0$$

(2) asintoticamente stabile (secondo Liapunov) se è stabile ed esiste un intorno U_ϵ di \mathbf{x}^* tale che se $\mathbf{x}^0 \in U_\epsilon$ allora la corrispondente traiettoria $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$ converge a \mathbf{x}^* . Più esplicitamente, \mathbf{x}^* deve essere un equilibrio stabile e inoltre deve esistere un $\epsilon > 0$ tale che

$$\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\| < \epsilon \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^*$$

(3) instabile se non è stabile.

Per evidenziare che punto di equilibrio soddisfa la richiesta (1) ma non la (2), si dice che esso è stabile *semplicemente* o *neutralmente*.

Detto in altri termini: si parla di stabilità (semplice o neutra) se, partendo vicino all'equilibrio, la soluzione non si allontana mai troppo da esso.

Si parla invece di stabilità asintotica quando la distanza delle soluzioni dall'equilibrio, oltre a essere limitabile nella misura desiderata, converge a 0 per $t \rightarrow +\infty$.

Possiamo illustrare i due concetti con dei facili esempi.

Esempio 181 Consideriamo il sistema dinamico continuo

$$x'(t) = 0$$

Esso ammette infinite soluzioni costanti

$$x(t; x_0) = x_0$$

Ognuna di esse è un equilibrio stabile semplicemente ma non asintoticamente. Per convincercene, fissiamo l'attenzione sulla soluzione $x^* = 1$. Tutte le soluzioni che partono nell'intorno

$$U_\delta(x^*) = (1 - \delta, 1 + \delta)$$

essendo costanti, restano ad una distanza da $x^* = 1$ inferiore a $\delta = \varepsilon$.

Esempio 182 Consideriamo il sistema dinamico continuo

$$x'(t) = -x(t) + 2$$

Esso ammette l'unico punto d'equilibrio

$$x^* = 2$$

La soluzione generale è

$$x(t; x_0) = (x_0 - 2)e^{-t} + 2$$

Se si vuole che

$$x(t) \in (2 - 0.5, 2 + 0.5) \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

basta scegliere $\delta = 0.5$. Infatti se $1.5 < x_0 < 2.5$ allora la corrispondente soluzione si avvicinerà sempre di più a $x^* = 2$ come si può verificare anche per via grafica nel piano delle soluzioni:

Inoltre si verifica facilmente che ogni soluzione converge a 2. Dunque l'equilibrio $x^* = 2$ è anche asintoticamente stabile.

Esempio 183 Consideriamo il sistema dinamico discreto

$$x(t+1) = -x(t)$$

La soluzione generale

$$x(t; x_0) = x_0 (-1)^t$$

include l'unico punto di equilibrio del sistema

$$x^* = 0$$

Nessuna soluzione converge all'equilibrio ma, se si vuole che

$$\left| x_0 (-1)^t - 0 \right| = \left| x_0 (-1)^t \right| < \varepsilon \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

basta scegliere $|x_0| < \varepsilon$. Pertanto $x^* = 0$ è un equilibrio stabile semplicemente.

Le nozioni di stabilità introdotte hanno natura locale: si ragiona per intorni in entrambe.

Peraltro la stabilità asintotica può essere pensata globalmente in maniera alquanto naturale. Introduciamo prima la seguente

Definizione 184 Sia $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una legge del moto autonoma che definisce un'unica soluzione $\mathbf{x}(t)$ per ogni $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \in A$, A aperto. Un punto di equilibrio \mathbf{x}^* è detto attrattore (locale) se esiste un intorno $H(\mathbf{x}^*) \subseteq A$ tale che

$$\mathbf{x}^0 \in H(\mathbf{x}^*) \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^*$$

Si chiama bacino o insieme d'attrazione di un attrattore \mathbf{x}^* l'insieme

$$B(\mathbf{x}^*) = \left\{ \mathbf{x}^0 \in A : \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^* \right\}$$

ovvero l'insieme contenente tutti i punti di partenza \mathbf{x}^0 a cui corrispondono soluzioni convergenti all'equilibrio stesso.

Se $B(\mathbf{x}^*)$ coincide con A , il punto d'equilibrio \mathbf{x}^* è detto *attrattore globale*.

Si noti che un punto di equilibrio è localmente asintoticamente stabile se e solo se è stabile ed è attrattore (almeno locale).

Inoltre, mentre possono esserci più attrattori locali, la presenza di un attrattore globale esclude la presenza di altri punti d'equilibrio e quindi di altri attrattori:

Proposizione 185 *Se un sistema dinamico ammette un attrattore globale, esso è l'unico punto d'equilibrio.*

Dimostrazione. Per assurdo. Se ci fossero due equilibri $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}^{**}$, la soluzione con $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ non convergerebbe a \mathbf{x}^{**} e viceversa. ■

Possiamo ora fornire

Definizione 186 *Un punto di equilibrio asintoticamente stabile è detto globalmente asintoticamente stabile se il suo bacino d'attrazione coincide con il dominio della legge del moto \mathbf{f} .*

Quando la stabilità asintotica non è di tipo globale si parla di stabilità asintotica *locale*.

Notiamo subito l'ovvia implicazione

$$\mathbf{x}^* \text{ è globalmente asintoticamente stabile} \implies \mathbf{x}^* \text{ è localmente asintoticamente stabile}$$

Vediamo alcuni esempi:

Esempio 187 *È una scelta comune nella modellistica neoclassica, con riferimento alla perdita di valore dello stock del capitale, utilizzare l'equazione:*

$$x'(t) = -\alpha x(t)$$

con $\alpha > 0$ che rappresenta il tasso istantaneo di decadimento. Tutte le soluzioni sono definite $\forall t \in [0, +\infty)$ e convergono all'unico punto di equilibrio $x^* = 0$ del sistema:

$$x(t) = x(0)e^{-\alpha t} \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

Quindi possiamo classificare $x^* = 0$ come un attrattore globale. Osservando poi che la convergenza avviene in maniera monotona, l'equilibrio è anche stabile, ovvero è globalmente asintoticamente stabile. Il fatto risulta evidente anche graficamente:

Esempio 188 Consideriamo le superfamose successioni geometriche definite dall'equazione:

$$x(t+1) = qx(t)$$

che altri non è che un'equazione alle differenze lineare autonoma del prim'ordine. Se $q \neq 1$, allora vi è un unico equilibrio:

$$x^* = 0$$

che è globalmente asintoticamente stabile se e solo se $|q| < 1$.

Esempio 189 Consideriamo l'equazione:

$$x'(t) = 2x(t)[5 - x(t)]$$

Si tratta del solito modello logistico continuo con $a = 2$ e $M = 5$. Da

$$2x(5 - x) = 0$$

troviamo i due equilibri:

$$\begin{aligned} x^* &= 0 \\ x^{**} &= 5 \end{aligned}$$

Già possiamo dedurre che nessuno di essi può essere globalmente stabile. Esaminiamo la stabilità locale. Utilizziamo la soluzione generale (cfr. con pag. 68) data da:

$$x(t) = \frac{5x_0}{x_0 + e^{-10t}(5 - x_0)}$$

Studiamo il suo comportamento asintotico, verificando preventivamente che le soluzioni siano definite per ogni $t \geq 0$. Per fare la verifica basta controllare che il denominatore non si annulli per qualche t positivo, ovvero che l'equazione in t :

$$x_0 + e^{-10t}(5 - x_0) = 0 \xrightarrow{x_0 \neq 5} e^{-10t} = \frac{-x_0}{(5 - x_0)} = \frac{x_0}{x_0 - 5} = X_0 \quad (8.6)$$

non abbia soluzioni positive. Distinguiamo due casi:

(i) se $x_0 \geq 0$, il denominatore non s'annulla mai per $t \geq 0$. Infatti se $0 \leq x_0 < 5$ risulta $X_0 \leq 0$ e quindi l'equazione (8.6) non ha soluzioni. Per $x_0 = 5$ è sempre impossibile (perchè diventa $5 + 0 = 0$). Se $x_0 > 5$ allora $X_0 > 1$ (perchè $x_0 > x_0 - 5$) e l'equazione (8.6) è risolta solo da valori negativi di t . Ciò comporta che le soluzioni associate a $x_0 \geq 0$ sono definite per ogni $t \geq 0$ e per quelle con $x_0 > 0$ risulta

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5x_0}{x_0 + e^{-10t}(5 - x_0)} = \frac{5x_0}{x_0 + 0} = 5 = x^{**}$$

(ii) Se invece $x_0 < 0$ allora

$$0 < X_0 = \frac{x_0}{x_0 - 5} < 1$$

quindi l'equazione (8.6) ammette per ogni $x_0 < 0$ una soluzione positiva:

$$t^* = -\frac{\ln X_0}{10}$$

Ciò comporta che le corrispondenti soluzioni siano definite solo nell'intervallo limitato $[0, t^*)$ e quindi per esse non si possa calcolarne neppure il limite per $t \rightarrow +\infty$ ma solo per $t \rightarrow t^*$:

$$\lim_{t \rightarrow t^*} x(t) = \lim_{t \rightarrow t^*} \frac{5x_0}{x_0 + e^{-10t}(5 - x_0)} = -\infty$$

Il fatto che una soluzione possa divergere in un tempo finito è visto come un andamento “catastrofico” del sistema dinamico.

Nelle applicazioni economiche l'andamento anomalo non riguarda le traiettorie significative, dato che la condizione iniziale è sempre compresa tra 0 e M .

Dunque possiamo dire che $x^{**} = 5$ è un attrattore locale ma non globale dato che attrae a sé ogni soluzione che parte da $(0, +\infty) = U(5)$ ma non attira quelle che partono da $(-\infty, 0]$. Mentre l'equilibrio $x^* = 0$ non è stabile. Illustriamo graficamente la situazione:

Dal grafico poi ci si convince che $x^{**} = 5$ è anche stabile e quindi che è localmente asintoticamente stabile.

Esempio 190 Consideriamo il sistema:

$$x'(t) = [x(t) - 2]^2$$

Si vede subito che vi è un solo equilibrio:

$$x^* = 2$$

Per studiarne la stabilità risolviamo l'equazione a variabili separabili con $x_0 \neq 2$:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{dy}{(y-2)^2} &= \int_0^t d\tau \\ -(x-2)^{-1} + (x_0-2)^{-1} &= t \\ x-2 &= \left[(x_0-2)^{-1} - t\right]^{-1} \\ x(t) &= 2 + \frac{1}{(x_0-2)^{-1} - t} \end{aligned}$$

L'espressione trovata ci fornisce le soluzioni non costanti. Osserviamo che se $x_0 < 2$ allora le corrispondenti soluzioni sono definite per ogni $t \geq 0$, ma se $x_0 > 2$ dev'essere $t < (x_0-2)^{-1} = t^*$. Dunque abbiamo:

$$\begin{aligned} x_0 < 2 &\implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[2 + \frac{1}{(x_0-2)^{-1} - t} \right] = 2^- \\ x_0 > 2 &\implies \lim_{t \rightarrow t^*_-} \left[2 + \frac{1}{(x_0-2)^{-1} - t} \right] = +\infty \end{aligned}$$

Di conseguenza $x^* = 2$ non è stabile, neppure in senso neutro. Graficamente:

I precedenti esempi sono basati sulla conoscenza della soluzione generale. Come vedremo tra poco, lo studio della stabilità di un equilibrio può essere condotto anche *senza* conoscere le soluzioni.

8.3 Stabilità per i sistemi lineari

Ci sono sistemi dinamici, così strutturalmente semplici, tali che la stabilità asintotica locale e la stabilità asintotica globale dei loro equilibri finiscono per confondersi.

Consideriamo il caso lineare, a coefficienti costanti e omogeneo. Tante parole per dire:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{x}'(t) \end{array} \right\} = A\mathbf{x}(t) \quad (8.7)$$

In questo caso sappiamo che $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ è sempre un equilibrio e che ogni sua soluzione è definita su tutto \mathbb{R} (o \mathbb{N}).

Si possono subito dedurre alcuni fatti importanti sulla stabilità dell'origine.

Anzitutto osserviamo che, se $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ attrae una soluzione particolare $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$ allora attrae ogni soluzione del tipo

$$c\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, c\mathbf{x}^0) \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Infatti è ovvia l'implicazione

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} c\mathbf{x}(t) = c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{per ogni } c \in \mathbb{R}$$

Possiamo rifrasare dicendo che, se il bacino d'attrazione $B(\mathbf{0})$ contiene un punto $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{0}$ allora contiene tutti i punti $c\mathbf{x}^0$ con $c \in \mathbb{R}$.

Supponiamo ora che vi siano due soluzioni $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$ e $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{y}^0)$, entrambe convergenti a $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ e con \mathbf{x}^0 e \mathbf{y}^0 linearmente indipendenti¹. In tal caso la loro somma:

$$\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0) + \mathbf{y}(t, \mathbf{y}^0)$$

è una soluzione $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}(t, \mathbf{x}^0 + \mathbf{y}^0)$ che converge anch'essa a $\mathbf{0}$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) + \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{y}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$$

Riassumendo, $B(\mathbf{0})$ è *sempre* un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n la cui dimensione coincide con il massimo numero di punti di partenza linearmente indipendenti tra loro, a cui corrispondono soluzioni che convergono a $\mathbf{0}$. Male che vada è il sottospazio di dimensione nulla $B(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$.

¹Tecnicamente si dice che le due soluzioni sono linearmente indipendenti tra loro: il concetto di dipendenza e indipendenza lineare può infatti essere introdotto anche per le funzioni.

Immediata conseguenza è che se esiste un intorno $U(\mathbf{0}) \subset B(\mathbf{0})$ allora $B(\mathbf{0}) = \mathbb{R}^n$ perchè il bacino d'attrazione contiene tutte le combinazioni lineari degli elementi di U e in U vi sono senz'altro n condizioni iniziali linearmente indipendenti tra loro. Vale cioè la seguente implicazione:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \text{ è attrattore locale } \implies \mathbf{x}^* = \mathbf{0} \text{ è attrattore globale}$$

che, in generale, non è vera. Quindi nel caso autonomo lineare omogeneo:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \text{ è attrattore locale } \iff \mathbf{x}^* = \mathbf{0} \text{ è attrattore globale}$$

Per determinare la stabilità dell'origine passiamo ad esaminare la struttura della soluzione generale:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{cases} \sum_{s=1}^{k \leq n} \mathbf{P}_s(t) \lambda_s^t & \text{caso discreto} \\ \sum_{s=1}^{k \leq n} \mathbf{P}_s(t) e^{t\lambda_s} & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Al divergere di t , il comportamento della soluzione generale è determinato dalle funzioni esponenziali in quanto i polinomi, qualunque sia il loro grado, non possono "competere" con esponenziali di base diversa da 1. Ciò comporta che se $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ è attrattore allora è senz'altro stabile. Detto in altri termini, nei sistemi lineari la stabilità asintotica dell'origine è implicata direttamente dalla convergenza delle soluzioni ad essa. Dunque:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \text{ è attrattore (globale) } \iff \mathbf{x}^* = \mathbf{0} \text{ è asintoticamente (globalmente) stabile}$$

Ne consegue:

Teorema 191 *Data la legge del moto (8.7), allora*

(i) *l'origine $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ è globalmente asintoticamente stabile se e solo se per ogni autovalore λ_s della matrice dei coefficienti si ha*

$$\begin{cases} |\lambda_s| < 1 & \text{nel caso discreto} \\ \operatorname{Re}(\lambda_s) < 0 & \text{nel caso continuo} \end{cases} \quad (8.8)$$

(ii) *se per ogni autovalore λ_s risulta*

$$\begin{cases} |\lambda_s| \leq 1 & \text{nel caso discreto} \\ \operatorname{Re}(\lambda_s) \leq 0 & \text{nel caso continuo} \end{cases}$$

e tutti gli autovalori λ_k tali che

$$\begin{cases} |\lambda_k| = 1 & \text{nel caso discreto} \\ \operatorname{Re}(\lambda_k) = 0 & \text{nel caso continuo} \end{cases}$$

sono regolari, allora l'origine $\mathbf{x}^ = \mathbf{0}$ è stabile neutralmente.*

(iii) *In tutti i restanti casi l'origine $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ è instabile.*

Vediamo qualche esempio nel caso bidimensionale:

Esempio 192 *Consideriamo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'equazione caratteristica:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0$$

porge i due autovalori complessi coniugati:

$$\lambda = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{7} \quad e \quad \bar{\lambda} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{7}$$

Poichè $\operatorname{Re}(\lambda) = \operatorname{Re}(\bar{\lambda}) = \frac{3}{2} > 0$, $\mathbf{x}^ = \mathbf{0}$ è un equilibrio instabile per il sistema continuo $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.*

Poiché $|\lambda| = |\bar{\lambda}| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{7}{4}} = 2 > 1$, $\mathbf{x}^ = \mathbf{0}$ è un equilibrio instabile per il sistema discreto $\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$.*

Esempio 193 *Consideriamo*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

L'equazione caratteristica:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1/2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

porge i due autovalori complessi coniugati:

$$\lambda = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\sqrt{7} \quad e \quad \bar{\lambda} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\sqrt{7}$$

Poichè $\operatorname{Re}(\lambda) = \operatorname{Re}(\bar{\lambda}) = -\frac{1}{4} < 0$, $\mathbf{x}^ = \mathbf{0}$ è globalmente asintoticamente stabile per il sistema continuo $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.*

Poiché $|\lambda| = |\bar{\lambda}| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{7}{16}} = \sqrt{1/2} < 1$, $\mathbf{x}^ = \mathbf{0}$ è globalmente asintoticamente stabile per il sistema discreto $\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$.*

Esempio 194 *Consideriamo*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Si tratta di una matrice triangolare i cui autovalori sono

$$\lambda_1 = -1 \quad ; \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \lambda_3 = -\frac{1}{3}$$

Poichè $\operatorname{Re}(\lambda_s) = \lambda_s < 0$ per ogni s , $\mathbf{x}^ = \mathbf{0}$ è globalmente asintoticamente stabile per il sistema continuo $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.*

Poiché $|\lambda_1| = \lambda_1 = 1$ e gli altri due autovalori sono entrambi regolari e in modulo inferiore a 1, l'origine $\mathbf{x}^ = \mathbf{0}$ è un equilibrio stabile neutralmente per il sistema $\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$.*

Non abbiamo ancora parlato dei sistemi lineari autonomi *non omogenei*:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{x}'(t) \end{array} \right\} = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \quad (8.9)$$

Scopriremo con gran sollievo che quanto detto sin'ora basta e avanza per trattare anche il caso non omogeneo.

Anzitutto osserviamo che, il sistema (8.9) ammette un unico equilibrio dato da:

$$\mathbf{x}^* = \begin{cases} \mathbf{b}(A - I)^{-1} & \text{discreto} \\ -\mathbf{b}A^{-1} & \text{continuo} \end{cases}$$

se e solo se $A - I$ e A , rispettivamente, sono non singolari. In tal caso la soluzione generale del sistema non omogeneo (8.9) è:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + \mathbf{z}(t)$$

dove \mathbf{z} è la soluzione generale dell'omogeneo associato. Ma allora, per $t \rightarrow +\infty$, si ha:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + \mathbf{z}(t) \rightarrow \mathbf{x}^* \iff \mathbf{z}(t) \rightarrow \mathbf{0}$$

Dunque possiamo affermare che:

Proposizione 195 *Un punto di equilibrio \mathbf{x}^* per la legge del moto*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$$

è (globalmente) asintoticamente stabile se e solo se $\mathbf{0}$ è (globalmente) asintoticamente stabile per l'associata legge del moto omogenea:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}(t)$$

Notiamo che tutto si incastra alla perfezione:

- La matrice $A - I$ è singolare se e solo se A possiede qualche autovalore unitario: ma in tal caso il sistema discreto (8.9) ammette infiniti punti di equilibrio e quindi nessuno di essi può essere asintoticamente stabile.
- La matrice A è singolare se e solo se A possiede qualche autovalore nullo: ma in tal caso il sistema continuo (8.9) ammette infiniti punti di equilibrio e perciò nessuno di essi può essere asintoticamente stabile.

In buona sostanza lo studio della stabilità di un sistema lineare omogeneo porta con sé i risultati di un corrispondente sistema non omogeneo.

Torniamo quindi ai sistemi omogenei.

La strada naturale per accertare la stabilità di $\mathbf{0}$ consiste in:

- (1) — calcolare lo spettro $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ di A e
- (2) — guardarlo.

L'ostacolo sta nella risoluzione dell'equazione caratteristica del sistema:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

che non è sempre facile risolvere.

In realtà, per studiare la stabilità, a noi basterebbe sapere se le sue radici hanno tutte parte reale negativa o modulo minore di 1.

In letteratura si trovano molte condizioni che garantiscono le condizioni di stabilità (8.8) *senza* risolvere l'equazione caratteristica corrispondente.

La struttura di questi risultati è la stessa. Forniscono condizioni necessarie e sufficienti di stabilità globale basate sui coefficienti dell'equazione caratteristica.

Ne vediamo due: una per il caso discreto e una per il caso continuo.

8.3.1 Condizione di Schur

Nel caso di tempo discreto:

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$$

ci interessa sapere se le radici del suo polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

sono in modulo minori di 1.

La condizione che stiamo per illustrare richiede la costruzione di alcune matrici i cui elementi sono determinati dai coefficienti del polinomio caratteristico.

Utilizzando i coefficienti a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , costruiamo le due matrici ausiliarie

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

entrambe quadrate di ordine n . Indichiamo ora con A_k e B_k le loro sottomatrici quadrate formate dalle prime k righe e k colonne (sottomatrici principali di nord ovest) per $k = 1, \dots, n$. Costruiamo ora la sequenza di matrici:

$$S_k = \begin{bmatrix} B_k & C_k \\ C_k^T & B_k^T \end{bmatrix}, k = 1, \dots, n$$

Si tratta di matrici quadrate di ordine $2k$:

$$\begin{aligned} S_1 &= \begin{bmatrix} 1 & a_0 \\ a_0 & 1 \end{bmatrix} \\ S_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & a_0 \\ a_0 & 0 & 1 & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\dots \\ S_n &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & & & & \cdots & & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \\ a_0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & a_2 \\ \cdots & & & & \cdots & & & \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

che chiameremo *matrici di Cohn-Schur*.

Teorema 196 (Cohn-Schur). *Condizione necessaria e sufficiente affinché ogni soluzione λ_s dell'equazione:*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

sia in modulo minore di 1 è che le matrici Cohn-Schur S_k ad essa abbinate abbiano tutte determinanti positivi:

$$\det S_k > 0 \text{ per } k = 1, 2, \dots, n \iff |\lambda_s| < 1 \forall s$$

Vediamo il risultato all'opera. Consideriamo il seguente:

Esempio 197 La legge del moto sia:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Gli autovalori della matrice A risolvono:

$$\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

Si trovano facilmente i due autovalori: $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 0$, quindi la condizione di stabilità non dovrebbe essere soddisfatta, perché il primo autovalore, in modulo, eccede 1. Si ha:

$$a_1 = 2, a_0 = 0$$

Le matrici che c'interessano sono:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I loro determinanti sono²:

$$\det S_1 = 1 > 0 \quad e \quad \det S_2 = -3$$

e la condizione di Cohn-Schur non è soddisfatta. Consideriamo ora un altro caso affatto simile, in cui la matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della nuova matrice dei coefficienti risolvono:

$$\det \left(\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - \lambda + \frac{3}{16} = 0$$

Troviamo due autovalori in modulo minori di 1: $\lambda_1 = 0.25$, $\lambda_2 = 0.75$. La condizione di Cohn-Schur dovrebbe essere soddisfatta. In questo caso abbiamo:

$$a_1 = -1 \quad e \quad a_0 = 3/16$$

Andiamo a costruire le matrici di Cohn-Schur:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3/16 \\ 3/16 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad \det S_1 = 1 - \left(\frac{3}{16}\right)^2 > 0$$

Si ha poi:

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/16 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3/16 \\ 3/16 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3/16 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/16 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 3/16 \\ 3/16 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3/16 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{7761}{65536} > 0$$

La condizione di Cohn-Schur è soddisfatta.

²La vita si fa più facile se si calcola $\det S_2$ usando il teorema di Laplace, applicato alla terza colonna.

8.3.2 Condizione di Hurwitz

Nel caso di sistemi continui c'interessa scoprire condizioni necessarie e sufficienti affinché la matrice dei coefficienti A abbia autovalori con parti reali negative.

Anche in questo caso consideriamo il suo polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_0$$

che però, per l'occasione, riscriviamo nel seguente modo:

$$P_H(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n \quad (8.10)$$

in cui abbiamo ribattezzato i coefficienti in ordine crescente anziché decrescente:

$$\alpha_s = a_{n-s}$$

con la solita avvertenza che il coefficiente di λ^n è comunque $\alpha_0 = a_n = 1$.

I coefficienti di P_H consentono di costruire una matrice H , quadrata d'ordine n , detta *matrice di Hurwitz* nel seguente modo:

- La prima riga di H contiene i coefficienti del polinomio P_H con indice dispari $\alpha_1, \alpha_3, \dots$, finché ce ne sono, poi tutti 0.
- La seconda riga contiene i coefficienti del polinomio P_H con indice pari $\alpha_0 = 1, \alpha_2, \dots$, finché ce ne sono, poi tutti 0, come prima.
- La terza riga replica la prima, ma con uno 0 in prima posizione (colonna 1), quindi spostata d'un posto a destra.
- La quarta riga replica, per certi versi, la seconda, con uno *shift* a destra....

Riassumiamo con la seguente definizione:

Definizione 198 — *Dato il polinomio:*

$$P_H(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n$$

chiamiamo matrice di Hurwitz, associata al polinomio P_H , la matrice quadrata d'ordine n :

$$H_{n \times n} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_7 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_6 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_5 & \alpha_7 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \alpha_4 & \alpha_6 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

In particolare, se $n = 2$, al polinomio:

$$P_H(\lambda) = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2$$

è associata la matrice di Hurwitz

$$H_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Se $n = 3$, al polinomio:

$$P_H(\lambda) = \lambda^3 + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_3$$

è associata la matrice di Hurwitz

$$H_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & 0 \\ 1 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Teorema 199 *Condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici dell'equazione:*

$$\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0$$

abbiano parte reale negativa è che la matrice di Hurwitz ad essa associata abbia tutti i suoi minori principali di NW positivi³.

Vediamo un paio di esempi semplici:

Esempio 200 *Consideriamo il sistema dinamico:*

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

La sua equazione caratteristica è

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \frac{5}{6}\lambda + \frac{5}{48} = 0$$

Possiamo tranquillamente risolverla trovando le due radici:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{10} - 5}{12} \approx -0.15314, \lambda_2 = -\frac{\sqrt{10} + 5}{12} \approx -0.68019$$

reali negative, quindi con parte reale negativa. Controlliamo che il criterio basato sulla matrice di Hurwitz funzioni. Da quanto visto sopra, la matrice di Hurwitz è:

$$H_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5/6 & 0 \\ 1 & 5/48 \end{bmatrix}$$

I suoi minori principali di NW sono:

$$\hat{H}_1 = h_{11} = 5/6 \text{ e } \hat{H}_2 = \det H = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{48} = \frac{25}{288};$$

entrambi positivi sono positivi, la condizione necessaria e sufficiente è soddisfatta.

Esempio 201 *Consideriamo il sistema dinamico continuo:*

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Il polinomio caratteristico della sua matrice dei coefficienti è:

$$\det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Si tratta d'un sistema manifestamente instabile. Controlliamo la diagnosi con la matrice di Hurwitz riesce:

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Poiché

$$\hat{H}_1 = h_{11} = -1 \text{ e } \hat{H}_2 = \det H = 2$$

anche la condizione di Hurwitz conferma l'instabilità dell'origine.

³Si chiama *minore principale di Nord-Ovest* d'una matrice A quadrata di ordine n , il determinante di ogni sua sottomatrice quadrata A_k formata dall'intersezione delle prime k righe e k colonne di A : l'etichetta *NW* sta per *North-West* e richiama visivamente che si parte dall'angolo in alto a sinistra della matrice A .

Ora passiamo ad esempi “veri” in cui non siamo in grado di trovare così facilmente le soluzioni dell’equazione caratteristica.

Esempio 202 Consideriamo l’equazione

$$\lambda^3 + \frac{9}{2}\lambda^2 + 5\lambda + \frac{3}{2} = 0$$

Rinunciamo a cercarne le soluzioni e applichiamo la condizione di Hurwitz. Abbiamo:

$$H_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 9/2 & 3/2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 9/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Troviamo i suoi minori principali di NW:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= h_{11} = 9/2 \\ \hat{H}_2 &= \det \begin{bmatrix} 9/2 & 3/2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \frac{45}{2} - \frac{3}{2} = \frac{42}{2} \\ \hat{H}_3 &= \det H = 9/2 \det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 9/2 & 3/2 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 9/2 & 3/2 \end{bmatrix} = \frac{63}{2} \end{aligned}$$

Possiamo dunque affermare che tutte le radici hanno parte reale negativa (in effetti esse sono -1 , -0.5 e -3).

Esempio 203 Consideriamo l’equazione:

$$\lambda^4 + \frac{9}{2}\lambda^3 + 8\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$$

Non proviamo neanche a trovarne le soluzioni. Costruiamo l’associata matrice di Hurwitz:

$$H_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 9/2 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 9/2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo i suoi minori principali di NW:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= h_{11} = 9/2 \\ \hat{H}_2 &= \det \begin{bmatrix} 9/2 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = 29 \\ \hat{H}_3 &= \det \begin{bmatrix} 9/2 & 7 & 0 \\ 1 & 8 & 2 \\ 0 & 9/2 & 7 \end{bmatrix} = \frac{325}{2} \\ \hat{H}_4 &= \det H = 325 \end{aligned}$$

Possiamo dunque affermare che tutte le radici hanno parte reale negativa (in effetti esse sono $-1 \pm i$, -0.5 e -2).

Esempio 204 Consideriamo

$$\lambda^4 + \lambda^3 - 2\lambda^2 - 6\lambda - 4$$

Abbiamo

$$H_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

I suoi minori principali di NW sono:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= h_{11} = 1 \\ \hat{H}_2 &= \det \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 4 \\ \hat{H}_3 &= \det \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} = -20 \end{aligned}$$

è inutile che calcoliamo l'ultimo: la presenza di $\hat{H}_3 < 0$ ci fa escludere la negatività della parte reale di tutte le radici. Almeno una radice ha parte reale positiva o nulla e ciò basta.

Concludiamo con un'interessante:

Osservazione 205 I due criteri sopra illustrati riguardano direttamente l'equazione caratteristica che, come abbiamo visto a pag. 118, è associabile anche a equazioni lineari autonome di ordine n :

$$x(t+n) + a_{n-1}x(t+n-1) + \dots + a_1x(t+1) + a_0x(t) = 0$$

e^4

$$x^{(n)}(t) + \alpha_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_{n-1} x'(t) + \alpha_n x(t) = 0$$

entrambe dotate dell'equilibrio $x^* = 0$ (cfr. pag. 7). Ebbene possiamo utilizzare le condizioni di Cohn-Schur e di Hurwitz anche per questo caso: se sono soddisfatte allora $x^* = 0$ è un attrattore globale.

8.4 Linearizzazione e stabilità locale d'un equilibrio

Consideriamo un sistema dinamico autonomo, non lineare, con legge del moto:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{x}'(t) \end{array} \right\} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)] \quad (8.11)$$

Supponiamo che il sistema abbia (almeno) un punto d'equilibrio \mathbf{x}^* .

Come tentare di diagnosticarne la natura dell'equilibrio?

Si può, localmente, approssimare il sistema assegnato con un sistema lineare: il sistema linearizzato ci può fornire poi importanti informazioni sulla stabilità di \mathbf{x}^* . Vediamo come.

Supponiamo che \mathbf{f} sia differenziabile con continuità nel suo dominio⁵. Supponiamo che la matrice quadrata di ordine n :

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}^*) \\ \nabla f_2(\mathbf{x}^*) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\mathbf{x}^*) \end{bmatrix}$$

⁴Per comodità di adattamento alla condizione di Hurwitz, abbiamo ribattezzato i coefficienti nel caso continuo.

⁵L'applicazione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile con continuità se lo sono tutte le sue componenti $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

detta *matrice jacobiana* di \mathbf{f} in \mathbf{x}^* sia non singolare:

$$\det \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*) \neq 0$$

Possiamo, sfruttando la differenziabilità al solito modo, scrivere \mathbf{f} in un intorno V sufficientemente piccolo di \mathbf{x}^* come:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \mathbf{o} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|$$

La funzione $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

è lineare affine e se, come supposto, $\det \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*) \neq 0$ risulta:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \neq 0 \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$$

Ciò ci garantisce, almeno in un intorno $V(\mathbf{x}^*)$, che vi sia un solo equilibrio e che la funzione \mathbf{f} sia ben approssimabile da:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

Associamo al sistema (8.11) il sistema “linearizzato” definito da \mathbf{g} :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}(t+1) \\ \mathbf{x}'(t) \end{array} \right\} = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*] \quad (8.12)$$

ovvero, rammentando che:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \begin{cases} \mathbf{x}^* & \text{nel caso discreto} \\ \mathbf{0} & \text{nel caso continuo} \end{cases}$$

nel caso discreto otteniamo il sistema:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}^* + \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*]$$

e nel caso continuo:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*]$$

Ponendo $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*$, riscriviamo il sistema linearizzato (8.12) in funzione delle nuove variabili di stato $\mathbf{y}(t)$:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{y}(t+1) \\ \mathbf{y}'(t) \end{array} \right\} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)\mathbf{y}(t) \quad (8.13)$$

Si tratta di sistemi dinamici lineari omogenei con matrice dei coefficienti $A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)$ costante e non singolare.

Come sappiamo, tali sistemi hanno sempre un solo punto d'equilibrio $\mathbf{y}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ e abbiamo già acquisito tutti gli strumenti necessari per studiarne la stabilità.

Non sorprende il fatto che si possa stabilire un forte legame tra il sistema autonomo non lineare e la sua approssimazione lineare.

Si può infatti dimostrare un importante risultato che ci permette asserzioni sulla stabilità locale d'un equilibrio \mathbf{x}^* della (8.11), sulla base della stabilità dell'origine $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ per il sistema linearizzato (8.13).

Teorema 206 *Condizione sufficiente affinché il punto di equilibrio \mathbf{x}^* del sistema non lineare (8.11) sia (almeno) localmente asintoticamente stabile è che $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ sia (globalmente) asintoticamente stabile per l'associato sistema linearizzato (8.13).*

Omettiamo la dimostrazione⁶, ma sottolineiamo quanto il risultato sia naturale: in piccolo un'applicazione non lineare differenziabile assomiglia terribilmente a un'applicazione lineare con matrice dei coefficienti la jacobiana. Se quest'ultima ha origine globalmente asintoticamente stabile, ci si deve aspettare che, almeno localmente, lo sia anche nel caso non lineare.

Abbiamo un altro utile risultato:

Proposizione 207 *Se esiste un autovalore di $A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)$ con modulo maggiore di 1 allora l'equilibrio \mathbf{x}^* è instabile per il sistema discreto (8.11). Analogamente nel caso continuo: se esiste un autovalore di $A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)$ con parte reale positiva allora l'equilibrio \mathbf{x}^* è instabile per il sistema continuo (8.11).*

Tutto ciò è consacrato in un:

Principio (cfr. [10], p. 137) *In prossimità d'un punto d'equilibrio per un sistema dinamico autonomo (8.11), le traiettorie del sistema hanno comportamento analogo alle traiettorie del sistema linearizzato (8.12).*

Questo “Principio” non merita il grado di **Teorema**, fondamentalmente per due motivi:

- il significato della locuzione “hanno comportamento analogo” non è precisabile perché assume significati diversi a seconda della natura del punto d'equilibrio in discorso;
- il Principio vale quando la matrice A ha “profilo” ben definito: ossia, nel caso di tempo continuo, le parti reali degli autovalori non sono mai nulle o, nel caso con tempo discreto, i moduli degli autovalori non sono unitari⁷.

Vediamo un paio di casi pratici.

Esempio 208 *Consideriamo il sistema con tempo continuo autonomo:*

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + \alpha x_2 - x_1^2 + x_2^3 \\ e^{x_1} - x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

in cui α è un parametro reale non negativo. Esso ammette manifestamente $\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ come equilibrio (qualunque sia il valore di α).

La matrice jacobiana del secondo membro in \mathbf{x} è:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 - 2x_1 & \alpha + 3x_2^2 \\ e^{x_1} & -1 \end{bmatrix}$$

Nell'equilibrio si riduce a:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

I suoi autovalori sono:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -\sqrt{\alpha} - 1 \\ \sqrt{\alpha} - 1 \end{cases}$$

Il primo è negativo $\forall \alpha \geq 0$, il secondo è negativo $\forall \alpha \in [0; 1)$, positivo $\forall \alpha > 1$ e riesce nullo se $\alpha = 1$. Possiamo riassumere in una semplice tabella le conclusioni cui il Principio ci consente di giungere:

α	segni dei λ	stab. di \mathbf{x}^* per $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$
$0 \leq \alpha < 1$	$-, -$	asintoticamente localmente stabile
$\alpha = 1$	$-, 0$	nulla si può dedurre
$\alpha > 1$	$-, +$	instabile

⁶Essa è piuttosto tecnica. Per il caso continuo, gl'interessati possono vedere [10], p. 132 e seguenti.

⁷Si parla, in tali casi speciali, di equilibri iperbolici.

Esempio 209 Consideriamo l'analogo caso discreto:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1(t) + \alpha x_2(t) - x_1^2(t) + x_2^3(t) \\ e^{x_1(t)} - x_2(t) - 1 \end{bmatrix}$$

che, di nuovo, ammette $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ come equilibrio. In esso α è un parametro non negativo. La matrice jacobiana del secondo membro in \mathbf{x} è:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 - 2x_1 & \alpha + 3x_2^2 \\ e^{x_1} & -1 \end{bmatrix}$$

Nell'equilibrio si riduce a:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

I suoi autovalori sono:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -\sqrt{\alpha} - 1 \\ \sqrt{\alpha} - 1 \end{cases}$$

È chiaro che l'equilibrio è fatalmente instabile se $\alpha > 0$, mentre nulla può dirsi via linearizzazione per $\alpha = 0$ perché, in tal caso il modulo d'ambo gli autovalori è 1.

8.5 Tecniche qualitative

Vediamo in questa sezione come, attraverso alcune tecniche grafiche, sia possibile dedurre, direttamente dalla legge del moto, non poche proprietà delle traiettorie d'un sistema dinamico di dimensione 1.

Sino ad ora abbiamo usato i grafici per rappresentare le traiettorie nel *piano delle soluzioni* (t, x) .

Ora moviamo in un altro piano, ove non rappresentiamo le soluzioni in funzione del tempo ma solo il meccanismo le genera, ossia la legge del moto f .

Ma dobbiamo cambiare radicalmente prospettiva: ci serve imparare a leggere una legge del moto nel tempo, senz'aver bisogno di vedere il tempo. E il sugo sta proprio qua.

Abbiamo preannunciato che l'approccio valeva sia con tempo continuo, sia con tempo discreto. L'idea è la stessa, ma la sua formalizzazione dipende dal modo temporale con cui una legge del moto è proposta.

Diciamo subito che lavoriamo su sistemi dinamici particolari e, allo stesso tempo, molto interessanti, ovvero su sistemi autonomi del prim'ordine:

$$\left. \begin{matrix} x'(t) \\ x(t+1) \end{matrix} \right\} = f[x(t)]$$

Cominciamo col continuo.

8.5.1 Diagrammi di fase per sistemi con tempo continuo

Abbiamo un'equazione differenziale:

$$x'(t) = f[x(t)]$$

Costruiamo un diagramma cartesiano, ove, in ascissa troviamo lo stato corrente del sistema ($x(t)$ ossia x , per brevità), mentre in ordinata troviamo $x' = f(x)$.

Questo diagramma non ci dice come il sistema varia nel tempo, ma come esso varia in funzione dello stato.

Consideriamo un caso semplice e interessante:

$$x'(t) = x(t) - x^2(t) \quad (8.14)$$

Il diagramma di fase associato al sistema dinamico con quella legge del moto è:

La parabola è un primo esempio di *curva di fase*. Essa taglia l'asse x nei due punti $x^* = 0$ e $x^{**} = 1$. Essi sono i due punti d'equilibrio che il sistema ammette. Ci si convince facilmente della cosa scrivendo e risolvendo l'equazione d'equilibrio:

$$f(x) = x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1 - x) = 0 \Rightarrow x^* = 0 \text{ e } x^{**} = 1$$

Segue che le due funzioni $x(t) \equiv 0$ e $x(t) \equiv 1$ sono le sole soluzioni costanti dell'equazione differenziale. Un modo diverso di dire la stessa cosa è dire che:

$$\begin{aligned} x(0) = 0 &\Rightarrow x(t, 0) = 0 = x^* \forall t \\ x(0) = 1 &\Rightarrow x(t, 1) = 1 = x^{**} \forall t \end{aligned}$$

Consideriamo ora una differente condizione iniziale, per esempio $x(0) = -1$. Il grafico ci dice che partendo da lì, la velocità di spostamento del punto è negativa, perché, in $x_0 = -1$, l'ordinata della parabola è negativa⁸ e, quindi, col passare del tempo, il punto che rappresenta la posizione del sistema sull'asse x si sposterà verso sinistra: e lo farà sempre più velocemente perché, muovendo verso sinistra il modulo della velocità cresce (l'ordinata della parabola va... sempre più giù). Ne segue che per la soluzione $x(t)$, caratterizzata dalla condizione iniziale indicata, si avrà:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$$

Supponiamo ora di partire da un punto che stia tra i due equilibri, per esempio: $x(0) = 1/2$. In $1/2$ l'ordinata alla parabola è positiva e quindi il punto che rappresenta il sistema si sposterà verso destra, sempre più lentamente perché, l'ordinata alla parabola, pur restando sempre positiva, è però sempre minore. Per la soluzione caratterizzata da $x(0) = 1/2$, possiamo allora asserire che:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1^-$$

Se scegliessimo infine, come punto di partenza un punto alla destra di 1, ritroveremmo velocità negativa e concluderemmo che se $x(0) > 1$ allora:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1^+$$

Segue allora che $x^* = 0$ è un punto d'equilibrio instabile, un repulsore, mentre $x^{**} = 1$ è localmente asintoticamente stabile. Il suo bacino d'attrazione è l'intervallo $B = (0; +\infty)$, nel senso che per ogni soluzione $x(t)$, che parte da $x(0) \in B$, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1$$

⁸Infatti, usando la legge del moto, si trova $f(-1) = -1 - (-1)^2 = -2$.

Per contro, notiamo che per ogni soluzione $x(t)$, con $x(0) \in (-\infty; 0)$, si ha:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$$

Possiamo rappresentare graficamente le nostre conclusioni evidenziando con delle frecce orientate verso destra gli andamenti crescenti delle soluzioni e con delle frecce orientate verso sinistra gli andamenti decrescenti delle soluzioni:

Osservazione 210 *Se riflettiamo sulle informazioni che abbiamo usato per giungere a queste conclusioni, ci accorgiamo che vi si giunge indipendentemente dall'equazione (8.14): bastano le proprietà (qualitative) della curva di fase. Se noi la deformassimo, senza muovere gli equilibri e senza modificare il suo segno (sopra o sotto l'asse delle ascisse), le conclusioni sarebbero le medesime. Una possibile deformazione potrebbe essere:*

$$x'(t) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|$$

Per essa il diagramma di fase è:

Se studiassimo il comportamento asintotico delle soluzioni in questo nuovo caso, giungeremmo esattamente alle stesse conclusioni.

Esercizio 211 *Suggeriamo a chi legge di diagnosticare la natura dei tre punti d'equilibrio del sistema con la legge del moto:*

$$x'(t) = f[x(t)]$$

con diagramma di fase:

Non riveliamo la funzione f . Le sue proprietà qualitative rilevanti sono contenute nel diagramma di fase. Chi legge dovrebbe convincersi facilmente che gli equilibri 1 e 3 sono instabili, mentre 2 è localmente asintoticamente stabile.

8.5.2 Diagrammi di fase con tempo discreto

Consideriamo la legge del moto:

$$x(t+1) = f[x(t)]$$

Il relativo diagramma di fase non è logicamente dissimile dal diagramma di fase della precedente sottosezione.

Mettiamo in ascissa lo stato corrente $x(t)$, in ordinata il successivo $x(t+1)$, la *curva di fase*, cioè il grafico di f “trasforma” lo stato d’oggi nello stato di domani. Una soluzione d’equilibrio $x(t) \equiv x^*$, chiede che:

$$x^* = f(x^*)$$

Ciò è molto interessante: cerchiamo punti con coordinate uguali (x^*, x^*) . L’uguaglianza qui sopra ci dice: “le leggi del moto vanno rispettate”, mentre l’uguaglianza tra “oggi” e “domani” ci dice che siamo fermi, cioè in equilibrio. I punti che rilevano sono in comune tra la curva di fase e la retta più amata del mondo (la bisettrice I-III quadrante, di solito presentata come $y = x$).

Consideriamo un esempio.

Esempio 212 *La legge del moto sia:*

$$x(t+1) = 5x(t) - x^2(t)$$

Ecco il diagramma di fase:

Da esso emergono due equilibri, il banale $x^* = 0$ e il meno banale $x^{**} = 4$.

Imparato a “vedere” gli equilibri, dobbiamo imparare a diagnosticarne eventuali proprietà di stabilità. Non occorre inventare nulla di nuovo, perché abbiamo già visto un risultato cruciale. Si tratta del principio visto sopra a pag. 147. Sia x^* un punto d’equilibrio:

$$x^* = f(x^*) \quad (8.15)$$

Linearizziamo la legge del moto in x^* :

$$f(x) = f(x^*) + (x - x^*) f'(x^*) + o(x - x^*)$$

onde, rammentando la (8.15):

$$f(x) \approx x^* + (x - x^*) f'(x^*) = x f'(x^*) + b$$

avendo posto, per brevità, $b = x^* - x^* f'(x^*)$. La “matrice dei coefficienti” di questo sistema lineare omogeneo approssimante:

$$x(t+1) = f'(x^*) x(t) + b$$

è $[f'(x^*)]$, con spettro banale $\lambda = f'(x^*)$. Sappiamo che se $|\lambda| < 1$, allora il punto d’equilibrio x^* è almeno localmente asintoticamente stabile.

Riprendiamo l’esempio precedente e calcoliamo la derivata di f in ciascuno dei due equilibri.

Esempio 213 Si ha:

$$f(x) = 5x - x^2$$

I due equilibri sono:

$$x^* = 0 \text{ e } x^{**} = 4$$

Poiché:

$$f'(x) = 5 - 2x$$

troviamo:

$$f'(x^*) = 5 \text{ e } f'(x^{**}) = -3$$

Possiamo dedurre nessuno dei due equilibri è stabile.

Esempio 214 Passiamo a questo altro caso:

$$x(t+1) = 5 \ln x(t)$$

Ecco il diagramma di fase:

Vi sono due punti d'equilibrio, che possono esser determinati solo numericamente risolvendo l'equazione:

$$x = 5 \ln x$$

Si trova:

$$x^* \approx 1.296 \text{ e } x^{**} \approx 12.713$$

Dal diagramma di fase si vede che in x^* la pendenza della curva di fase è > 1 , mentre in x^{**} è tra 0 e 1 (si tenga conto che la pendenza della retta degli equilibri è 1). Possiamo allora asserire che x^{**} è localmente asintoticamente stabile. La presenza d'un altro equilibrio, ci consente di escluderne la eventuale stabilità anche in senso globale. Deduciamo anche che x^* è instabile.

Nei due esempi precedenti abbiamo in realtà utilizzato anche tecniche analitiche e non solo grafiche. Vediamo ora come sia possibile condurre un'indagine principalmente per via grafica.

8.5.3 “Ragnatele” e “scalinate”

Impariamo ora una semplice tecnica grafica per la diagnosi della stabilità d'un equilibrio. Essa è molto interessante perché consente talora diagnosi anche quando non si conosce compiutamente la legge del moto: è il caso, frequente in Economia, d'informazioni solo qualitative⁹ su f .

La tecnica consiste nell'arricchire il diagramma di fase col disegno di qualche traiettoria. La meccanica del procedimento è semplice:

1. Si sceglie un punto sull'asse delle ascisse, da cui la traiettoria parte. È $x(0)$.
2. Si trova poi graficamente $x(1)$, muovendosi verticalmente da $x(0)$ e “cercando” la curva di fase.
3. L'ordinata così individuata è $f[x(0)] = x(1)$.
4. Da lì ci si sposta in orizzontale “cercando” la retta degli equilibri.
5. Trovata la retta, ci si muove verticalmente “cercando” l'asse delle ascisse, sul quale si riporta così $x(1)$.
6. A questo punto, come può capitare quando si giuoca a tombola, si ritorna al passo 2, stavolta per cercare, $x(2)$.
7. E così via.

⁹Per esempio, sappiamo che f cresce ed è concava. Tutto lì.

Vediamo qualche esempio.

Esempio 215 *Sia:*

$$x(t+1) = \frac{1}{2}x(t)$$

con unico equilibrio $x^ = 0$. Se la condizione iniziale fosse $x(0) = 5$ si avrebbe il seguente diagramma*

Se fosse $x(0) = -7$ si avremmo:

Qualunque fosse il punto di partenza prescelto a destra o a sinistra dell'equilibrio, otterremmo una "scalinatella" d'uno dei due tipi indicati. Ciò segnala che l'origine è un attrattore globale cioè globalmente asintoticamente stabile.

Esempio 216 *Consideriamo un'altra legge del moto:*

$$x(t+1) = 2x(t)$$

Anche in questo caso v'è l'unico equilibrio:

$$x^* = 0$$

Il diagramma seguente ci rivela che, in questo caso l'origine è instabile:

Se partiamo di poco a destra dell'equilibrio: $x(0) = 0.2$ la soluzione scappa verso $+\infty$. Partendo a sinistra dell'origine, per esempio da $x(0) = 0.5$, s'ottiene una "scalinatella" che scappa verso $-\infty$.

Vediamo che cos'accade quando la pendenza della curva di fase è negativa.

Esempio 217 Si abbia ora:

$$x(t+1) = -\frac{1}{2}x(t)$$

Al solito l'equilibrio è nell'origine. Ecco che cosa troviamo con $x(0) = 7$:

e abbiamo una "ragnatela", che s'avvolge intorno all'origine. Ci si convince facilmente che l'origine è un attrattore globale. Invitiamo il lettore a provare che, per esempio, se la legge del moto fosse $f(x) = -2x$, anche partendo presso l'origine s'otterrebbe una "ragnatela" esplosiva.

Esempio 218 Il cosiddetto "modello della ragnatela" (cobweb model) è un classico esempio d'uno schema simile al precedente e cui può essere ricondotto. Siamo in un mercato ove la quantità domandata d dipende dal prezzo p :

$$d(p) = \frac{4000}{p^{7/5}}$$

Pure la quantità offerta s dipende dal prezzo:

$$s(p) = 400p^{9/5}$$

Il prezzo d'equilibrio p^* è la soluzione dell'equazione:

$$d(p) = s(p)$$

ossia:

$$\frac{4000}{p^{7/5}} = 400p^{9/5} \Rightarrow 10 = p^{16/5}$$

onde:

$$p^* = 10^{5/16} \approx 2.0535$$

Supponiamo di partire da un prezzo iniziale $p(0)$. Esso determina la quantità domandata 1 periodo più tardi:

$$d[p(0)]$$

Perché sia offerta tale quantità è necessario il prezzo $p(1)$ soddisfaccia l'equazione:

$$d[p(0)] = s[p(1)] \Rightarrow p(1) = s^{-1}(d[p(0)])$$

Al nuovo prezzo $p(1)$ s'aggiusta la domanda e così via... Abbiamo il sistema dinamico con legge del moto:

$$p(t+1) = f[p(t)]$$

avendo posto:

$$f(\cdot) = s^{-1}(d[\cdot])$$

Nel nostro caso:

$$p(t+1) = \frac{10^{5/9}}{[p(t)]^{7/9}}$$

Quindi partendo, per esempio, da $p(0) = 1$, otteniamo la sequenza

$$\Rightarrow p(1) = \frac{10^{5/9}}{[p(0)]^{7/9}} = 10^{5/9} \approx 3.593\,813\,66$$

$$\Rightarrow p(2) = \frac{10^{5/9}}{[p(1)]^{7/9}} = 10^{\frac{10}{81}} \approx 1.328\,791\,34$$

$$\Rightarrow p(3) = \frac{10^{5/9}}{\left[10^{\frac{10}{81}}\right]^{7/9}} = 10^{\frac{335}{729}} \approx 2.880\,935\,98$$

$$\Rightarrow p(4) = \frac{10^{5/9}}{\left[10^{\frac{335}{729}}\right]^{7/9}} = 10^{\frac{1300}{6561}} \approx 1.578\,121\,83$$

$$\Rightarrow p(5) = \frac{10^{5/9}}{\left[10^{\frac{1300}{6561}}\right]^{7/9}} = 10^{\frac{23\,705}{59\,049}} \approx 2.520\,265\,28$$

$$\Rightarrow p(6) = \frac{10^{5/9}}{\left[10^{\frac{23\,705}{59\,049}}\right]^{7/9}} = 10^{\frac{129\,310}{531\,441}} \approx 1.751\,134\,80$$

$$\Rightarrow p(7) = \frac{10^{5/9}}{\left[10^{\frac{129\,310}{531\,441}}\right]^{7/9}} = 10^{\frac{1752\,035}{4782\,969}} \approx 2.324\,379\,28$$

...

Vediamo ora geometricamente il processo d'aggiustamento, direttamente in un diagramma ove sono rappresentate sia la funzione di domanda sia la funzione d'offerta:

Vediamo infine un esempio che mostra come un attrattore x^* possa essere un equilibrio instabile:

Esempio 219 Consideriamo un sistema dinamico con legge del moto:

$$x(t+1) = f[x(t)]$$

con un unico punto d'equilibrio $x^* = 0$ e con $f'(0) = 2$. Quest'equilibrio è instabile. Mostriamo, usando la tecnica del diagramma di fase che, nonostante ciò, esso è un attrattore (addirittura) globale. Specificiamo f :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{per } x \in [-1; 1] \\ 0 & \text{per } x \notin [-1; 1] \end{cases}$$

Corrediamo la curva di fase con le due traiettorie che partono da $x(0) = 0.3$ e da $x(0) = -0.1$:

Si vede graficamente che se il sistema parte da $|x(0)| > 1$, per ogni t successivo la variabile di stato è nulla. Se parte da $x(0) \in [-1; 1] \setminus \{0\}$, la traiettoria corrispondente inizialmente si allontana ma, dopo un certo numero di passi va comunque a 0: ogni soluzione converge a $x^* = 0$ (in un numero finito di passi) nonostante $f'(x^*) > 1$.

8.5.4 Benvenuti nel mondo del caos!

Il comportamento di sistemi dinamici discreti è un tema interessante, perché riserva sorprese a buon mercato: leggi del moto apparentemente simili e semplici possono generare traiettorie, non solo diversissime, ma anche sorprendenti. Tutto ciò non è mera curiosità matematica, ma ha implicazioni

inattese per la teoria economica, come testimonia, per esempio, il celebre articolo [2] ne provò la rilevanza per la teoria economica.

Consideriamo un sistema con legge del moto:

$$x(t+1) = kx(t)[1 - x(t)]$$

con $k > 0$. Non è altro che il modello logistico che già abbiamo incontrato. Il diagramma di fase, con $k = 4$, è:

Risolvendo l'equazione:

$$x = 4(x - x^2)$$

si trovano i due equilibri:

$$x^* = 0 \text{ e } x^{**} = 0.75$$

Le pendenze della curva di fase in essi sono, rispettivamente $f'(0) = 4$ e $f'(0.75) = -2$, che non danno rassicurazioni di stabilità.

Consideriamo un sistema con legge del moto affatto analoga, ma con un diverso valore di k . Prendiamo $k = 1.25$. Il diagramma di fase, con $k = 1.25$, diviene:

I punti d'equilibrio sono due. Risolvono:

$$x = 1.25(x - x^2)$$

onde:

$$x^* = 0 \text{ e } x^{**} = 0.2$$

La pendenza della curva di fase in x^{**} è manifestamente positiva e minore di 1. Tutto ciò lascia intuire che la legge del moto può generare traiettorie molto diverse al variare di k .

Useremo la tecnica dei diagrammi di fase per mostrare come variazioni in k possano determinare il passaggio da comportamenti regolari a comportamenti altamente irregolari detti appunto *caotici*.

Abbiamo già tutto in mano.

Esempio 220 *Sia:*

$$x(t+1) = 1.25x(t)[1 - x(t)]$$

Costruiamo il diagramma di fase e consideriamo due punti di partenza, uno tra 0 e 0.2, l'altro oltre 0.2. Partendo da 0.1 e da 0.3 si ottengono le traiettorie:

*È evidente la locale stabilità dell'equilibrio $x^{**} = 0.2$.*

Passiamo ora alla stessa legge del moto, ma, stavolta, con $k = 4$. Vediamo cosa succede se partiamo da $x(0) = 0.1$

L'andamento è completamente caotico, come s'evince anche dal diagramma seguente che fornisce la variabile di stato in funzione del tempo:

Chiudiamo osservando che nei diagrammi di fase discreti, diversamente dal caso continuo, è importante non solo il valore di f ma anche la sua pendenza: per tale motivo è opportuno, se si lavora manualmente, accostare al diagramma di fase anche il calcolo di f' .

9

Introduzione al controllo ottimo

Ci occuperemo nelle due sottosezioni successive di problemi naturali in Politica economica. L'idea non è difficile. Hai un sistema descritto dal vettore di stato $\mathbf{x}(t)$, che parte da $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$. La legge evolutiva del sistema ti consente d'intervenire su esso, scegliendo nel tempo, scadenza per scadenza, m variabili di controllo:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

Convienne allora strutturare la legge del moto come:

$$\mathbf{x}(t+1) = f[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$$

Matematicamente non cambia nulla, semplicemente s'esplicita che la dipendenza dal tempo, non filtrata dallo stato del sistema, passa attraverso la scelta delle variabili di controllo $\mathbf{u}(t)$.

Interessano due tipi di problemi:

- **Controllabilità:** scelgo un vettore *target* \mathbf{x}^* e mi chiedo se esista una politica $\mathbf{u}(t)$ che porta colà il sistema, nel rispetto del punto di partenza e della legge del moto.
- **Controllo ottimo:** scelgo un vettore *target* \mathbf{x}^* e mi chiedo se esista una politica $\mathbf{u}(t)$ che porta colà il sistema, nel rispetto del punto di partenza e della legge del moto e che minimizza (massimizza) i costi (i profitti) della faccenda

Una risposta esauriente richiederebbe ben più dello spazio che abbiamo.
Forniremo:

- Un principio importante per la *controllabilità* per sistemi lineari con tempo discreto e matrice dei coefficienti costante;
- Un'idea di come il problema di controllo ottimo si dipani con tempo continuo.

9.1 Controllabilità d'un sistema lineare con tempo discreto

Consideriamo la legge del moto:

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

ove A è una matrice quadrata d'ordine n . La matrice B , di tipo (n, m) scarica sulle n componenti del vettore di stato le m scelte di politica economica identificate da \mathbf{u} .

Il pregio del modello consiste nell'avere posto in luce chiaramente che le scelte \mathbf{u} finiscono per poter influenzare ogni componente del vettore di stato, attraverso la matrice B di dimensioni (n, m) .

La domanda è: dati $\mathbf{x}(0)$, punto di partenza e $\mathbf{x}(N)$, punto che ci piacerebbe raggiungere alla data N , qualsiasi essa sia, esiste una politica

$$\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1)$$

che consente d'ottenere il risultato?

Sappiamo che:

$$\mathbf{x}(N) = A^N \mathbf{x}(0) + \sum_{s=1}^N A^{N-s} B \mathbf{u}(s-1)$$

Possiamo allora ricondurre il problema alla ricerca di soluzioni per il sistema lineare:

$$G_N \mathbf{u}^N = \mathbf{x}(N) - A^N \mathbf{x}(0) \quad (9.1)$$

ove il vettore \mathbf{u}^N , di dimensione mN , raccoglie le *policy*:

$$\mathbf{u}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \dots \\ \mathbf{u}(N-1) \end{bmatrix}$$

e la matrice G_N , di tipo (n, mN) , riesce:

$$G_N = [A^{N-1}B | A^{N-2}B | \dots | AB | B]$$

L'idea di poter condurre il sistema dove vogliamo è basata sul fatto che le scelte di *policy*

$$\mathbf{u}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \dots \\ \mathbf{u}(N-1) \end{bmatrix}$$

sono virtualmente espandibili a piacere: se non riesco quest'anno, ce la faccio il prossimo.

Quest'idea, del tutto intuitiva, non è però del tutto corretta in virtù del Teorema di Cayley-Hamilton.

Ci serve qualche premessa.

Consideriamo la famiglia di matrici

$$I, A, A^2, \dots, A^t, A^{t+1}, \dots$$

costituita dalle potenze d'esponenti $t = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$ d'una stessa matrice quadrata d'ordine n .

Ogni quadrata A può esser vista come un vettore colonna di dimensione n^2 . Basta "affettarla" per colonne e impilare le colonne. Possiamo chiamare quest'operazione *vettorizzazione* di A . Se:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Possiamo porre:

$$\text{vec}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Per esempio:

$$\text{vec} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

L'insieme $\mathbb{M}(n, n)$ delle matrici quadrate di ordine n è uno spazio vettoriale che si dice *isomorfo* a \mathbb{R}^{n^2} . Nel seguito, non staremo più a precisare se una matrice è stata vettorizzata o meno.

Potremmo pensare di prendere in questo spazio vettoriale le n matrici:

$$I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$$

che sono le prime n potenze naturali di A . L'insieme di tutte le loro combinazioni lineari:

$$\{\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1}\} \text{ con } \alpha_s \in \mathbb{R} \text{ per } s = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

è un sottospazio vettoriale proprio di \mathbb{R}^{n^2} . La sua dimensione non può eccedere n perché l'abbiamo costruito con n generatori.

Se arricchissimo il sistema di generatori indicato con A^n , possiamo sperare di far aumentare la dimensione di tale sottospazio?

La risposta negativa è fornita dal seguente:

Teorema 221 (Cayley-Hamilton) – Data una matrice quadrata A , d'ordine n , con equazione caratteristica:

$$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$$

per essa vale:

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0I = O$$

ove $O \in \mathbb{M}(n, n)$ è la matrice nulla.

Detto in altri termini, il Teorema di Cayley-Hamilton afferma che la potenza n -esima di una matrice quadrata A di ordine n è sempre scrivibile come combinazione lineare delle sue potenze di ordine inferiore $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$A^n = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$$

con coefficienti $\alpha_k = -c_k$ determinati dalla sua equazione caratteristica. A ciò consegue che ogni potenza $m > n$ dipende linearmente dalle prime n potenze.

Il teorema di Cayley-Hamilton ci dice, in altri termini, che possiamo riuscire a controllare il sistema, ma solo entro un certo orizzonte, sennò ciccia.

Tale orizzonte non è altro che la dimensione n del sistema dinamico. Concretizziamo:

- un sistema unidimensionale si controlla in 1 periodo, sennò niente;
- un sistema bidimensionale si controlla in 2 periodi, sennò niente;
- ...
- un sistema n -dimensionale si controlla in n periodi, sennò niente.

Definizione 222 *La matrice*

$$G_N = [A^{N-1}B | A^{N-2}B | \dots | AB | B]$$

raccoglie i coefficienti delle variabili di controllo. Il teorema di Cayley-Hamilton ci dice che A^n è combinazione lineare delle potenze di A con esponente minore. Pertanto interessa solo la c.d. matrice di controllabilità:

$$G_n = [A^{n-1}B | A^{n-2}B | \dots | AB | B]$$

Definizione 223 *Diciamo che il sistema dinamico*

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (9.2)$$

è controllabile se per ogni posizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ esiste una sequenza di vettori

$$\mathbf{u}^*(0), \mathbf{u}^*(1), \dots, \mathbf{u}^*(n-1)$$

tale che

$$\mathbf{x}(n) = A^n \mathbf{x}(0) + \sum_{s=1}^n A^{n-s} B \mathbf{u}^*(s-1) = \mathbf{x}^*$$

per ogni scelta della posizione d'arrivo \mathbf{x}^* .

Possiamo allora enunciare il seguente:

Teorema 224 *Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema dinamico lineare, con coefficienti costanti e legge del moto:*

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

sia controllabile è che il rango della matrice di controllabilità:

$$G_n = [A^{n-1}B | A^{n-2}B | \dots | AB | B]$$

sia n .

Dimostrazione. Il vettore $\mathbf{x}(N) - A^N \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ nella (9.1) è un vettore arbitrario in \mathbb{R}^n , per l'arbitrarietà di $\mathbf{x}(N)$. Il solo modo per generare tutto \mathbb{R}^n , combinando linearmente la colonne di $G_N = [A^{N-1}B | A^{N-2}B | \dots | AB | B]$. Il teorema di Cayley-Hamilton ci dice che l'espansione del numero N di passi di controllo d'un sistema, non è a piacere: possiamo generare vettori linearmente indipendenti fino a potenze di A con esponente $n-1$. Se G_n ha rango n e, solo in tal caso, il sistema: (9.2) garantisce l'esistenza di controlli che ti portano dove vuoi in n passi. ■

Esempio 225 *Supponiamo che la legge del moto sia:*

$$\mathbf{x}(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

con A la matrice dei coefficienti che descrive la componente endogena dell'evoluzione e B , la matrice che trasferisce sulle variabili di stato l'effetto delle variabili di controllo $u_1(t)$ e $u_2(t)$. Il sistema dinamico ha $n = 3$ variabili di stato, le componenti di \mathbf{x} , e 2 variabili di controllo¹ $u_1(t), u_2(t)$. La matrice di controllabilità G_3 riesce:

$$G_3 = [A^2B | AB | B]$$

¹Nell'intimità sono frequentemente chiamate "i controlli".

Poiché:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

si ha:

$$A^2 B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

essendo poi:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

otteniamo:

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ce ne interessa il rango. Tre colonne sono uguali, quindi possiamo indagare:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

due righe sono proporzionali, quindi possiamo indagare:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango $2 < 3$. Questo sistema **non** è controllabile, nonostante siano a disposizione ben $2 \times 3 = 6$ “controlli”.

9.2 Calcolo delle variazioni

Un vettore di \mathbb{R}^n può essere visto come un caso speciale di funzione del tempo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Possiamo pensare alla sue componenti come valori d’una variabile di stato alla data $1, 2, \dots, n$. Moviamoci ora più in generale. Abbiamo un intervallo $[0, T]$ e una funzione $C(t)$ su esso definita. Potrebbe essere l’intensità di consumo in t . Interessa cercare C che massimizza:

$$\int_0^T U[C(t)] dt$$

Il dilemma che, istante per istante, un pianificatore deve risolvere è quanto del prodotto istantaneo allocare al consumo e quanto all’investimento. Sia $Y(t)dt$ quanto prodotto tra t e $t+dt$, a meno di $o(dt)$. Tale prodotto dipende dal capitale $K(t)$, all’epoca investito:

$$Y(t) = F[K(t)]$$

Il consumo tra t e $t + dt$ è allora, a meno dei soliti $o(dt)$:

$$(F[K(t)] - K'(t)) dt$$

Il problema che c'interessa è allora:

$$\max_K \int_0^T U[F[K(t)] - K'(t)] dt, \text{ con } K(0) \text{ dato e } K(t) \geq 0 \quad (9.3)$$

La struttura del problema è allora:

$$\max_x \int_0^T f[x(t), x'(t), t] dt$$

Lavorando con funzioni di una o più variabili, abbiamo appreso quanto condizioni locali come:

$$f'(x) = 0 \text{ o, più in grande, } \nabla f(x) = \mathbf{0}$$

ci abbiano date molte soddisfazioni.

Sono le *condizioni di stazionarietà standard*.

Esiste qualcosa di simile per il problema (9.3)? La risposta è affermativa ed è nota come *equazione d'Eulero*². E' un'equazione differenziale, che generalmente riesce di second'ordine:

$$f'_x = \frac{d}{dt} f'_{x'} \quad (9.4)$$

Vediamo un esempio. È una leggera generalizzazione d'un esempio in [11], p. 21-22.

Esempio 226 Consideriamo il problema:

$$\max_x \int_0^T \left\{ [x'(t)]^2 + \alpha t x(t) \right\} dt$$

con $\alpha > 0$. Le condizioni al contorno sono $x(0) = 1$ e $x(T) = 2$. In questo caso:

$$f(x, x', t) = x'^2 + \alpha t x$$

Il primo membro dell'equazione d'Eulero riesce:

$$f'_x = \alpha t$$

Passiamo al secondo membro. Ci serve subito:

$$f'_{x'} = 2x'$$

Troviamo poi:

$$\frac{d}{dt} f'_{x'} = 2x''$$

L'equazione d'Eulero riesce allora:

$$\alpha t = 2x''$$

ossia:

$$x''(t) = \frac{\alpha}{2} t \quad (9.5)$$

²Matematico svizzero, Leonardo (Basilea 1707 - San Pietroburgo 1783).

Integrando troviamo:

$$x'(t) = \frac{\alpha}{4}t^2 + c_1$$

Re-integrando troviamo:

$$x(t) = \frac{\alpha}{12}t^3 + c_1t + c_2$$

ove c_1, c_2 sono costanti da determinare in modo che le condizioni al contorno siano soddisfatte. La condizione in 0 impone che:

$$x(0) = c_2 = 1$$

segue che $x(t)$ è del tipo:

$$x(t) = \frac{\alpha}{12}t^3 + t + c_2$$

Presone atto, passiamo alla condizione in T :

$$x(T) = \frac{\alpha}{6}T^3 + T + c_2 = 2$$

otteniamo:

$$c_2 = 2 - \left(\frac{\alpha}{6}T^3 + T\right)$$

abbiamo allora la funzione:

$$x(t) = \frac{\alpha}{12}t^3 + t + 2 - \left(\frac{\alpha}{6}T^3 + T\right)$$

che soddisfa le condizioni del prim'ordine. Il comodo risultato è determinato dal fatto che, in questo caso, la condizione d'Eulero s'è ridotta a un'equazione differenziale (9.5) facilmente trattabile.

Un vecchio adagio suggerisce che “l'appetito vien mangiando”. Abbiamo fin qui giocato nel cercare una traiettoria ottima $x(t)$. siamo in un mondo unidimensionale, facendo strame del tempo³.

Una naturale domanda è:

se $f'(x) = 0$ è la naturale condizione necessaria di prim'ordine per massimizzare $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

e

se $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ è la naturale condizione necessaria di prim'ordine per massimizzare $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

qual è la naturale generalizzazione della condizione unidimensionale di Eulero (9.4). Le cose vanno così, per:

$$\max_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}) = \int_0^T f[\mathbf{x}(t), t] dt = \int_0^T f[x_1(t), x_2(t) + \dots, x_n(t); t] dt, \text{ sub } \begin{cases} \mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \\ \mathbf{x}(T) = \mathbf{a} \end{cases}$$

è necessario il sistema d'equazioni:

$$\nabla_{\mathbf{x}} f = \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{x}'} f$$

Lo scriviamo, per chiarezza, nel caso $n = 2$:

$$\begin{cases} f'_{x_1} = D \left[\frac{\partial f}{\partial x'} \right] \\ f'_{x_2} = D \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \right] \end{cases}$$

³Questo far strame del tempo è alla biforcazione tra I. Newton e A. Einstein. Fino a Newton, il tempo t si contenta di far da orologio (magari svizzero). Da Einstein in poi t s'immischia, abbandona la neutrale svizzeritudine e si mescola con le coordinate “materiali”.

Per esempio, se

$$J(\mathbf{x}) = \int_0^T \left\{ [x_1(t)]^2 + [x_2(t)]^2 + [x_1'(t)]^2 \right\} dt$$

il sistema diviene:

$$\begin{cases} 2x_1 = 2x_1' \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$

onde, banalmente:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) = e^t \\ x_2 = 0 \end{bmatrix}$$

Osservazione 227 *Potrebbe essere questo il paragrafo principale. La condizione dello svizzero Eulero un po' spiazza: perché così intortugliata. Sfruttando l'interpretazione economica dei problemi, mostriamo come essa sia affatto naturale. La funzione f integranda nel funzionale obiettivo, nel caso più semplice dipende da dov'è il sistema x , dalla direzione evolutiva dello stesso x' e dal tempo. Pensiamo si tratti d'un piano di risparmio. abbiamo un € che possiamo giocarci investendolo oggi nel piano di risparmio. La funzione f è il "pagellino" delle nostre performance tra t e $t+h$. Se spostiamo lo stato da $x(t)$ a $x(t+h)$ l'incremento locale di f è, alla buona: $\frac{\partial}{\partial x} f(x, x', t) dx$. Nell'ottimo il risultato dev'essere lo stesso (sennò potremmo migliorare...)*

9.2.1 Controllo ottimo

Il calcolo delle variazioni è stato generalizzato a fine anni Cinquanta, del secolo scorso, da un gruppo di matematici, capitanati da L.S. Pontryagin [18], il cui nome è legato al c.d. "principio del massimo", che pone in luce una chiara connessione tra quanto abbiamo appreso sull'ottimizzazione statica vincolata (via il lagrangiano, per intenderci) e l'ottimizzazione dinamica.

Questo approccio è universalmente noto come "Teoria del Controllo Ottimo". Il nome è praticamente perfetto. Nel Calcolo delle Variazioni non è limpidissimo che cosa si sceglie per ottimizzare e che cosa consegue: l'equazione d'Eulero fornisce un pacco-dono incellofanato ove troviamo "magicamente" la soluzione ottima. Nella teoria del controllo ottimo, l'assetto è molto chiaro: le variabili di stato $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ evolvono secondo un sistema d'equazioni differenziali ordinarie:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$$

ma, nel secondo membro, compaiono m variabili di controllo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ vincolate in data t da $[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \in \Omega(t) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Interessa massimizzare:

$$J = \int_0^T g[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$$

con $\mathbf{x}(0)$ dato: $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$.

Strutturiamo il problema:

$$\max_{\mathbf{u}} J = \int_0^T g[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt$$

subordinatamente al sistema di vincoli

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \\ [\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \in \Omega(t) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Facciamo subito un esempio d'interesse economico.

Esempio 228 Consideriamo⁴ il modello unisetoriale di crescita alla Solow. L'intensità di consumo in t è $C(t)$. La funzione U è una banale funzione d'utilità. Il parametro r è noto in Economia come "saggio di preferenza intertemporale". Il funzionale da massimizzare è:

$$J = \int_0^T U[C(t)] e^{-rt} dt$$

e l'evoluzione della variabile di stato $K(t)$ (lo stock del capitale) è retta da:

$$K'(t) = F[K(t)] - C(t) - bK(t)$$

con F funzione di produzione con forza di lavoro costante e b saggio di deprezzamento del capitale. Il problema s'inscrive nello schema proposto sopra, con U la funzione identità, come:

$$\max_u J = \int_0^T e^{-rt} \{F[K(t)] - C[I(t)]\} dt \quad \text{sub} \quad \begin{cases} K'(t) = I(t) - bK(t) \\ K(0) = k_0 \\ K(T), I(t) \geq 0 \end{cases}$$

La tecnica risolutiva può pensarsi come una generalizzazione della tecnica lagrangiana di ricerca d'un massimo vincolato, nel quadro dei problemi d'ottimizzazione statica. Ci occupiamo solo delle condizioni necessarie.

Descriviamo la tecnica nel caso $m = n = 1$, ma ne esiste ovviamente anche la versione generale.

- Si costruisce l'analogo del lagrangiano, che si chiama *hamiltoniano*:

$$H[x(t), u(t), \lambda(t)] = g[x(t), u(t), t] + \lambda(t) f[x(t), u(t), t]$$

che ha davvero struttura simile a un lagrangiano:

$$\text{lagrangiano} = \text{funzione obiettivo} + \text{moltiplicatore} \times 2^\circ \text{ membro del vincolo}$$

Il moltiplicatore nel caso del lagrangiano è un numero, nel caso dell'hamiltoniano una funzione del tempo ($\lambda(t)$), usualmente detta *variabile ausiliaria*.

- Si scrive un sistema di 2 equazioni differenziali, con variabili di stato $x(t)$ e $\lambda(t)$, completo di condizioni al contorno e con un'ulteriore condizione di massimo, che giustifica l'etichetta "Principio del Massimo", con cui l'approccio è usualmente indicato. Ecco di che si tratta⁵:

$$\max_u H(x, u, \lambda) = g[x, u, t] + \lambda f[x, u, t] \quad \text{sub} \quad \begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x, u, t) \\ \lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(g'_x + \lambda f'_x) \\ x(0) = x_0; \lambda(T) = 0 \end{cases}$$

- Si prova a risolvere tale problema, tenendo conto del fatto che per "punti" interni di massimo, sotto opportune ipotesi di regolarità, si possono usare le condizioni *standard*:

$$H'_u = 0 \text{ e } H''_{u,u} \leq 0$$

e notando che il sistema d'equazioni differenziali potrebbe essere piuttosto selvaggio perché abbiamo una condizione iniziale su x e una finale su λ . Ciò è particolarmente fastidioso quando si volesse trattare numericamente il problema con tecniche numeriche. I cenni che poi faremo renderanno evidente la rilevanza di questo punto.

⁴Preso da [11], correggendo un errore di stampa.

⁵Omettiamo l'esplicitazione delle dipendenze dal tempo, per alleggerire il formulame.

Consideriamo un esempio, preso da [11] e opportunamente generalizzato.

Esempio 229 Ecco il problema:

$$\max_u \int_0^T (ax + bu) dt \quad \text{sub} \quad \begin{cases} x' = c - u^2 \\ x(0) = \alpha \end{cases} \quad ; \quad \text{con: } a, b, c, \alpha > 0$$

L'hamiltoniano riesce:

$$H(t, x, u, \lambda) = ax + bu + \lambda(c - u^2)$$

e il problema da risolvere si scrive:

$$\max_u ax + bu + \lambda(c - u^2) \quad \text{sub} \quad \begin{cases} x' = c - u^2 \\ \lambda' = -a \\ x(0) = \alpha \text{ e } \lambda(T) = 0 \end{cases}$$

L'equazione differenziale che regge l'evoluzione di λ è banale e fornisce:

$$\lambda = -at + k$$

ove k può determinarsi con la condizione finale $\lambda(T) = 0$:

$$-aT + k = 0 \Rightarrow k = aT \Rightarrow \lambda^*(t) = a(T - t)$$

Affrontiamo la massimizzazione di H . Le due condizioni $H'_u = 0$ e $H''_{u,u} \leq 0$ porgono:

$$a - 2\lambda u = 0 \text{ e } -2\lambda \leq 0$$

Vista la non negatività della variabile ausiliaria, la condizione di disuguaglianza è soddisfatta. La condizione d'uguaglianza ci fornisce il controllo ottimo:

$$u^*(t) = \frac{a}{\lambda^*(t)} = \frac{1}{2(T-t)}$$

A questo punto passiamo alla variabile di stato. Da:

$$x' = c - \left[\frac{1}{2(T-t)} \right]^2 = c - \frac{1}{4}(T-t)^{-2}$$

integrando s'ottiene:

$$x(t) = ct - \frac{1}{4(T-t)} + h$$

ove h si determina attraverso la condizione iniziale:

$$\alpha = -\frac{1}{4T} + h \Rightarrow h = \alpha + \frac{1}{4T} \Rightarrow x^*(t) = ct - \frac{1}{4(T-t)} + \alpha + \frac{1}{4T}$$

Esempio 230 Vediamo un caso di "punto" di massimo non interno:

$$\max_u \int_0^1 (x + u^2) dt \quad \text{sub} \quad \begin{cases} x' = x + u \\ x(0) = 1 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

L'hamiltoniano risulta:

$$H = x + u^2 + \lambda(x + u)$$

Il sistema d'equazioni differenziali per x e λ è:

$$\begin{cases} x' = x + u \\ \lambda' = -1 + \lambda \\ x(0) = 1; \lambda(1) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione in λ , tenuto conto della condizione finale si trova:

$$\lambda^*(t) = 1 + e^{t-1}$$

Poiché la variabile ausiliaria è positiva, $H'_u > 0$ e allora il massimo è di frontiera:

$$u^*(t) \equiv 1$$

Segue allora:

$$x' = x + 1$$

onde, separando le variabili, integrando e tenendo conto della condizione iniziale:

$$x^*(t) = 2e^t - 1$$

Esiste anche la versione discreta del Principio del Massimo, ma anche qualche cenno andrebbe oltre i limiti di questo volumetto. Facciamo rinvio, per esempio, a [14].

9.3 Tecniche numeriche

Il trattamento numerico dei sistemi dinamici consiste sostanzialmente nel calcolare numericamente i valori delle variabili di stato su un arco temporale appropriato per l'uso che d'un modello si vuole fare.

Per i sistemi dinamici con tempo discreto è tutto già pronto:

- abbiamo una legge del moto:

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

con $\mathbf{x}:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$;

- abbiamo un punto di partenza $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ dato;
- procediamo ricorsivamente: da $\mathbf{x}(0)$ calcoliamo $\mathbf{x}(1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}^0, 0]$, poi calcoliamo $\mathbf{x}(2) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(1), 1]$ e così via.

Vediamo un:

Esempio 231 Sia:

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1(t))^2 \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t+1 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

La condizione iniziale sia data:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Troviamo:

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Procediamo:

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e così via...

Questo procedimento ricorsivo non è compatibile con sistemi dinamici con tempo continuo. Il loro trattamento numerico si riduce alla loro discretizzazione, con un⁶ *tick* piccolo.

Riprendiamo la legge del moto, con tempo continuo:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t]$$

con $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Siamo dotati altresì d'un punto di partenza:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Scegliamo un "passo" h : sarebbe il *tick*.

Assumiamo che differenziale e incremento di \mathbf{f} non siano troppo diversi e approssimiamo:

$$\mathbf{x}(h) - \mathbf{x}(0) \approx \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0) h \Rightarrow \mathbf{x}(h) \approx \mathbf{x}(0) + \mathbf{f}(\mathbf{a}, 0) h$$

Poi, preso il vizio, continuiamo:

$$\mathbf{x}(2h) - \mathbf{x}(h) \approx \mathbf{f}[\mathbf{x}(h), 1] h \Rightarrow \mathbf{x}(2h) \approx \mathbf{x}(h) + \mathbf{f}[\mathbf{x}(h), 1] h$$

È affatto intuitivo che questo processo induce accumulazione d'errori e che, quindi, il passo h va scelto bilanciando due esigenze:

- se scegliamo h piccola l'approssimazione è migliore;
- se scegliamo h piccola, per approssimare uno stato del sistema lontano nel tempo, dobbiamo iterare un numero mostruoso di volte.

Le possibilità di calcolo oggi disponibili rendono la seconda esigenza secondaria.

Vediamo un:

Esempio 232 Consideriamo l'equazione differenziale:

$$x'(t) = x(t) \tag{9.6}$$

corredata dalla condizione iniziale $x(0) = 1$. La sua ovvia soluzione è:

$$x(t) = e^t$$

Facciamo finta di non accorgercene e cerchiamone numericamente la sua soluzione. Sia h il "passo" con cui ci muoviamo. L'idea è che dalla (9.6) otteniamo:

$$x(h) \approx x(0) + x(0)h = x(0)(1+h) = 1+h$$

Iterando:

$$x(nh) \approx (1+h)^n$$

Se confrontiamo i valori "veri" con i valori ottenuti numericamente, le differenze sono davvero trascurabili. Proponiamo i seguenti confronti, con $h = 0.01$:

t	e^{ht}	$x(t)$
h	1.01	1.01
$2h$	1.02	1.02
\dots		
$10h$	1.105	1.105

⁶Si, si chiama così, perché richiama l'orologio. Ed è un'etichetta *standard*.

10

Appendice

Presentiamo ora alcune nozioni di analisi che sono utili per la comprensione dei principali risultati ottenuti nei precedenti capitoli. Chiariamo che ciò che segue è una selezione mirata e non una trattazione sistematica. La cernita è stata motivata dall'esigenza di presentare alcuni concetti chiave in un numero limitato di pagine. Si danno perciò per scontate tutte le nozioni che dovrebbero essere state apprese nei precedenti corsi di Matematica e non si approfondiscono molte nozioni che sono presentate principalmente per via intuitiva.

D'altro canto i concetti esposti sono *standard* e possono essere ritrovati in molti testi di analisi matematica con facilità. Chi volesse approfondire può consultare uno dei testi indicati in bibliografia.

In chiusura di questa appendice presentiamo infine un'interpretazione geometrica di autovalori e autovettori.

10.1 Norma d'una funzione

Partiamo da un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Il lettore certamente rammenta la nozione di *norma (euclidea)* di \mathbf{x} :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{s=1}^n x_s^2}$$

Per $n \leq 3$, essa può essere interpretata come lunghezza della freccia che rappresenta cartesianamente il vettore. In generale misura comunque la grandezza d'un vettore. Per esempio:

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{30}$$

Chi conosce solo la norma euclidea, potrebbe pensare che essa rappresenti l'unica possibilità di “dire quant'è grosso un vettore”. In realtà la nozione di norma è ben più generale e di norme ne esistono infinite, che però, per certi usi, sono tra loro equivalenti.

Definizione 233 Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Si chiama *norma su X* un'applicazione: $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ che gode delle seguenti proprietà:

1. *Non negatività*: $\|\mathbf{x}\| \geq 0 \ \forall \mathbf{x} \in X$ e, inoltre, $\|\mathbf{x}\| = 0$ sse \mathbf{x} è il vettore nullo¹.
2. *Omogeneità*: $\|c\mathbf{x}\| = |c| \cdot \|\mathbf{x}\| \ \forall \mathbf{x} \in X, \forall c \in \mathbb{R}$.
3. *Disuguaglianza triangolare*: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

La norma euclidea gode delle tre proprietà indicate e che, quindi, è una norma. La norma euclidea è, di solito indicata con $\|\cdot\|_2$. Un'altra norma, indicata di solito con $\|\cdot\|_1$, può esser definita così:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{s=1}^n |x_s|$$

Per esempio:

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\|_1 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Ci servirà più avanti un'altra norma, denotata con $\|\cdot\|_\infty$, che si chiama *norma della convergenza uniforme* o *norma del sup*, per motivi che risulteranno chiari tra poco. La sua definizione è²:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_s |x_s|$$

Questa norma è, dunque, pari al massimo modulo delle componenti del vettore. Così:

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max(1; 2; 3; 4) = 4$$

Diciamo \mathcal{I}_n l'insieme dei primi n interi positivi:

$$\mathcal{I}_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Per esempio:

$$\mathcal{I}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$$

Un modo un po' esotico d'interpretare $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è pensare che sia una descrizione d'un'applicazione $x : \mathcal{I}_n \rightarrow \mathbb{R}$, definita da:

$$x(s) = x_s$$

Nel caso del nostro $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, si avrebbe $n = 4$ e quindi $\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ con:

$$x(1) = 1; \ x(2) = -2; \ x(3) = 3; \ x(4) = -4$$

¹Il vettore nullo, denotabile con \mathbf{o} è l'elemento neutro rispetto all'addizione tra elementi di X , ossia $\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in X$.

²In un contesto più generale, la nozione di \max va rimpiazzata con la nozione più libertaria di \sup .

In realtà, quest'interpretazione non è così esotica perché è la stessa che il lettore dovrebbe rammentare a proposito delle successioni. La successione $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ è un'applicazione da \mathbb{N}_+ a \mathbb{R} e quindi può pensarsi come un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^\infty$ di dimensione infinita.

Esercizio 234 *Un buon esercizio è provare che anche $\|\mathbf{x}\|_\infty$ e $\|\mathbf{x}\|_1$ posseggono le proprietà che definiscono la nozione generale di norma.*

Osservazione 235 *E' stata richiamata la nozione di spazio vettoriale. Gli esempi più semplici di spazi vettoriali sono certamente gli spazi euclidei con scalari reali:*

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} : x_s \in \mathbb{R}, \text{ per } s = 1, 2, \dots, n \right\}$$

I lettori ben sanno che la dimensione di \mathbb{R}^n è n . Ogni spazio vettoriale di dimensione finita n , è isomorfo a \mathbb{R}^n . L'isomorfismo tra spazi vettoriali non è una brutta malattia, come il nome potrebbe far presagire. Isomorfismo tra spazi vettoriali di dimensione n vuol dire che si può stabilire una corrispondenza biunivoca perfetta³ (rispettata quindi anche dall'addizione e dalla moltiplicazione per uno scalare) tra tali spazi. Dal punto di vista pratico ciò significa che due spazi isomorfi sono matematicamente lo stesso spazio. Conseguenza che tutto ciò che vale e si sa fare linearmente in \mathbb{R}^n è valido per qualunque spazio vettoriale con la medesima dimensione (finita).

Esempio 236 Le speranze deluse: $C^0[a, b]$ — Si potrebbe pensare che, tutti gli spazi vettoriali siano, gratta gratta, nient'altro che un remake d'un appropriato \mathbb{R}^n . Malauguratamente non è così. La struttura di spazio vettoriale è così generale da includere spazi “troppo ricchi” per poter essere replicati da un \mathbb{R}^n . Dire che la dimensione d'uno spazio vettoriale è n vuol dire, alla fin fine che si può generare l'intero spazio combinando linearmente n suoi elementi. Si dice, che essi costituiscono una base per lo spazio. Bene, gli spazi troppo ricchi si dice hanno dimensione infinita, perché non si lasciano generare linearmente da un numero⁴ (finito) n d'elementi. Un esempio importante, che ci servirà in seguito è fornito dall'insieme delle funzioni f , definite su un intervallo chiuso $[a, b]$ e ivi continue. Il simbolo ufficiale per questo spazio è $C^0[a, b]$, ma spesso l'indicheremo più semplicemente, nell'intimità, con $C[a, b]$. L'indice 0 in $C^0[a, b]$ è motivato dal fatto che si può pensare a una catena d'insiemi in cui si richiede non soltanto la continuità su $[a, b]$ d'una funzione f (sarebbe $C^0[a, b]$), ma anche della sua derivata prima (sarebbe $C^1[a, b]$), o, magari, anche della sua derivata seconda (e avremmo allora $C^2[a, b]$) e così via. Quest'insiemi sono un po' come le matroske russe:

$$\dots C^k[a, b] \subset C^{k-1}[a, b] \subset \dots \subset C^2[a, b] \subset C^1[a, b] \subset C^0[a, b] = C[a, b]$$

Faremo uso di $C^0[a, b] = C[a, b]$ qualche volta e modicamente di $C^1[a, b]$.

Esercizio 237 *Dimostrare che $C^1[a, b]$ e $C[a, b]$ sono spazi vettoriali.*

Usiamo quanto visto sopra per mostrare come estendere la nozione di norma da vettori a funzioni. Lavoriamo su $C[a, b]$, lo spazio delle funzioni continue definite su un dato intervallo chiuso $[a, b]$, che già abbiamo incontrato sopra, a pag. 174:

³Se $x^1, x^2 \in X$, $y^1, y^2 \in Y$, e se $c \in \mathbb{R}$ se x^1 corrisponde, $1 - 1$, con y^1 , x^2 corrisponde, $1 - 1$, con y^2 , allora $x^1 + x^2$ corrisponde con $y^1 + y^2$. Inoltre, se x corrisponde con y allora cx corrisponde con cy .

⁴I numeri sono solo finiti. $+\infty, -\infty, \infty$ non sono numeri. La loro contiguità con i numeri veri conduce talora a non lasciarli fuori dalla porta, a farli entrare nell'ingresso dell'aritmetica e a usare frasi comode come $\infty \cdot \infty = \infty$, $1/\infty = 0$, pentendosi poi dell'eccesso d'accoglienza perché $\infty - \infty$, ∞/∞ creano un po' d'imbarazzo. Nel testo la precisazione “(finito)” è logicamente ridondante, ma utile. Un po' come quando arriva un ospite con le scarpe inzacccherate e prima che entri suggeriamo di pulirle sullo zerbino. Non è necessario, ma... magari utile.

Definizione 238 Sia $f \in C[a, b]$. E' naturale definire⁵ il perfetto analogo della norma euclidea:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

detta anche norma delle funzioni con quadrato integrabile.

Esempio 239 Per esempio, in $C[0, 1]$, vive felice la funzione identità $f(x) = x$. La sua "norma euclidea", cioè la sua norma come funzione con quadrato integrabile è:

$$\sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \sqrt{1/3} = \sqrt{3}/3$$

Osservazione 240 E' ovvio che se $f \in C[a, b]$ anche $f^2 \in C[a, b]$. Una funzione continua su un intervallo chiuso è integrabile e, quindi, il suo quadrato lo è. Quindi $\|f\|_2$ esiste $\forall f \in C[a, b]$.

Estendiamo ora la norma $\|\cdot\|_1$.

Definizione 241 Si dice norma delle funzioni (assolutamente) integrabili la norma definita da:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

Consideriamo, per esempio $C[-1, 1]$. La funzione identità $f(x) = x$ ne è un elemento. Si ha:

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |x| dx$$

il seguente diagramma ci consente d'ottenere $\|f\|_1$ senza utilizzo del calcolo integrale:

Si ha:

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Osservazione 242 Anche in questo caso è banale trovare rassicurazione sull'esistenza della norma. Se $f \in C[a, b]$, anche $|f| \in C[a, b]$ e siamo, di nuovo a cavallo.

⁵Speriamo che il lettore tolleri volentieri qui e nel seguito la scrittura $f^2(x)$ per denotare la funzione più propriamente, ma più noiosamente, indicata con $[f(x)]^2$.

La norma della convergenza uniforme $\|f\|_\infty$ s'estende naturalmente.

Definizione 243 Chiamiamo norma della convergenza uniforme o anche, nell'intimità norma del sup, denotata con $\|\cdot\|_\infty$ la norma definita da⁶:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Esempio 244 Con la solita funzione identità $f(x) = x$, lavorando in $C[-3, 2]$ si ha:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-3, 2]} |x| = 3$$

come si desume dal diagramma seguente:

10.2 Distanza tra funzioni

È il momento di fermarci un attimo e vedere quanto abbiamo fatto finora, per avere chiaro in mente che cosa faremo dopo.

Siamo partiti dalla nozione di *spazio vettoriale*. Abbiamo mostrato come vi siano tanti modi d'arricchire uno spazio vettoriale di dimensione finita con norme, variamente definite, che, intuitivamente, ci dicono quanto sia “grosso” ciascun elemento dello spazio. La coppia $(X, \|\cdot\|)$ si dice *spazio vettoriale normato*.

Vediamo come la combinazione “vettoriale + normato” ci offra una nuova opportunità che etichetteremo come “spazio metrico”.

Non ci scostiamo dalla strategia precedente: prima lavoriamo in \mathbb{R}^n e poi ci libereremo negli... spazi siderali.

L'elemento chiave è la *distanza*.

Partiamo da \mathbb{R}^n . Pigliamo due vettori \mathbf{x}, \mathbf{y} in esso e consideriamo la naturale nozione di *distanza euclidea* tra essi (denotata con $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$), data da:

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{s=1}^n (x_s - y_s)^2}$$

Essa gode di importanti proprietà:

⁶In $C[a, b]$ potremmo mettere \max invece di \sup , per via del Teorema di Weierstrass. E' utile però stare un po' più sulle generali.

1. Non negatività e nullità solo nel caso di coincidenza: $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ed è pari a 0 sse $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
2. L'ordine d'elencazione dei vettori a nulla rileva: $d_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
3. Vale la disuguaglianza triangolare: $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Si tratta d'un buon insieme di proprietà che caratterizzano la nozione di distanza. Infatti è generalmente accettata la seguente nozione di *distanza*:

Definizione 245 Dato un insieme X , si dice che su X è definita una distanza $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, se d gode delle seguenti proprietà:

1. Non negatività e nullità solo nel caso di coincidenza: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ed è 0 sse $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;
2. l'ordine d'elencazione dei vettori non conta: $d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
3. vale la disuguaglianza triangolare: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 246 La coppia (X, d) si chiama spazio metrico.

Osservazione 247 Uno spazio *vettoriale* X , che sia metrico, è normabile prendendo per ogni \mathbf{x} :

$$\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{o})$$

essendo \mathbf{o} l'elemento neutro rispetto all'addizione in X .

Teorema 248 Se X è uno spazio vettoriale normato, esso è metricizzabile con:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \text{ con } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$$

Dimostrazione. Basta mostrare che $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ ha tutte le carte in regola per essere definita come distanza tra \mathbf{x} e \mathbf{y} . Si ha:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| &\geq 0 \text{ sempre e } \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \iff \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| &= \|-1(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = |-1| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\ \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| &= \|\mathbf{x} - \mathbf{z} + \mathbf{z} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \end{aligned}$$

■

La non unicità della norma apre tutto un mondo di possibilità per gli spazi vettoriali metrici. Possiamo calcolare differenti distanze, ancorandoci alle differenti norme.

Cominciamo in \mathbb{R}^n .

La norma euclidea genera (ovviamente) la distanza euclidea.

Per esempio, la distanza euclidea tra i due vettori:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

è:

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{[1 - (-1)]^2 + [-2 - 2]^2 + [3 - (-3)]^2 + [-4 - 4]^2} = 2\sqrt{30}$$

Definizione 249 La norma delle funzioni assolutamente sommabili $\|\cdot\|_1$ genera la distanza:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{s=1}^n |x_s - y_s|$$

che è detta (un po' folkloristicamente) distanza di Manhattan, perché in due dimensioni su un reticolo urbano con strade ortogonali (Manhattan) essa indica la lunghezza del percorso più breve da \mathbf{x} a \mathbf{y} .

Per esempio, la distanza d_1 tra i due vettori \mathbf{x}, \mathbf{y} della (10.1) riesce:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |1 - (-1)| + |-2 - 2| + |3 - (-3)| + |-4 - 4| = 20$$

Chiediamo ora a $\|\cdot\|_\infty$ d'offerirci una distanza. Otteniamo:

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_s |x_s - y_s| = \max_s |x_s - y_s|$$

Per esempio, la distanza d_∞ tra i due i soliti due vettori \mathbf{x}, \mathbf{y} della (10.1) riesce:

$$\max(2; 4; 6; 8) = 8$$

Osservazione 250 *Si noti che, se applichiamo tutte queste nozioni di distanza a vettori unidimensionali (cioè a numeri), esse collassano tutte nella distanza "normale" tra due numeri $x, y \in \mathbb{R}$:*

$$d(x, y) = |x - y|$$

Osservazione 251 *Definire una distanza è un po' come sposarsi: si acquisiscono molti parenti che magari.... Ma That's life. Se scegli una distanza ti scegli anche gli intorni. Essi sono simpatici, ma ti portano in casa gl'insiemi aperti, poi, per correttezza politica, i chiusi. Poiché la definizione generale di continuità d'una $f : X \rightarrow Y$ si riduce al mantra:⁷ "Continuità è (Quelli) che la controimmagine (in X) d'un aperto in Y è un aperto", nasce il ragionevole dubbio su chi ti tiri in casa. Beh! Nessuna preoccupazione. Si può provare e non è difficile un importante teorema.*

Prepariamo il terreno con una definizione chiarificatrice:

Definizione 252 *Dato uno spazio metrico (X, d) e un altro spazio metrico (X, d') . Diciamo che (X, d') sono topologicamente equivalenti se le famiglie degli aperti (e quindi dei chiusi) coincidono.*

Teorema 253 *Due distanze qualsiasi d, d' su \mathbb{R}^n sono topologicamente equivalenti.*

Pseudo Dimostrazione — Far vedere che gli aperti secondo una distanza lo sono anche secondo un'altra è facile: basta mostrare che ogni intorno $B(\mathbf{x}^*, \varepsilon)$ di un punto \mathbf{x}^* , costruito secondo la distanza d , può contenere un intorno $B'(\mathbf{x}^*, \rho)$ costruito con la distanza d' e viceversa. In tal modo se un punto \mathbf{x}^* è interno ad un insieme $A \subseteq X$ perchè esiste un suo intorno $B_\varepsilon(\mathbf{x}^*) \subset A$ allora anche $B'_\rho(\mathbf{x}^*) \subset B_\varepsilon(\mathbf{x}^*) \subset A$ e quindi l'utilizzo di distanze diverse non cambia la sua natura di punto interno: ciò comporta che insiemi aperti secondo la distanza d lo sono anche secondo la distanza d' . La logica della dimostrazione si può pertanto ridurre alla logica d'un esempio. Prendiamo \mathbb{R}^2 , di complessità adeguata. Consideriamo un punto $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^2$ e mostriamo come le tre distanze d_1, d_2 e d_∞ sopra introdotte siano topologicamente equivalenti tra loro.

Utilizzando la distanza euclidea d_2 gli intorni sono dati da:

$$B_2(\mathbf{x}^*, \varepsilon) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \sqrt{(x_1^* - x_1)^2 + (x_2^* - x_2)^2} < \varepsilon \right\}$$

Come noto si tratta di intorni di tipo circolare. Graficamente si tratta della porzione di piano racchiusa da una circonferenza, esclusa la circonferenza stessa:

⁷In Matematica è comunemente noto come definizione.

Prendiamo la distanza di Manhattan d_1 . Gli intorno che s'ottengono sono dati da:

$$B_1(\mathbf{x}^*, \rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = |x_1^* - x_1| + |x_2^* - x_2| < \rho\}$$

Mentre i bordi degli intorno d'un punto \mathbf{x}^* , secondo d_2 , sono circonferenze centrate in \mathbf{x}^* , gl'intorni costruiti con d_1 sono quadrati con diagonali parallele agli assi. Graficamente:

Con la metrica d_∞ del sup gli intorno diventano:

$$B_\infty(\mathbf{x}^*, \delta) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) = \max(|x_1^* - x_1|; |x_2^* - x_2|) < \delta\}$$

Che, graficamente, sono quadrati con lati paralleli agli assi:

Ora se mettiamo insieme i tre tipi di intorno, ci convinciamo facilmente che è possibile “in scatolarli” uno nell'altro come vogliamo. In particolare abbiamo che:

$$0 < \rho < \varepsilon < \delta \implies B_1(\mathbf{x}^*, \rho) \subset B_2(\mathbf{x}^*, \varepsilon) \subset B_\infty(\mathbf{x}^*, \delta)$$

Graficamente:

D'altro canto risulta

$$0 < \rho < \delta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \implies B_1(\mathbf{x}^*, \rho) \subset B_\infty(\mathbf{x}^*, \delta) \subset B_2(\mathbf{x}^*, \varepsilon)$$

e così via. Con opportune scelte dei raggi si può ottenere qualunque catena di inclusioni. Ciò mostra che l'utilizzo di una delle distanze sopra menzionate, non influenza, topologicamente parlando, la natura degli insiemi di \mathbb{R}^2 : gli aperti di (\mathbb{R}^2, d_2) sono sottoinsiemi aperti anche di (\mathbb{R}^2, d_1) e di (\mathbb{R}^2, d_∞) .

Si può intuire come ciò sia vero più in generale: in \mathbb{R}^n , metrico, cioè in (\mathbb{R}^n, d) , tutte le topologie s'equivalgono.

Osservazione 254 *Poiché poi ogni spazio vettoriale, di dimensione n , funziona come \mathbb{R}^n abbiamo costruito tutto un mondo di possibilità. Pensi il lettore allo spazio X di tutti i polinomi P di grado $\leq n \in \mathbb{N}_+$:*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0$$

Li consideriamo su un intervallo $[a, b]$, imponiamo loro una norma e una distanza. Si comporteranno come lo spazio metrico (\mathbb{R}^{n+1}, d) . Per esempio: un'ipersfera S di raggio ρ , centrata in 0 , in X è l'insieme dei tutti i polinomi di grado $\leq n$:

$$S = \{P \in X : d(P, 0) \leq \rho\}$$

Naturalmente la definizione di S finisce per dipendere da d .

Passiamo ora all'estensione della nozione di distanza a spazi di funzioni come $C[a, b]$.

Cominciamo da $\|\cdot\|_2$ ⁸

Definizione 255 *Siano $f, g \in C[a, b]$. Chiamiamo distanza euclidea tra le due funzioni la quantità:*

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}$$

⁸Sostanzialmente perché rimonta a Pitagora. Un doveroso omaggio a un siculo *top*.

Si noti che se $f, g \in C[a, b]$ anche $(f - g)^2 \in C[a, b]$ e quindi $d_2(f, g)$ è ben definita essendo $(f - g)^2$ integrabile su $[a, b]$. Per esempio se $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ nell'intervallo $[a, b] = [0, 1]$ allora:

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (x - x^2)^2 dx} = \frac{\sqrt{30}}{30}$$

Definizione 256 Siano $f, g \in C[a, b]$. Chiamiamo distanza del sup tra le due funzioni $d_\infty(f, g)$ la quantità:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

Se, per esempio, $[a, b] = [0, 1]$ e se $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$, allora:

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |x - x^2| = \max_{x \in [0, 1]} |x - x^2| = \max_{x \in [0, 1]} (x - x^2)$$

Poiché $D(x - x^2) = 1 - 2x \geq 0$ se e solo se $x \leq \frac{1}{2} = x^*$, allora :

$$d_\infty(f, g) = [x - x^2]_{x=1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

10.3 Successioni di funzioni

Le successioni numeriche $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ si generalizzano naturalmente nelle *successioni di funzioni*, che assumiamo siano definite su uno stesso intervallo $[a, b]$. Una successione del genere è del tipo:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots = \{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}, x \in [a, b]$$

Un semplice esempio potrebbe essere la successione:

$$x, x^2, \dots, x^n, \dots = \{x^n\}_{n=1}^{+\infty}, x \in [a, b]$$

Si tratta della successione delle potenze (interiere e positive): ogni termine della successione è quindi un elemento di $C[a, b]$.

Le successioni numeriche sono un caso speciale di successione di funzioni: gli elementi della successione di funzioni sono funzioni specialissime, cioè funzioni costanti: $f_n(x) \equiv a_n$ per ogni x .

Abbiamo ricavato grandi gioie⁹ dalla convergenza di successioni numeriche. Ce ne aspettiamo d'analogue nel caso delle successioni di funzioni, ma, come ci si può aspettare, quando si lascia un dato terreno e ci si comincia a muovere in un terreno più vasto può darsi che la vita si faccia meno facile.

Offriamo al lettore un antipasto.

Nel caso di successioni numeriche sono del tutto equivalenti le due nozioni di convergenza d'una successione a un limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A \text{ e } \lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n, A) = 0$$

essendo d la “normale” distanza tra due numeri in \mathbb{R} . E ciò ci felicità.

Ci renderemo conto tra breve del fatto che tale equivalenza è meno solida di quanto ci si possa aspettare. Il motivo della sparizione sta, ovviamente, nella molteplicità di distanze che si possono introdurre in uno spazio funzionale.

Cominciamo con introdurre la prima nozione di convergenza per una successione di funzioni definite su un intervallo $[a, b]$.

⁹Per esempio la definizione del numero “e” o anche la definizione di convergenza d'una serie.

Definizione 257 Data la successione di funzioni $\{f_n(x)\}$, definite sull'intervallo $[a, b]$, diciamo che essa converge puntualmente¹⁰ alla funzione $f(x)$ se:

$$\forall x \in [a, b], \text{ si ha: } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Esempio 258 Sia $[a, b] = [0, 1]$. La successione sia $\{x^n\}$ la funzione limite può esser determinata come segue:

$$\begin{cases} \text{se } x \in [0, 1) \text{ allora } x^n \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty \\ \text{se } x = 1 \text{ allora } x^n = 1 \rightarrow 1 \text{ per } n \rightarrow +\infty \end{cases}$$

quindi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

Il seguente diagramma contiene i grafici delle prime quattro funzioni della successione e lascia intuire quale sia la funzione limite.

Osservazione 259 Triste — L'esempio precedente è semplice, ma molto interessante perché ci mostra subito un fatto apparentemente strano. Le funzioni $f_n(x) = x^n$ sono tutte in $C[0, 1]$, detto meno cripticamente, sono tutte continue su $[0, 1]$. La funzione limite $f(x)$ non è continua su $[0, 1]$: esibisce una discontinuità in 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0 \neq f(1) = 1$$

La proprietà di continuità, posseduta da tutti gli elementi della successione, è persa nel passaggio al limite. Un altro modo di dire la stessa cosa è che una successione di funzioni $f_n \in C[a, b]$ potrebbe convergere puntualmente, ma non a una funzione in $C[a, b]$.

Vediamo ora come si comportano le distanze in questo caso. In particolare, c'interessa capire se la convergenza puntuale equivale alla convergenza in distanza.

Esempio 260 Cominciamo con d_2 . Si ha¹¹:

$$d_2(f_n, f) = \sqrt{\int_0^1 (x^n - 0)^2 dx} = \sqrt{\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0, \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

¹⁰ "Puntualmente" non vuol dire "senza ritardi", ma "punto per punto", con riferimento ai punti di $[a, b]$.

¹¹ Il fatto che in 1 la funzione limite valga 1 e non 0 è irrilevante: sappiamo che alterando il valore d'una funzione in un insieme finito di punti l'integrale non cambia.

Passiamo a d_1 . Si ha:

$$d_1(f_n, f) = \int_0^1 |x^n - 0| dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Concludiamo con d_∞ , che fa il botto¹²:

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{x \in [0,1]} |x^n - f(x)| = 1 \rightarrow 1, \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

perché la convergenza puntuale non equivale alla convergenza in distanza, con quella distanza.

Per dirla in altro modo: la distanza d_∞ è meno grossolana delle altre. Per essa la distanza tra le funzioni della successione rimane 1 perché, in prossimità di 1, per n abbastanza grande, x^n è prossimo a 1, anche se ivi la funzione limite f vale 0.

Questa “severità”¹³ della distanza d_∞ però paga. Usando tale distanza per definire il limite d’una successione di funzioni, se vi è convergenza a una funzione limite, che si chiama *convergenza uniforme*, non può aver luogo la perdita della continuità.

Scriviamo ordinatamente quest’importante passaggio.

Definizione 261 Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni di $C[a, b]$. Sia f una funzione definita su $[a, b]$. consideriamo la successione δ_n di distanze:

$$\delta_n = d_\infty(f_n, f) = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$$

Se $\delta_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ diciamo che la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente a f .

Teorema 262 Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni di $C[a, b]$, se essa converge uniformemente a una funzione f , allora converge anche puntualmente e $f \in C[a, b]$.

Dimostrazione. La dimostrazione va al di là degli scopi di questo volumetto. Essa può essere rintracciata su qualunque buon testo d’Analisi Matematica. ■

Osservazione 263 Questo risultato può esser descritto dicendo che se s’usa d_∞ , $C[a, b]$ è chiuso rispetto ai passaggi al limite.

10.3.1 Che accade se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diventa $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$?

Finora abbiamo lavorato con funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Vogliamo ora generalizzare lo schema di base:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

nello schema:

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

¹²Poiché non ci moviamo più in $C[a, b]$ soltanto, non possiamo più contare sul buon Weierstrass che garantisce l’esistenza del massimo.

¹³Per i lettori, per natura, in *tourbillon* ormo-sentimentale.

Ci sono *partner in progress* che valutano in media (usano d_1).

Altri, più raffinati, usano d_2 , che, nella vita, non differisce molto da d_1 ,

Quelli di d_∞ non mediano alcunché: hanno una memoria da elefanti, ricordano tutto e definiscono la loro distanza da te rammentando il momento di scazzo maggiore.

Se ti va bene con loro (convergenza), sei tranquillo/a = mutande di ferro.

Questa generalizzazione non è gratuita. Essa costa sia dal lato di m : non abbiamo più in *output* un numero, ma un vettore di \mathbb{R}^m , che vuol dire che dobbiamo gestire *output* vettoriali, sia dal lato di n , ossia dal fatto che abbiamo un *input vettoriale*.

Dove starà il costo maggiore?

La risposta è semplice: non nell'*output*, ma nell'*input*.

In un'applicazione $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, le proprietà di \mathbf{f} sono determinate dalle caratteristiche dell'insieme d'arrivo \mathbb{R}^m , su cui stiamo abbastanza tranquilli: sappiamo gestire i vettori, ma non è banale gestire gli *input* in $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Le nozioni di distanza tra funzioni, che abbiamo visto sinora, s'estendono molto naturalmente anche al caso di *funzioni vettoriali*, ossia di funzioni le cui immagini sono vettori e non necessariamente scalari. Possiamo estendere tutto a $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $m \geq 1$. L'idea è semplice e interessante. Se calcoliamo la distanza tra due funzioni vettoriali $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ otteniamo con i metodi precedenti non una distanza, ma un *vettore di distanze*:

$$\begin{bmatrix} d(f_1, g_1) \\ d(f_2, g_2) \\ \dots \\ d(f_m, g_m) \end{bmatrix}$$

La distanza s'otterrà prendendo la norma di tale vettore. È naturale, anche se non obbligatorio, prender come norma la stessa che ha generato la distanza.

Esempio 264 Prendiamo queste due funzioni vettoriali \mathbf{f}, \mathbf{g} , ristrette all'intervallo $[0, 1]$:

$$\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{g}(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$$

Calcoliamo le distanze tra componenti corrispondenti usando d_1 . Si ha:

$$\begin{bmatrix} d_1(f_1, g_1) \\ d_1(f_2, g_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 |x - x^2| dx \\ \int_0^1 |x^2 - x^3| dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 (x - x^2) dx \\ \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/12 \end{bmatrix}$$

A questo punto possiamo definire la distanza tra \mathbf{f} e \mathbf{g} :

$$d_1(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \left\| \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/12 \end{bmatrix} \right\|_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

Il passo dopo è cruciale.

Come lavorare quando l'*input* \mathbf{x} ha dimensione possibilmente maggiore di 1?

E' assolutamente chiaro che l'estensione di $\|\cdot\|_s$, con $s = 1, 2$ è costosissima. Bisogna pagare il pegno di passare attraverso integrali di funzioni di vettore, ossia di più variabili, che si possono calcolare, ma che non sono affatto banali.

Il lettore dovrebbe (sanamente) provare un po' d'imbarazzo di fronte a $\|\cdot\|_\infty$, almeno perché essa garantisce la qualità al minimo costo, che per uno studente d'Economia dovrebbe fare la differenza, per via d'un naturale *trade-off*..

10.3.2 Successioni fondamentali, la condizione di Cauchy

Consideriamo una successione numerica reale $\{a_n\}$, con $n \in \mathbb{N}_+$. È possibile dimostrare un teorema molto importante che fornisce una condizione (detta *condizione di Cauchy*) che caratterizza le successioni convergenti.

“Caratterizza” significa che se una successione converge deve soddisfare tale condizione e, viceversa, se una successione soddisfa tale condizione allora la successione converge.

L'idea grossolana del teorema non è difficile ed è la seguente: se una successione converge, alla lunga i suoi termini con indice abbastanza alto devono differire pochissimo, perché si stabilizzano e, viceversa, se i termini d'una successione si stabilizzano, poiché \mathbb{R} non ha “buchi”, la successione ammette limite.

Teorema 265 *Data una successione numerica reale $\{a_n\}$, con $n \in \mathbb{N}_+$, condizione necessaria e sufficiente affinché essa converga è che $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon)$, tale che $\forall m, n > \nu$:*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad (10.2)$$

Dimostrazione. Il lettore può vedere qualunque buon testo d'Analisi Matematica. ■

Questo importante Teorema non vale sempre: al di fuori di \mathbb{R} può cessare di essere vero. La validità della condizione di Cauchy è legata alla *completezza* dello spazio metrico. Vi sono spazi metrici che non sono completi: presentano cioè dei “buchi”.

Vediamo un (classico) esempio di spazio metrico “bucato”: l'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} .

Chiamiamo A un numero razionale ($A \in \mathbb{Q}$), per esempio $A = 2$. Consideriamo la successione definita per ricorrenza¹⁴:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{A}{a_n} \right) \quad (10.3)$$

Se partiamo da $a_1 \in \mathbb{Q}$, tutti gli altri termini della successione sono cittadini di \mathbb{Q} . Notizia bomba: partendo da qualunque $a_1 \in \mathbb{Q}$, la successione è di razionali (sta in \mathbb{Q}), ma converge a $\sqrt{A} \notin \mathbb{Q}$. Questo fatto inquietante è descritto usualmente dicendo che, a differenza di \mathbb{R} , ove ciò non può accadere, lo spazio dei razionali \mathbb{Q} non è *completo*.

Definizione 266 *In uno spazio metrico qualsiasi X , le successioni d'elementi di X , che soddisfano (10.2) si chiamano successioni fondamentali. Quando in X ogni successione fondamentale converge a un elemento di X , si dice che tale spazio è completo.*

Il punto fondamentale è più semplice del previsto.

La condizione (10.2) è certamente necessaria per la convergenza di successioni in uno spazio numerico, ma è sufficiente solo se lo spazio è “privo di buchi” come \mathbb{R} e non come \mathbb{Q} , che è un vero colabrodo.

Esempio 267 *Sia $A = 2$ e $a_1 = 1$. Dalla (10.3) otteniamo:*

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right) = \frac{3}{2}$$

e poi:

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{17}{12} \approx 1.4167$$

e abbiamo già due cifre decimali esatte. Ancora un colpo:

$$a_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}} \right) = \frac{577}{408} \approx 1.4142$$

e, stavolta abbiamo quattro cifre decimali esatte. La successione converge a $\sqrt{2}$, notoriamente irrazionale¹⁵.

Consideriamo uno spazio di funzioni X , con elementi $\mathbf{x} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Mettrizziamo X con una distanza d . Supponiamo che in X la condizione (10.2) sia anche sufficiente.

¹⁴Tali successioni sono un caso specialissimo di sistemi dinamici considerati in questo libretto.

¹⁵Se fosse razionale:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \text{ con } p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}_+$$

onde, quadrando, $p^2 = 2q^2$. Un numero intero, che si chiami p o q non rileva, ha un'unica scomposizione in fattori primi. Ora, il fattore primo 2, necessariamente compare a primo membro un numero pari di volte, per via del quadrato di p . Però, a secondo membro esso compare un numero dispari di volte: un numero pari per via di q^2 , ma il, fattore 2 conduce a un numero dispari di volte, onde la contraddizione e la dimostrazione.

Definizione 268 Chiamiamo spazio di Banach uno spazio vettoriale metrico completo.

Osservazione 269 Il teorema 262 ci dice che $C[a, b]$, reso metrico con d_∞ è completo. Faremo uso di tale fatto importante perché $C[a, b]$ è completo sotto d_∞ .

In Matematica, ma anche in Economia, s'incontrano frequentemente applicazioni da uno spazio di Banach in sé stesso $\mathbf{c} : X \rightarrow X$, che godono d'una proprietà che fa loro meritare il nome di *contrazione*.

Alla buona, una contrazione è una trasformazione di X in sé stesso tale che la distanza tra le immagini secondo \mathbf{f} di due vettori sono significativamente più vicine tra loro di quanto $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$ non lo fossero.

Definizione 270 Sia \mathbf{c} un'applicazione da X a X , essendo X uno spazio di Banach, con distanza $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Diciamo che \mathbf{c} è una contrazione, se esiste un $k \in [0, 1)$ tale che:

$$d[\mathbf{c}(\mathbf{x}^1), \mathbf{c}(\mathbf{x}^2)] \leq kd(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$$

ossia:

$$\|\mathbf{c}(\mathbf{x}^1) - \mathbf{c}(\mathbf{x}^2)\| \leq k \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|$$

Ragionando su funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, possiamo farci un'idea di quanto andremo a trovare in generale.

Nel piano cartesiano (x, y) , la retta più simpatica è certamente la bisettrice del I e del III quadrante: $y = x$.

Se prendiamo due punti x_1 e x_2 sull'asse delle ascisse, che distano $|x_1 - x_2|$, le loro immagini $y_1 = x_1$ e $y_2 = x_2$ hanno tra loro la stessa distanza $|y_1 - y_2| = |x_1 - x_2|$. Consideriamo ora la retta, un po' meno simpatica, d'equazione

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

Come sono messe le distanze $|x_1 - x_2|$ e $|y_1 - y_2|$ in questo caso? E' ovvio che, nell'equazione di quest'ultima retta, l'intercetta 1, ma foss'anche 5 o -6 non conta. Infatti:

$$|y_1 - y_2| = \left| \frac{1}{2}x_1 + 1 - \left(\frac{1}{2}x_2 + 1 \right) \right| = \frac{1}{2} |x_1 - x_2|$$

e ciò che rileva è solo la differenza di pendenze tra le due rette. C'è un punto speciale d'ascissa x^* , comune tra le due rette. Nella fattispecie, risolve l'equazione:

$$\frac{1}{2}x + 1 = x \text{ onde } x^* = 2 \quad (10.4)$$

Ma il fatto che la pendenza della retta sia (in modulo) < 1 ha un'eccitante¹⁶ conseguenza.

Definiamo:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

Il punto speciale x^* sodisfa:

$$f(x^*) = x^*$$

Supponiamo di non saper risolvere l'equazione (10.4)¹⁷.

Mettiamo in piedi un processo iterativo di ricerca del genere:

$$\begin{aligned}x_0 &= a \\x_1 &= f(x_0) = f(a) \\x_2 &= f(x_1) = f(f(a)) \\&\dots\end{aligned}$$

Si può provare che la successione $\{x_n\}$ così generata, da qualunque punto muova, converge proprio a $x^* = 2$.

Esempio 271 *Facciamo i primi conti. Partiamo da $x_0 = 0$. Si ha $x_1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1$. Poi: $x_2 = f(x_1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = \frac{3}{2}$. Segue: $x_3 = f(x_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + 1 = 1.75$. I termini così generati s'avvicinano indefinitamente a 2. Quando saremo più bravi saremo in grado di stabilire che:*

$$x_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 2 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Esempio 272 *Cambiamo, per un momento la seconda retta. Invece di $y = \frac{1}{2}x + 1$, prendiamo $y = \frac{3}{2}x - 1$. Il diagramma diviene:*

Il punto d'intersezione tra le due rette ha coordinate uguali (per via che stiamo sulla bisettrice I-III), che risolvono:

$$\frac{3}{2}x - 1 = x$$

e ritroviamo $x^ = 2$. Se, però, proviamo a costruire un processo di ricorrenza, analogo al procedimento sopra, l'esito è del tutto differente. E' utile calcolare la distanza tra le immagini y_1, y_2 di due punti*

¹⁶Nel volumetto si troverà abbondante materiale per giustificare l'eccitazione.

¹⁷Nell'esempio, su cui stiamo facendoci le ossa, è irrealistico. Se però x non è un numero ma una funzione $x \in X$, spazio funzionale, la vergogna è drasticamente ridotta.

$x_1 \neq x_2$. Si ha:

$$|y_1 - y_2| = \left| \frac{3}{2}x_1 - 1 - \left(\frac{3}{2}x_2 - 1 \right) \right| = \frac{3}{2}|x_1 - x_2| > |x_1 - x_2|$$

Esempio 273 Da $x_0 = 0$, otteniamo $x_1 = \frac{3}{2}x_0 - 1 = -1$. Segue: $x_1 = \frac{3}{2}(-1) - 1 = -\frac{5}{2}$ e poi: $x_1 = \frac{3}{2}(-\frac{5}{2}) - 1 = -\frac{19}{4}$ e non s'osserva nulla di simile rispetto al caso precedente. Quando saremo più bravi, riusciremo a calcolare x_n anche in questo caso. Riuscirà:

$$x_n = 2 - 2 \left(\frac{3}{2} \right)^n \rightarrow -\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

E' cruciale capire perché in casi, apparentemente così simili, osserviamo comportamenti così diversi.

Esempio 274 Consideriamo i due casi degli esempi precedenti. Se una successione $\{x_n\}$ parte da $x_0 = x^* = 2$, ivi rimane $\forall n$, quale che sia la legge di ricorrenza:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}2 + 1 = 2 & x_2 = \frac{1}{2}2 + 1 = 2 & \cdots & x_n = \frac{1}{2}2 + 1 = 2 & \cdots \\ x_1 = \frac{3}{2}2 - 1 = 2 & x_2 = \frac{3}{2}2 - 1 = 2 & \cdots & x_n = \frac{3}{2}2 - 1 = 2 & \cdots \end{cases}$$

Se però una successione non parte da $x^* = 2$ si vede la differenza tra i due casi. Ci possiamo spiegare intuitivamente il perché. Con la prima retta le distanze tra punti si riducono (è una contrazione!), mentre nel secondo caso s'allungano (è una dilatazione!).

È ora il momento di vedere come questi fatti, sostanzialmente intuitivi, suggeriscano un teorema assolutamente generale e stupefacente per la sua semplicità.

Teorema 275 del punto fisso (di Banach) — Sia X uno spazio vettoriale normato completo. Sia $\mathbf{c} : X \rightarrow X$ una contrazione. Esiste un unico punto $x^* \in X$ tale che:

$$\mathbf{c}(x^*) = x^*$$

usualmente detto punto fisso di \mathbf{c} .

Dimostrazione. Cominciamo con sbrogliare il tavolo dalla questione d'unicità. Ragioniamo per assurdo. Se ci fossero due punti fissi distinti: x^*, x^{**} (quindi con $d(x^*, x^{**}) > 0$), dovrebbe averci:

$$d(\mathbf{c}(x^*), \mathbf{c}(x^{**})) \leq kd(x^*, x^{**}) \text{ per un } k \in [0, 1) \quad (10.5)$$

ma, poiché i punti sono fissi, dovremmo avere:

$$d(x^*, x^{**}) \leq kd(x^*, x^{**})$$

da cui, dividendo ambo i membri per $d(x^*, x^{**})$:

$$1 \leq k$$

in contraddizione con la (10.5). L'esistenza del punto fisso s'ottiene con la procedura iterativa usata poco sopra.

Partiamo da $x_0 \in X$ e costruiamo per ricorrenza una successione d'elementi di X , come segue:

$$x_{n+1} = \mathbf{c}(x_n)$$

Consideriamo la distanza tra gli elementi d'una generica coppia d'elementi consecutivi nella successione:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq k^n d(x_1, x_0) \quad (10.6)$$

Consideriamo ora due elementi qualsiasi della successione x_m, x_n (con $m > n$). Per la disuguaglianza triangolare, la distanza tra essi non può superare un'opportuna somma di distanze tra elementi consecutivi:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_m, x_{m-1}) \leq$$

Possiamo, a questo punto, usare la (10.6) per maggiorare il secondo membro della disuguaglianza (??) e otteniamo:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq k^n d(x_1, x_0) + k^{n+1} d(x_1, x_0) + \cdots + k^{m-1} d(x_1, x_0) = \\ &= d(x_1, x_0) k^n \frac{1 - k^{m-n}}{1 - k} = d(x_1, x_0) \frac{k^n - k^m}{1 - k} \end{aligned}$$

Poiché $0 \leq k < 1$ la quantità:

$$d(x_1, x_0) \frac{k^n - k^m}{1 - k}$$

può esser resa piccola a piacere per $n < m$ abbastanza grandi. Quindi la successione generata è una successione fondamentale e la completezza di X ci garantisce che converge a un limite x^* in X . Il fatto che $d[\mathbf{c}(x^*), x^*] = 0$ porta con sé che x^* è il punto fisso di \mathbf{c} e, quindi, la sola soluzione di:

$$\mathbf{x} = \mathbf{c}(\mathbf{x})$$

■

Grazie al Teorema del punto fisso di Banach si può ora mostrare il Teorema di Cauchy relativo all'esistenza e unicità della soluzione del problema:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), t] \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \end{cases}$$

Il cuore della dimostrazione d'esistenza e unicità, non ovvio analiticamente, consiste nella costruzione d'una successione di funzioni $\{\mathbf{x}^n\} \in C[0, t]$, che converge a un'unica funzione limite: la soluzione particolare generata dalla "magica coppia" (condizione iniziale, legge del moto).

Mostriamo la costruzione di tale successione di funzioni in un caso semplice. L'intento è l'avvio graduale del lettore alla questione. I lettori possono saltare senza danno l'esempio che segue.

Esempio 276 Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (10.7)$$

unidimensionale, con variabile di stato $x(t) \in \mathbb{R}$. Si può controllare facilmente che le funzioni $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da:

$$x(t) = ce^{\alpha t}$$

con $c \in \mathbb{R}$ qualsiasi, rispettano la legge del moto:

$$x'(t) = \alpha ce^{\alpha t} = \alpha (ce^{\alpha t}) = \alpha x(t)$$

Ovviamente, la condizione iniziale obbliga $c = 1$:

$$x(0) = ce^{\alpha \cdot 0} = 1 \Rightarrow c = 1$$

Quindi la funzione:

$$x(t) = e^{\alpha t}$$

soddisfa sia la condizione iniziale, sia la legge del moto.

Per controllare la sua unicità useremo un procedimento di tipo ricorrente che necessita una riscrittura della legge del moto:

$$x'(t) = f[x(t)]$$

sotto la forma d'equazione integrale. Siamo in piena euristicistica e, quindi lavoriamo per qualche minuto un po' alla buona. Cambiamo nome a t , perché ci ri-servirà l'etichetta t :

$$x'(\tau) = f[x(\tau)] \quad (10.8)$$

Integriamo a membro a membro tra 0 e t :

$$\int_0^t x'(\tau) d\tau = \int_0^t f[x(\tau)] d\tau$$

La continuità di x' ci consente di riscrivere quest'ultima uguaglianza come

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f[x(\tau)] d\tau$$

ossia, nel nostro caso:

$$x(t) = 1 + \int_0^t f[x(\tau)] d\tau \quad (10.9)$$

Si tratta d'un'equazione integrale perché la funzione incognita x compare sotto il segno d'integrale. Quest'equazione è equivalente alla nostra equazione differenziale nel senso che ogni funzione $x(t)$, necessariamente continua, per la quale l'equazione integrale valga è soluzione del problema

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

e viceversa.

Nel nostro caso abbiamo:

$$x(t) = 1 + \int_0^t \alpha x(\tau) d\tau = 1 + \alpha \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (10.10)$$

Siamo pronti per scatenare il processo iterativo. Poiché $x(0) = 1$, partiamo con la funzione costante:

$$x_0(t) \equiv 1$$

Sostituendo tale funzione nel secondo membro della (10.10) otteniamo l'espressione:

$$x_1(t) = 1 + \alpha \int_0^t 1 d\tau = 1 + \alpha t$$

Sostituiamo ora nel secondo membro dell'equazione integrale x_1 al posto di x e troviamo la nuova funzione:

$$x_2(t) = 1 + \alpha \int_0^t (1 + \alpha \tau) d\tau = 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2}$$

Col colpo successivo troveremmo:

$$x_3(t) = 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \frac{(\alpha t)^3}{3!}$$

Si prova facilmente, per esempio per induzione su n , che:

$$x_n(t) = 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \frac{(\alpha t)^3}{3!} + \dots + \frac{(\alpha t)^n}{n!} \quad (10.11)$$

L'espressione di $x_n(t)$ non è altro che la ridotta d'indice n della serie esponenziale (MacLaurin):

$$\sum_{s=0}^n \frac{(\alpha t)^s}{s!}$$

che, come sappiamo, quando $n \rightarrow +\infty$ converge a $x(t) = e^{\alpha t}$ per ogni t . Ciò esclude che possa esistere un'altra traiettoria $y(t)$, distinta da $x(t)$, che soddisfi l'equazione integrale (10.10) e quindi che sia soluzione del problema di Cauchy.

Tutto ciò ci avvicina a quanto illustrato nell'appendice, perché possiamo costruire una trasformazione dello spazio delle funzioni continue su $[0, t]$, denotato come di consueto con $C[0, t]$, in sé. con la trasformazione:

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{x}^* + \int_0^t \mathbf{f}[\mathbf{x}_n(\tau)] d\tau$$

la “miracolosa” trasformazione di $C[0, t]$ in sé, si rivelerà essere una contrazione e la norma usata (cioè la norma del sup) ci garantirà la convergenza di successioni come la $\{\mathbf{x}_n(t)\}$ a una funzione che soddisfa la condizione di partenza e la legge del moto.

Il seguente esempio, collegato al precedente si limita a presentare graficamente qualche elemento della successione di funzioni $\{x_n(t)\}$, con $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 277 Fissiamo nella (10.11) $\alpha = 1$, cosicché:

$$x_n(t) = \sum_{s=0}^n \frac{t^s}{s!}$$

Il diagramma contiene i grafici di $x_n(t)$ per $n = 0, 1, 2, 3$ e il grafico della funzione limite $x(t) = e^t$.

Saremo supportati, come altrove da uno splendido testo che assolutamente raccomandiamo per ulteriori approfondimenti ([13]).

Dimostriamo ora il Teorema di Cauchy, presentato a pag.59 nel caso unidimensionale ovvero per un'equazione differenziale scalare del prim'ordine. Riformuliamo anche l'enunciato per comodità.

Teorema 278 Cauchy — Si consideri il sistema dinamico con legge del moto:

$$x'(t) = f[x(t), t]$$

Se $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(1) è continua;

(2) è lipschitziana rispetto a x con costante di Lipschitz k

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| \leq k \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ e } \forall t \in (t_0 - h, t_0 + h)$$

allora esiste un'unica funzione $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che¹⁸:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f[x(s), s] ds$$

per ogni $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$, con $hk < 1$ e quindi, per l'osservazione 89 a pag. 58, tale che:

$$\begin{cases} x'(t) = f[x(t), t] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$\forall t \in (t_0 - h, t_0 + h)$.

Dimostrazione. Lo spazio $X = C[t_0 - h, t_0 + h]$ è completo sotto la norma $\|\cdot\|_\infty$. Consideriamo la trasformazione $c : X \rightarrow X$, che manda funzioni $\phi, \psi \in X$ in funzioni:

$$\begin{cases} c(\phi)(t) = \int_{t_0}^t f[\phi(s), s] ds \\ c(\psi)(t) = \int_{t_0}^t f[\psi(s), s] ds \end{cases}$$

Lavoriamo dapprima su $[t_0, t_0 + h]$. Mostriamo che la distanza tra $c(\phi)$ e $c(\psi)$ è minore della distanza (del sup) tra ϕ e ψ . Si ha:

$$\begin{aligned} |c(\phi)(t) - c(\psi)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f[\phi(s), s] ds - \int_{t_0}^t f[\psi(s), s] ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f[\phi(s), s] - f[\psi(s), s]| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t k |\phi(s) - \psi(s)| ds \\ &\leq (t - t_0) k \|\phi - \psi\|_\infty \\ &\leq hk \|\phi - \psi\|_\infty \end{aligned}$$

Analogamente si ragiona su $[t_0 - h, t_0]$. Prendendo il sup del primo membro otteniamo:

$$\|c(\phi) - c(\psi)\|_\infty \leq hk \|\phi - \psi\|_\infty$$

che ci dice che c è una contrazione e che, di conseguenza ammette esattamente un punto fisso. ■

L'argomentazione svolta per provare il teorema può essere estesa senza problemi a più dimensioni e consente d'ottenere un analogo risultato per sistemi n -dimensionali. La funzione $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diventa $\mathbf{c} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

¹⁸Si noti che, fatto $t = t_0$ in quest'equazione, segue necessariamente $x(t_0) = x_0$.

10.4 Autovalori e autovettori: il gatto di (Vladimir) Arnold

Vediamo ora un'interessante interpretazione geometrica di autovalori e autovettori.

Consideriamo una trasformazione $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ di tipo lineare $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Chiamiamo A la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Potremmo anche scrivere:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \tag{10.12}$$

La (10.12) trasforma \mathbb{R}^2 in sé. Cerchiamo di capire in che cosa consista tale trasformazione. Escludiamo sistematicamente il caso (peraltro triste) in cui $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, che, fornisce:

$$A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

con qualsiasi A .

Consideriamo il caso specialissimo di una matrice diagonale:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \tag{10.13}$$

Quattro conti ci dicono che questa trasformazione cambia semplicemente la scala di misurazione sui due assi. La quantità x_1 diventa: αx_1 e quindi la nuova unità di misura è $1/\alpha$ la vecchia. Analogamente per l'altra. Un riassunto, a parole della trasformazione è: le lunghezze sono modificate con costante di proporzionalità α per le ascisse e β per le ordinate. Se abbiamo un \mathbf{x} sulle ascisse:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \text{ con } a \text{ qualsiasi}$$

si ha:

$$A\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se, per contro, abbiamo un \mathbf{x} sulle ordinate:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \text{ con } b \text{ qualsiasi}$$

si ha:

$$A\mathbf{x} = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta b \end{bmatrix}$$

La matrice (diagonale):

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

non fa altro che cambiare le unità di misura sui due assi coordinati.

Un modo per capire in che cosa consista una trasformazione lineare consiste nel “vedere” geometricamente che cosa essa fa: si tratta di applicare la trasformazione $A\mathbf{x}$ a ogni punto \mathbf{x} di una figura geometrica, per esempio, nel piano $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

È quasi un *must* usare un “gatto” G :

Se applichiamo la trasformazione $A\mathbf{x}$ a ogni punto del piano cartesiano otteniamo un nuovo gatto, diciamo G_A , che ha subito una deformazione (lineare). Se prendiamo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, otteniamo graficamente:

Con $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ avremmo ottenuto:

Vediamo ora cosa accade con $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

La nuova trasformazione non ha effetti differenti sulle ordinate, ma fa sfracelli sulle ascisse:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ x_1 + \beta x_2 \end{bmatrix}$$

Essa cambia l'unità di misura sull'asse delle ascisse, ma rivoluziona l'asse cartesiano *standard* delle ordinate.

È chiaro che un piano cartesiano può esser fatto funzionare anche con assi diversi dai soliti, cioè non necessariamente ortogonali. Se riferiamo \mathbf{x} ad assi opportuni possiamo tornare anche in questo caso (bastardo) a un cambio d'unità di misura, però su assi che non sono i cartesiani *standard*. Cerchiamo l'asse non *standard*. Dev'essere:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{cases} \alpha x_1 = \lambda x_1 \\ 2x_1 + \beta x_2 = \lambda x_1 + \lambda x_2 \end{cases}$$

se diamo a λ il, valore α , gli infiniti vettori $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ soddisfanno la condizione. Se diamo a λ il valore β troviamo gli infiniti vettori $\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ che la rispettano. Siamo ricacciati sui due assi *standard*.

Ricambiamo A :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \beta \end{bmatrix}$$

Troviamo:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ 2x_1 + \beta x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha - \lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + (\beta - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Vogliamo infinite soluzioni e, quindi:

$$\det \begin{bmatrix} \alpha - \lambda & 2 \\ 2 & \beta - \lambda \end{bmatrix} = (\alpha - \lambda)(\beta - \lambda) - 4 = 0$$

Ci troviamo davanti a un'equazione:

$$(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda) - 4 = 0$$

ossia:

$$\lambda^2 - (\alpha + \beta)\lambda + \alpha\beta - 4 = 0$$

Supponiamo, al solito, $\alpha = 1$, onde $\beta = 2$ cosicch 

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Le due radici dell'equazione sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Con $\lambda = \lambda_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$, troviamo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}x_1 \\ 2x_1 + 2x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}x_2 \end{cases}$$

Infiniti vettori $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ son soluzioni del sistema associato a λ_1 :

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}x_1 \tag{10.14}$$

Ne troviamo analogamente infiniti con λ_2 :

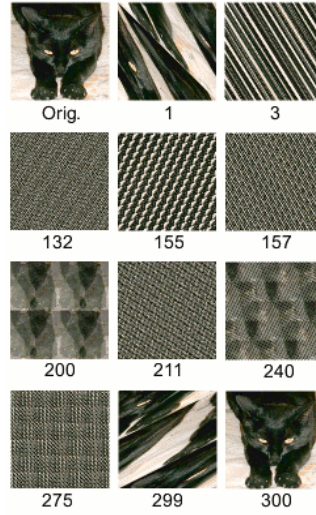
$$x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}x_1 \tag{10.15}$$

Possiamo allora dire che la trasformazione lineare di \mathbb{R}^2 in s  stesso, generata da:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

  leggibile come moltiplicazione per λ_1 e moltiplicazione per λ_2 delle “coordinate” cartesiane sghimbesc  lungo gli assi sghimbesci (10.14) e (10.15).

Nella figura qui sotto vediamo tali assi “sghimbesci” nonch  il nostro ex gatto:



Sul primo, in discesa, le coordinate sono moltiplicate per $\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \approx -0.78078$, che equivale a passare dall'unità di misura vecchia (1) alla nuova

$$\frac{4}{1 - \sqrt{17}} \approx -1.2808$$

(il segno $-$ ci dice anche che s'è rovesciato il verso). Sul secondo asse le coordinate sono state del pari contratte in quanto $\lambda_2 = \frac{\sqrt{17}+1}{4} = 1.2808$, senza però rovesciare il verso. La nuova unità di misura, rispetto alla vecchia (1) è:

$$\frac{4}{\sqrt{17} + 1} \approx 0.78078$$

La trasformazione $A\mathbf{x}$ può essere iterata ottenendo dopo t iterazioni la trasformazione $\mathbf{y} = A^t\mathbf{x}$.

In particolare se gli autovalori di A sono complessi reiterando si ottengono dei cicli: dopo k iterazioni si torna al punto di partenza. Chiudiamo in bellezza con il vero gatto di Arnold che mostra un esempio di ciclo pari a $k = 300$ iterazioni.

Bibliografia

- [1] M. S. BAZARAA, H. D. SHERALI, C. M. SHETTY (1993): *Nonlinear Programming: theory and algorithms*, 2^a ed., J. Wiley & Sons, New York.
- [2] MICHELE BOLDRIN, LUIGI MONTRUCCHIO (1986): “On the indeterminacy of Capital Accumulation Paths”, *Journal of Economic Theory*, **40**, 1, October.
- [3] E. BURMEISTER, R. DOBELL (1975): *Teorie matematiche dello sviluppo economico*, Etas Libri, Milano.
- [4] E. CASTAGNOLI, L. PECCATI (1979): *Matematica per l'analisi economica (Algebra lineare e sistemi dinamici)*, Etas Libri, Milano.
- [5] E. CASTAGNOLI, L. PECCATI (1996): *La matematica in azienda: strumenti e modelli*, fasc. 1-5, 2^a ed., Egea, Milano.
- [6] DONATO M. CIFARELLI, LORENZO PECCATI (1998): *Equazioni differenziali stocastiche con applicazioni economiche e finanziarie*, Egea, Milano.
- [7] J. C. CULIOLI (1994), *Introduction à l'Optimisation*, Edition Marketing, Paris.
- [8] G. GIORGI (1998): *Elementi di algebra lineare*, Giappichelli, Torino.
- [9] A. GUERRAGGIO, S. SALSA (1997): *Metodi matematici per l'economia e le scienze sociali*, Giappichelli, Torino.
- [10] J. H. HUBBARD, B. H. WEST (1995): *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach*, vol 2, (*Higher-Dimensional Systems*), Springer-Verlag, New York.
- [11] M. I. KAMIEN, N. L. SCHWARTZ (2000): *Dynamic Optimization — The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, North-Holland, Amsterdam.
- [12] A. N. KOLMOGOROV, S. V. FOMIN (1980): *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Mir, Mosca.
- [13] T. W. KOERNER (2003): *A Companion to Analysis (a Second First and First Second Course in Analysis)*, American Mathematical Society, Providence.

- [14] D. G. LUENBERGER (1972): *Optimization by Vector Space Methods*, Wiley, New York.
- [15] M. LIVIO (2003): *The Golden Ratio*. Broadway Books, New York.
- [16] C. D. PAGANI, S. SALSA (1990): *Analisi matematica*, voll. 1 e 2, Masson, Milano.
- [17] L. PERKO (1991): *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York.
- [18] L. S. PONTRYAGIN, V.G. BOLTYANSKII, R.V. GAMKRELIDZE, E.F. MISCHCHENKO (1962): *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York, Wiley.
- [19] P. A. SAMUELSON (1939): "Interactions between the Multiplier Analysis and the principle of Acceleration", *The Review of Economics and Statistics*, **21**, No. 2, 75-78.
- [20] E. SALINELLI, F. TOMARELLI (2002): *Modelli discreti dinamici*, Springer-Verlag, Milano.
- [21] S. SALSA, A. SQUELLATI (2007), *Dynamical Systems and Optimal Control*, Egea, Milano.
- [22] G. E. SILOV (1979), *Analisi matematica: funzioni di più variabili reali*, Mir, Mosca.
- [23] C. P. SIMON, L. BLUME (1994), *Mathematics for Economists*, 3^a ed., W. W. Norton & Co., New York.

Indice analitico

Anomalia, *vedi* Argomento

Attrattore, 131

Autospazio, 18

Condizione

di Lipschitz, 58

al contorno, 52

di Cauchy, 185

iniziale, 52

Contrazione, 187

Curva di fase, 149, 151

Equazione caratteristica, 19, 118

Equazione integrale, 191

Eulero

equazione di, 166

formula di, 13

Hamiltoniano, 169

Integrale generale, *vedi* Soluzione generale

Integrale particolare, *vedi* Soluzione particolare

Iterata d'una funzione, 54, 101

Matrice

dei coefficienti, 50

di Cohn-Schur, 140

di controllabilità, 164

di Hurwitz, 142

di transizione, 42, 129

diagonalizzabile, 24

esponenziale, 29

jacobiana, 146

ortonormale, 27

simile, 24

vettorizzazione di, 162

Modello

dell'acceleratore, 43, 46, 128

dell'equilibrio economico generale, 63

della ragnatela, 155

di Keynes, 75

di Poisson, 69, 72

di Solow, 62, 130

logistico, 63, 67, 76

Molteplicità

algebrica, 15, 22

difetto di, 22

geometrica, 22

Norma

del sup, *vedi* della convergenza uniforme

della convergenza uniforme, 177

euclidea, 173

Numero complesso

argomento di, 7

coniugato, 5

modulo di, 6

parte immaginaria di, 2

parte reale di, 2

Piano

delle soluzioni, 148

- di Argand - Gauss, 5
- Polinomio caratteristico, 19
- Problema di Cauchy, 55
- Punto di equilibrio, 125
- Raggio polare, 7
- Soluzione
 - generale, 52
 - locale, 59
 - particolare, 52, 55
- Spazio invariante, *vedi* Autospazio
- Spettro, 20
- Stabilità asintotica
 - globale, 131, 137, 145
 - locale, 131, 146
- Teorema
 - del punto fisso di Banach, 189
 - di Cauchy, 59
 - di Cayley-Hamilton, 163
 - di Peano, 55
 - fondamentale dell'algebra, 15
- Termine forzante, 49
- Unità immaginaria, 3
- Variabile
 - ausiliaria, 169
 - di controllo, 161, 168