Prueba N°2 Física Computacional I - 1S 2023

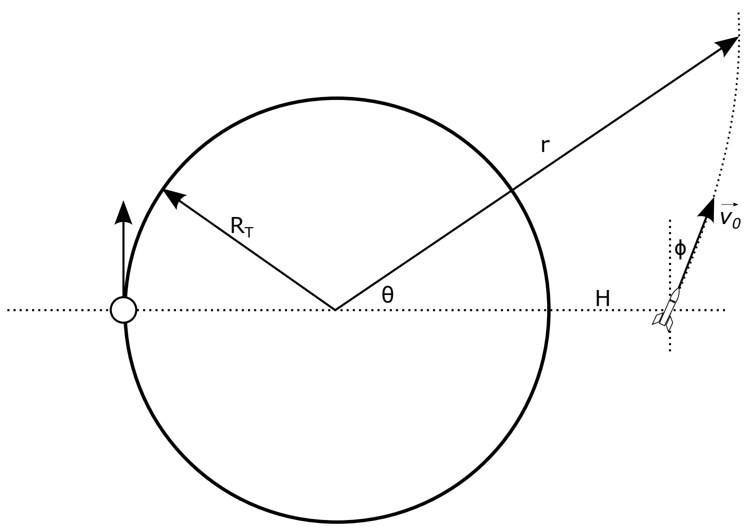
Prof. Guillermo Fonseca Kuvacic

Junio 2023

Prueba con exigencia del 60%. Se necesitan 36 puntos para alcanzar una nota de 4.0.

Pregunta 1 - Proyectil (30 puntos)

La figura muestra un misil que se encuentra a una distancia $H = 1072km$ de la superficie de la tierra.



Las ecuaciones de movimiento del misil, en coordenadas polares, son las siguientes:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM_T}{r^2}$$
$$r\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta}$$

Donde:

- $G = 6.674 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$
- $M_T = 5.972 \times 10^{-24} kg$
- $R_T = 6378100.0m$

El misil parte desde $\theta = 0^{\text{o}}$ y tiene una velocidad inicial $|\vec{v}_0| = 7300m/s$ y un ángulo de lanzamiento $\phi = 15^{\text{o}}$.

Suponga que se desea lanzar un proyectil tangente a la superficie de la tierra desde $\theta = 180^{\text{o}}$ para interceptar al misil. El proyectil está sujeto a las mismas ecuaciones de movimiento del misil.

- Simule el proyectil interceptor estableciendo las condiciones iniciales necesarias para interceptar al misil antes que este alcance una distancia de $2000km$ (en descenso) sobre la superficie de la tierra.

  Hint: Este es un sistema de 4 EDOs de primer orden, y se requiere 4 condiciones para que sea soluble. Como PVI se necesita inicialmente la posición compuesta por el radio y el ángulo, así como también de la velocidad compuesta por la velocidad radial y angular. Concluya que condiciones existen y cuales faltan (es posible que tenga relaciones entre variables en vez de variables explícitas, recordar que esto se conoce como **condición mixta**).

  Finalmente defina las condiciones finales. Para esto puede calcular las condicionas finales del misil y concluir la posición final a la que debe llegar el proyectil. Con esto puede definir un PVF, que puede resolverlo con los métodos visto en clases.

- Construya un gráfico en coordenadas polares de la simulación utilizando gnuplot.

  Hint: El siguiente código le puede ayudar:

  ```
  #La tierra en gnuplot
  set size square 1,1
  set parametric;
  plot [0:2*pi] 6378100.0*sin(t),6378100.0*cos(t)
  ```

Pregunta 2 - Ec. de Schrödinger estacionaria (15 puntos)

Considere la ecuación de Schrödinger estacionaria y unidimensional, como un problema de autovalores:

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi_n(x) + V(x)\phi_n(x) = E_n\phi_n(x)$$

Con condiciones de Dirichlet:

$$\phi_n(0) = 0 \tag{1}$$

$$\phi_n(L) = 0 \tag{2}$$

Considere el potencial:

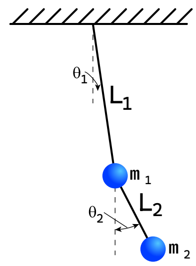
$$V(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 < x < L \\ \infty, \text{ otro caso} \end{cases}$$

Considere L=1 y determine numéricamente los primeros 5 autovalores y autofunciones.

Hint: Puede resolver este problema con el algoritmo de Numerov, junto con el método de shooting y bisección, o puede construir una matriz con diferencias finitas y resolver el problema de autovalor como se vió en clases. Revise Capitulo 10 de *Basic Concepts in Computational Physics* (*Benjamin Stickler & Ewald Schachinger*).

Pregunta 3 - Péndulo doble (15 puntos)

La figura muestra un sistema de un péndulo doble.



Las ecuaciones de movimiento de este sistema son las siguientes:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g(2m_1 + m_2)\operatorname{sen}\theta_1 - m_2 g \operatorname{sen}(\theta_1 - 2\theta_2) - 2\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) m_2(\dot{\theta}_2^2 L_2 + \dot{\theta}_1^2 L_1 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{L_1(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1^2 L_1(m_1 + m_2) + g(m_1 + m_2)\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2^2 L_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))}{L_2(2m_1 + m_2 - m_2\cos(2\theta_1 - 2\theta_2))}$$

Considere las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \theta_1(t=0) &= \pi/2 \\ \dot{\theta}_1(t=0) &= 0 \\ \theta_2(t=3s) &= \pi \\ \dot{\theta}_2(t=3s) &= 0 \end{aligned}$$

Responda las siguientes preguntas.

- ¿A qué tipo de problema corresponde?
- ¿Es posible resolver el problema con los métodos visto en clases? En caso de ser así ¿Qué método utilizaría y porqué?
- Si se aplicara diferencias finitas sobre la ecuación diferencial, ¿Es posible resolver el problema mediante métodos de resolución de sistemas lineales? (como Gauss-Jordan) ¿Porqué?
- Si se utilizara el método de shooting no lineal, ¿Es posible resolver el problema mediante el método de Newton-Raphson (de una variable)? ¿Porqué?.

Explique con sus propias palabras.