

# Optimisation

## Introduction

Nicolas Gillis (nicolas.gillis@umons.ac.be)

Assistant: Arnaud Vandaele (arnaud.vandaele@umons.ac.be)

# Organisation du cours 2016-2017

- ◇ Support: transparents.
- ◇ Parties:
  - ▶ Optimisation linéaire (semaines 2-8, IG + INFO) - formulation, géométrie, méthode du simplexe, dualité et branch and bound.
  - ▶ Optimisation non-linéaire (semaines 9-14, IG) - formulation, conditions d'optimalité, convexité, méthodes de recherche en ligne, etc.
- ◇ Evaluation:
  - ▶ projet (10% chacun)
  - ▶ examen (théorie et exercices)
- ◇ Tout est sur Moodle.
- ◇ Questions?

# Motivation : modélisation et aide à la décision

Aider à choisir la **meilleure** décision

Décision	$\leftrightarrow$	vecteur de variables $x$	} $\Rightarrow$ <b>Optimisation</b>
Meilleure	$\leftrightarrow$	fonction objectif $f$	
Contraintes	$\leftrightarrow$	domaine admissible $\mathcal{D}$	

$$\min_x f(x) \quad \text{tel que} \quad x \in \mathcal{D}.$$

# Motivation : modélisation et aide à la décision

Aider à choisir la **meilleure** décision

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Décision} & \leftrightarrow \text{vecteur de variables } x \\ \text{Meilleure} & \leftrightarrow \text{fonction objectif } f \\ \text{Contraintes} & \leftrightarrow \text{domaine admissible } \mathcal{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Optimisation}$$

$$\min_x f(x) \quad \text{tel que} \quad x \in \mathcal{D}.$$

- ◇ **Nombreuses** applications en pratique
- ◇ Méthodes de résolution **efficaces** en pratique
- ◇ Modélisation et résolution de modèles de **grande** taille

## Exemple 1: Distribution optimale de ressources entre activités concurrentes

Trois ressources  $A$  (bois),  $B$  (clous) et  $C$  (tissu) sont utilisées pour obtenir deux produits  $T$  (table) et  $L$  (lits). On a besoin de: deux unités de bois pour construire une table et trois pour un lit, deux unités de clou pour une table et une pour un lit, et une unité de tissu pour une table et trois pour un lit.

## Exemple 1: Distribution optimale de ressources entre activités concurrentes

Trois ressources  $A$  (bois),  $B$  (clous) et  $C$  (tissu) sont utilisées pour obtenir deux produits  $T$  (table) et  $L$  (lits). On a besoin de: deux unités de bois pour construire une table et trois pour un lit, deux unités de clou pour une table et une pour un lit, et une unité de tissu pour une table et trois pour un lit.

On dispose de 13 unités de  $A$ , 11 de  $B$  et 9 de  $C$ . Les produits  $T$  et  $L$  rapportent, respectivement, 300 et 400 euros par unités produites.

## Exemple 1: Distribution optimale de ressources entre activités concurrentes

Trois ressources  $A$  (bois),  $B$  (clous) et  $C$  (tissu) sont utilisées pour obtenir deux produits  $T$  (table) et  $L$  (lits). On a besoin de: deux unités de bois pour construire une table et trois pour un lit, deux unités de clou pour une table et une pour un lit, et une unité de tissu pour une table et trois pour un lit.

On dispose de 13 unités de  $A$ , 11 de  $B$  et 9 de  $C$ . Les produits  $T$  et  $L$  rapportent, respectivement, 300 et 400 euros par unités produites.

Combien d'unités de  $L$  et  $T$  faut-il produire pour maximiser le profit?

# Exemple 1: Formulation

## 1. Choix des variables:



## Exemple 1: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_1$  unités de  $T$ ,  $x_2$  unité de  $L$ .

## Exemple 1: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_1$  unités de  $T$ ,  $x_2$  unité de  $L$ .
2. **Contraintes:**

## Exemple 1: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_1$  unités de  $T$ ,  $x_2$  unité de  $L$ .
2. **Contraintes:**

$$2x_1 + 3x_2 \leq 13, \quad (\text{resource A})$$

## Exemple 1: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_1$  unités de  $T$ ,  $x_2$  unité de  $L$ .
2. **Contraintes:**

$$2x_1 + 3x_2 \leq 13, \quad (\text{resource A})$$

$$2x_1 + x_2 \leq 11, \quad (\text{resource B})$$

## Exemple 1: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_1$  unités de  $T$ ,  $x_2$  unité de  $L$ .
2. **Contraintes:**

$$2x_1 + 3x_2 \leq 13, \quad (\text{resource A})$$

$$2x_1 + x_2 \leq 11, \quad (\text{resource B})$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9, \quad (\text{resource C})$$

## Exemple 1: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_1$  unités de  $T$ ,  $x_2$  unité de  $L$ .
2. **Contraintes:**

$$2x_1 + 3x_2 \leq 13, \quad (\text{resource A})$$

$$2x_1 + x_2 \leq 11, \quad (\text{resource B})$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9, \quad (\text{resource C})$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

## Exemple 1: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_1$  unités de  $T$ ,  $x_2$  unité de  $L$ .

2. **Contraintes:**

$$2x_1 + 3x_2 \leq 13, \quad (\text{resource A})$$

$$2x_1 + x_2 \leq 11, \quad (\text{resource B})$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9, \quad (\text{resource C})$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. **Fonction objectif:**

$$\max_{x_1, x_2} 300x_1 + 400x_2.$$

## Exemple 1: Interprétation géométrique

Les couples  $(x_1, x_2)$  pour lesquels

$$2x_1 + 3x_2 \leq 13,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 11,$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9, \text{ et}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

est un **polyèdre** de  $\mathbb{R}^2$ .



## Exemple 1: Interprétation géométrique

Les couples  $(x_1, x_2)$  pour lesquels

$$2x_1 + 3x_2 \leq 13,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 11,$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9, \text{ et}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

est un **polyèdre** de  $\mathbb{R}^2$ .

Pour un scalaire  $z$  donné, l'ensemble

$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 300x_1 + 400x_2 = z\}$  est une droite perpendiculaire au vecteur  $c = (3, 4)$ . Les droites obtenues pour différentes valeurs de  $z$  sont parallèles. Une solution optimale s'obtient en translatant cette droite **le plus loin possible**. La solution optimale s'obtient en un **sommet** du polyèdre.

## Exemple 1: Interprétation géométrique

Les couples  $(x_1, x_2)$  pour lesquels

$$2x_1 + 3x_2 \leq 13,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 11,$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9, \text{ et}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

est un **polyèdre** de  $\mathbb{R}^2$ .

Pour un scalaire  $z$  donné, l'ensemble

$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 300x_1 + 400x_2 = z\}$  est une droite perpendiculaire au vecteur  $c = (3, 4)$ . Les droites obtenues pour différentes valeurs de  $z$  sont parallèles. Une solution optimale s'obtient en translatant cette droite **le plus loin possible**. La solution optimale s'obtient en un **sommet** du polyèdre.

**Solution:** 1 unités de  $L$  et 5 unités de  $T$  pour un profit de 1900.

## Exemple 2: Problème du mélange (ou de diététique)

Cette semaine, votre entraîneur sportif (ou diététicien(ne) ou ...) vous recommande de consommer 10 unité de vitamine A, 8 unités de vitamines B et 7 unités de vitamines C.

Vous ne voulez manger que des pommes et des bananes, dont les quantités de vitamines et le prix par unité est:

	Vit. A	Vit. B	Vit. C	prix
pommes	2	1	1	4
bananes	1	2	1	3
Total à consommer	10	8	7	

**Table:** Données (par unité).

## Exemple 2: Formulation

### 1. Choix des variables:

## Exemple 2: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_1$  est la quantité de pommes achetées,  $x_2$  la quantité de bananes

## Exemple 2: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_1$  est la quantité de pommes achetées,  $x_2$  la quantité de bananes
2. **Contraintes:**

## Exemple 2: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_1$  est la quantité de pommes achetées,  $x_2$  la quantité de bananes

2. **Contraintes:**

$$2x_1 + x_2 \geq 10, \quad (\text{vitamine A})$$

## Exemple 2: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_1$  est la quantité de pommes achetées,  $x_2$  la quantité de bananes

2. **Contraintes:**

$$2x_1 + x_2 \geq 10, \quad (\text{vitamine A})$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8, \quad (\text{vitamine B})$$



## Exemple 2: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_1$  est la quantité de pommes achetées,  $x_2$  la quantité de bananes

2. **Contraintes:**

$$2x_1 + x_2 \geq 10, \quad (\text{vitamine A})$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8, \quad (\text{vitamine B})$$

$$x_1 + x_2 \geq 7, \quad (\text{vitamine C})$$

## Exemple 2: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_1$  est la quantité de pommes achetées,  $x_2$  la quantité de bananes

2. **Contraintes:**

$$2x_1 + x_2 \geq 10, \quad (\text{vitamine A})$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8, \quad (\text{vitamine B})$$

$$x_1 + x_2 \geq 7, \quad (\text{vitamine C})$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. **Fonction objectif:** le coût total est minimum

$$\min_{x_1, x_2} 4x_1 + 3x_2.$$

## Exemple 2: Formulation

$$\begin{array}{ll}\min_{x_1, x_2} & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{tel que} & 2x_1 + x_2 \geq 10, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ & x_1 + x_2 \geq 7, \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{array}$$

Pouvez-vous résoudre ce problème géométriquement?

## Exemple 2: Formulation

$$\begin{array}{ll}\min_{x_1, x_2} & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{tel que} & 2x_1 + x_2 \geq 10, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ & x_1 + x_2 \geq 7, \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{array}$$

Pouvez-vous résoudre ce problème géométriquement?

Comment faire s'il y a beaucoup plus d'aliments (càd de variables) et de vitamines à obtenir (càd de contraintes)?

Répondre à cette question est un des objectifs principaux de ce cours.

## Exemple 3: Problème de transport

Un produit est transportée de  $m$  origines vers  $n$  destinations. Le produit est disponible en quantités  $a_1, a_2, \dots, a_m$  aux origines et les demandes aux destinations sont de  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Le coût de transport d'une unité du produit de l'origine  $i$  à la destination  $j$  est de  $c_{ij}$  (par exemple, la distance entre  $i$  et  $j$ ).

## Exemple 3: Problème de transport

Un produit est transportée de  $m$  origines vers  $n$  destinations. Le produit est disponible en quantités  $a_1, a_2, \dots, a_m$  aux origines et les demandes aux destinations sont de  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Le coût de transport d'une unité du produit de l'origine  $i$  à la destination  $j$  est de  $c_{ij}$  (par exemple, la distance entre  $i$  et  $j$ ).

On désire déterminer les quantités du produit à transporter de  $i$  à  $j$  de manière à satisfaire les demandes tout en minimisant le coût total des transports.

## Exemple 3: Formulation

### 1. Choix des variables:

## Exemple 3: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_{ij}$  la quantité de produit à transporter de  $i$  à  $j$



## Exemple 3: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_{ij}$  la quantité de produit à transporter de  $i$  à  $j$
2. **Contraintes:**

## Exemple 3: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_{ij}$  la quantité de produit à transporter de  $i$  à  $j$
2. **Contraintes:**

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i \quad \forall i, \quad (\text{resource disponible en } i)$$

## Exemple 3: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_{ij}$  la quantité de produit à transporter de  $i$  à  $j$
2. **Contraintes:**

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i \quad \forall i, \quad (\text{resource disponible en } i)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \geq b_j \quad \forall j, \quad (\text{resource nécessaire en } j)$$

## Exemple 3: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_{ij}$  la quantité de produit à transporter de  $i$  à  $j$
2. **Contraintes:**

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i \quad \forall i, \quad (\text{resource disponible en } i)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \geq b_j \quad \forall j, \quad (\text{resource nécessaire en } j)$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

## Exemple 3: Formulation

1. **Choix des variables:**  $x_{ij}$  la quantité de produit à transporter de  $i$  à  $j$
2. **Contraintes:**

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i \quad \forall i, \quad (\text{resource disponible en } i)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \geq b_j \quad \forall j, \quad (\text{resource nécessaire en } j)$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

3. **Fonction objectif:** le coût total est minimum

$$\min_x \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}.$$

**Question.** Quelle est une condition nécessaire et suffisante pour que le problème soit soluble?

# Applications

- ◇ Planification, gestion et ordonnancement

Production, horaires, composition d'équipages, etc.

# Applications

- ◇ **Planification, gestion et ordonnancement**  
Production, horaires, composition d'équipages, etc.
- ◇ **Design et conception**  
Dimensionnement, optimisation de structures, de réseaux

# Applications

- ◇ **Planification, gestion et ordonnancement**  
Production, horaires, composition d'équipages, etc.
- ◇ **Design et conception**  
Dimensionnement, optimisation de structures, de réseaux
- ◇ **Économie et finances**  
Choix de portefeuille, calcul d'équilibres



# Applications

- ◇ **Planification, gestion et ordonnancement**  
Production, horaires, composition d'équipages, etc.
- ◇ **Design et conception**  
Dimensionnement, optimisation de structures, de réseaux
- ◇ **Économie et finances**  
Choix de portefeuille, calcul d'équilibres
- ◇ **Localisation et transport**  
Placement de dépôts, de circuits intégrés, tournées

# Applications

- ◇ **Planification, gestion et ordonnancement**  
Production, horaires, composition d'équipages, etc.
- ◇ **Design et conception**  
Dimensionnement, optimisation de structures, de réseaux
- ◇ **Économie et finances**  
Choix de portefeuille, calcul d'équilibres
- ◇ **Localisation et transport**  
Placement de dépôts, de circuits intégrés, tournées
- ◇ **Analyse de données, machine learning**  
Système de recommandation (Netflix, Amazon, etc.), analyse d'image (p.ex., segmentation), classification automatique de documents, regroupement (clustering), etc.

# Applications

- ◇ **Planification, gestion et ordonnancement**  
Production, horaires, composition d'équipages, etc.
- ◇ **Design et conception**  
Dimensionnement, optimisation de structures, de réseaux
- ◇ **Économie et finances**  
Choix de portefeuille, calcul d'équilibres
- ◇ **Localisation et transport**  
Placement de dépôts, de circuits intégrés, tournées
- ◇ **Analyse de données, machine learning**  
Système de recommandation (Netflix, Amazon, etc.), analyse d'image (p.ex., segmentation), classification automatique de documents, regroupement (clustering), etc.
- ◇ **Et beaucoup d'autres...**

# Les deux visages de l'optimisation

## 1. Modélisation

Traduction en langage mathématique du problème  
(tâche plus **délicate** qu'il n'y paraît)



**Formulation** d'un problème d'optimisation

## 2. Résolution

Développement et implémentation d'algorithmes de résolution  
efficaces en **théorie** et en **pratique**

# Les deux visages de l'optimisation

## 1. Modélisation

Traduction en langage mathématique du problème  
(tâche plus **délicate** qu'il n'y paraît)



**Formulation** d'un problème d'optimisation

## 2. Résolution

Développement et implémentation d'algorithmes de résolution  
efficaces en **théorie** et en **pratique**

Relation **étroite**:

- ◇ Formuler des modèles que l'on sait résoudre
- ◇ Développer des méthodes applicables à des modèles réalistes

# Optimisation

- ◇ Les problèmes d'optimisation possèdent souvent des milliers de variables et de contraintes. Ils possèdent rarement une solution analytique.

# Optimisation

- ◇ Les problèmes d'optimisation possèdent souvent des milliers de variables et de contraintes. Ils possèdent rarement une solution analytique.
- ◇ Nous souhaitons des algorithmes d'optimisation rapides, faciles à mettre en oeuvre, peu gourmands en temps calcul, peu gourmands en mémoire, peu sensibles aux erreurs d'arrondis, dont la convergence est assurée et qui permettent une analyse post-optimale (idéalement!).

# Optimisation

- ◇ Les problèmes d'optimisation possèdent souvent des milliers de variables et de contraintes. Ils possèdent rarement une solution analytique.
- ◇ Nous souhaitons des algorithmes d'optimisation rapides, faciles à mettre en oeuvre, peu gourmands en temps calcul, peu gourmands en mémoire, peu sensibles aux erreurs d'arrondis, dont la convergence est assurée et qui permettent une analyse post-optimale (idéalement!).
- ◇ La modélisation est un aspect crucial de l'optimisation.



# Optimisation

- ◇ Les problèmes d'optimisation possèdent souvent des milliers de variables et de contraintes. Ils possèdent rarement une solution analytique.
- ◇ Nous souhaitons des algorithmes d'optimisation rapides, faciles à mettre en oeuvre, peu gourmands en temps calcul, peu gourmands en mémoire, peu sensibles aux erreurs d'arrondis, dont la convergence est assurée et qui permettent une analyse post-optimale (idéalement!).
- ◇ La modélisation est un aspect crucial de l'optimisation.
- ◇ Un modèle n'est qu'un modèle. Nous vivons dans de l'approximatif satisfaisant. Nous ne cherchons pas toujours à optimiser exactement mais bien souvent à optimiser de façon satisfaisante ('satismiser').

# Optimisation

- ◇ Les problèmes d'optimisation possèdent souvent des milliers de variables et de contraintes. Ils possèdent rarement une solution analytique.
- ◇ Nous souhaitons des algorithmes d'optimisation rapides, faciles à mettre en oeuvre, peu gourmands en temps calcul, peu gourmands en mémoire, peu sensibles aux erreurs d'arrondis, dont la convergence est assurée et qui permettent une analyse post-optimale (idéalement!).
- ◇ La modélisation est un aspect crucial de l'optimisation.
- ◇ Un modèle n'est qu'un modèle. Nous vivons dans de l'approximatif satisfaisant. Nous ne cherchons pas toujours à optimiser exactement mais bien souvent à optimiser de façon satisfaisante ('satisminer').
- ◇ A chaque modèle sa méthode de résolution. Plus la classe de modèles dans laquelle on se trouve est précise, plus la méthode utilisée peut être efficace.

# Optimisation

- ◇ Les problèmes d'optimisation possèdent souvent des milliers de variables et de contraintes. Ils possèdent rarement une solution analytique.
- ◇ Nous souhaitons des algorithmes d'optimisation rapides, faciles à mettre en oeuvre, peu gourmands en temps calcul, peu gourmands en mémoire, peu sensibles aux erreurs d'arrondis, dont la convergence est assurée et qui permettent une analyse post-optimale (idéalement!).
- ◇ La modélisation est un aspect crucial de l'optimisation.
- ◇ Un modèle n'est qu'un modèle. Nous vivons dans de l'approximatif satisfaisant. Nous ne cherchons pas toujours à optimiser exactement mais bien souvent à optimiser de façon satisfaisante ('satisminer').
- ◇ A chaque modèle sa méthode de résolution. Plus la classe de modèles dans laquelle on se trouve est précise, plus la méthode utilisée peut être efficace.
- ◇ En général, compromis entre la qualité du modèle, sa complexité, et la méthode de résolution (résolution exacte ou approchée - heuristiques).

# Taxonomie (hiérarchie/types de problèmes d'optimisation)

$$\min_{x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dans le domaine admissible  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}$ .

- ◇ **Variables:** continues, discrètes, binaires, etc.



# Taxonomie (hiérarchie/types de problèmes d'optimisation)

$$\min_{x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dans le domaine admissible  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}$ .

◇ **Variables:** continues, discrètes, binaires, etc.



◇ **Contraintes:** (sans), linéaires, convexe, entières, booléennes, etc.

# Taxonomie (hiérarchie/types de problèmes d'optimisation)

$$\min_{x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dans le domaine admissible  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}$ .

◇ **Variables:** continues, discrètes, binaires, etc.



◇ **Contraintes:** (sans), linéaires, convexe, entières, booléennes, etc.

◇ **Objectif:** linéaire, quadratique, non-linéaire, non-différentiable, polynomiale, convexe, etc.

# Taxonomie (hiérarchie/types de problèmes d'optimisation)

$$\min_{x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dans le domaine admissible  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}$ .

◇ **Variables:** continues, discrètes, binaires, etc.



◇ **Contraintes:** (sans), linéaires, convexe, entières, booléennes, etc.

◇ **Objectif:** linéaire, quadratique, non-linéaire, non-différentiable, polynomiale, convexe, etc.

Mais aussi...

**Modèles:** Optimisation multicritère, modèles stochastiques, modèles temporels, etc.

# Taxonomie (hiérarchie/types de problèmes d'optimisation)

$$\min_{x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dans le domaine admissible  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}$ .

◇ **Variables:** continues, discrètes, binaires, etc.



◇ **Contraintes:** (sans), linéaires, convexe, entières, booléennes, etc.

◇ **Objectif:** linéaire, quadratique, non-linéaire, non-différentiable, polynomiale, convexe, etc.

Mais aussi...

**Modèles:** Optimisation multicritère, modèles stochastiques, modèles temporels, etc.

Changer de catégorie: parfois possible via **reformulation**



# Terminologie : admissibilité

Problème en dimension **finie**

Décision	$\leftrightarrow$	vecteur de variables $x$	} $\Rightarrow$ <b>Optimisation</b>
Meilleure	$\leftrightarrow$	fonction objectif $f$	
Contraintes	$\leftrightarrow$	domaine admissible $\mathcal{D}$	

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D}$$

# Terminologie : admissibilité

Problème en dimension **finie**

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Décision} & \leftrightarrow \text{vecteur de variables } x \\ \text{Meilleure} & \leftrightarrow \text{fonction objectif } f \\ \text{Contraintes} & \leftrightarrow \text{domaine admissible } \mathcal{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Optimisation}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D}$$

- ◇ Tout point  $x$  appartenant au domaine admissible est appelé **solution admissible**
- ◇ Lorsque  $\mathcal{D} \neq \emptyset$ , le problème est dit **admissible** ou **possible** (*feasible*)
- ◇ Lorsque  $\mathcal{D} = \emptyset$ , le problème est dit **non admissible** ou **impossible** (*infeasible*)

# Terminologie : valeur optimale

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D}.$$

- ◇ La **valeur optimale** du problème, notée  $f^*$ , est l'infimum des valeurs de la fonction objectif pour les solutions admissibles, c-à-d

$$f^* = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

# Terminologie : valeur optimale

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D}.$$

- ◇ La **valeur optimale** du problème, notée  $f^*$ , est l'infimum des valeurs de la fonction objectif pour les solutions admissibles, c-à-d

$$f^* = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

- ◇ Lorsque  $f^*$  est finie, on parle de problème **borné**.

# Terminologie : valeur optimale

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D}.$$

- ◇ La **valeur optimale** du problème, notée  $f^*$ , est l'infimum des valeurs de la fonction objectif pour les solutions admissibles, c-à-d

$$f^* = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

- ◇ Lorsque  $f^*$  est finie, on parle de problème **borné**.
- ◇ Lorsque  $f^* = -\infty$ , on parle de problème **non-borné**.

# Terminologie : valeur optimale

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D}.$$

- ◇ La **valeur optimale** du problème, notée  $f^*$ , est l'infimum des valeurs de la fonction objectif pour les solutions admissibles, c-à-d

$$f^* = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

- ◇ Lorsque  $f^*$  est finie, on parle de problème **borné**.
- ◇ Lorsque  $f^* = -\infty$ , on parle de problème **non-borné**.
- ◇ Lorsque le problème est impossible, on pose par convention  $f^* = +\infty$  (pire valeur possible pour un minimum).

# Terminologie : solubilité

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f^* = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

- ◇ Une **solution optimale**, notée  $x^*$ , est une solution admissible qui possède la valeur optimale, c-à-d

$$x^* \text{ est une solution optimale} \quad \Leftrightarrow \quad x^* \in \mathcal{D} \text{ et } f(x^*) = f^*.$$

# Terminologie : solubilité

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f^* = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

- ◇ Une **solution optimale**, notée  $x^*$ , est une solution admissible qui possède la valeur optimale, c-à-d

$$x^* \text{ est une solution optimale} \quad \Leftrightarrow \quad x^* \in \mathcal{D} \text{ et } f(x^*) = f^*.$$

- ◇ Cette dernière propriété peut s'écrire de façon équivalente comme

$$x^* \in \mathcal{D} \text{ et } f(x^*) \leq f(y) \text{ pour toute solution admissible } y \in \mathcal{D}, \text{ ou} \\ x^* \in \mathcal{D} \text{ et aucune solution admissible } y \in \mathcal{D} \text{ ne vérifie } f(y) < f(x^*)$$



# Terminologie : solubilité

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f^* = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

- ◇ Une **solution optimale**, notée  $x^*$ , est une solution admissible qui possède la valeur optimale, c-à-d

$$x^* \text{ est une solution optimale} \quad \Leftrightarrow \quad x^* \in \mathcal{D} \text{ et } f(x^*) = f^*.$$

- ◇ Cette dernière propriété peut s'écrire de façon équivalente comme

$$x^* \in \mathcal{D} \text{ et } f(x^*) \leq f(y) \text{ pour toute solution admissible } y \in \mathcal{D}, \text{ ou}$$

$$x^* \in \mathcal{D} \text{ et aucune solution admissible } y \in \mathcal{D} \text{ ne vérifie } f(y) < f(x^*)$$

- ◇ Un problème qui possède (au moins) une solution optimale est dit **soluble** (*solvable*), sinon il est dit **insoluble**

# Terminologie : solubilité

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f^* = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

- ◇ Une **solution optimale**, notée  $x^*$ , est une solution admissible qui possède la valeur optimale, c-à-d

$$x^* \text{ est une solution optimale} \quad \Leftrightarrow \quad x^* \in \mathcal{D} \text{ et } f(x^*) = f^*.$$

- ◇ Cette dernière propriété peut s'écrire de façon équivalente comme

$$x^* \in \mathcal{D} \text{ et } f(x^*) \leq f(y) \text{ pour toute solution admissible } y \in \mathcal{D}, \text{ ou}$$

$$x^* \in \mathcal{D} \text{ et aucune solution admissible } y \in \mathcal{D} \text{ ne vérifie } f(y) < f(x^*)$$

- ◇ Un problème qui possède (au moins) une solution optimale est dit **soluble** (*solvable*), sinon il est dit **insoluble**
- ◇ Un problème impossible ou non borné n'est jamais soluble, mais il existe aussi des problèmes admissibles, bornés et insolubles (par exemple  $\min \frac{1}{x}$  tel que  $x > 0$  donne  $f^* = 0$  mais est insoluble)

## Exemple

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 = c^T x \\ \text{tel que} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Solutions optimales pour différentes fonctions objectif:

- ◇  $c = (1, 1)$ . Solution optimale unique  $(0, 0)$ .

## Exemple

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 = c^T x \\ \text{tel que} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Solutions optimales pour différentes fonctions objectif:

- ◇  $c = (1, 1)$ . Solution optimale unique  $(0, 0)$ .
- ◇  $c = (1, 0)$ . Ensemble infini et borné de solutions optimales:  $\{(0, x_2) | 0 \leq x_2 \leq 1\}$ .

## Exemple

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 = c^T x \\ \text{tel que} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Solutions optimales pour différentes fonctions objectif:

- ◇  $c = (1, 1)$ . Solution optimale unique  $(0, 0)$ .
- ◇  $c = (1, 0)$ . Ensemble infini et borné de solutions optimales:  
 $\{(0, x_2) | 0 \leq x_2 \leq 1\}$ .
- ◇  $c = (0, 1)$ . Ensemble infini et non borné de solutions optimales  
 $\{(x_1, 0) | 0 \leq x_1\}$ .

## Exemple

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 = c^T x \\ \text{tel que} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Solutions optimales pour différentes fonctions objectif:

- ◇  $c = (1, 1)$ . Solution optimale unique  $(0, 0)$ .
- ◇  $c = (1, 0)$ . Ensemble infini et borné de solutions optimales:  
 $\{(0, x_2) | 0 \leq x_2 \leq 1\}$ .
- ◇  $c = (0, 1)$ . Ensemble infini et non borné de solutions optimales  
 $\{(x_1, 0) | 0 \leq x_1\}$ .
- ◇  $c = (-1, -1)$ . Coût optimal non borné ( $f^* = -\infty$ ).  
( $x_1 = x_2 \rightarrow +\infty$ )

# Terminologie : types de problèmes

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f^* = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

Sans perte de généralité, on peut ne considérer que la **minimisation**.

Si maximisation, on a l'équivalence entre solutions optimales

$$x^* \text{ optimal pour } \max_{x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^* \text{ optimal pour } \min_{x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n} -f(x),$$

et pour les valeurs optimales (avec un **double** signe moins):

$$\sup \{f(x) \mid x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n\} = - \inf \{-f(x) \mid x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$

# Terminologie : types de problèmes

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f^* = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

Sans perte de généralité, on peut ne considérer que la **minimisation**.

Si maximisation, on a l'équivalence entre solutions optimales

$$x^* \text{ optimal pour } \max_{x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^* \text{ optimal pour } \min_{x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n} -f(x),$$

et pour les valeurs optimales (avec un **double** signe moins):

$$\sup \{f(x) \mid x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n\} = - \inf \{-f(x) \mid x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$

Le problème de la recherche d'un point admissible (sans fonction objectif) est un cas particulier de problème d'optimisation, et peut s'exprimer formellement à l'aide d'une fonction objectif constante (ou nulle)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} 0 \text{ tel que } x \in \mathcal{D}.$$



# Description du domaine admissible

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D}.$$

Le domaine  $\mathcal{D}$  est souvent défini à l'aide de **contraintes** fonctionnelles:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) = 0 \text{ pour } i \in \mathcal{E} \text{ et } h_i(x) \geq 0 \text{ pour } i \in \mathcal{I}\}.$$

- ◇ les  $h_i$  sont des fonctions (scalaires) à  $n$  variables définies sur tout  $\mathbb{R}^n$
- ◇  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{I}$  sont des ensembles d'**indices** repérant les contraintes (ils peuvent éventuellement être vides)
- ◇  $h_i(x) = 0$  est une **contrainte d'égalité** pour tout indice  $i \in \mathcal{E}$
- ◇  $h_i(x) \geq 0$  est une **contrainte d'inégalité** pour tout indice  $i \in \mathcal{I}$
- ◇ Membres de droite des inégalités sont à zéro sans perte de généralité
- ◇ Le problème de départ peut également s'écrire

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } h_i(x) = 0 \text{ pour } i \in \mathcal{E} \text{ et } h_i(x) \geq 0 \text{ pour } i \in \mathcal{I}.$$

## Cas particulier : optimisation linéaire

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } h_i(x) = 0 \text{ pour } i \in \mathcal{E} \text{ et } h_i(x) \geq 0 \text{ pour } i \in \mathcal{I}$$

est appelé problème d'**optimisation linéaire** lorsque toutes les fonctions sont **linéaires** ou **affines** :

- ◇ Objectif :  $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$  (terme constant inutile)
- ◇ Contraintes :  $h_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i$

d'où la formulation équivalente

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \text{ tel que } a_i^T x = b_i \text{ pour } i \in \mathcal{E} \text{ et } a_i^T x \geq b_i \text{ pour } i \in \mathcal{I},$$

avec les vecteurs colonnes  $c = (c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n)^T$ , et  $a_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})^T$  définis pour tout  $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$

# Linéaire vs. non-linéaire

- ◇ Pourquoi étudier l'optimisation linéaire ?

# Linéaire vs. non-linéaire

- ◇ Pourquoi étudier l'optimisation linéaire ?
  - ▶ Parce que de nombreux problèmes sont modélisables linéairement

# Linéaire vs. non-linéaire

- ◇ Pourquoi étudier l'optimisation linéaire ?
  - ▶ Parce que de nombreux problèmes sont modélisables linéairement
  - ▶ Parce qu'il existe un algorithme très efficace (l'algorithme du simplexe) pour résoudre ces problèmes

# Linéaire vs. non-linéaire

- ◇ Pourquoi étudier l'optimisation linéaire ?
  - ▶ Parce que de nombreux problèmes sont modélisables linéairement
  - ▶ Parce qu'il existe un algorithme très efficace (l'algorithme du simplexe) pour résoudre ces problèmes
  - ▶ Parce que ces problèmes disposent d'une structure très riche (propriétés d'optimalité, de dualité)

# Linéaire vs. non-linéaire

- ◇ Pourquoi étudier l'optimisation linéaire ?
  - ▶ Parce que de nombreux problèmes sont modélisables linéairement
  - ▶ Parce qu'il existe un algorithme très efficace (l'algorithme du simplexe) pour résoudre ces problèmes
  - ▶ Parce que ces problèmes disposent d'une structure très riche (propriétés d'optimalité, de dualité)
- ◇ Pourquoi étudier l'optimisation non-linéaire ?

# Linéaire vs. non-linéaire

- ◇ Pourquoi étudier l'optimisation linéaire ?
  - ▶ Parce que de nombreux problèmes sont modélisables linéairement
  - ▶ Parce qu'il existe un algorithme très efficace (l'algorithme du simplexe) pour résoudre ces problèmes
  - ▶ Parce que ces problèmes disposent d'une structure très riche (propriétés d'optimalité, de dualité)
- ◇ Pourquoi étudier l'optimisation non-linéaire ?
  - ▶ Parce certains problèmes sont impossibles à modéliser linéairement



# Linéaire vs. non-linéaire

- ◇ Pourquoi étudier l'optimisation linéaire ?
  - ▶ Parce que de nombreux problèmes sont modélisables linéairement
  - ▶ Parce qu'il existe un algorithme très efficace (l'algorithme du simplexe) pour résoudre ces problèmes
  - ▶ Parce que ces problèmes disposent d'une structure très riche (propriétés d'optimalité, de dualité)
- ◇ Pourquoi étudier l'optimisation non-linéaire ?
  - ▶ Parce certains problèmes sont impossibles à modéliser linéairement
  - ▶ Parce que l'algorithme du simplexe pour l'optimisation linéaire est inapplicable aux problèmes non-linéaires

# Linéaire vs. non-linéaire

- ◇ Pourquoi étudier l'optimisation linéaire ?
  - ▶ Parce que de nombreux problèmes sont modélisables linéairement
  - ▶ Parce qu'il existe un algorithme très efficace (l'algorithme du simplexe) pour résoudre ces problèmes
  - ▶ Parce que ces problèmes disposent d'une structure très riche (propriétés d'optimalité, de dualité)
- ◇ Pourquoi étudier l'optimisation non-linéaire ?
  - ▶ Parce certains problèmes sont impossibles à modéliser linéairement
  - ▶ Parce que l'algorithme du simplexe pour l'optimisation linéaire est inapplicable aux problèmes non-linéaires
  - ▶ Parce qu'il existe des liens étroits entre la formulation (choix du modèle) et la résolution (choix de la méthode) d'un problème d'optimisation non-linéaire

## Partie I – Optimisation linéaire (première moitié du cours)

1. Formulations (forme standard, géométrique, reformulations, etc.)
2. Géométrie des polyèdres
3. Algorithme du simplexe
4. Dualité
5. Optimisation en nombres entiers
6. Applications

## Partie II – Optimisation non-linéaire (seconde moitié du cours)