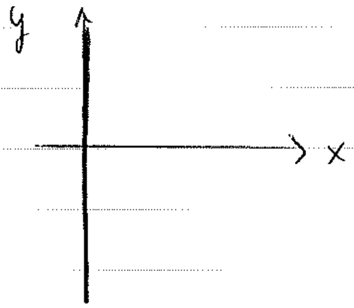
1.1. (a) FAUX. Le cube $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \le x_i \le 1,\ i=1,2,\dots n\}$ en dimension n possède 2^n sommets et seulement $2n$ contraintes : $2n \ll 2^n$ (pour $n \ge 3$).

(b) VRAI. Ex. 1) $\min_{x,y}\ x$ tel que $x \ge 0$.



Sol. optimales $= \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

2) $\min_{x,y}\ x+y$ tel que $x+y \ge 1$

(c) VRAI. Le point $(1,2,6)$

- satisfait toutes les contraintes (il appartient au polyèdre)
- serre 3 contraintes lin. ind. :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

1.2. Forme standard :

(a) $$-\min_{\substack{x_1,x_2\\x_3,x_4,x_5}} \quad -x_1 - x_2$$

$$\text{t.q.}\quad \begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + x_3 \quad\quad &= 10,\\ 4x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad &= 5,\\ x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_5 &= 8,\\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

- Base = $\{3,4,5\}$, sol $= (0,0,10,5,8)$.

(b) Base = $\{2,4,5\}$, sol $= \left(0,\frac{10}{3},0,\frac{5}{3},\frac{4}{3}\right)$.

Tous les coûts réduits sont positifs (≥ 0) $\Rightarrow$ sol. optimale.

valeur optimale $z^* = -\frac{10}{3}$ (pour le problème original : $f^* = \frac{10}{3}$).

(Bonus) $A_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ & $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0\\ -1/3 & 1 & 0\\ -2/3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Date

1.3. (a) Soit $\begin{cases} x_1 = \text{\# bouteilles de } 0.5\,l \\ x_2 = \quad \text{"} \quad\quad 1\,l \end{cases}$

$$\max_{x_1, x_2} \quad x_1 + x_2$$

$$\text{t.q.} \quad x_1 + 3x_2 \leq 40, \quad \text{(plastique mou)}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 30, \quad (\quad \text{"} \quad \text{dur})$$
$$x_1, \; x_2 \geq 0 .$$

(b) Forme standard : $\displaystyle -\min_{\substack{x_1 x_2 \\ x_3 x_4}} -x_1 - x_2$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 40$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 30$$
$$x_i \geq 0, \forall i.$$

ENTRE

-1	-1	0	0	Z
1	3	1	0	40
2	1	0	1	30

SORT

ENTRE

0	-1/2	0	1/2	Z+15
0	5/2	1	-1/2	25
1	1/2	0	1/2	15

SORT

0	0	1/5	2/5	Z+20
0	1	2/5	-1/5	10
1	0	-1/5	3/5	10

$(x_1^*, x_2^*) = (10, 10).$

Date

1.4. (a) $$\min_{a,b} \quad |b| + |2-a-b| + |3-3a-b|$$

$$|||$$

$$\min_{a,b,t_1,t_2,t_3} \quad t_1 + t_2 + t_3$$

$t_1 \geq b$ & $t_1 \geq -b$, $(\Leftrightarrow t_1 \geq |b|)$.
$t_2 \geq 2-a-b$ & $t_2 \geq -2+a+b$, $(\Leftrightarrow t_2 \geq |2-a-b|)$
$t_3 \geq 3-3a-b$ & $t_3 \geq -3+3a+b$. $(\Leftrightarrow t_3 \geq |3-3a-b|)$

On a $\underline{5}$ variables et $\underline{6}$ contraintes.

(b) 5 variables $\Rightarrow$ 5 contraintes actives en un sommet.

$\Rightarrow$ Sur les 6 contraintes, 5 vont être actives.
$\Leftrightarrow$ 1 pas active.

On remarque que si $t_1 = b$ et $t_1 = -b$
$\Rightarrow b = -b = 0$

La droite passe par le point $(0,0)$.

$\Rightarrow$ On passe au moins par deux points.

Il y a donc trois droites correspondant à des sommets : celles passant par deux des trois points.

On vérifie que la meilleure est $\boxed{y = x}$

càd $b^* = 0$ & $a^* = 1$.

Date

2.1. $\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x$ t.q. $Ax=b$, $x\geq 0$ $(A\in\mathbb{R}^{m\times n}, c\in\mathbb{R}^n, b\in\mathbb{R}^m)$.

(a) Dual: $\max_{y\in\mathbb{R}^m} b^T y$ tel que $A^T y \leq c$.

(b) Dualité faible : $\forall x \in \{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=b, x\geq 0\}$,
$\forall y \in \{y\in\mathbb{R}^m \mid A^T y \leq c\}$,

On a $b^T y \leq c^T x$.

Preuve : On a

$$b^T y \underbrace{=}_{\text{Comme } Ax=b} (Ax)^T y = x^T A^T y \underbrace{\leq}_{\text{Comme } x\geq 0 \text{ \& } A^T y\leq c} x^T c = c^T x.$$

2.2. $$\min_{x_1,x_2,x_3} \quad x_2 + x_3$$

$$\text{t.q.} \quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 3, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\geq 2, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

(a) Dual : $$\max_{y_1,y_2} \quad 3y_1 + 2y_2$$

$$\text{t.q.} \quad \begin{aligned} 3y_1 - y_2 &\leq 0, \\ 2y_1 - 2y_2 &\leq 1, \\ y_1 + 3y_2 &\leq 1, \\ y_1, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

(b) En modifiant $3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 + \varepsilon$, seul l'objectif du dual change : $(3+\varepsilon)y_1 + 2y_2$. Ainsi, la solution $(0.1, 0.3)$ reste admissible et donc, par la dualité faible :

$$x_2^* + x_3^* \geq (3+\varepsilon)(0.1) + 2 \cdot 0.3 = 0.9 + 0.1\,\varepsilon.$$

$\forall x^*$ admissible du primal.

(c) On fait l'opération simple : $\forall x$ sol. admissible du primal :

$$\left.\begin{aligned} (3x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 3) \cdot 0.1 \\ (-x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\geq 2) \cdot 0.3 \end{aligned}\right\} \text{variables duales optimales}$$

$$c^T x = x_2 + x_3 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Comme } x_2 \geq 0}}{\geq} 0 \cdot x_1 - 0.4 \cdot x_2 + x_3 \geq 0.9$$

Date

2.2. (a) $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si ordinateur de type } i \text{ est construit.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$\max_{x \in \mathbb{R}^4} \quad 300x_1 + 400x_2 + 500x_3 + 600x_4$$

$$\text{t.q.} \quad 200x_1 + 300x_2 + 400x_3 + 500x_4 \leq 800.$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3,4.$$

(b) Relaxation linéaire.

$$\max_{x \in \mathbb{R}^4} \quad 300x_1 + 400x_2 + 500x_3 + 600x_4$$

$$\text{t.q.} \quad 200x_1 + 300x_2 + 400x_3 + 500x_4 \leq 800,$$

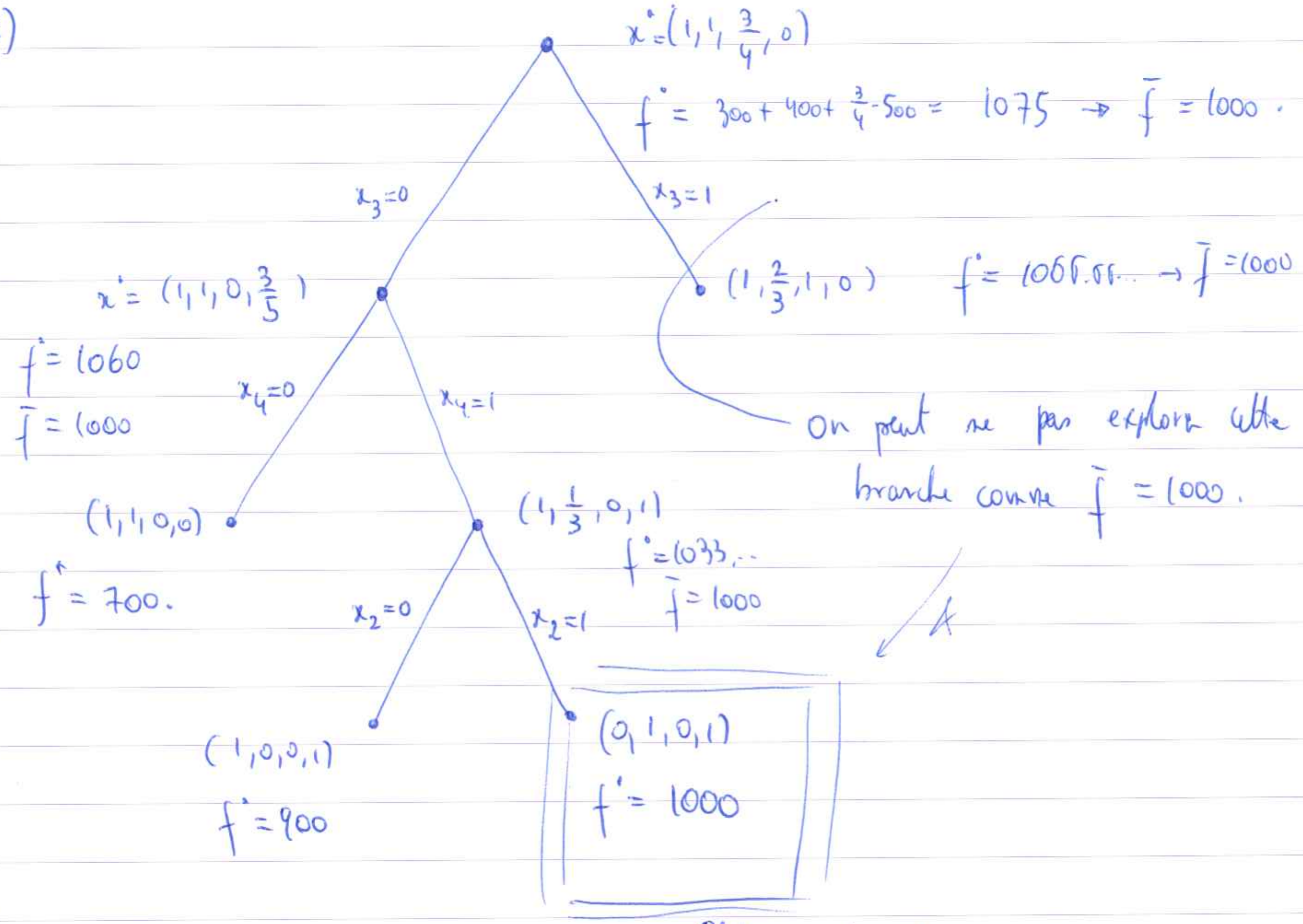
$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1,2,3,4.$$

Les variables en ordre de profit : $\underset{x_1}{\frac{300}{200}} \geq \underset{x_2}{\frac{400}{300}} \geq \underset{x_3}{\frac{500}{400}} \geq \underset{x_4}{\frac{600}{500}}$

$\Rightarrow \quad x^* = (1, 1, \frac{3}{4}, 0).$

Remarque : En nombres entiers, la solution doit être un multiple de 100.

(c)



Solution optimale.