Optimisation – Séance d'exercices 1

1 Problèmes d'optimisation linéaire

Soit le problème

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x_1, \dots, x_n) \\ \text{tel que} \quad & x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega. \end{aligned}$$

Les scalaires $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ sont les *variables de décision*, f est la *fonction objectif* (on parle volontier de *fonction coût* pour un problème de minimisation et de *fonction profit* pour un problème de maximisation), et Ω est le *domaine admissible*. Un élément de $\mathbf{R}^n$ est une *solution*, c'est une *solution admissible* si $x \in \Omega$. Si la solution admissible $x^\star$ est telle que $f(x^\star) \leq f(x)$ pour toute autre solution admissible x, la solution $x^\star$ est *optimale*. L'*objectif optimal* est alors donné par $f(x^\star)$. Lorsqu'il existe, le coût optimal est unique. Par contre, il peut y avoir de nombreuses solutions optimales et l'ensemble des solutions optimales peut être non borné. Si pour tout K il existe une solution admissible $x \in \Omega$ telle que $f(x) \leq K$, le coût est dit *non borné*. On dit aussi que le coût est *égal à* $-\infty$.

---

1. Un étudiant dispose de 100 heures de travail pour étudier les examens A, B et C. Il pense gagner par heure de travail et par cours: 1/5 de points pour le cours A, 2/5 de points pour le cours B et 3/5 pour le cours C. Chaque examen est coté sur 20. Les exercices de ces cours comptent pour la moitié de la cote finale. Ses résultats pour les exercices lui ont été communiqués. Il a obtenu 12/20 pour A, 12.5/20 pour B et 13.4/20 pour C. L'étudiant doit obtenir au minimum une cote globale de 10/20 pour chaque cours. Tous les cours ont la méme pondération et l'étudiant désire obtenir la moyenne la plus élevée possible. Formulez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire.

2. Une société produit des biens A, B et C. La production des biens nécessite l'utilisation de 4 machines. Les temps de production et les profits générés sont repris dans le tableau suivant

	1	2	3	4	profit
A	1	3	1	2	6
B	6	1	3	3	6
C	3	3	2	4	6

   Les temps de production disponibles sur les machines 1, 2, 3 et 4 sont de 84, 42, 21 et 42 et la société cherche à maximiser son profit. Formulez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire.

3. Il y a en Belgique I communes, J écoles et G niveaux d'enseignement. L'école j possède une capacité d'accueil de c_{jg} écoliers pour le niveau g. Dans la commune i, le nombre d'écoliers devant

suivre le niveau d'enseignement g est égal à s_{ig}. Enfin, la distance de l'école j à la commune i est égale à d_{ij}. On demande d'affecter les écoliers dans les écoles de façon à minimiser la distance totale parcourue par l'ensemble des écoliers. Formulez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire.

4. Résolvez géométriquement le problème suivant

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{x} & 12x_1 + 16x_2 \\ \text{tel que} & x_1 + x_2 \leq 150, \\ & 1/2x_1 + 3x_2 \leq 200, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

La fonction objectif change et devient $17x_1 + 16x_2$. Que se passe-t-il? L'ensemble des solutions optimales est-il toujours fini?

5. Soit le problème d'optimisation linéaire

$$\begin{array}{lrcl} \min_x & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 & & \\ & x_1 + x_2 & \geq & 1, \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 3, \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Représentez l'ensemble des solutions admissibles. Trouvez le coût optimal et les solutions optimales pour les valeurs suivantes de c: $c = (-1, 0, 1)$, $c = (0, 1, 0)$ et $c = (0, 0, -1)$.

6. Trouvez, si possible, des problèmes d'optimisation linéaire pour lesquels le problème

   (a) Possède un coût optimal fini et exactement une solution optimale.
   (b) Possède exactement deux solutions optimales.
   (c) possède un coût optimal infini.
   (d) possède un coût optimal fini et un ensemble de solutions optimales infini et borné.
   (e) possède un coût optimal fini et un ensemble de solutions optimales non-borné.

7. Soit le problème d'optimisation linéaire

$$\begin{array}{ll} \min_x & c^T x \\ \text{tel que} & Ax \geq b. \end{array}$$

Comment évolue l'objectif optimum si on ajoute une contrainte?

8. Un sous-ensemble V de $\mathbf{R}^n$ est convexe si $x, y \in V \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in V$ pour tout $0 < \lambda < 1$. Démontrez que l'ensemble des solutions optimales d'un problème d'optimisation linéaire est un ensemble convexe.

9. On considére un graphe dirigé donné par un ensemble de noeuds V et d'arcs E. L'arc $(i, j) \in E$ a une capacité maximale de h_{ij} et est de coût unitaire c_{ij}. En certains noeuds $i \in V$ il y a une quantité b_i qui entre ($b_i > 0$) ou qui sort ($b_i < 0$). Nous supposons que les quantité entrantes et sortantes s'équilibrent, $\sum_i b_i = 0$. Nous cherchons un flot admissible de coût minimum. Formulez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire. La solution d'un tel problème est-elle toujours unique? Parmi l'ensemble des solutions, on cherche celle(s) qui maximisent le flot en

un noeud donné. Formulez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire. Montrez comment rechercher le plus court chemin entre deux noeuds dans un graphe au moyen de la solution d'un problème de flot de coût minimum.

2 Formes canoniques

Forme géométrique

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & c^T x \\ & Ax \geq b. \end{array}$$

Forme standard

$$\begin{array}{llcl} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & c^T x & & \\ & Ax & = & b, \\ & x & \geq & 0. \end{array}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and $b \in \mathbb{R}^m$.

---

1. Ecrivez le programme linéaire suivant sous forme géométrique

$$\begin{array}{lrcl} \max_x & -x_1 + 8x_2 & & \\ \text{tel que} & x_1 + x_2 & = & 1, \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 3, \\ & x_1 & \geq & 0. \end{array}$$

2. Ecrivez le programme linéaire suivant sous forme standard

$$\begin{array}{lrcl} \min_x & -x_1 + 8x_2 & & \\ \text{tel que} & x_1 + x_2 & \geq & 1, \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 3, \\ & x_1 & \geq & 0. \end{array}$$

3. Ecrivez le programme linéaire suivant sous forme standard

$$\begin{array}{lrcr} \min_x & x_1 - 5x_2 - 7x_3 & & \\ \text{tel que} & 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 & \geq & 5, \\ & 3x_1 + 4x_2 - 9x_3 & = & 3, \\ & 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 & \leq & 9, \\ & x_1 & \geq & -2. \end{array}$$

4. Soit le problème d'optimisation

$$\begin{array}{lrcl} \min_x & 2x_1 + 3\,|x_2 - 10| & & \\ & |x_1 + 2| + |x_2| & \leq & 5. \end{array}$$

Formulez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire.

5. Un problème d'optimisation linéaire peut-il toujours s'écrire sous la forme $\min c^T x$ sous la contrainte $Ax = b$? Si oui, démontrez, si non, justifiez.

6. Une fusée se déplace en suivant une trajectoire rectiligne. Soit x_t, v_t et a_t la position, la vitesse et l'accélération de la fusée au temps t. En discrétisant le temps et en considérant un incrément unité, trouvez des expressions pour x_{t+1} et v_{t+1} en fonction de x_t, v_t et a_t. Nous supposons que l'accélération a_t est sous notre contrôle. Par ailleurs, la fusée est au repos à l'origine au temps $t = 0$ ($x_0 = 0$ et $v_0 = 0$). Nous désirons faire décoller la fusée pour la faire atterrir en douceur au temps T à une distance d'une unité de son point de départ ($x_T = 1$ et $v_T = 0$). De plus, nous désirons atteindre cet objectif en minimisant la consommation totale de carburant $\sum_{t=0}^{T-1} |a_t|$. Formulez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire.

7. Les composants d'une puce électronique sont placés sur une puce carrée $\{(x, y) \mid -1 \leq x, y \leq 1\}$. Chaque composant possède plusieurs bornes qui sont connectées à des bornes d'autres composants, ou aux bornes d'entrée/sortie situées sur le périmètre de la puce. Les connexions et les positions des bornes d'entrée/sortie sont fixées; les seules variables sont les coordonnées (x_i, y_i) des n composants. Les connexions entre les composants sont précisés de la maniére suivante. On définit les vecteurs

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

et on construit une matrice $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ et deux vecteurs $b_x \in \mathbf{R}^m, b_y \in \mathbf{R}^m$. Chaque ligne de A et chaque entrée de b_x et de b_y décrivent une connexion. Pour chaque $i = 1, \ldots, m$, nous pouvons distinguer deux cas suivant que la ligne i de A décrit une connexion entre deux composants, ou entre un composant et une borne d'entrée/sortie.

   - Si i décrit une connexion entre deux composants j et k (avec $j < k$), alors

     $$a_{il} = \begin{cases} 1 & \text{si } l = j, \\ -1 & \text{si } l = k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } b_{x,i} = 0, b_{y,i} = 0$$

     et nous avons $a_i^T x - b_{x,i} = x_j - x_k$ et $a_i^T y - b_{y,i} = y_j - y_k$.
   - Si i décrit une connexion entre un composant j et une borne d'entrée/sortie de coordonnée $(\bar{x}, \bar{y})$, alors

     $$a_{il} = \begin{cases} 1 & \text{si } l = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } b_{x,i} = \bar{x}, b_{y,i} = \bar{y}$$

     et nous avons $a_i^T x - b_{x,i} = x_j - \bar{x}$ et $a_i^T y - b_{y,i} = y_j - \bar{y}$.

   Le problème consiste à déterminer les coordonnées des composants qui minimisent la plus grande distance de Manhattan entre deux composants connectés, ou entre un composant et une borne. (Remarque: La distance de Manhattan entre les points de coordonnées (x_0, y_0) et (x_1, y_1) est donnée par $|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$.) Formulez ce problème sous la forme d'un problème d'optimisation linéaire.