Optimisation - Partie Linéaire

Examen de Janvier - Correctif 2015

1. Vrai ou faux? Justifiez votre réponse ou donnez un contre-exemple.

   (a) [5 points] Soit un polyèdre en dimension n défini au moyen de m contraintes d'inégalité. Si vous disposez d'un sommet de ce polyèdre, alors tout problème d'optimisation linéaire sur ce polyèdre peut être résolu avec au plus $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$ pivotages de la méthode du simplexe.

   Solution. Vrai. Comme un polyèdre en dimension n défini au moyen de m contraintes d'inégalité possède au plus $\binom{m}{n}$ sommets et que la méthode du simplexe passe de sommet en sommet adjacent en améliorant la fonction objectif, il y aura au plus $\binom{m}{n} - 1$ pivots (car on suppose qu'on part d'un sommet), pour autant qu'il n'y ait pas de cyclage ce qui peut être garanti en utilisant par exemple la règle de Bland.

   (b) [5 points] En toute solution optimale d'un problème d'optimisation linéaire de n variables et dont la valeur optimale est bornée, il y a au moins n contraintes actives.

   Solution. Faux. Exemple: $min_{x,y}\ x + y$ tel que $x + y \geq 0$ n'a pas de sommet optimal (pas de sommet du tout) et la valeur optimale est 0. (Pour qu'il y ait un sommet optimal, il faut, en plus d'une valeur optimale bornée, que le polyèdre possède au moins un sommet, cf. théorème fondamental.)

   (c) [5 points] Le point $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$ est un sommet dégénéré du polyèdre défini par les inégalité suivantes

   $$x_1 + x_2 + x_3 \leq 0, x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_3 \leq 0, x_2 + x_3 \leq 1, x_2 \geq 0 \text{ et } x_3 \geq 0.$$

   Solution. Vrai. Il y a 4 contraintes, **dont trois linéairement indépendantes**, actives et toutes sont satisfaites $\Rightarrow$ sommet dégénéré.

   (d) [5 points] Soit le tableau simplexe suivant:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	1	1	0	z
0	1	-1	-1	0	8
0	0	-1	-2	1	0
1	0	2	-3	0	10

   On peut en déduire que, pour le problème d'optimisation correspondant, la solution (10, 8, 0, 0, 0) est optimale, et correspond à un sommet dégénéré du polyèdre correspondant.

   Solution. Vrai. Les couts réduits sont positifs ($\Rightarrow$ sommet optimal) et il y a une variable de base à zéro, $x_5 = 0$ ($\Rightarrow$ sommet dégénéré).

   (e) [5 points] Pour avoir un sommet, un polyèdre en n dimensions sous forme géométrique doit avoir au moins n inégalités.

   Solution. Vrai. Si on a pas n contraintes, on ne pourra pas en avoir (au moins) n actives et donc pas de sommet.

2. [25 points] *Distribution optimale de ressources.* Vous êtes producteur de téléphones portables et vous en produisez deux types: un portable 'normal' et un smartphone. Pour produire un portable 'normal', on a besoin de 1 unité de verre, 2 unités de métal et 3 unités de plastique; pour un smartphone, 3 unités de verre, 2 unités de métal et 1 unité de plastique. Le portable 'normal' se vend au prix de 100€ et le smartphone de 200€. Vous disposez de 120 unités de verre, de 180 unités de métal et 240 unité de plastique. Vous désirez maximiser votre profit.

   (a) Modélisez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire. (Pour simplifier, on suppose que l'on peut produire un nombre non entier de téléphones.)

   Solution. En définissant x_1 = nombre de portables 'normaux' et x_2 = nombre de smartphones, on formule le problème comme suit:

$$\max_{x_1,x_2} 100x_1 + 200x_2 \text{ tel que } x_1 + 3x_2 \leq 120, 2x_1 + 2x_2 \leq 180, 3x_1 + x_2 \leq 240, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

   (b) Résolvez ce problème en utilisant la méthode du simplexe. Combien de téléphones portables de chaque type allez-vous produire? Justifiez votre réponse. Que pouvez-vous dire sur le sommet optimal obtenu?

   Solution. Le tableau simplexe (après avoir mis sous forme standard avec trois variables d'écart positives s_i $1 \leq i \leq 3$ et en remplacant le max par un min) est le suivant

-100	-200	0	0	0	z
1	3	1	0	0	120
2	2	0	1	0	180
3	1	0	0	1	240

   On rentre (par exemple) x_1 et on doit donc sortir s_3 (pourquoi?) et on pivote pour obtenir

0	$-500/3$	0	0	$1/3$	$z + 80$
0	$8/3$	1	0	$-1/3$	40
0	$4/3$	0	1	$-2/3$	20
1	$1/3$	0	0	$1/3$	80

   On rentre x_2 et on sort s_1 (on pourrait aussi sortir s_2, pourquoi?) et on pivote pour obtenir

0	0	62.5	0	12.5	$z + 10500$
0	1	$3/8$	0	$-1/8$	15
0	0	$-1/2$	1	$-1/2$	0
1	0	$-1/8$	0	$3/8$	75

   Les cout réduits sont positifs: solution optimale (75,15,0,0,0).

   On va produire 75 portables normaux et 15 smartphones pour un gain de 10500 €.

   La variable de base s_2 est égale à 0: sommet dégénéré (au total, 6 contraintes actives).

3. [25 points] Soit le problème d'optimisation suivant

$$\begin{aligned} \min_{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3} \quad & 10x_2 + 10x_3 \\ \text{tel que} \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 30, \\ & -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 20, \text{ et} \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(a) Ecrivez le dual de ce problème.

Solution.

$$\max_{y_1,y_2} 30y_1 + 20y_2$$
$$\begin{aligned} \text{tel que } 3y_1 - y_2 &\leq 0, \\ 2y_1 - 2y_2 &\leq 10, \\ y_1 + 3y_2 &\leq 10, \\ y_1 \geq 0, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

(b) Pour ce problème, énoncez le théorème de la dualité faible, et prouvez le.

Enoncez également le théorème de la dualité forte appliquée à ce problème.

Solution. (Dualité faible) Pour tout solution admissible (x_1, x_2, x_3) du primal et pour tout solution admissible (y_1, y_2) du dual, on

$$10x_2 + 10x_3 \geq 30y_1 + 20y_2.$$

Preuve: cf. slides.

(Dualité forte) S'il existe une solution optimale (x_1^*, x_2^*, x_3^*) du primal, alors il existe une solution optimale (y_1^*, y_2^*) du dual et

$$10x_2^* + 10x_3^* = 30y_1^* + 20y_2^*.$$

(c) Calculez la solution optimale du dual (utilisez la méthode de votre choix), et déduisez-en la solution optimale du primal en utilisant la complémentarité. Justifiez votre réponse.

Solution. On peut résoudre le dual géométriquement (2 dimensions), avec la force brute (calculez tous les sommets et gradez le meilleur) ou via le simplexe.

On obtient: $(y_1^*, y_2^*) = (1, 3)$.

Ainsi, comme la deuxième contrainte n'est pas active ($2y_1^* - 2y_2^* < 10$), par complémentarité, cela implique $x_2^* = 0$. Comme y_1 et $y_2 > 0$, cela implique par complémentarité que $3x_1^* + 2x_2^* + x_3^* = 30$ et $-x_1^* - 2x_2^* + 3x_3^* = 20$, et il suffit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues pour obtenir $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (7, 0, 9)$.

On peut vérifiez que la dualité forte se vérifie

$$10x_2^* + 10x_3^* = 30y_1^* + 20y_2^* = 90.$$

(d) On remplace le membre de droite de la deuxième contrainte par $20 - \epsilon$ pour $\epsilon \in \mathbb{R}$. En utilisant la dualité faible, donnez une borne inférieure de la valeur optimale du problème modifié en fonction de ϵ.

Solution. L'ensemble des solutions admissibles du dual ne change pas, et par la dualité faible, on a donc

$$10x_2 + 10x_3 \geq f^*(\epsilon) \geq 30y_1^* + (20 - \epsilon)y_2^* = 90 - 3\epsilon.$$

avec $f^*(\epsilon)$ la valeur optimale en fonction de ϵ et (x_1, x_2, x_3) n'importe quelle solution admissible du primal transformé.

(e) Quelles conditions sont nécessaires pour fournir une valeur exacte de la valeur optimale en fonction de ϵ à partir de la valeur optimale du problème original? Quelle est cette valeur?

Solution. Il faut que ϵ soit suffisamment petit et que le sommet optimal ne soit pas dégénéré (ce qui est bien le cas ici –pourquoi?). Dans ce cas, $f^*(\epsilon) = 90 - 3\epsilon$.

(f) Votre patronne ne fait pas confiance aux ordinateurs, n'a pas jamais suivi de cours d'optimisation mais maîtrise parfaitement l'arithmétique. Comment pourriez-vous la convaincre qu'il n'existe pas de solution meilleure que celle que vous avez calculée?

Solution. On combine les deux inégalités du primal avec les poids des variables duales optimales: pour toute solution du (x_1, x_2, x_3) primal, on a

$$10x_2 + 10x_3 \geq -5x_2 + 10x_3 = y_1^*(3x_1 + 2x_2 + x_3) + y_2^*(-x_1 - 2x_2 + 3x_3) \geq 30y_1^* + 20y_2^* = 90$$

car $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

4. [25 points] On dispose d'un sac capable de supporter un poids maximal de 8kg et d'un ensemble d'objets ayant chacun un poids (en kg) et une valeur (en euro). L'objectif est de remplir le sac d'objets sans dépasser le poids maximal tout en maximisant la somme des valeurs des objets qu'il contient. Vous disposez de 5 objets de poids respectifs 4, 3, 3, 2 et 2 kg et de valeurs respectives 3, 5, 2, 2 et 3 €.

(a) Formulez ce problème comme un problème linéaire en nombres binaires.

Solution. On introduit une variables binaire par objet ($x_i = 1$ si on prend l'objet i, sinon $x_i = 0$):

$$\max_{x \in \mathbb{R}^5} 3x_2 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5$$
$$\text{tel que } 4x_2 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 8,$$
$$x_i \in \{0, 1\} \text{ pour } 1 \leq i \leq 5.$$

(b) Ecrivez la relaxation linéaire de ce problème et résolvez la.

Solution. On relache $x_i \in \{0, 1\}$ par $0 \leq x_i \leq 1$ pour tout i :

$$\max_{x \in \mathbb{R}^5} 3x_2 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5$$
$$\text{tel que } 4x_2 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 8,$$
$$0 \leq x_i \leq 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq 5.$$

Pour calculer la solution, il faut classer les objets par ordre de préférence qui est donnée par la valeur par unité de poids: $2 \succ 5 \succ 4 \succ 1 \succ 3$.

Ensuite on rempli le sac dans cet ordre jusqu'a ce qu'il soit rempli: la solution du problème relaché est

$$(1/4, 1, 0, 1, 1).$$

(c) Calculez toutes les solutions optimales de ce problème **par branch and bound** en utilisant les relaxations linéaires (suivez strictement les étapes du branch and bound –n'utilisez pas par exemple de solutions admissibles que vous auriez calculées à la main) et dessinez l'abre de recherche.

Solution.

Noeud initial: (1/4 , 1 , 0 , 1 , 1) avec $f^* = 10.75$ –on aura donc jamais une solution entière meilleure que 10 (comme les valeurs sont entières).

- Noeud $x_1 = 0$: (0 , 1 , 1/3 , 1 , 1) avec $f^* = 10.66$
  - Noeud $x_1 = 0, x_3 = 0$: (0,1,0,1,1) avec $f^* = 10 \Rightarrow$ solution optimale.
  - Noeud $x_1 = 0, x_3 = 1$: (0,1,1,0,1) avec $f^* = 10 \Rightarrow$ solution optimale.
- Noeud $x_1 = 1$: (1 , 1 , 0 , 0 , 1/2) avec $f^* = 9.5$: on peut stopper, on a trouvé une solution strictement meilleure.

(d) Combien de relaxations linéaires au minimum auriez-vous eu besoin pour trouver une seule solution optimale?

Solution. On aurait pu se contenter de 3: Noeud initial, Noeud($x_1 = 0$) et Noeud($x_1 = 0, x_3 = 0$). En effet, le Noeud($x_1 = 0, x_3 = 0$) donne une solution optimale garantie comme son coût vaut 10 et, qu'avec le Noeud initial, on sait qu'on ne peut pas faire mieux.