Optimisation - Partie Linéaire - Examen de Janvier 2016

Cet examen est à livre fermé. *Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
Les IG et INFO répondent à toutes les questions, les Mines aux questions 1-2-3 et les ELEC 1-2.

1. Vrai ou faux? Justifiez votre réponse ou donnez un contre-exemple.

(a) [5 points] Soit un polyèdre en dimension n défini au moyen de $m \geq n$ contraintes d'inégalité. Alors ce polyèdre possède $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$ sommets.

Solution. Faux. $\binom{m}{n}$ est une borne supérieure. Dans la plupart des cas, le nombre de sommets sera inférieur. Prenez par exemple le carré: 4 contraintes, deux dimensions, 4 sommets et $\binom{4}{2} = 6$. Il se peut même qu'il n'ait pas de sommet: par exemple, en une dimension, $x \geq 1$ et $x \leq -1$: deux contraintes, zéro sommet.

(b) [5 points] Après chaque itération de l'algorithme du simplexe, la valeur de la fonction objectif décroît strictement.

Solution. Faux. Dans le cas d'un sommet dégénéré, on peut réaliser un pivot en restant sur le même sommet et donc la fonction objectif ne change pas; voir notes de cours pour un exemple.

(c) [5 points] Le point $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$ est un sommet du polyèdre défini par les inégalité suivantes

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_3 \leq 0, \text{ et } x_2 + x_3 \leq 1.$$

Solution. Faux. Il y a 3 contraintes serrées mais elles ne sont pas linéairement indépendantes!

(d) [5 points] Soit le tableau simplexe suivant:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	1	0	0	z
0	1	-1	-1	0	8
0	0	-1	-2	1	1
1	0	2	-3	0	10

On peut en déduire que, pour le problème d'optimisation correspondant, la solution

$$x = (10, 8, 0, 0, 1)$$

est optimale et unique.

Solution. Faux. La solution est optimale (coûts réduits positifs) mais pas unique: on peut augmenter la valeur de x_4 (en fait, x_4 peut prendre n'importe quelle valeur positive) sans changer l'objectif (son coût réduit est nul) et en gardant une solution admissible (car les entrées dans la colonne en dessous du coût réduit sont négatives –En fait, même si ces entrées étaient positives, ce ne serait pas unique puisque la solution (10,8,0,0,1) est non dégénérée et on pourrait donc augmenter x_4 tout en restant admissible).

(e) [5 points] Un polyèdre non vide écrit sous forme standard possède toujours au moins un sommet.

Solution. Vrai. Tout polyèdre non vide ne possédant pas de droite possède un sommet. Comme un polyèdre sous forme standard est contenu dans l'orthant positif, il ne contient pas de droite et donc contient un sommet s'il est non vide.

2. [25 points] *Problème de mélange.* Votre entraineur sportif vous recommande de consommer 16 unités de vitamine A et 15 unités de vitamines B. Vous ne voulez manger que des pommes et des bananes, dont les quantités de vitamines et le prix par unité sont donnés par le tableau ci-dessous. Votre objectif est d'atteindre les quantités recommandées en minimisant votre coût.

	Vit. A	Vit. B	prix
pommes	4	1	2
bananes	1	3	1

   (a) Modélisez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire.
   Solution.

$$\min_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} 2x_1 + x_2 \quad \text{tel que} \quad 4x_1 + x_2 \geq 16 \text{ et } x_1 + 3x_2 \geq 15.$$

   (b) Ecrivez le problème sous forme standard. Trouvez une solution admissible de base (soit par énumération, soit en utilisant la méthode d'initialisation, soit en représentant le problème graphiquement), et justifiez votre raisonnement. Calculez le tableau simplexe sous forme canonique correspondant à cette solution.

   (c) Résolvez ce problème en utilisant la méthode du simplexe à partir de la solution admissible de base calculée au point (b). Combien d'unités de pommes et de bananes allez-vous consommer? Justifiez.
   Solution. La façon la plus simple de procéder était de graphiquement identifier un sommet (il y en a 3: (3,4), (0,16) et (15,0)) et ensuite mettre le tableau simplexe sous la forme canonique de la base correspondante, et finalement réaliser les povitages nécessaires pour arriver au sommet optimal, si ce n'était pas déjà le cas. Le sommet optimal est (3,4).

3. [25 points] *Vérification de votre solution à la question 2. de la partie 1 via la dualité.* Reprenez le problème de mélange de la question 1.2.

   (a) Ecrivez le dual de ce problème et résolvez le en utilisant la *complémentarité* (ou avec une autre méthode si vous n'y arrivez pas).
   Solution.

$$\max_{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0} 16y_1 + 15y_2 \quad \text{tel que} \quad 4y_1 + y_2 \leq 2 \text{ et } y_1 + 3y_2 \leq 1.$$

   Par complémentarié, comme $x_1^* > 0$ et $x_2^* > 0$, on doit avoir à l'optimalité que

$$4y_1 + y_2 = 2 \text{ et } y_1 + 3y_2 = 1.$$

   Ainsi, $y_1^* = 5/11$ et $y_2^* = 2/11$.

   (b) Enoncez le théorème de la dualité forte, et utilisez ce théorème pour prouver que votre solution calculée à la question 1.2 est correcte[1] (ou incorrecte?).
   Solution. Voir le cours pour le théorème, et on vérifie que

$$2x_1^* + x_2^* = 10 = 16y_1^* + 15y_2^*.$$

   (c) Votre entraineur s'est trompé dans les quantités: il faut en fait que vous consommiez $15 + \epsilon$ vitamines B pour $\epsilon = 1$. En utilisant la dualité fiable, donnez une borne inférieure de la valeur optimale du problème modifié (c'est-à-dire une borne inférieure sur le nouveau prix

[1] Si vous n'avez pas réussi à trouver la solution optimale via la méthode du simplexe, vous pouvez également résoudre le primal géométriquement.

que vous allez devoir payer). (Si vous n'avez pas pu calculer la solution optimale du dual, supposez, pour la suite, que la solution optimale du duale est donnée par y_1^* et y_2^*.)

Solution. Comme la solution duale optimale reste admissible (seul son objectif change), on a par la dualité faible que le nouveau coût sera borné inférieurement:

$$\text{nouveau coût} \geq 16y_1^* + (15+\epsilon)y_2^* = \underbrace{10}_{\text{ancien coût}} + \epsilon y_2^* = 10 + 2/11.$$

(d) Combien seriez-vous prêt à payer pour acheter une unité de vitamine A? Justifiez.

Solution. Au maximum à $y_1^* = 5/11$, qui représente le coût marginal de la resource 1, càd la vitamine A.

(e) Votre patronne n'a pas jamais suivi de cours d'optimisation mais maîtrise parfaitement l'arithmétique. Comment pourriez-vous la convaincre qu'il n'existe pas de solution meilleure que celle calculée à la question 1.2?

Solution. On calcule

$$y_1^*(4x_1 + x_2 \geq 16) + y_2^*(x_1 + 3x_2 \geq 15) \Rightarrow 2x_1 + x_2 \geq 10,$$

pour tout x solution admissible du primal.

C'est à cela que sert notamment la dualité: fournir des poids de combinaisons linéaire des inégalités pour borner l'objectif inférieurement (voir introduction de la dualité dans les slides).

4. [25 points] On dispose d'un sac capable de supporter un poids maximal de 7kg et d'un ensemble d'objets ayant chacun un poids (en kg) et une valeur (en euro). L'objectif est de remplir le sac d'objets sans dépasser le poids maximal tout en maximisant la somme des valeurs des objets qu'il contient. Vous disposez de 5 objets détaillé dans la table ci-dessous:

objet	1	2	3	4	5
prix (100€)	2	3	4	5	6
poids (kg)	1	2	3	4	5

(a) Formulez ce problème comme un problème linéaire en nombres binaires.

Solution.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^5} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 \text{ tel que } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \leq 7, \text{ et } x \in \{0,1\}^5.$$

(b) Ecrivez la relaxation linéaire de ce problème et résolvez la.

Solution.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^5} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 \text{ tel que } x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \leq 7, \text{ et } x \in [0,1]^5.$$

L'ordre de profit par unité de poids est: 1,2,3,4,5. Ainsi, la solution optimale du problème relaché est (1,1,1,1/4,0) et $f^* = 10.2$. On ne pourra donc pas faire mieux que 10 avec une solution entière (comme les coefficients sont entiers dans la fonction objectif).

(c) Calculez toutes les solutions optimales de ce problème **par branch and bound** en utilisant les relaxations linéaires (suivez strictement les étapes du branch and bound –n'utilisez pas par exemple de solutions admissibles que vous auriez calculées à la main) et dessinez l'abre de recherche. Quels objets allez-vous emporter?

Solution. Puisque x_4 est non entier dans la première relaxation linéaire, on branche sur x_4.

La branche $x_4 = 1$: on obtient (1,1,0,1,0) comme solution du problème relaché avec un coût de 10 qui est donc optimale!

La branche $x_4 = 0$: on obtient (1,1,1,0,1/5) comme solution du problème relaché, avec un coût de 10.1667! On doit continuer car on pourrait trouver des solutions optimale ici.

La branche $x_4 = 0, x_5 = 0$: on obtient (1,1,1,0,0) avec $f^* = 9$, pas optimal.

La branche $x_4 = 0, x_5 = 1$: on obtient (1,1/2,0,0,1) avec $f^* = 9.5$, on ne fera pas mieux que 10, on peut stopper ici.

(d) Combien de relaxations linéaires au minimum auriez-vous eu besoin pour trouver une seule solution optimale (en considérant le cas le plus favorable)? Justifiez.

Solution. Dans le meilleur des cas, deux relaxations suffisent: celle du root node (point b) et celle en $x_4 = 1$.