MARO 006 - Optimisation - Partie linéaire

Examen - Août 2014

Cet examen est à livre fermé. Aucun appareil électronique n'est autorisé.

Vous avez deux heures pour répondre aux différentes questions.

Les Elec doivent répondre aux questions de la partie 1, les Mines aux questions de la partie 1 et la théorie de la partie 2, et les IG et Info à toutes les questions.

1 Première partie: modélisation et méthode du simplexe

1. Vrai ou faux? Justifiez votre réponse ou donnez un contre-exemple.

   (a) [5 points] La méthode du simplexe permet de résoudre tout programme linéaire (avec n variables et m contraintes) avec un nombre polynomial (en m et n) de pivotages du tableau simplexe.

   (b) [5 points] Un polyèdre écrit sous forme standard possède toujours au moins un sommet.

   (c) [5 points] Le point $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$ est un sommet du polyèdre défini par les inégalité suivantes

   $$x_1 + x_2 + x_3 \leq 0, x_1 + x_2 \leq 0, x_1 + x_3 \leq 0, x_2 + x_3 \leq 2, x_2 \geq 0 \text{ et } x_3 \geq 0.$$

   (d) [5 points] On a le tableau simplexe suivant:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	1	0	0	z
0	1	-1	-1	0	10
0	0	-1	-2	1	0
1	0	2	-3	0	8

   On peut en déduire que la solution (8, 10, 0, 0, 0) est optimale et unique.

2. [20 points] *Problème de mélange.* Votre entraineur sportif vous recommande de consommer 16 unités de vitamine A et 15 unités de vitamines B. Vous ne voulez manger que des pommes et des bananes, dont les quantités de vitamines et le prix par unité sont donnés par le tableau ci-dessous. Votre objectif est d'atteindre les quantités recommandées en

	Vit. A	Vit. B	prix
pommes	4	1	2
bananes	1	3	1
Total à consommer	16	15	

Table 1: Données (par unité).

minimisant votre coût.

(a) Modélisez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire.

(b) Ecrivez le problème sous forme standard. Trouvez une solution admissible de base en utilisant la méthode d'initialisation (phase I), et justifiez votre raisonnement. Calculez le tableau simplexe (du problème original) sous forme canonique correspondant à cette solution.

(c) Résolvez ce problème en utilisant la méthode du simplexe à partir de la solution admissible de base calculée au point (b). Combien d'unités de pommes et de bananes allez-vous consommer? Justifiez.

(Si vous n'arrivez pas à trouver une solution admissible de base via la phase I, résolvez le problème suivant en utilisant la méthode du simplexe:

$$\max_{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0} 16y_1 + 15y_2 \quad \text{tel que} \quad 4y_1 + y_2 \leq 1 \text{ et } y_1 + 3y_2 \leq 2.)$$

2 Deuxième partie: dualité et branch and bound

2.1 Théorie

1. [20 points] *Vérification de votre solution à la question 2. de la partie 1 via la dualité.* Reprenez le problème de mélange de la question 1.2.

   (a) Ecrivez le dual de ce problème et résolvez le géométriquement (ou avec une autre méthode si cela est plus facile pour vous).

   (b) Enoncez le théorème de la dualité forte, et utilisez ce théorème pour prouver que votre solution calculée à la question 1.2 est correcte[1] (ou incorrecte?).

   (c) Votre entraineur s'est trompé dans les quantités: il faut en fait que vous consommiez $15 + \epsilon$ vitamines B pour $\epsilon \in \mathbb{R}$. En utilisant la dualité fiable, donnez une borne inférieure de la valeur optimale du problème modifié en fonction de ϵ (c'est-à-dire une borne inférieure sur le nouveau prix que vous allez devoir payer). (Si vous n'avez pas pu calculer la solution optimale du dual, supposez, pour la suite, que la solution optimale du duale est donnée par y_1^* et y_2^*.)

   (d) Combien seriez-vous prêt à payer pour acheter une unité de vitamine A? Justifiez.

   (e) Votre patronne n'a pas jamais suivi de cours d'optimisation mais maîtrise parfaitement l'arithmétique. Comment pourriez-vous la convaincre qu'il n'existe pas de solution meilleure que celle calculée à la question 1.2?

[1] Si vous n'avez pas réussi à trouver la solution optimale via la méthode du simplexe, vous pouvez également résoudre le primal géométriquement.

2.2 Exercices

1. [20 points] *Problème de production.* On désire produire des tables, chaises, armoires et bibliothèques à partir de bois, plastique, métal et tissu. La table ci-dessous reprend les différentes données pour ce problème. Par exemple, il faut 10 unités de bois, 1 de plastique,

	bois	plastique	métal	tissu	prix de vente (€)
table (x_1)	10	1	1	1	200
chaise (x_2)	6	1	1	5	100
armoire (x_3)	20	2	2	0	600
bibliothèque (x_4)	30	3	5	1	1000
Quantité disponible	100	20	30	40	

Table 2: Données (par unité).

1 de métal et 1 de tissu pour produire une table que l'on pourra revendre à 200€. On dispose de 100 unités de bois, 20 de plastique, 30 de métal et 40 de tissu. Vous désirez bien sûr maximiser votre profit.

   (a) Formulez ce problème comme un problème linéaire en nombres entiers (utilisez les variables introduites dans la table 2 –par exemple, x_1 est la quantité totale de table que l'on va produire).

   (b) Ecrivez la relaxation linéaire de ce problème.

   (c) Etant donné les solutions optimales du problème relâché données dans la table 3, trouvez toutes les solutions optimales du problème en nombres entiers: Dessinez l'arbre de recherche et expliquez votre raisonnement.

	x^*	$f^* = c^T x^*$
$\emptyset$	(0,0,0,3.33)	3333.33
$x_4 \leq 3$	(0,0,0.5,3)	3300
$x_4 \leq 3$ & $x_3 = 0$	(1,0,0,3)	3200
$x_4 \leq 3$ & $x_3 \geq 1$	(0,0,1,2.67)	3266.67
$x_4 \leq 2$ & $x_3 \geq 1$	(0,0,2,2)	3200

Table 3: Solutions des relaxations linéaires avec contraintes supplémentaires (indiquées dans la première colonne).

   (d) Dans la table 3, il y a les solutions de 5 relaxations linéaires. Aurait-il été possible de résoudre le problème (c'est-à-dire de trouver et pouvoir garantir l'optimalité d'au moins une solution) en résolvant moins de relaxations? Si oui, combien au minimum aurait-il fallu résoudre? Justifiez votre réponse.