Optimisation – Séance d'exercices 6

1 Optimisation discrète

1. Considérez le problème d'optimisation en nombres entiers

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{maximiser} & 5x_1 & + & x_2 & & \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4, \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1, \\ & 4x_1 & + & x_2 & \leq & 12, \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0, \\ & & & x_1, x_2 & & \text{entiers} \ . \end{array}$$

   Trouvez graphiquement une solution de ce problème. Trouvez graphiquement une solution optimale du problème relaxé. Trouvez la solution entière la plus proche de la solution optimale du problème relaxé. Enumérez toutes le solutions entières obtenues en arrondissant la solution optimale du problème relaxé. Une de ces solutions est-elle optimale?

2. Yves et Muriel désirent partager les principales tâches ménagères (courses, cuisine, vaisselle et nettoyage) entre eux. Leurs efficacités à la réalisation de ces tâches sont différentes. Yves est rapide pour faire les courses et la vaisselle mais il se fait distancer par Murielle pour la cuisine et le nettoyage.

	courses	*cuisine*	*vaisselle*	*nettoyage*
Yves	4.5	7.8	3.6	3.1
Muriel	4.9	7.2	4.3	2.9

   Le jeune couple désire partager les tâches de manière équitable (deux tâches par personne) et optimale (temps total minimum). Formulez ce problème comme un problème d'optimisation en nombres entiers. Donnez une relaxation de ce problème. La solution du problème relaxé est-elle entière? Que pouvez-vous en déduire?

3. Vouz désirez choisir un ensemble de cours parmi huit cours $\{1, \ldots, 8\}$ pour vous constituer un programme. Modélisez les contraintes suivantes:

   (a) Vous ne pouvez pas choisir plus de 5 cours mais devez en choisir au moins 3.

   (b) Le cours 3 est un prérequis du cours 6 et le cours 2 un prérequis du cours 7.

   (c) Les cours 8 et 6 forment une paire. Vous devez les prendre tous les deux, ou aucun des deux.

   (d) Pour des questions de conflit horaire, vous ne pouvez pas choisir les cours 5 et 2, ni les cours 3 et 6.

   (e) Pour vous conformer aux contraintes de votre programme d'étude vous devez choisir au moins un des cours 1, 2, 3 ou au moins deux cours parmi les cours 5, 6, 7, 8.

4. Vous désirez trouver les variables $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ qui maximisent la fonction $c^T x$ tout en satisfaisant au moins une des deux contraintes $x_1 + 2x_2 \leq 1$ et $3x_1 + x_2 \leq 1$. Formulez ce problème comme un problème d'optimisation mixte.

5. Une société a développé deux nouveaux jouets pour la Noël. La production du jouet 1 nécessite des investissements initiaux de 50000 EUR et celle du jouet 2 des investissements initiaux de 80000 EUR. Les jouets génèrent un profit de 10 EUR pour le jouet 1 et de 15 EUR pour le jouet 2. Le jouet 1 est produit à un taux de 50 l'heure et le jouet 2 à un taux de 25 l'heure. On dispose de 500 heures d'ici Noël. Déterminez le nombre de jouets à produire de manière à maximiser le profit.

   Supposons maintenant que la société possède deux usines. Une seule usine sera choisie pour la production. Le jouet 1 est produit à un taux de 50 l'heure dans l'usine 1 et de 40 l'heure dans l'usine 2. Le jouet 2 est produit à un taux de 25 l'heure dans les deux usines. Les usines disposent de 500 et 700 heures d'ici Noël. Le problème consiste à déterminer le nombre de jouets à produire de manière à maximiser le profit.

6. Vous disposez de 4 objets de poids respectifs 5, 3, 8 et 7. Les utilités des objets sont de 17, 10, 25 et 7. Vous désirez sélectionner un ensemble d'objets de poids total inférieur à 12 et dont la somme des utilités est maximale. Formulez le problème comme un problème d'optimisation en nombres entiers. Trouvez la solution.

7. Vous disposez de 5 objets de poids respectifs 2, 4, 3, 3 et 2. Les utilités des objets sont respectivement de 9, 20, 14, 10 et 6. Vous désirez sélectionner un ensemble d'objets de poids total inférieur à 10 et dont la somme des utilités est maximale. Formulez le problème comme un problème d'optimisation en nombres entiers. Appliquez l'algorithme "branch and bound" pour trouver la solution. Justifiez les étapes de l'algorithme.

8. Considérez le problème d'optimisation en nombres entiers

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\text{maximiser} & 9x_1 & + & 5x_2 & & \\
 & 4x_1 & + & 9x_2 & \leq & 35, \\
 & x_1 & & & \leq & 6, \\
 & x_1 & - & 3x_2 & \geq & 1, \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 19, \\
 & & & x_1, x_2 & & \text{entiers} \;.
\end{array}
$$

   Résolvez le problème graphiquement et algébriquement en utilisant la méthode "branch and bound".

9. Considérez l'arbre d'énumération suivant pour un problème d'optimisation de deux variables entières.

   (a) L'arbre résulte-t-il d'un problème de maximisation ou de minimisation?

   (b) Quels sont les noeuds qui doivent encore étre analysés?

   (c) Donnez un intervalle dans lequel se trouve l'optimum.

   (d) La fonction objectif est donnée par $3x_1 + 6x_2$. Cette information vous permet-elle de préciser vos réponses aux sous-questions 9b et 9c?

10. Il y a 50 groupes d'étudiants en premiére candidature FSA. On souhaite affecter un projet par groupe. Il y a 10 projets disponibles et chaque projet peut étre affecté à au plus 10 groupes. On a demandé à chaque groupe de classer les trois projets qui ont leur préférence. On souhaite affecter à chaque groupe un des projets qu'il a classés et maximiser le nombre de groupes qui recoivent leur premier choix. S'il y a plusieurs affectations qui satisfont cette contrainte, on souhaite, parmi l'ensemble de ces affectations, choisir celle qui maximise le nombre de groupes qui recoivent leur deuxiéme choix. Vous étes coordinateur d'année en FSA; proposez une manière de résoudre ce problème.

11. Le Sudoku est un jeu logique présenté sous forme de grille. D'abord publié en 1979, le Sudoku s'est développé au Japon en 1986 avant d'atteindre la popularité internationale en 2005, et ce jusqu'aux colonnes de l'hebdomadaire "la Salopette" édité par le CI. La grille de jeu est un carré de neuf cases de cété, subdivisé en neuf carrés, appelés régions (voir figure). Quelques chiffres sont disposés dans la grille et le but du jeu est de compléter la grille avec des chiffres de un à neuf en respectant la régle suivante: chaque ligne, colonne et région ne doit contenir qu'une et une seule fois les chiffres de un à neuf.

    (a) Formulez le problème du Sudoku pour une grille quelconque comme un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers.

    (b) Une grille de Sudoku peut ne pas avoir de solution. Si une grille ne possède pas de solution, un objectif naturel consiste à compléter toutes les cases de manière à ce que le nombre total de lignes, colonnes et régions complétes soit aussi élevé que possible (une ligne, colonne ou région est compléte si tous les nombres de un à neuf y apparaissent exactement une fois). Formulez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers.

12. OptiTv lance un nouveau jeu sur nos écrans. La derniére épreuve du jeu permet au gagnant de multiplier ses gains.

    Deux rails A et B traversent un plateau de jeu jonché d'obstacles. Le but du joueur est de maximiser la masse totale de deux billes posées sur les rails qui pourront traverser le plateau. Pour ce faire, il peut décider de retirer certains obstacles du parcours, mais pour chaque obstacle enlevé, une pénalisation de 20 grammes lui sera retranchée du résultat. Les régles du jeu sont les suivantes:

    (a) Le joueur a à sa disposition des billes de 10, 20, 30, ..., 100 grammes en quantité suffisante. Il peut déposer 0, 1 ou 2 billes sur le plateau (maximum une bille par rail), et chaque bille déposée doit traverser de part en part le plateau sous peine de disqualification.

    (b) Pour assurer l'équilibre du plateau, la différence de masse entre les deux billes choisies ne peut pas excéder 20 grammes. En particulier, si une seule bille traverse le plateau, sa masse ne peut pas étre supérieure à 20 grammes.

    (c) Si l'obstacle 1 n'est pas été, une bille posée sur le rail A ne peut pas traverser le plateau de jeu.

    (d) Les obstacles 2 et 3 ne peuvent pas étre retirés tous les deux ensemble.

    (e) S'il souhaite retirer l'obstacle 2 ou l'obstacle 4, le joueur est obligé d'enlever d'abord les obstacles 1 et 3.

    (f) Les obstacles 3 et 4 déterminent conjointement la masse maximale de la bille qui pourra passer sur le rail B: le retrait de l'obstacle 3 permet de faire passer 80 grammes et le retrait de l'obstacle 4 autorise quant à lui 20 grammes. En particulier, si ces deux obstacles sont retirés, une bille de 100 grammes peut passer sur ce rail.

    Formulez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers. Vous ne devez pas résoudre ce problème.

13. Vous disposez d'une somme de 96 Euros. Vous désirez acheter des boissons, disponibles en divers conditionnements.

Boisson	A	B	C	D	E
Volume unitaire (litres)	15	16	17	18	20
Prix unitaire (Euros)	16	17	18	19	20

Vous désirez acheter un volume le plus grand possible, sans dépasser votre budget.
(a) Formulez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire en nombres entiers.
(b) Combien de conditionnements de chaque type allez-vous acheter ? Détaillez votre raisonnement.

14. Un transporteur est confronté au problème suivant : il ne peut transporter qu'une tonne de marchandises dans son véhicule, alors qu'une quantité supérieure à une tonne est disponible. Il reçoit les données suivantes de la part du comptable de l'entreprise, regroupant les quantités disponibles de chaque marchandise, ainsi que le bénéfice retiré par leurs ventes respectives.

Marchandise	A	B	C
Quantité disponible (kg)	900	240	560
Bénéfice (euros/kg)	15	17,5	14

(a) D'après ces informations, formulez le problème d'optimisation linéaire correspondant et déterminez les quantités de A,B et C qui optimiseront le bénéfice réalisé par la vente du chargement et donnez la valeur de ce bénéfice.

Arrivé dans le hangar pour charger, le chauffeur réalise que les marchandises sont conditionnées en sacs, et qu'il est impensable de charger autres choses que des sacs complets. Voici les poids des sacs qui constituent le stock :

Marchandise	A	B	C
Poids d'un sac (kg)	60	80	20

(b) Reformulez le problème d'optimisation en tenant compte de ces derniéres informations. Résolvez ce nouveau problème et comparez votre solution à la solution du cas (a). Justifiez votre raisonnement.

(c) Le chauffeur (décidément malchanceux) se rend compte que le comptable a oublié de mentionner la marchandise D dont il reste trois sacs de 50 kg pouvant rapporter chacun 1000 Euros. A ce moment, il a déjà chargé neuf sacs de A et deux sacs de B, et ne compte pas les enlever de sa camionnette. Formulez le nouveau problème d'optimisation et expliquez une méthode de résolution "systématique" (par opposition à intuitive) de ce problème, sans la mener à terme.