Optimisation Linéaire

Méthode du simplexe

Méthode du simplexe (ou algorithme du simplexe)

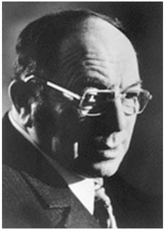

Figure: Leonid KANTOROVICH (1912-1986)

Kantorovich worked for the Soviet government. He was given the task of optimizing production in industry. He proposed in 1939 the mathematical technique now known as linear programming, some years before it was reinvented and much advanced by **George Dantzig** (1914-2005). He was awarded the 1975 Nobel Laureate in Economics for 'contributions to the theory of optimum allocation of resources'.

Méthode du simplexe (ou algorithme du simplexe)

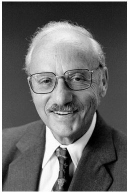

Figure: George Dantzig (1914-2005)

1947: George Dantzig, at the RAND Corporation, creates the simplex method for linear programming. **In terms of widespread application, Dantzig's algorithm is one of the most successful of all time**: Linear programming dominates the world of industry, where economic survival depends on the ability to optimize within budgetary and other constraints. (Of course, the real problems of industry are often nonlinear; the use of linear programming is sometimes dictated by the computational budget.) The simplex method is an elegant way of arriving at optimal answers. Although theoretically susceptible to exponential delays, the algorithm in practice is highly efficient-which in itself says something interesting about the nature of computation.

Ref. The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms, `https://www.siam.org/pdf/news/637.pdf`, A. Cipra

Le théorème fondamental

$$\min_x \quad c^T x \quad \text{tel que} \quad Ax \geq b.$$

L'ensemble $\mathcal{P} = \{x \mid Ax \geq b\}$ est un polyèdre.

Théorème fondamental. Si un problème d'optimisation linéaire possède un coût optimal fini et si le polyèdre $\mathcal{P}$ possède un sommet, alors il y a un sommet de $\mathcal{P}$ qui est optimal.

Le principe

Le polyèdre sous forme standard $\mathcal{P} = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ possède toujours un sommet (s'il est non vide). Si le problème

$$\min_x \quad c^T x \quad \text{tel que } x \in \mathcal{P},$$

possède un coût optimal fini, alors il y a un sommet qui est optimal.

Principe: Passer d'un sommet du polyèdre à un sommet adjacent de coût inférieur, et ce jusqu'à ce que tous les sommets adjacents soient de coût supérieur.

- Comment décrire et trouver les sommets?
- Comment se déplacer d'un sommet à un sommet adjacent?
- Comment sélectionner un sommet adjacent de coût inférieur?
- La procédure converge-t-elle? Vers une solution optimale?

Rappel: sommets adjacents

Soit $\mathcal{P} = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, et x^* et x^{**} deux solutions admissibles de base du polyèdre.

Ces deux solutions sont adjacentes s'il y a $n-1$ contraintes linéairement indépendantes actives à la fois en x^* et en x^{**}.

Les m contraintes $Ax = b$ sont satisfaites en x^* et en x^{**}.

Il y a $n-m$ contraintes $x_i \geq 0$ serrées en x^* et $n-m$ contraintes $x_i \geq 0$ serrées en x^{**}.

Les solutions admissibles de base sont adjacentes s'il y a $n-m-1$ contraintes $x_i \geq 0$ qui sont serrées à la fois en x^* et x^{**}.

Cette condition est satisfaite si et seulement si les solutions admissibles de base x^* et x^{**} possèdent $m-1$ variables de base communes.

Exemple

Les sommets admissibles de base du polyèdre défini par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0,$$

sont données par (1, 1, 0, 0), (2, 0, 0, 1), (0, 8/5, 1/5, 0), (0, 0, 1, 4).

Le sommet (1, 1, 0, 0) est adjacent à (2, 0, 0, 1) et à (0, 8/5, 1/5, 0) mais il n'est pas adjacent à (0, 0, 1, 4).

Tableau simplexe

Soit le problème linéaire

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{tel que} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Le problème est équivalent à celui de la minimisation de la nouvelle variable z sous les contraintes

$$\begin{aligned} c^T x &= z, \\ Ax &= b, \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Nous cherchons la plus petite valeur de z pour laquelle ce polyèdre n'est pas vide. Dans la suite nous n'écrivons plus que les contraintes d'égalité et cherchons toujours à minimiser z.

Exemple de tableau simplexe

Soit le problème d'optimisation linéaire

$$
\begin{aligned}
\min_x \quad & x_2 - 5x_3 + 5x_4 \\
& x_1 + x_2 - 11x_3 + 7x_4 = 10, \\
& x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 4, \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,
\end{aligned}
$$

que l'on écrit comme le problème de la minimisation de z sous les contraintes

$$
\begin{aligned}
x_2 - 5x_3 + 5x_4 &= z, \\
x_1 + x_2 - 11x_3 + 7x_4 &= 10, \\
x_1 - 8x_2 + 4x_4 &= 4, \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Le tableau simplexe associé est donné par

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	1	-5	5	z
1	1	-11	7	10
0	1	-8	4	4

Exemple: Distribution optimale de ressources entre activités concurrentes

On dispose de bois et de clous pour construire des tables et des chaises. On a besoin de 3 unités de clous et de 2 unités de bois pour construire une chaise, et 4 unités de clous et de 5 unités de bois pour construire une table.

Nous disposons de 1700 unités de clous et 1600 unités de bois.

Une chaise rapport 2, une table 4.

Quelle quantité de chaises et de tables produire pour maximiser son profit?

Exemple de tableau simplexe

On obtient le problème d'optimisation linéaire

$$\begin{aligned}
\min_{x} \quad & -2x_1 - 4x_2 \\
& 3x_1 + 4x_2 \leq 1700, \\
& 2x_1 + 5x_2 \leq 1600, \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Le tableau simplexe associé est donné par

$$\begin{array}{cccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\
\hline
-2 & -4 & 0 & 0 & z \\
\hline
3 & 4 & 1 & 0 & 1700 \\
2 & 5 & 0 & 1 & 1600
\end{array}$$

Forme canonique

Le tableau simplexe est sous forme canonique si

- ◇ La matrice des contraintes associées aux variables de base est la matrice identité.
- ◇ Les variables de base n'apparaissent pas dans la fonction objectif.

Cette forme canonique s'obtient par des opérations élémentaires sur les lignes.

Par exemple, le tableau simplexe

x_1	x_2	x_3	x_4	
-2	-4	0	0	z
3	4	1	0	1700
2	5	0	1	1600

est sous forme canonique avec les variables de bases $\{3, 4\}$.

Exemple

Soit

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & - & 5x_3 & + & 5x_4 & = & z, \\ x_1 & + & x_2 & - & 11x_3 & + & 7x_4 & = & 10, \\ & & x_2 & - & 8x_3 & + & 4x_4 & = & 4, \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

Le problème sous forme canonique $\{1, 2\}$ est donné par

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 3x_3 & + & x_4 & = & z - 4, \\ x_1 & & & - & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 6, \\ & & x_2 & - & 8x_3 & + & 4x_4 & = & 4, \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

Cela implique que la solution de base (6,4,0,0) est admissible.

Le problème sous forme canonique $\{1,3\}$ est donné par

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 3/8x_2 & & & + & 5/2x_4 & = & z-5/2, \\
x_1 & - & 3/8x_2 & & & + & 3/2x_4 & = & 9/2, \\
 & - & 1/8x_2 & + & x_3 & - & 1/2x_4 & = & -1/2, \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0.
\end{array}$$

La solution de base $\{1,3\}$ n'est pas admissible.

Forme canonique

Soit x_B les variables de base et x_N les variables hors base.

$$\begin{array}{rcl} c_B^T x_B + c_N^T x_N & = & z, \\ A_B x_B + A_N x_N & = & b, \\ x_B, x_N & \geq & 0. \end{array}$$

Si A_B est inversible, le problème s'écrit aussi

$$\begin{array}{rcl} c_B^T x_B + c_N^T x_N & = & z, \\ x_B + A_B^{-1} A_N x_N & = & A_B^{-1} b, \\ x_B, x_N & \geq & 0. \end{array}$$

On a donc $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$ et

$$\begin{array}{rcl} c_B^T (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N) + c_N^T x_N & = & z, \\ x_B + A_B^{-1} A_N x_N & = & A_B^{-1} b, \\ x_B, x_N & \geq & 0. \end{array}$$

Soit encore

$$\begin{array}{rcl} (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N & = & z - c_B^T A_B^{-1} b, \\ x_B + A_B^{-1} A_N x_N & = & A_B^{-1} b, \\ x_B, x_N & \geq & 0. \end{array}$$

La solution de base est admissible si $A_B^{-1} b \geq 0$. Elle est optimale si les coûts réduits $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ sont posififs (pourquoi? voir plus loin).

L'algorithme du simplexe démarre d'un sommet admissible ($A_B^{-1} b \geq 0$) et se déplace de sommet admissible en sommet admissible jusqu'à l'obtention d'un sommet optimal ($c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$).

Intérêt de la forme canonique

Soit le tableau simplexe sour forme canonique de base $\{1, 2\}$

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & c_3 & c_4 & z-4 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 4 & 4 \end{array}$$

Les quantités qui apparaissent dans la première ligne du tableau sont les coûts réduits des variables correspondantes. Suivant les valeurs des coûts réduits il y a trois cas possibles:

1. Le sommet (6,4,0,0) est optimal.
2. Le sommet (6,4,0,0) est l'extrémité d'une demi droite totalement contenue dans le polyèdre et le long de laquelle le coût est décroissant. Le coût est non borné.
3. Le sommet est adjacent à un sommet de coût inférieur.

Ces trois cas se lisent directement dans le tableau.

1. Sommet optimal

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 1 & z-4 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -8 & 4 & 4 \end{array}$$

(6,4,0,0) est la solution admissible de base associée à la base $\{1,2\}$.

Nous avons $3x_3 + x_4 = z - 4$. En (6,4,0,0), z est égal à 4. Puisque $x_3, x_4 \geq 0$, nous avons $3x_3 + x_4 \geq 0$ et le coût en une autre solution admissible ne peut-être que supérieur ou égal à 4. En effet, $z = 4 + \underbrace{3x_3 + x_4}_{\geq 0} \geq 4$ et le sommet (6,4,0,0) est optimal avec coût 4.

Au sommet (6,4,0,0), le coût réduit de x_3 est égal à 3, et de x_4 à 1.

Si en un sommet tous les coûts réduits sont positifs ou nuls, alors le sommet est optimal.

2. Coût non borné

$$
\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & -3 & 1 & z-4 \\
\hline
1 & 0 & -3 & 3 & 6 \\
0 & 1 & -8 & 4 & 4
\end{array}
$$

(6,4,0,0) est la solution admissible de base associée à la base $\{1, 2\}$.

Le coût réduit de x_3 est négatif. Si x_3 augmente et x_4 reste inchangé, le côût $(z = 4 - 3x_3 + x_4)$ diminue, et ce, quel que soit l'évolution de x_1 et de x_2.

On conserve $x_4 = 0$ et on pose $x_3 = \lambda$. On obtient $z = 4 - 3\lambda$. Plus λ augmente, plus z diminue. Les deux contraintes deviennent $x_1 = 6 + 3\lambda$ et $x_2 = 4 + 8\lambda$. Lorsque λ augmente, on satisfait toujours $x_1, x_2 \geq 0$.
La demi-droite $(6 + 3\lambda, 4 + 8\lambda, \lambda, 0)$ pour $\lambda \geq 0$ est totalement contenue dans le polyèdre et le coût est décroissant le long de la demi-droite. Le coût n'est pas borné.

Si en un sommet, un des coûts réduits est strictement négatif, et les entrées de la colonne coresspondante dans le tableau simplexe sont négatives, alors le coût n'est pas borné ($f^* = -\infty$).

3. Sommet adjacent de coût moindre

0	0	-3	-1	$z-4$
1	0	3	3	6
0	1	6	4	4

(6,4,0,0) est la solution admissible de base associée à la base $\{1, 2\}$.

Les coûts réduits associés à x_3 et à x_4 sont négatifs. Si x_3 ou x_4 augmentent, le coût diminue, et ce, quelle que soit l'évolution des variables x_1 et x_2.

Nous choisissons d'introduire x_3 dans la base, et de maintenir x_4 hors de la base: $x_3 = \lambda \geq 0$ et $x_4 = 0$. De façon à trouver un nouveau sommet, il nous faut déterminer la variable qui sort de la base.

Les contraintes s'écrivent $x_1 + 3\lambda = 6$ et $x_2 + 6\lambda = 4$. Lorsque λ augmente, la contrainte $x_2 + 6\lambda = 4$ est la première à devenir critique. C'est x_2 qui sort de la base. On obtient $\lambda = 2/3$ et on passe au sommet $(4, 0, 2/3, 0)$. Le nouvelle base est $\{1, 3\}$. Le coût optimal diminue de 2.

L'algorithme du simplexe

Etant donné une solution de base admissible.

1. Ecrire le tableau simplexe sous forme canonique.
2. Si tous les coûts réduits sont positifs ou nuls, stop (x est optimal). Sinon, choisir une variable hors base x_k de coût réduit négatif.
3. Soit a la colonne du tableau simplexe associée à la variable x_k et d la dernière colonne du tableau. Si $a \leq 0$, stop (le coût optimal n'est pas borné). Sinon, il y a au moins un indice i pour lequel $a_i > 0$. Calculer les quotients $\frac{d_i}{a_i}$ pour les indices i pour lesquels $a_i > 0$ et trouver l'indice l du plus petit quotient: l est tel que $a_l > 0$ et

$$\frac{d_l}{a_l} \leq \frac{d_i}{a_i} \text{ pour tout } i \text{ tel que } a_i > 0.$$

4. La variable x_k entre dans la base et x_l en sort. Mettre à jour la base. Retour en 1.

Une itération est aussi appellée un pivotage.

Convergence de l'algorithme

A l'etape 2, quelle variable choisir parmi les variables hors base de coût réduit négatif?

A chaque étape nous sommes libres de choisir la variable qui a notre préférence: la variable de coût réduit minimum, la variable qui réduit le plus la fonction coût, la variable de coût réduit négatif de plus petit indice, etc.

Si lors de chaque pivotage le **coût décroit strictement**, alors l'algorithme converge.

En effet, à chaque itération nous atteignons un nouveau sommet pour lequel le coût est strictement inférieur au coût des sommets qui l'ont précédé. Nous ne pouvons donc pas passer deux fois par le même sommet. D'autre part, un polyèdre ne possède qu'un nombre fini de sommets et l'algorithme doit donc s'arrêter.

Exemple

$$\min_x -2x_1 - 4x_2$$

$$\text{tel que} \quad \begin{aligned} &3x_1 + 4x_2 \leq 1700, \\ &2x_1 + 5x_2 \leq 1600, \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Le tableau simplexe associé est donné par

x_1	x_2	x_3	x_4	
-2	-4	0	0	z
3	4	1	0	1700
2	5	0	1	1600

Itération 1. La solution (0, 0, 1700, 1600) est la solution admissible de base associée aux variables x_3 et x_4. Les coûts réduits associés aux variables x_1 et x_2 sont négatifs. Nous choisissons de faire entrer x_2 dans la base. Nous ne pouvons pas augmenter x_2 sans limite puisqu'il faut satisfaire les contraintes. La première nous impose $4x_2 + x_3 = 1700$ et la seconde $5x_2 + x_4 = 1600$. La deuxième contrainte est la plus contraignante. C'est x_4 qui sort de la base.
Après transformations élémentaires sur les lignes, on obtient le tableau canonique

x_1	x_2	x_3	x_4	
$-2/5$	0	0	$4/5$	$z + 1280$
$7/5$	0	1	$-4/5$	420
$2/5$	1	0	$1/5$	320

Itération 2. La solution (0, 320, 420, 0) est la nouvelle solution admissible de base. Les variables hors base sont x_1 et x_4. Le coût augmente si x_4 augmente, il diminue si x_1 augmente. Nous faisons rentrer x_1 dans la base. Laquelle des variables x_2 et x_3 quitte la base? Les contraintes sont $7/5x_1 + x_3 = 420$ et $2/5x_1 + x_2 = 320$. La plus contraignante des contraintes est la première et nous obtenons donc, après transformation,

x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	$2/7$	$4/7$	$z + 1400$
1	0	$5/7$	$-4/7$	300
0	1	$-2/7$	$3/7$	200

Les variables hors base sont x_3 et x_4. Les coûts réduits associés sont positifs. La solution est optimale.

Cas dégénéré. Exemple

Soit le problème de programmation linéaire

$$\begin{aligned} \min_{x \geq 0} \quad & -3x_1 + x_2 \\ \text{tel que} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ & x_1 + x_2 \leq 5. \end{aligned}$$

Soit encore minimiser z avec

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} -3x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & z, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & & & & = & 4, \\ x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2, \\ x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 5, \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0. \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-3	1	0	0	0	z
2	-1	1	0	0	4
1	-2	0	1	0	2
1	1	0	0	1	5

Itération 1. (0,0,4,2,5) est la solution admissible associée à la base $\{3,4,5\}$. Le coût réduit associé à x_1 est négatif, on le fait entrer dans la base.

Pour $x_1 = \lambda \geq 0$ et $x_2 = 0$, les contraintes s'écrivent $x_3 = 4 - 2\lambda \geq 0$, $x_4 = 2 - \lambda \geq 0$ et $x_5 = 5 - \lambda \geq 0$. Les deux premières contraintes s'activent en $\lambda = 2$: les variable x_3 et x_4 sont toutes les deux candidates à la sortie. Quelle que soit la variable que nous choisissons, l'autre variable sera égale à zéro à l'itération suivante et nous nous trouverons en un sommet dégénéré. Nous choisissons de faire sortir x_4.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	-5	0	3	0	$z+6$
0	3	1	-2	0	0
1	-2	0	1	0	2
0	3	0	-1	1	3

Itération 2. La variable x_2 est la seule variable hors base de coût réduit négatif. La variable x_2 entre dans la base. La seule possibilité est de faire sortir x_3 de la base pour passer à la base $\{1, 2, 5\}$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	$5/3$	$-1/3$	0	$z+6$
0	1	$1/3$	$-2/3$	0	0
1	0	$2/3$	$-1/3$	0	2
0	0	-1	1	1	3

Itération 3. La base a changé mais la solution admissible de base n'a pas changé. En particulier, le coût n'a pas diminué.

Itération 4. L'itération suivante est plus standard: x_4 entre dans la base et x_5 en sort.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	$4/3$	0	$1/3$	$z+7$
0	1	$-1/3$	0	$2/3$	2
1	0	$1/3$	0	$1/3$	3
0	0	-1	1	1	3

La solution (3, 2, 0, 3, 0) est optimale. Le coût optimal est égal à -7.

Cyclage

A l'itération 3 de l'exemple, le coût n'a pas diminué suite au pivotage. Cette situation n'est possible que lorsque que l'on se trouve en un sommet dégénéré.

Lorsque le coût ne diminue pas suite à un ou plusieurs pivotages successifs, il n'est pas exclu de revenir à une base déjà visitée et de cycler en se déplaçant sur des sommets dégénérés de coûts égaux.

L'argument utilisé pour établir la convergence de l'algorithme dans le cas de sommets non dégénérés était basé sur la décroissance, à chaque itération, de la fonction coût. Cet argument n'est donc pas valide lorsque l'algorithme tombe sur un sommet dégénéré.

Lorsque nous sommes en présence de sommets dégénérés, la convergence de l'algorithme n'est assurée que pour des stratégies particulières de pivotage.

Règle de Bland

Parmi les variables candidates à l'entrée dans la base, choisir celle de plus petit indice.

Parmi les variables candidates à la sortie de la base, choisir celle de plus petit indice.

Robert G. Bland, *New finite pivoting rules for the simplex method*, Mathematics of Operations Research 2, pp. 103-107, 1977.

Initialisation de l'algorithme

L'algorithme du simplexe nécessite de partir d'un sommet du polyèdre. Un sommet initial n'est pas toujours disponible.

La recherche d'un sommet d'un polyèdre peut se faire lors d'une phase d'initialisation (ou phase I) en résolvant un problème d'optimisation linéaire annexe pour lequel on dispose d'un sommet initial.

Soit le polyèdre $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ pour lequel nous cherchons un sommet. Sans perte de généralité, on peut supposer que $b \geq 0$ (sinon on peut multiplier les égalités correspondantes aux $b_i < 0$ par -1).
On introduit des variables artificielles y_i $1 \leq i \leq m$ et on construit le problème annexe ($m + n$ variables):

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & \sum_i y_i \\ & Ax + y = b, \\ & x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

La solution $x = 0$ et $y = b$ est admissible et serre $m + n$ contraintes linéairement indépendantes. C'est donc un sommet et on peut démarrer l'algorithme du simplexe.
Si le coût optimal du problème annexe est supérieur à 0, il n'y a pas de solution admissible avec $y = 0$, et donc le polyèdre initial $\mathcal{P}$ est vide.
Si le coût optimal du problème annexe est égal à 0 ($\iff y^* = 0$), on considère une solution admissible de base optimale $(x^*, 0)$, et la solution x^* est un sommet du polyèdre initial $\mathcal{P}$. (Pourquoi?)

Exemple

Por trouver un sommet du polyèdre défini par

$$\begin{array}{rcrcr} 7x_1 & + & 6x_2 & = & 5, \\ -2x_1 & - & 4x_2 & \geq & -2, \\ x_1 & + & 5x_2 & \geq & 6, \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0, \end{array}$$

on introduit d'abord les variables d'écart

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 7x_1 & + & 6x_2 & & & & & = & 5, \\ -2x_1 & - & 4x_2 & - & s_1 & & & = & -2, \\ x_1 & + & 5x_2 & & & - & s_2 & = & 6, \\ x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & \geq & 0, \end{array}$$

et on écrit les contraintes avec un vecteur b positif

$$\begin{array}{ccccccccc}
7x_1 & + & 6x_2 & & & & & = & 5, \\
2x_1 & + & 4x_2 & + & s_1 & & & = & 2, \\
x_1 & + & 5x_2 & & & - & s_2 & = & 6, \\
x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

Finalement, on introduit les variables artificielles

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
7x_1 & + & 6x_2 & & & & & + & y_1 & & & & & = & 5, \\
2x_1 & + & 4x_2 & + & s_1 & & & & & + & y_2 & & & = & 2, \\
x_1 & + & 5x_2 & & & - & s_2 & & & & & + & y_3 & = & 6, \\
x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & , & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq & 0.
\end{array}$$

(0, 0, 0, 0, 5, 2, 6) est un sommet de ce polyèdre.

On peut démarrer l'agorithme du simplexe avec comme objectif la minimisation de $y_1 + y_2 + y_3$.

Finalement, la solution optimale du problème

$$\min_{x,y} y_1 + y_2 + y_3$$

tel que

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
7x_1 & + & 6x_2 & & & & & + & y_1 & & & & & = & 5, \\
2x_1 & + & 4x_2 & + & s_1 & & & & & + & y_2 & & & = & 2, \\
x_1 & + & 5x_2 & & & - & s_2 & & & & & + & y_3 & = & 6, \\
x_1 & , & x_2 & , & s_1 & , & s_2 & , & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq & 0,
\end{array}$$

est $(0.5, 0.25, 0, 0, 0, 0, 4.25)$, et donc le problème original n'est pas admissible (car $y^* \neq 0$).

Cela évite de devoir tester toutes les bases (pour rappel, il y en a $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ qui croit exponentiellement) avant de s'en rendre compte.

Complexité

Le pire des cas. On sait construire des problèmes de n variables pour lesquels l'algorithme du simplexe génère $2^n - 1$ itérations. De tels problèmes peuvent être construits pour la plupart des règles de pivotage utilisées en pratique.

Cas Moyen. Et pourtant, en pratique l'algorithme du simplexe est couramment utilisé pour résoudre des problèmes avec des milliers de variables. Il s'avère que le nombre d'opérations effectuées en moyenne est polynomial en n et m.

Algorithme Polynomial? Il existe des algorithmes prenant toujours un temps polynomial, ce sont les techniques dites de points intérieurs (cf. deuxième partie du cours). Cependant, elles ne fonctionnent pas toujours mieux que l'algorithme du simplexe (cela dépend de la taille, du type de problèmes, etc.).