Optimisation linéaire – Séance d'exercices 2

Géométrie des polyèdres

Un *polyèdre* est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ qui peut étre écrit comme $\mathcal{P} = \{x \in \mathbf{R}^n | \ Ax \geq b\}$. Un polyèdre est une intersection d'un nombre fini d'ensembles convexes et c'est donc un ensemble convexe. Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre de $\mathbf{R}^n$. La solution $x^\star \in \mathbf{R}^n$ est une *solution admissible de base* de $\mathcal{P}$ (pour les polyèdres, *sommet*, *point extrême* et *solution admissible de base* sont synonymes) si $x^\star$ est une solution admissible ($x^\star \in \mathcal{P}$) et s'il y a n contraintes linéairement indépendantes actives en $x^\star$. Une solution admissible de base $x^\star$ est *dégénérée* s'il y a plus de n contraintes actives en $x^\star$. Deux solutions admissibles de base sont *adjacentes* si elles partagent $n-1$ contraintes linéairement indépendantes actives.

---

1. Soit le polyèdre défini par les inégalités linéaires

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7, \\ 2x_2 - 3x_3 &\leq 1, \\ x_2 &\geq 2, \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Le point $(1, 2, 1)$ est-il un sommet du polyèdre? et le point $(5, 1/2, 0)$?

2. Trouvez les sommets du polyèdre défini par

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\leq 2, \\ -x_1 + x_2 &\leq 3, \\ x_1 &\leq 3, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

3. Soit le polyèdre défini par les inégalités linéaires

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 8, \\ x_2 + 6x_3 &\leq 12, \\ x_1 &\leq 4, \\ x_2 &\leq 6, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Parmi les points suivants trouvez ceux qui sont des sommets et déterminez ceux qui sont dégénérés: $(2, 6, 0)$, $(4, 6, 0)$, $(4, 0, 2)$. Ces sommets sont-ils adjacents?

4. Trouvez tous les sommets du polyèdre sous forme standard $\mathcal{P} = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid Ax = b \ , \ x \geq 0\}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Déterminez les sommets adjacents et les sommets dégénérés.

5. Quand un demi-espace contient-il un autre demi-espace? Donnez des conditions pour lesquelles

$$\{x|a^T x \leq b\} \subseteq \{x|\tilde{a}^T x \leq \tilde{b}\}.$$

6. Parmi les ensembles suivants quels sont ceux qui sont des polyèdres?

   (a) $\{y_1 a_1 + y_2 a_2 \mid -1 \leq y_1 \leq 1,\ -1 \leq y_2 \leq 1\}$ pour des a_1, a_2 donnés.
   (b) $\{x \in \mathbf{R}^n \mid x \geq 0, x^T y \leq 1$ pour tous les y avec $\|y\| = 1\}$.
   (c) $\{x \in \mathbf{R}^n \mid x \geq 0, x^T y \leq 1$ pour tous les y avec $\sum_i |y_i| = 1\}$.

   Lorsque c'est possible, exprimez l'ensemble sous forme $\{x \mid Ax \leq b\}$.

7. Supposons que $\{x \in \mathbf{R}^n \mid a_i^T x \geq b_i, i = 1, \ldots, m\}$ et $\{x \in \mathbf{R}^n \mid g_i^T x \geq h_i, i = 1, \ldots, k\}$ sont deux représentation du même polyèdre. Démontrez que si les vecteurs $a_1, \ldots, a_m$ génèrent $\mathbf{R}^n$ alors les vecteurs $g_1, \ldots, g_k$ également.

8. Trouvez, si possible, un problème d'optimisation linéaire qui possède un coût optimal fini mais qui ne possède pas de sommet optimal. Trouvez, si possible, un problème sous forme standard avec deux variables qui possède cette propriété. Justifiez votre réponse en cas d'impossibilité.

9. Considérez le problème d'optimisation

$$\begin{array}{lrcl} \text{minimiser} & c^T x & & \\ & Ax & \geq & b \end{array}$$

   Supposez que le polyèdre $\{x|Ax \geq b\}$ possède au moins un sommet et que le coût optimal est fini. Vous disposez d'une routine pour résoudre les systémes linéaires de n équations à n inconnues. La routine prévient si le déterminant est nul et retourne une solution s'il ne l'est pas. La routine utilise $O(n^3)$ opérations arithmétiques. Proposez un algorithme simple de résolution du problème d'optimisation qui ne fait appel qu'à la routine. Estimez le nombre d'opérations à effectuer pour résoudre un problème de n variables et m contraintes. (Remarque. On écrit $f(n) = O(g(n))$ s'il existe des nombres positifs n_0 et c pour lesquels $f(n) \leq cg(n)$ pour tout $n \geq n_0$.)

10. Le polyèdre de $\mathbf{R}^3$ défini par les inégalités linéaires

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 - x_2 + x_3 & \leq & 7 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 & \leq & 9 \\ -x_1 + 6x_2 + 5x_3 & \leq & 5 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

   est borné, possède un sommet et contient une sphère de rayon strictement positif. Nous désirons trouver le rayon de la plus grande sphère entiérement contenue dans ce polyèdre. Formulez ce problème comme un problème d'optimisation et transformez le en un problème d'optimisation linéaire. Répondez à la question suivante sans faire aucun calcul. Parmi les sphères de rayon maximum, en existe-t-il une qui touche quatre des plans qui définissent le polyèdre? Justifiez votre réponse.

11. On dispose des points (x_i, y_i) expérimentaux suivants: $(0,0), (1,3), (2,4)$ et $(4,2)$. On cherche l'équation de la droite $y = ax + b$ qui minimise la mesure d'erreur

$$\max_i |(ax_i + b) - y_i|.$$

Formulez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire. Soit

$$z_* = \min_{a,b} \max_i |(ax_i + b) - y_i|,$$

pour combien de points (x_i, y_i) l'égalité $z_* = |(ax_i + b) - y_i|$ est-elle obtenue?

Considérons la généralisation de ce problème à m points (x_i, y_i) et à un polynôme $p(x)$ de degré n. On cherche à minimiser la mesure d'erreur

$$\max_i |p(x_i) - y_i|.$$

Soit z_* l'objectif optimal de ce problème. Discutez le nombre de points (x_i, y_i) pour lesquels $z_* = |p(x_i) - y_i|$. Supposons que ce problème possède plusieurs solutions. Parmi l'ensemble des solutions du problème nous cherchons celle pour laquelle la quantité

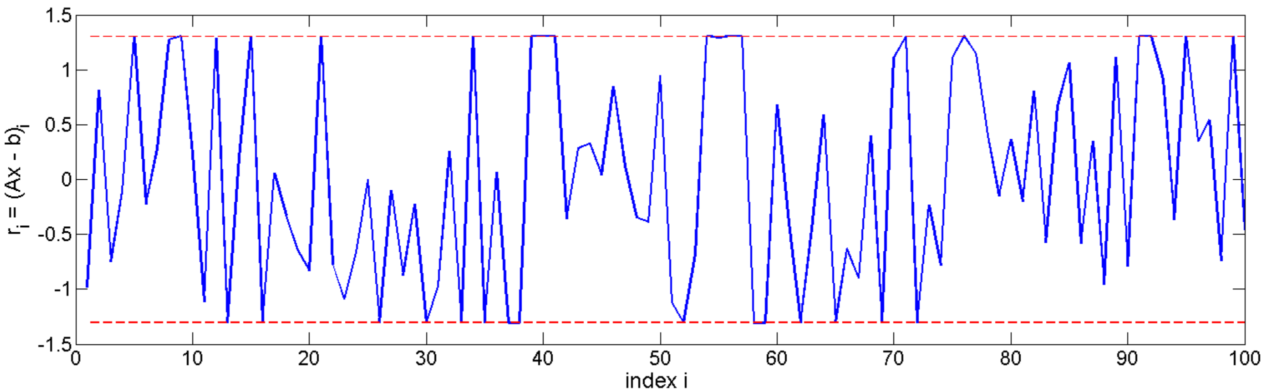
$$\sum_i |(ax_i + b) - y_i|$$

est minimum. Comment formuler ce problème comme un problème d'optimisation linéaire?

12. Soit $\|\cdot\|_\infty$ la norme du maximum ($\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$). Soit $A \in \mathbf{R}^{100\times n}$ et $b \in \mathbf{R}^{100}$. Le nombre de colonnes de A n'est pas connu mais on sait que le problème d'optimisation

$$\min_x \|Ax - b\|_\infty$$

possède une solution unique $x^* \in \mathbf{R}^n$ dont le vecteur des résidus correspondant $Ax^* - b$ est représenté plus bas. Au vu de ce graphique, que peut-on en déduire pour m? Justifiez votre réponse en détaillant votre raisonnement.



13. Vrai ou faux? Justifiez vos choix par quelques lignes, un contre-exemple ou un dessin.

   (a) L'union de deux polyèdres est un polyèdre.
   (b) Tout polyèdre P peut être écrit sous forme géométrique $P = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$.
   (c) Tout polyèdre P peut être écrit sous forme standard $P = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.
   (d) L'ensemble des solutions optimales d'un problème d'optimisation linéaire est un polyèdre.
   (e) En toute solution optimale d'un problème d'optimisation linéaire de n variables il y a au moins n contraintes actives.