MARO 006 - Optimisation - Partie linéaire
Examen - Septembre 2015

Cet examen est à livre fermé. Aucun appareil électronique n'est autorisé.

Vous avez deux heures pour répondre aux différentes questions.

Les Elec doivent répondre aux questions de la partie 1, les Mines aux questions de la partie 1 et la première question de la partie 2, et les IG et Info à toutes les questions.

1 Première partie: modélisation et méthode du simplexe

1. Vrai ou faux? Justifiez votre réponse ou donnez un contre-exemple.
   (a) [5 points] Un problème d'optimisation linéaire peut admettre exactement deux solutions optimales.
   (b) [5 points] Un polyèdre écrit sous forme standard possède toujours au moins un sommet.
   (c) [5 points] Après chaque itération de l'algorithme du simplexe, la valeur de la fonction objectif décroît strictement.
   (d) [5 points] Tout problème d'optimisation linéaire dont le domaine admissible n'est pas vide admet nécessairement un sommet.

2. [20 points] Vous êtres producteur de tablettes et de smartphones. Pour ce faire, vous avez en votre possession l'équivalent de 70 unités de matières premières et 50 unités de main d'oeuvre. Pour construire une tablette, il vous faut 1 unité de main d'oeuvre et 2 unité de matières premières, et vous pouvez la revendre 100€. Pour construire un smartphone, il vous faut 3 unité de main d'oeuvre et 1 unité de matières premières, et vous pouvez la revendre 200€.

   Combien allez-vous produire de tablettes et de smartphones pour maximiser votre profit?
   (a) Modélisez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire.
   (b) Résolvez ce problème en utilisant la méthode du simplexe.

2 Deuxième partie: dualité et branch and bound

1. [20 points] *Vérification de votre solution à la question 2. de la partie 1 via la dualité.* Reprenez le problème de la question 1.2.

   (a) Ecrivez le dual de ce problème et résolvez le géométriquement (ou avec une autre méthode si cela est plus facile pour vous).

   (b) Enoncez le théorème de la dualité forte, et utilisez ce théorème pour prouver que votre solution calculée à la question 1.2 est correcte[1] (ou incorrecte?).

   (c) On modifie la quantité de main d'oeuvre disponible par $50+\epsilon$ pour $\epsilon \in \mathbb{R}$. En utilisant la dualité fiable, donnez une borne supérieure de la valeur optimale du problème modifié en fonction de ϵ (c'est-à-dire une borne supérieure sur le nouveau profit que vous allez faire). Déduisez-en combien vous seriez prêt à payer au maximum pour une unité de main d'oeuvre supplémentaire.

   (Si vous n'avez pas pu calculer la solution optimale du dual, supposez, pour la suite, que la solution optimale du duale est donnée par y_1^* et y_2^*.)

   (d) En utilisant seulement de l'arithmétique très simple (multiplication, addition, substraction), comment pourriez-vous convaincre quelqu'un qu'il n'existe pas de solution meilleure que celle que vous avez calculée au point 1.2?

2. [20 points] *Problème de valise.* Vous revenez de vacances et aller prendre l'avion pour les Etats-Unis et devez faire votre valise. La limite est de 25kg (on néglige le poids de la valise). On dispose d'un ensemble d'objets (de A à E) à emporter ayant chacun un poids (en kg) et une valeur (en euro); voir la table ci-dessous. L'objectif est de remplir votre valise d'objets sans dépasser le poids maximal tout en maximisant la somme des valeurs des objets qu'il contient.

	A	B	C	D	E
Poids (kg)	8	7	11	6	19
Valeur (€)	230	190	280	140	440

   (a) Formulez ce problème comme un problème linéaire en nombres binaires.

   (b) Ecrivez la relaxation linéaire de ce problème et résolvez la.

   (c) Calculez toutes les solutions optimales de ce problème **par branch and bound** en utilisant les relaxations linéaires (suivez strictement les étapes du branch and bound –n'utilisez pas par exemple de solutions admissibles que vous auriez calculées à la main) et dessinez l'abre de recherche. Quels objets allez-vous emporter?

   (d) Supposez maintenant que vous pouvez dépasser la limite de 25kg, en payant 25€ par kg supplémentaire. Formulez ce problème comme un problème linéaire en nombres binaires. La solution calculée est-elle toujours optimale? (Note: on ne vous demande pas de résoudre ce nouveau problème.)

[1] Si vous n'avez pas réussi à trouver la solution optimale via la méthode du simplexe, vous pouvez également résoudre le primal géométriquement.