Optimisation Linéaire

Géométrie des Polyèdres

Géométrie des polyèdres

Les problèmes d'optimisation linéaire peuvent être résolus par la méthode du simplexe. La méthode du simplexe est une méthode algébrique basée sur des concepts géométriques. Nous analysons dans ce cours le lien entre la description algébrique d'un polyèdre et sa géométrie.

Polyèdres

Un polyèdre de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui peut être écrit comme une intersection d'un nombre fini de demi-espaces de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \geq b_i \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, m\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}.$$

Un polyèdre est toujours convexe puisqu'il s'écrit comme une intersection d'ensembles convexes.

Un polyèdre borné est un polytope (voir exemple slide 5).

Polyèdres: exemples

- Un demi-espace (non-borné).
- Un hyperplan. L'hyperplan $\{x \mid a^T x = b\}$ est un polyèdre puisqu'il s'écrit aussi comme l'intersection des deux demi-espaces $\{x \mid a^T x \leq b\}$ et $\{x \mid a^T x \geq b\}$.
- L'ensemble des solutions d'un système d'égalités et d'inégalités linéaires

$$a_i^T x \leq b_i \text{ pour } i \in \mathcal{I}, a_i^T x = b_i \text{ pour } i \in \mathcal{E}.$$

- Une tranche $\{x \mid b_1 \leq a^T x \leq b_2\}$.
- Un polyèdre sous forme standard $\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ (borné?).
- Un polyèdre sous forme géométrique $\{x \mid Ax \geq b\}$.

Exemple

On produit deux types de téléphones: le 1er type demande 4 unités de resource A et 3 de C, le 2ème type 2 unités de resource B et 2 de C. Le prix de vente est respectivement 300€ et 500€, et l'on dispose de 4 unités de A, 12 de B et 18 de C.

$$\max_{x_1,x_2} \quad 3x_1 + 5x_2 \quad \text{tel que} \quad \begin{aligned} & x_1 \leq 4, \\ & 2x_2 \leq 12, \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

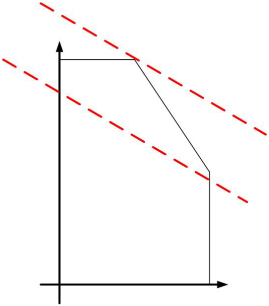
Exemple

$$\max_{x_1,x_2} \quad 3x_1 + 5x_2 \quad \text{tel que} \quad x_1 \leq 4,$$

$$2x_2 \leq 12,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$



Ensemble des solutions optimales

$$\min_x \quad c^T x \quad \text{tel que} \quad Ax \geq b.$$

L'ensemble $\mathcal{P} = \{x \mid Ax \geq b\}$ est un polyèdre.

L'ensemble des solutions optimales $\mathcal{P}^* \subseteq \mathcal{P}$ est également un polyèdre:

- Le problème est non admissible ($f^* = +\infty$), alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}^* = \emptyset$.
- Le problème est admissible et a un coût fini f^*, alors

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cap \{x | c^T x = f^*\}.$$

- Le problème est admissible mais non borné ($f^* = -\infty$), alors $\mathcal{P}^* = \emptyset$.

Le théorème fondamental

$$\min_x \quad c^T x \quad \text{tel que} \quad Ax \geq b.$$

L'ensemble $\mathcal{P} = \{x \mid Ax \geq b\}$ est un polyèdre.

Théorème fondamental. Si un problème d'optimisation linéaire possède un coût optimal fini et si le polyèdre $\mathcal{P}$ possède un sommet, alors il y a un sommet de $\mathcal{P}$ qui est optimal (voir démonstration plus loin).

Comment décrire et trouver les sommets d'un polyèdre?

Polyèdres et représentations

Un même polyèdre peut être obtenu au moyen de représentations différentes. On distinguera les propriétés relatives à un polyèdre des propriétés relatives à ses représentations.

Les polyèdres décrits par les contraintes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont identiques.

Contraintes actives (ou serrées)

Soit le polyèdre défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid\ & a_i^T x \geq b_i \text{ pour } i \in \mathcal{I}, \\ & a_i^T x = b_i \text{ pour } i \in \mathcal{E}\}.\end{aligned}$$

Si le point x^* est tel que $a_k^T x^* = b_k$ pour un certain indice k, nous disons que la contrainte correspondante est active (ou serrée) en x^*.

En particulier, les contraintes d'égalité ($i \in \mathcal{E}$) sont toutes serrées en un point du polyèdre.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ◇ En (0,1), les contraintes 1, 3, 4 et 5 sont actives.
- ◇ En (0,1/2), les contraintes 1 et 5 sont actives.
- ◇ En (1,0), les contraintes 2 et 3 sont actives.

Contraintes linéairement indépendantes

Des contraintes du polyèdre défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = \{x \mid a_i^T x &\geq b_i \text{ pour } i \in \mathcal{I}, \\ a_i^T x &= b_i \text{ pour } i \in \mathcal{E}\}.\end{aligned}$$

sont linéairement indépendantes si les vecteurs correspondants a_i le sont.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Les contraintes 1 et 3 sont linéairement indépendantes.
- Les contraintes 1 et 5 ne sont pas linéairement indépendantes.

Solutions admissibles de base

Soit le polyèdre défini par

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \geq b_i \text{ pour } i \in \mathcal{I}, \\ a_i^T x = b_i \text{ pour } i \in \mathcal{E}\}.$$

La solution $x^* \in \mathbb{R}^n$ est une solution admissible de base de $\mathcal{P}$ si $x^* \in \mathcal{P}$ et s'il y a n contraintes linéairement indépendantes actives en x^*.

Une solution admissible de base x^* est dégénérée si le nombre de contraintes actives en x^* est supérieur à n.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ◇ En (0, 1) les contraintes 1, 3, 4 et 5 sont actives; (0, 1) est une solution admissible de base dégénérée.
- ◇ En (0, 1/2) les contraintes 1 et 5 sont actives. Les contraintes 1 et 5 ne sont pas linéairement indépendantes et (0, 1/2) n'est pas une solution admissible de base.
- ◇ En (1, 0) les contraintes 2 et 3 sont actives; (1, 0) est une solution admissible de base non-dégénérée.
- ◇ En (2, 0) les contraintes 2 et 4 sont actives. Les contraintes 2 et 4 sont linéairement indépendantes mais (2, 0) n'appartient pas à $\mathcal{P}$. Le point (2, 0) n'est pas une solution admissible de base.

Dégénérescence

Les polyèdres décrits par les contraintes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont identiques: ils possèdent les mêmes solutions admissibles de base.

La solution admissible de base (0, 0) n'est pas dégénérée dans le premier cas, elle l'est dans le second.

Le caractère dégénéré d'une solution admissible de base dépend en général de la représentation.

Solutions adjacentes

Soit le polyèdre défini par

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x &\geq b_i \text{ pour } i \in \mathcal{I}, \\ a_i^T x &= b_i \text{ pour } i \in \mathcal{E}\}.\end{aligned}$$

Soit x_1 et x_2 deux solutions admissibles de base de $\mathcal{P}$. Ces deux solutions sont adjacentes s'il y a $n-1$ contraintes linéairement indépendantes actives à la fois en x_1 et en x_2.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- ◇ En (0, 1) les contraintes 1, 3, 4 et 5 sont actives; (0, 1) est une solution admissible de base dégénérée.
- ◇ En (1, 0) les contraintes 2 et 3 sont actives; (1, 0) est une solution admissible de base non-dégénérée.
- ◇ (0, 1) et (1, 0) sont des solutions admissibles de base adjacentes: la contrainte 3 est active en (0,1) et en (1,0).

Points extrêmes et sommets

Le point $x \in \mathcal{P}$ est un point extrême du polyèdre $\mathcal{P}$ s'il ne peut pas être exprimé comme combinaison convexe d'autres points de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire, s'il n'existe pas deux points $y, z \in \mathcal{P}$ différents de x et un scalaire $0 \leq \lambda \leq 1$ tels que $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$.

Le point $x \in \mathcal{P}$ est un sommet du polyèdre $\mathcal{P}$ si x est séparable de $\mathcal{P}$ par un hyperplan, c'est-à-dire, s'il existe un vecteur c tel que $c^T x < c^T y$ pour tout $y \in \mathcal{P}$, $y \neq x$.

Ces définitions sont géométriques, elles ne dépendent pas des représentations choisies pour décrire les polyèdres. (D'autre part, ces définitions conservent un sens pour des sous-ensembles quelconques de $\mathbb{R}^n$.)

Sommets, points extrêmes et solutions admissibles de base

Théorème. Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre et $x \in \mathcal{P}$. Les conditions suivantes sont équivalentes

- x est un sommet.
- x est un point extrême.
- x est un solution admissible de base.

Preuve. Voir la démonstration du Théorème 2.3 de: *Introduction to Linear Optimization*, Dimitri Bertsimas and John Tsitsiklis, Athena Scientific, 1997.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (1,1) est un point extrême.
- (1,1) est un sommet. C'est l'unique minimum de $c^T x$ avec $c = (-1, -1)$.
- (1,1) est une solution admissible de base. Les contraintes 2 et 4 sont serrées en (1,1) et elles sont linéairement indépendantes.

Polyèdres sans sommets

Tous les polyèdres ne possèdent pas de sommets.

Exemples.

- L'hyperplan $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$ (pour $n \geq 2$).
- Le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \geq b\}$ (pour $n \geq 2$).
- La tranche $\{x \in \mathbb{R}^n \mid b_1 \leq a^T x \leq b_2\}$ (pour $n \geq 2$).
- Un polyèdre donné sous forme géométrique $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ ne possède jamais de sommets lorsque la matrice A possède moins de n lignes.

Calcul des sommets: Forme géométrique

Soit $\mathcal{P} = \{x \mid Ax \geq b\}$ un polyèdre de $\mathbb{R}^n$. Pour trouver les sommets du polyèdre on écrit

$$\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

et on énumère les sous-matrices carrées de A avec n lignes et les sous-vecteurs de b correspondants

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{i_1}^T \\ a_{i_2}^T \\ \vdots \\ a_{i_n}^T \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b_{i_1} \\ b_{i_2} \\ \vdots \\ b_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Si rang$(\tilde{A}) = n$, on calcule $x^* = \tilde{A}^{-1}\tilde{b}$. Le polyèdre possède n contraintes linéairement indépendantes actives en x^*. Le point x^* est un sommet de $\mathcal{P}$ si $Ax^* \geq b$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $\{1,2\}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $x^* = \tilde{A}^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; sommet.
- $\{1,3\}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $x^* = \tilde{A}^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; pas un sommet.
- $\{1,4\}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $x^* = \tilde{A}^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$; pas un sommet.
- $\{2,3\}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $x^* = \tilde{A}^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$; pas un sommet.

- $\{2,4\}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $x^* = \tilde{A}^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; sommet.
- $\{3,4\}$: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $x^* = \tilde{A}^{-1}\tilde{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; sommet.

Les sommets sont (0,3), (3,0) et (1,1).

Aucun des sommets n'est dégénéré.

Les couples de sommets adjacents sont (1,1)-(0,3) et (1,1)-(3,0).

Calcul des sommets: Forme standard

Soit $\mathcal{P} = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ un polyèdre de $\mathbb{R}^n$.

On peut suppose les m contraintes linéairement indépendantes (sinon, on peut supprimer des contraintes redondantes, en vérifiant avant que $\mathcal{P} = \emptyset$!).

En une solution admissible du polyèdre les m contraintes $Ax = b$ sont serrées.

Pour obtenir une solution admissible de base il faut serrer $n - m$ contraintes supplémentaires parmi les n contraintes $x_i \geq 0$.

Le choix de ces variables n'est pas arbitraire puisqu'il faut que l'ensemble résultant des contraintes serrées soit un ensemble de contraintes linéairement indépendantes.

Supposons que les contraintes soient celles correspondantes aux $n-m$ dernières variables. Nous avons alors

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \qquad \text{où } x_B \in \mathbb{R}^m, x_N \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

Les variables x_B sont les variables de base, les variables x_N sont les variables hors base et le système $Ax = b$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} A_B & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = A_B x_B + A_N x_N = b.$$

Si A_B est inversible, une solution du système $Ax = b$ est donnée par $x_B^* = A_B^{-1} b$ et $x_N^* = 0$. Cette solution est telle que

$$\begin{pmatrix} A_B & A_N \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

et elle serre n contraintes linéairement indépendantes. Si $A_B^{-1} b \geq 0$, cette solution est égalemnet admissible et constitue donc un sommet.

Pour trouver les sommets du polyèdre $\mathcal{P}$, on choisit une base de m variables pour lesquelles la matrice de base associée A_B est inversible, ce sont les variables de base. En d'autres mots, on choisit m colonnes de A telle que la sous-matrice correspondante est inversible.

On définit ensuite la solution $x_B^* = A_B^{-1} b$ et $x_N^* = 0$. Si $x_B^* \geq 0$, la solution est admissible et x^* est une solution admissible de base.

Si une des composantes de x_B^* est nulle, la solution admissible de base est dégénérée.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0.$$

◇ $\{1,2\}$: $x_3 = x_4 = 0$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et (1,1,0,0) est un sommet.

◇ $\{1,3\}$: $x_2 = x_4 = 0$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et (8/3,0,-1/3,0) n'est pas un sommet (non admissible).

◇ $\{1,4\}$: $x_2 = x_3 = 0$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et (1,0,0,2) est un sommet.

◇ $\{2,3\}$: $x_1 = x_4 = 0$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et (0,8/5,1/5,0) est un sommet.

◇ $\{2,4\}$: $x_1 = x_3 = 0$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et (0,2,0,-1) n'est pas un sommet (non admissible).

- $\{3,4\}$: $x_1 = x_2 = 0$ et

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  et (0,0,1,4) est un sommet.

Il y a 4 sommets (non dégénérés).

Un premier algorithme ('force brute')

Soit le problème d'optmisation linéaire

$$\min_x \quad c^T x \quad \text{tel que} \quad x \in \mathcal{P} = \{x \mid Ax \geq b\}.$$

Par le théorème fondamental, on sait que, si la valeur optimale est bornée et que $\mathcal{P}$ contient un sommet, alors il existe un sommet optimal.

Algorithme force brute.

1. Enumérer tous les sommets de $\mathcal{P}$: $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*$.
2. Sélectionner le (ou les) sommet(s) dont la fonction objectif $c^T x_i^*$ est minimale parmi tous les autres sommets.

Si la valeur optimale f^* est bornée:

$$c^T x_i^* \leq c^T x_j^* \text{ pour tout } 1 \leq j \leq k \quad \Rightarrow \quad x_i^* \text{ est optimal .}$$

Nombre de sommets

Le polyèdre

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$, peut potentiellement avoir

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

C'est fini, mais c'est beaucoup.

Par exemple un polyèdre avec 10 variables ($n = 10$) et 30 contraintes ($m = 30$) possède au plus 30 millions de sommets. Avec 50 contraintes, on arrive à 10 millards de sommets...

Un polyèdre avec beaucoup de sommet

Le cube unité

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1 \;\; \text{pour} \;\; 1 \leq i \leq n\}$$

est défini au moyen de $2n$ contraintes et possède 2^n sommets.

Le cube unité de 400 variables possède plus de 10^{120} sommets. Un nombre plus élevé que le nombre d'atomes dans l'univers (de l'ordre de 10^{80}).

La méthode de résolution 'force brute' semble peu appropriée. Il faut trouver autre chose. On pourrait se déplacer de sommet adjacent en sommet adjacent. C'est la méthode du simplexe.

Sommets adjacents

Soit $\mathcal{P} = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, et x^* et x^{**} deux solutions admissibles de base du polyèdre.

Ces deux solutions sont adjacentes s'il y a $n-1$ contraintes linéairement indépendantes actives à la fois en x^* et en x^{**}.

Les m contraintes $Ax = b$ sont satisfaites en x^* et en x^{**}.

Il y a $n-m$ contraintes $x_i \geq 0$ serrées en x^* et $n-m$ contraintes $x_i \geq 0$ serrées en x^{**}.

Les solutions admissibles de base sont adjacentes s'il y a $n-m-1$ contraintes $x_i \geq 0$ qui sont serrées à la fois en x^* et x^{**}.

Cette condition est satisfaite si et seulement si les solutions admissibles de base x^* et x^{**} possèdent $m-1$ variables de base communes.

Exemple

Les sommets admissibles de base du polyèdre défini par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \geq 0,$$

sont données par (1, 1, 0, 0), (2, 0, 0, 1), (0, 8/5, 1/5, 0), (0, 0, 1, 4).

Le sommet (1, 1, 0, 0) est adjacent à (2, 0, 0, 1) et à (0, 8/5, 1/5, 0) mais il n'est pas adjacent à (0, 0, 1, 4).

Existence de sommets

Un polyèdre $\mathcal{P}$ contient une droite s'il existe un point x_0 et un vecteur non nul d tels que $x_0 + \lambda d \in \mathcal{P}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition. Les polyèdres qui possèdent un sommet sont exactement ceux qui ne contiennent pas de droite.

Preuve. Nous montrons que si le polyèdre $\mathcal{P}$ ne contient pas de droite, alors il possède un sommet. Soit $x_0 \in \mathcal{P}$ et I l'ensemble des indices pour lesquel $a_i^T x_0 = b_i$. S'il y a n vecteurs linéairement indépendants dans $\{a_i, i \in I\}$ alors x_0 est un sommet et la proposition est démontrée. Sinon, il existe une direction $d \neq 0$ telle que $a_i^T d = 0$ pour $i \in I$. Soit alors la droite d'équation $x = x_0 + \lambda d$. Quel que soit λ on a $a_i^T x = b_i$ pour $i \in I$. Comme le polyèdre ne contient pas de droite, il existe $j \notin I$ et λ^* pour lesquels $a_j^T(x_0 + \lambda^* d) = b_j$. De plus, a_j n'est pas combinaison linéaire des $a_i, i \in I$ puisque d est perpendiculaire à $a_i, i \in I$ et n'est pas perpendiculaire à a_j. Le point $x_1 = x_0 + \lambda^* d$ appartient au polyèdre et serre une contrainte linéairement indépendante de plus que x_0. En procédant de proche en proche on tombe finalement sur un sommet.

Supposons maintenant que x est un sommet du polyèdre $\mathcal{P}$. Nous pouvons toujours mettre un polyèdre sous forme géométrique; soit $\mathcal{P} = \{x | a_i^T x \geq b_i\}$. Nous allons montrer que le polyèdre ne contient pas de droite. Il y a n contraintes linéairement indépendantes actives en x. Soit $a_i^T x = b_i, i = 1, \ldots, n$ ces contraintes. Supposons maintenant que le polyèdre contient une droite d'équation $x_0 + \lambda d$. Alors $a_i^T(x_0 + \lambda d) \geq b_i, i = 1, \ldots, n$. Ces inégalités ne peuvent être satisfaites pour tout λ que si $a_i^T d = 0, i = 1, \ldots, n$. Puisque les vecteurs $a_i, i = 1, \ldots, n$ sont linéairement indépendants, ces égalités imposent $d = 0$ et le polyèdre ne contient pas de droite. $\square$

Présence de sommets

Proposition. Un polyèdre donné sous forme géométrique $\mathcal{P} = \{x \mid Ax \geq b\}$ possède un sommet si et seulement si l'équation $Ad = 0$ ne possède pas d'autre solution que la solution triviale $d = 0$.

Preuve. Le polyèdre contient une droite s'il existe x_0 et $d \neq 0$ avec $A(x_0 + \lambda d) \geq b$ pour tout λ. C'est-à-dire $Ax_0 + \lambda Ad \geq b$ pour tout λ. Cette condition n'est satisfaite que si $Ad = 0$.

Proposition. Un polyèdre non vide donné sous forme standard $\mathcal{P} = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ possède toujours un sommet.

Preuve. L'orthant positif ne contient pas de droite et tout polyèdre sous forme standard est entièrement contenu dans l'orthant positif.

Le théorème fondamental

Théorème. Soit le problème de la minimisation d'une fonction linéaire sur un polyèdre $\mathcal{P}$. Si le coût optimal est fini et si le polyèdre possède un sommet alors il y a un sommet du polyèdre qui est optimal.
Preuve. Soit

$$\min_x \quad c^T x \quad \text{tel que} \quad x \in \mathcal{P} = \{x \mid Ax \geq b\}$$

avec f^* comme coût optimal de telle manière que l'ensemble des solutions optimale est donnée par

$$\mathcal{P}^* = \{x \mid Ax \geq b, c^T x = f^*\} \subseteq \mathcal{P}.$$

Comme $\mathcal{P}$ possède un sommet, il ne contient pas de droite ce qui implique que $\mathcal{P}^*$ n'en contient pas non plus. $\mathcal{P}^*$ contient donc un sommet x^*.
Montrons que x^* est également un sommet de $\mathcal{P}$. Supposons par contradiction que x^* n'est pas un sommet de $\mathcal{P}$. Alors il existe $y, z \in \mathcal{P}$ $(y, z \neq x^*)$ et $\lambda \in [0, 1]$ tels que $x^* = \lambda y + (1 - \lambda)z$. Comme x^* est optimal: $c^T x^* \leq c^T y$ et $c^T x^* \leq c^T z$. De plus, $c^T x^* = \lambda c^T y + (1 - \lambda)c^T z$ et donc $c^T y = c^T z = c^T x^* \Rightarrow y, z \in \mathcal{P}^*$, une contradiction comme x^* est un sommet de $\mathcal{P}^*$.

Nombre de contraintes serrées

D'après le théorème fondamental, un problème linéaire de coût optimal fini sur un polyèdre possédant au moins un sommet, possède un sommet optimal. En un sommet on serre autant de contraintes qu'il y a de variables. Sous les conditions enoncées plus haut, il y a donc toujours une solution optimale qui serre autant de contraintes qu'il y a de variables.

Exemple: Centre de Chebychev d'un polyèdre

Nous cherchons la plus grande sphère entièrement contenue dans le polyèdre

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \geq b_i, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

On peut supposer $||a_i||_2 = 1$ pour tout i, et le problème s'écrit

$$\max_{x,t} \quad t \quad \text{tel que} \quad a_i^T x \geq b_i + t, i = 1, 2, \dots, m,$$

où x est le centre du la sphère et t la plus petite distance de x aux hyperplans définissant le polyèdre.

Si le coût optimal est fini et que l'ensemble admissible possède un sommet (ce sera par exemple toujors le cas si le polyèdre est borné -et non vide- càd que c'est un polytope), alors il existe une solution optimale qui serre $n+1$ contraintes (un sommet).

Par exemple, un polygone ($n = 2$) aura toujours un centre de Chebychev touchant au moins trois segments. (Note que dans le cas d'un rectangle par exemple, il y a des centres n'en touchant que deux.)