Optimisation – Séance d'exercices 3
Méthode du simplexe

1. Soit le problème d'optimisation

$$\begin{array}{lrcl} \min_x & -2x_1 - x_2 & & \\ \text{tel que} & x_1 - x_2 & \leq & 2, \\ & x_1 + x_2 & \leq & 6, \\ & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

   Convertissez ce problème sous forme standard et trouvez un sommet pour lequel $x_1 = x_2 = 0$. Résolvez le problème au moyen de la méthode du simplexe. Tracez une représentation graphique en terme des variables x_1, x_2 et indiquez le chemin suivi par la méthode.

2. Considérez le problème

$$\begin{array}{llcr} \min_x & 20x_1 + \alpha x_2 + 12x_3 & & \\ \text{tel que} & x_1 & \leq & 400, \\ & 2x_1 + \beta x_2 + x_3 & \leq & 1000, \\ & 2x_1 + \gamma x_2 + 3x_3 & \leq & 1600, \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

   Proposez, si possible, des valeurs pour α, β et γ pour lesquelles:

   (a) Le coût optimal est fini et la solution optimale est unique.
   (b) Le coût optimal est fini et il y a une infinité de solutions optimales.
   (c) Le coût optimal est non borné (trouvez une paramétrisation de valeurs de x parmi lesquelles se trouvent des solutions de coûts arbitrairement faibles).
   (d) Le polyèdre posséde un sommet dégénéré.

3. Résoudre par l'algorithme du simplexe les problèmes

$$\begin{array}{llcr} \max_x & 2x_1 + 3x_2 & & \\ \text{tel que} & x_1 + 2x_2 & \leq & 4, \\ & x_1 + x_2 & = & 3, \\ & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{llcr} \max_x & 20x_1 + 16x_2 + 12x_3 & & \\ \text{tel que} & x_1 & \leq & 400, \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 1000, \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 1600, \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{llcr} \max_x & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 & & \\ \text{tel que} & 3x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & 30, \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq & 40, \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{llcr} \max_x & -x_1 + 4x_2 & & \\ \text{tel que} & -3x_1 + 4x_2 & \leq & 6, \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 4, \\ & x_2 & \geq & -3. \end{array}$$

4. Nous reprenons un des problèmes précédents. Un étudiant dispose de 100 heures de travail pour étudier les examens A, B et C. Il pense gagner par heure de travail sur chaque cours 1/5 de points pour le cours A, 2/5 de points pour le cours B et 3/5 pour le cours C. Chaque examen est coté sur 20. Les exercices de ces cours comptent pour la moitié de la cote finale. Ses résultats pour les exercices lui ont été communiqués. Il a obtenu 12/20 pour A, 12.5/20 pour B et 13.4/20 pour C.

L'étudiant doit obtenir au minimum une cote globale de 10/20 pour chaque cours. Tous les cours ont la méme pondération et l'étudiant désire obtenir la moyenne la plus élevée possible.

Formulez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire et résolvez-le. Vous pouvez utiliser le fait que l'étudiant a avantage à utiliser la totalité des 100 heures de travail. L'étudiant obtiendra-t-il une distinction?

5. Une société produit des biens A, B et C. La production des biens nécessite l'utilisation de 4 machines. Les temps de production et les profits générés sont repris dans le tableau

	1	2	3	4	profit
A	1	3	1	2	6
B	6	1	3	3	6
C	3	3	2	4	6

Si les temps de production disponibles sur les machines 1, 2, 3 et 4 sont de 84, 42, 21 et 42, déterminez la quantité de biens à produire pour maximiser le profit.

6. Résoudre par la méthode du simplexe en utilisant la régle de Bland

$$\begin{array}{lll} \max_x & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 & \\ \text{tel que} & 0.5x_1 - 5.5x_2 - 2.5x_3 + 9x_4 & \leq 0, \\ & 0.5x_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 + x_4 & \leq 0, \\ & x_1 & \leq 1, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0. \end{array}$$

7. Proposez une méthode de recherche d'un sommet du polyèdre

$$\begin{array}{rl} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 & \geq 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 & \geq 5, \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0. \end{array}$$

8. Considérez le problème d'optimisation

$$\begin{array}{lll} \min_x & 20x_1 + \alpha x_2 + 12x_3 & \\ \text{tel que} & x_1 & \leq 4, \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 & \leq 10, \\ & 2x_1 + \beta x_2 + 3x_3 & \leq 16, \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0. \end{array}$$

Trouvez une solution optimale au moyen de l'algorithme du simplexe lorsque $\alpha = -2$ et $\beta = 1$. Proposez des valeurs pour α et β pour lesquelles le coût optimal est non borné et proposez dans ce cas une solution pour laquelle le coût optimal est inférieur à -1000.

9. Considérez le problème d'optimisation

$$\begin{array}{lll} \max_x & \alpha x_1 + 16x_2 + 12x_3 & \\ \text{tel que} & x_1 & \leq 400, \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 & \leq 1000, \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq 1600, \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0. \end{array}$$

Trouvez une solution optimale au moyen de l'algorithme du simplexe lorsque $\alpha = 20$. Existe-t-il une valeur de α pour laquelle le coût optimal est non borné? Si oui, proposez une solution pour laquelle le coût est supérieur à 10000. Si non, justifiez votre réponse.