Optimisation Linéaire

Dualité

Dualité

Un problème d'optimisation linéaire possède toujours un problème companion, un problème dual, pour lequel le rôle des variables et des contraintes est inversé.

Le problème initial est appelé le problème primal.

Pour chaque variable dans le problème primal, il y a une contrainte dans le dual et pour chaque contrainte dans le problème primal, il y a une variable dans le problème dual.

Problème du mélange (ou de diététique)

Cette semaine, votre entraineur sportif (ou diététicien(ne) ou ...) vous recommande de consommer 10 unité de vitamine A, 8 unités de vitamines B et 7 unités de vitamines C.
Vous ne voulez manger que des pommes et des bananes, dont les quantités de vitamines et le prix par unité est:

	Vit. A	Vit. B	Vit. C	prix
pommes	2	1	1	4
bananes	1	2	1	3
Total à consommer	10	8	7	

Table: Données (par unité).

Comment borner la valeur optimale?

$$
\begin{aligned}
\min_{x_1,x_2} \quad & f(x) = 4x_1 + 3x_2 \\
\text{tel que} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 10, \\
& x_1 + 2x_2 \geq 8, \\
& x_1 + x_2 \geq 7, \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

On notera $\mathcal{P}$ le domaine admissible de ce problème.

Sans résoudre le problème, comment borner la valeur optimale

$$f^* = \inf_{x \in \mathcal{P}} f(x) \ ?$$

Borne supérieure

Toute solution admissible fournit une borne supérieure à la valeur optimale.

En effet, par définition, pour tout $y \in \mathcal{P}$, nous avons

$$f(y) \geq f^* = \inf_{x \in \mathcal{P}} f(x).$$

Exemple. Bornes supérieure

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & f(x) = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{tel que} \quad & 2x_1 + \ \ x_2 \geq 10 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1 + \ \ x_2 \geq 7 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- (8,0) est admissible $\Rightarrow f^* \leq 32$. On devra au plus dépenser 32€ pour assimiler les vitamines demandées.
- (0,10) est admissible $\Rightarrow f^* \leq 30$.
- (3,4) est admissible $\Rightarrow f^* \leq 24$.

Borne inférieure

Toute combinaison linéaire d'égalités et d'inégalités (avec poids positifs pour les inégalités) fournit une inégalité (ou une égalité) valide.

Soit

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 10, \\ x_1 + 2x_2 &\geq 8, \\ x_1 + x_2 &\geq 7. \end{aligned}$$

- Si on multiplie la première inégalité par 2, on obtient

$$4x_1 + 2x_2 \geq 20.$$

Comme $f(x) = 4x_1 + 3x_2$ et que $x_1, x_2 \geq 0$, nous avons pour tout $x \in \mathcal{P}$ que

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 \geq 4x_1 + 2x_2 \geq 20.$$

$\Rightarrow$ Toute solution admissible doit avoir un coût d'au moins 20.
$\Rightarrow f^* \geq 20.$

◇ Si on multiplie la troisème inégalité par 3, on obtient

$$3x_1 + 3x_2 \geq 21.$$

Comme $f(x) = 4x_1 + 3x_2$ et que $x_1, x_2 \geq 0$, nous avons pour tout $x \in \mathcal{P}$ que

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 \geq 3x_1 + 3x_2 \geq 21.$$

$\Rightarrow$ Toute solution admissible doit avoir un coût d'au moins 21.
$\Rightarrow f^* \geq 21.$

Sans résoudre le problème, on sait déjà que la solution admissible (3,4) (dont le coût est de 24) nous côute au pire 3€ de trop.

Comment obtenir la plus grande borne inférieure?

On doit permettre n'importe quelle combinaison linéaire: pour chaque égalité/inégalité, on introduit une variable qui est son poids dans la combinaison linéaire:
Pour tout $y_1, y_2, y_3 \geq 0$, nous avons

$$\begin{array}{rcc} (2x_1 + x_2 \geq 10) & . & y_1 \\ +(x_1 + 2x_2 \geq 8) & . & y_2 \\ +(x_1 + x_2 \geq 7) & . & y_3 \end{array}$$

$$y_1(2x_1 + x_2) + y_2(x_1 + 2x_2) + y_3(x_1 + x_2) \geq 10y_1 + 8y_2 + 7y_3$$

$$\iff x_1(2y_1 + y_2 + y_3) + x_2(y_1 + 2y_2 + y_3) \geq 10y_1 + 8y_2 + 7y_3$$

Le dual

Si on impose $2y_1 + y_2 + y_3 \leq 4$ et $y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3$, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x_1 + 3x_2 \\ &\geq \underbrace{x_1}_{\geq 0} \underbrace{(2y_1 + y_2 + y_3)}_{\leq 4} + \underbrace{x_2}_{\geq 0} \underbrace{(y_1 + 2y_2 + y_3)}_{\leq 3} \\ &\geq 10y_1 + 8y_2 + 7y_3 = g(y). \end{aligned}$$

On veut maximiser cette borne inférieure:

$$\begin{aligned} \max_{y_1, y_2, y_3} \quad & g(y) = 10y_1 + 8y_2 + 7y_3 \\ \text{tel que} \quad & 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 4, \qquad \text{(Dual)} \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3, \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{aligned}$$

On va dénoter le domaine admissible du dual
$\mathcal{D} = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 4, y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3 \text{ et } y_1, y_2, y_3 \geq 0\}$.

Le dual

On vient de démonter que pour tout $x \in \mathcal{P}$ et pour tout $y \in \mathcal{D}$, on a

$$f(x) \geq g(y).$$

En particulier, pour tout $y \in \mathcal{D}$,

$$f^* = \inf_{x \in \mathcal{P}} f(x) \geq g(y).$$

Toute solution admissible du dual fournit une borne inférieure pour la valeur optimale du primal.

La plus grande borne inférieure est la solution optimale du dual:

$$f^* = \inf_{x \in \mathcal{P}} f(x) \geq \sup_{y \in \mathcal{D}} g(y) = g^*.$$

Primal - Dual

$$\begin{array}{llcll} \min_x & f(x) = 4x_1 + 3x_2 & & \max_y & g(y) = 10y_1 + 8y_2 + 7y_3 \\ \text{tel que} & 2x_1 + \ \ x_2 \geq 10 & & \text{tel que} & 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8 & \geq & & y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3 \\ & x_1 + \ \ x_2 \geq 7 & & & y_1, y_2, y_3 \geq 0. \\ & x_1, \ \ x_2 \geq 0. & & & \end{array}$$

Par exemple, la solution duale $y = (1, 0, 2)$ a un coût de 24: $f^* \geq 24$.

Cela consiste à prendre une fois la première inégalité et deux fois la troisième:

$$f(x) = 4x_1 + 3x_2 = 1 * (2x_1 + x_2) + 2 * (x_1 + x_2) \geq 10 + 2 * 7 = 24.$$

La solution $y = (1, 0, 2)$ du dual certifie que $x = (3, 4)$ est optimal.

Généralisation et dualité faible

$$\begin{array}{ccccc} \min_x & f(x) = c^T x & \geq & \max_y & g(y) = b^T y \\ \text{tel que} & Ax \geq b & & \text{tel que} & A^T y \leq c \\ & x \geq 0 & & & y \geq 0. \end{array}$$

Théorème. (Dualité faible) Pour tout $x \in \mathcal{P} = \{x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ et pour tout $y \in \mathcal{D} = \{x \mid A^T y \leq c, y \geq 0\}$,

$$f(x) = c^T x \quad \geq \quad b^T y = g(y).$$

Preuve. On a

$$f(x) = c^T x \quad \underbrace{\geq}_{\substack{x \geq 0 \\ c \geq A^T y}} \quad \left(A^T y\right)^T x = y^T (Ax) \quad \underbrace{\geq}_{\substack{y \geq 0 \\ Ax \geq b}} \quad y^T b = b^T y = g(y).$$

Certificat d'optimalité

$$\begin{array}{llcll} \min_x & f(x) = c^T x & \geq & \max_y & g(y) = b^T y \\ \text{tel que} & Ax \geq b & & \text{tel que} & A^T y \leq c \\ & x \geq 0 & & & y \geq 0. \end{array}$$

Corollaire. Si on trouve $x^* \in \mathcal{P} = \{x \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$ et $y^* \in \mathcal{D} = \{x \mid A^T y \leq c, y \geq 0\}$ tel que

$$f(x^*) = c^T x^* \quad = \quad b^T y^* = g(y^*),$$

alors x^* est une solution optimale du primal, et y^* une solution optimale du dual.

Preuve. Par la dualité faible: Pour tout $x \in \mathcal{P}$ et pour tout $y \in \mathcal{D}$

$$c^T x \geq b^T y.$$

En particulier,

$$c^T x \geq b^T y^* = c^T x^* \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{P},$$

et donc x^* est une solution optimale du primal.

De la même manière,

$$b^T y \leq c^T x^* = b^T y^* \quad \text{pour tout } y \in \mathcal{D},$$

et y^* est une solution optimale du dual.

Dual sous forme standard

Quel est le dual de

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T x \\ \text{tel que} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0? \end{aligned}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^n$.

Pour chaque égalité $a_i^T x = b_i$ $i = 1, 2, \dots, m$, on introduit la variable duale y_i et on prend les combinaisons linéaires des égalités du primal:

$$(A^T y)^T x = \sum_{i=1}^{m} y_i a_i^T x = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i = b^T y.$$

On a

$$A^T y \leq c \quad \Rightarrow \quad c^T x \quad \underbrace{\geq}_{\substack{x \geq 0 \\ c \geq A^T y}} \quad (A^T y)^T x = y^T (Ax) \underbrace{=}_{Ax=b} y^T b = b^T y.$$

Dual sous forme standard

Primal:

$$\begin{array}{ll} \min_x & c^T x \\ \text{tel que} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array} \quad \geq \quad$$

Dual:

$$\begin{array}{ll} \max_y & b^T y \\ \text{tel que} & A^T y \leq c. \end{array}$$

Dual sous forme géométrique

Quel est le dual de

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad c^T x$$
$$\text{tel que} \quad Ax \geq b?$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^n$.

Pour chaque inégalité $a_i^T x \geq b_i$ $i = 1, \ldots, m$, on introduit la variable duale $y_i \geq 0$ et on prend les combinaisons linéaires des inégalités du primal:

$$(A^T y)^T x = \sum_{i=1}^m y_i a_i^T x \geq \sum_{i=1}^m y_i b_i = b^T y.$$

On a

$$A^T y = c \quad \Rightarrow \quad c^T x \underbrace{=}_{c = A^T y} (A^T y)^T x = y^T (Ax) \underbrace{\geq}_{\substack{y \geq 0 \\ Ax \geq b}} y^T b = b^T y.$$

Dual sous forme géométrique

Primal: Dual:

$$\begin{array}{llcll} \min_x & c^T x & \geq & \max_y & b^T y \\ \text{tel que} & Ax \geq b. & & \text{tel que} & A^T y = c, \\ & & & & y \geq 0. \end{array}$$

Le dual de tout problème primal

$$
\begin{array}{lll}
\displaystyle\min_{x=(x_1,x_2)} & c_1^T x_1 + c_2^T x_2 & \\
\text{tel que} & A_1 x_1 + A_2 x_2 \geq b_1, & \text{(Primal)} \\
& A_3 x_1 + A_4 x_4 = b_2, & \\
& x_1 \geq 0, x_2 \text{ libre.} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\displaystyle\max_{y=(y_1,y_2)} & b_1^T y_1 + b_2^T y_2 & \\
\text{tel que} & A_1^T y_1 + A_3^T y_2 \leq c_1, & \text{(Dual)} \\
& A_2^T y_1 + A_4^T y_2 = c_2, & \\
& y_1 \geq 0, y_2 \text{ libre.} &
\end{array}
$$

Exercices. Prouvez la dualité faible pour cette paire primal-dual.
Prouvez que le dual du dual est le primal.

Dualité forte

Théorème. (Dualité forte) S'il existe une solution optimale x^* du primal, alors il existe une solution optimale y^* du dual tel que

$$c^T x^* = b^T y^*.$$

Preuve. On considère la forme standard:

$$\begin{array}{ccccc} \min_x & c^T x & \geq & \max_y & b^T y \\ \text{tel que} & Ax = b, & & \text{tel que} & A^T y \leq c. \\ & x \geq 0. & & & \end{array}$$

Soit x^* un sommet optimal (qui existe toujours sous forme standard: pourquoi?). En réordonnant les variables, on obtient

$$x_* = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

où $x_B = A_B^{-1} b$ sont les variables de bases et $x_N = 0$ les variables hors base. On note également $A = [A_B, A_N]$ et $c = [c_B, c_N]$.

Puisque x_* est optimal, les coûts réduits $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ sont positifs:

$$c_N^T \geq c_B^T A_B^{-1} A_N.$$

Définissons $y_*^T = c_B^T A_B^{-1}$ et montrons que (1) y_* est une solution admissible du dual, et (2) $c^T x_* = b^T y_*$. Par la dualité faible, cela terminera la preuve.

(1) y_* est admissible pour le dual puisque

$$y_*^T A = y_*^T \Big[A_B, A_N\Big] = \Big[y_*^T A_B, y_*^T A_N\Big] = \Big[c_B^T, c_B^T A_B^{-1} A_N\Big] \leq \Big[c_B^T, c_N^T\Big] = c^T.$$

(2) On a

$$y_*^T b = c_B^T A_B^{-1} b = c_B^T x_B = c^T x_*.$$

Cas de solutions primal-dual

Dual / Primal	Optimum fini	Non borné	$\emptyset$
Optimum fini	OK	/	/
Non borné	/	/	OK
$\emptyset$	/	OK	OK*

$\emptyset$ = Pas de solution admissible. / = impossible.

Par la dualité forte.

Par la dualité faible: si le primal est non borné, le dual ne possède pas de solution admissible. Si le dual est non borné, le primal ne possède pas de solution admissible.

***Exemple**: $\max_x \ 2x_1 - x_2$ tel que $x_1 - x_2 = 1, -x_1 + x_2 = -2, x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ n'est pas admissible, et son dual $\min_y \ y_1 - 2y_2$ tel que $y_1 - y_2 \geq 2, -y_1 + y_2 \geq -1$ non plus.

Conditions de complémentarité

Considérons la paire

$$\begin{array}{ll} \min_x & c^T x \\ \text{tel que} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array} \quad \geq \quad \begin{array}{ll} \max_y & b^T y \\ \text{tel que} & y \geq 0, \\ & A^T y \leq c. \end{array}$$

Il y a interdépendance entre les contraintes $x \geq 0$ du primal et les contraintes $A^T y \leq c$ du dual. En des solutions optimales il y a au moins une des contraintes serrée.

Proposition. Si x est une solution optimale du primal et y est une solution optimale du dual, alors

$$x^T(c - A^T y) = 0 \quad \text{et} \quad y^T(Ax - b) = 0.$$

En d'autres termes: Pour tout i, soit $x_i = 0$, soit $c_i - {a^i}^T y = 0$,
Pour tout j, soit $y_j = 0$, soit $a_j^T x - b_j = 0$.

Preuve.

Nous ne démontrons que le premier cas. L'autre s'obtient par dualité. Si x et y sont des solutions optimales, par la dualité forte,

$$c^T x = b^T y.$$

De plus, comme $c \geq A^T y$,

$$c^T x \geq (A^T y)^T x \geq b^T y.$$

Cela implique $c^T x = (A^T y)^T x$ soit encore $(A^T y - c)^T x = 0$.

Exemple

$$\begin{array}{rr} \min_x & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{tel que} & 2x_1 + x_2 \geq 10, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ & x_1 + x_2 \geq 7, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{array} \quad {\color{red}\geq} \quad \begin{array}{rr} \max_y & 10y_1 + 8y_2 + 7y_3 \\ \text{tel que} & y_1 \geq 0, \\ & y_2 \geq 0, \\ & y_3 \geq 0, \\ & 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 4, \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3. \end{array}$$

La paire de solutions (3,4) et (1,0,2) satisfont les conditions de complémentarité.

Cela est assez logique: une inégalité qui n'est pas active à l'optimalité dans le primal n'est pas utilisée pour générer la plus grande borne inférieure (son poids dans la'meilleure' combinaison linéaire est sa variable duale associée).

Interprétation des variables duales

$$
\begin{array}{lll}
\min_x & f(x) = 4x_1 + 3x_2 \\
\text{tel que} & 2x_1 + x_2 \geq 10 \\
& x_1 + 2x_2 \geq 8 \\
& x_1 + x_2 \geq 7 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0.
\end{array}
\quad {\color{red}\geq} \quad
\begin{array}{lll}
\max_y & g(y) = 10y_1 + 8y_2 + 7y_3 \\
\text{tel que} & 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 4 \\
& y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0.
\end{array}
$$

La solution optimale du primal est (3,4) (achat de 3 unités de pommes à 4€ et de 4 unités de bananes à 3€).

Pour rappel, les contraintes correspondent à la quantité de vitamines A, B, et C nécessaire (respectivement).

A quoi correspondent les variables duales optimales (1,0,2)?

Interprétation des variables duales

Un vendeur veut vous vendre de la vitamine A: à quel prix seriez vous prêt à l'acheter?

Supposez que vous achetiez ϵ vitamines A à z€/unité, la paire primale-duale devient

$$
\begin{array}{rrcl}
\min_x & 4x_1 + 3x_2 & & \\
\text{tel que} & 2x_1 + x_2 \geq 10 - \epsilon & & \\
& x_1 + 2x_2 \geq 8 & \geq & \\
& x_1 + x_2 \geq 7 & & \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0. & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
\max_y & (10-\epsilon)y_1 + 8y_2 + 7y_3 \\
\text{tel que} & 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 4 \\
& y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0.
\end{array}
$$

Dénotons $x^*(\epsilon)$ la solution optimale du primal.

Les contraintes du dual sont inchangées: la solution (1,0,2) reste admissible. Par la dualité faible

$$c^T x^*(\epsilon) \geq (10 - \epsilon) * 1 + 7 * 2 = 24 - \epsilon.$$

Votre nouveau coût de revient $f(\epsilon)$ satisfait

$$f(\epsilon) = c^T x^*(\epsilon) + z\epsilon \geq 24 - \epsilon + z\epsilon = 24 + \epsilon(z-1).$$

Vous n'avez pas intérêt à acheter si la vitamine A coûte plus de 1€.

La variable y_1 associée à la contrainte sur la quantité de vitamine A à assimiler représente en fait la valeur marginal de la vitamine A. (Il faut pour cela utiliser la dualité forte; voir ci-dessous.)

Par exemple, $y_2 = 0$ et vous n'aurez jamais intérêt à acheter de la vitamine B (vous en consommer déjà trop avec la solution optimale actuelle).

Analyse de sensibilité

Soit la paire primal-dual sous forme standard:

$$\begin{array}{lll} \min_x & c^T x \\ \text{tel que} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array} \quad \geq \quad \begin{array}{ll} \max_y & b^T y \\ \text{tel que} & A^T y \leq c. \end{array}$$

Supposons disposer d'une base

$$x_* = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}, \qquad \text{où } A = [A_B, A_N] \text{ et } c = [c_B, c_N],$$

admissible c-à-d $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$ sont les variables de bases et $x_N = 0$ les variables hors base, et optimale c-à-d $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$.

La solution duale correspondante est donnée par $y_*^T = c_B^T A_B^{-1}$.

Analyse de sensibilité: modification de b

Lorsque le vecteur des ressources passe de b à $b + \Delta b$, la contrainte d'optimalité $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$ reste satisfaite.

La contrainte d'admissibilité reste satisfaite si

$$A_B^{-1}(b + \Delta b) = A_B^{-1} b + A_B^{-1} \Delta b \geq 0.$$

Si $A_B^{-1} b > 0$ (sommet non dégénéré), cette condition est satisfaite pour tout Δb suffisamment petit.

La nouvelle solution optimale est $(A_B^{-1}(b + \Delta b), 0) = (x_B + A_B^{-1} \Delta b, 0)$ (la base optimale ne change pas).

Cela implique que la solution duale optimale y_* ne change pas pour Δb suffisamment petit.

En la solution optimale associée à $b + \Delta b$, la fonction objectif prend la valeur

$$c_B^T(x_B + A_B^{-1}\Delta b) = c_B^T x_B + c_B^T A_B^{-1}\Delta b = f^* + \Delta f = f^* + y_*^T \Delta b,$$

soit un changement de $y_*^T \Delta b$.
La solution optimale du dual y_* donne la sensibilité de l'objectif optimal à une variation de b: Quand b augmente de Δb, la fonction objectif augmente de $y_*^T \Delta b$.

Exemple

$$\begin{array}{ccc} \min_{x,s} & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{tel que} & 2x_1 + x_2 - s_1 = 10 - \epsilon \\ & x_1 + 2x_2 - s_2 = 8 \\ & x_1 + x_2 - s_3 = 7 \\ & x, s \geq 0. \end{array} \quad \geq \quad \begin{array}{cc} \max_y & (10-\epsilon)y_1 + 8y_2 + 7y_3 \\ \text{tel que} & 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 4 \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3 \\ & y \geq 0. \end{array}$$

On a

$$\Delta b = \begin{pmatrix} -\epsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad A_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, les variables de base $(x_1, x_2, s_2) = A_B^{-1}b = (3, 4, 3) > 0$ (sommet non dégénéré).
La base reste inchangée tant que $A_B^{-1}b + A_B^{-1}\Delta b$ reste positif. Par exemple, pour $\epsilon = -1$, on a $(x_1, x_2, s_2) = (2, 5, 4)$ et la quantité optimale de pommes et de bananes à acheter est respectivement de 2 et 5 pour un prix total de 23.

De plus la solution optimale duale (2,0,1) ne change pas et on a

$$c^T x_*(\epsilon) = c^T x_* + y_*^T \Delta b = c^T x_* - \epsilon,$$

pour tout ϵ suffisamment petit.

Remarque. Plus précisément, la base reste inchangée tant que $-3 \leq \epsilon \leq 3$.

Analyse de sensibilité: modification de c

Lorsque le vecteur objectif passe de c à $c + \Delta c$, la contrainte d'admissibilité $A_B^{-1} b \geq 0$ reste satisfaite.

La contrainte d'optimalité reste satisfaite si

$$\begin{aligned}(c_N + \Delta c_N)^T - (c_B + \Delta c_B)^T A_B^{-1} A_N \\ = \underbrace{(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N)}_{\geq 0} - (\Delta c_N^T + \Delta c_B^T A_B^{-1} A_N) \geq 0.\end{aligned}$$

Si $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N > 0$ (sommet non dégénéré), cette condition est satisfaite pour tout Δc suffisamment petit.

Exemple

$$\begin{array}{rc} \min_{x,s} & (4-\epsilon)x_1 + 3x_2 \\ \text{tel que} & 2x_1 + x_2 - s_1 = 10 - \epsilon \\ & x_1 + 2x_2 - s_2 = 8 \\ & x_1 + x_2 - s_3 = 7 \\ & x, s \geq 0. \end{array} \quad \color{red}{\geq} \quad \begin{array}{rc} \max_{y} & (10-\epsilon)y_1 + 8y_2 + 7y_3 \\ \text{tel que} & 2y_1 + y_2 + y_3 \leq (4-\epsilon) \\ & y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3 \\ & y \geq 0. \end{array}$$

La solution primale $(x_*, s_*) = (3, 4, 0, 3, 0)$ reste optimale si

$$(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) - (\Delta c_N^T + \Delta c_B^T A_B^{-1} A_N) = (1, 2) - (-\epsilon, \epsilon) \geq 0$$

c-à-d si $-1 \leq \epsilon \leq 2$.

On a

$$A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Analyse de sensibilité: nouvelle variable

On introduit une nouvelle variable x_{n+1} de coefficient objectif c_{n+1} et de vecteur associée a_{n+1}.

La base reste admissible (A_B et b ne changent pas).

Comme la nouvelle variable est ajoutée au variables hors base, la solution reste optimale si l'entrée ajoutée aux coûts réduits $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ correspondant à la nouvelle variable reste positive, c-à-d si

$$c_{n+1} - y_*^T a_{n+1} \geq 0.$$

Exemple

Supposons qu'on ait un nouveau fruit à consommer, disons des oranges (coût: 6, vitamines A: 1, B: 1, C: 2). La solution d'acheter 3 pommes et 4 bananes reste optimale:

$$6 - (1, 0, 2) * (1, 1, 2)^T = 1 \geq 0.$$

Par contre, si l'orange coute moins de 5€, il faudra en acheter. . .

Exemple: Distribution optimale de ressources entre activités concurrentes

Trois ressources A, B et C sont utilisées pour obtenir deux produits P et T. Deux transformations sont possibles

$$A + 3C \to P \quad \text{et} \quad 2B + 2C \to T.$$

Les ressources sont disponibles en quantités limitées et la ressource C est partagée. On dispose de 4 unités de A, 12 de B et 18 de C. Les produits P et T rapportent, respectivement, 3 et 5 par unités produites.

Combien d'unités de P et T faut-il produire pour maximiser le profit?

Exemple: Distribution optimale de ressources entre activités concurrentes

$$\begin{array}{ll} \max_x & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{tel que} & x_1 \leq 4, \\ & 2x_2 \leq 12, \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

- Quel est le dual de ce problème?
- Que représentent les variables duales?
- Que se passe-t-il si je diminue la quantité de ressource A de 4 à 3?
- Que se passe-t-il si j'augmente la quantité de ressource B de 12 à 13?
- Seriez vous prêt à payer 2€ pour une unité de ressource C supplémentaire?

Algorithme du simplexe dual

L'algorithme du simplexe dual est l'algorithme simplexe appliqué au dual.

Une base est admissible si $x_B = A_B^{-1} b \geq 0$. La base est optimale si $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$, soit encore si $y^T = c_B^T A_B^{-1}$ est tel que $A^T y \leq c$.

L'algorithme du simplexe primal démarre d'un sommet admissible ($A_B^{-1} b \geq 0$) et se déplace de sommet admissible en sommet admissible jusqu'à l'obtention d'un sommet qui satisfait la contrainte d'optimalité ($c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$).

L'algorithme du simplexe dual démarre d'un sommet dual admissible ($c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$) et se déplace de sommet adjacent en sommet adjacent jusqu'à l'obtention d'un sommet optimal ($A_B^{-1} b \geq 0$).

Intuitivement, on a l'interprétation suivante en terme du primal: l'algorithme du simplexe dual démarre d'un 'sommet' primal optimal ($c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$) et se déplace de 'sommet' optimal en sommet optimal jusqu'à l'obtention d'un sommet admissible ($A_B^{-1} b \geq 0$).

Ajout d'une contrainte au primal

Si on ajoute une contrainte d'inégalité au primal (très utile pour le 'branch and bound', voir plus loin), la solution duale correspondante reste admissible (en prenant la nouvelle variable à zéro) et de base.

En effet, soit le problème dual avant l'ajout de la nouvelle contrainte:

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y \qquad \text{tel que} \qquad A^T y \leq b,$$

et soit y^* un sommet optimal. On ajoute la contrainte $d^T x \geq e$ au primal et la variable duale correspondante $z \geq 0$. Le dual devient:

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}} b^T y + e\, z \quad \text{tel que} \quad (A^T\, d) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = A^T y + d\, z \leq c \text{ et } z \geq 0.$$

La solution $\binom{y^*}{0}$ reste admissible (puisque $A^T y^* + d\, z = A^T y^* \leq c$) et de base puisque m contraintes $A^T y^* \leq c$ sont serrées (y^* est un sommet) et la contrainte $z \geq 0$ également (et elles sont linéairement indépendantes).

On peut donc redémarrer facilement l'algorithme dual à partir de cette solution.