Optimisation

Introduction

Nicolas Gillis (nicolas.gillis@umons.ac.be)

Organisation du cours

- Support: transparents.
- Parties:
  - Optimisation linéaire (IG + INFO) - formulation, géométrie, méthode du simplexe, dualité et branch and bound.
  - Optimisation non-linéaire (IG) - formulation, conditions d'optimalité, convexité, méthodes de recherche en ligne, etc.
- Evaluation:
  - 2 projets (linéaire et non-linéaire, 10% chacun)
  - examen (théorie et exercices)
- Tout est sur Moodle.
- Questions?

Motivation : modélisation et aide à la décision

Aider à choisir la meilleure décision

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{Décision} & \leftrightarrow & \text{vecteur de variables } x \\ \text{Meilleure} & \leftrightarrow & \text{fonction objectif } f \\ \text{Contraintes} & \leftrightarrow & \text{domaine admissible } \mathcal{D} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Optimisation}$$

$$\min_x f(x) \quad \text{tel que} \quad x \in \mathcal{D}.$$

- Nombreuses applications en pratique
- Méthodes de résolution efficaces en pratique
- Modélisation et résolution de modèles de grande taille

Exemple 1: Distribution optimale de ressources entre activités concurrentes

Trois ressources A (bois), B (clous) et C (tissu) sont utilisées pour obtenir deux produits T (table) et L (lits). On a besoin de: deux unités de bois pour construire une table et trois pour un lit, deux unités de clou pour une table et une pour un lit, et une unité de tissu pour une table et trois pour un lit.
On dispose de 13 unités de A, 11 de B et 9 de C. Les produits T et L rapportent, respectivement, 300 et 400 euros par unités produites.

Combien d'unités de L et T faut-il produire pour maximiser le profit?

Exemple 1: Formulation

1. **Choix des variables**: x_1 unités de T, x_2 unité de L.
2. **Contraintes**:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 13, \qquad \text{(resource A)}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 11, \qquad \text{(resource B)}$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9, \qquad \text{(resource C)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. **Fonction objectif**:

$$\max_{x_1, x_2} \quad 300x_1 + 400x_2.$$

Exemple 1: Interprétation géométrique

Les couples (x_1, x_2) pour lesquels

$$2x_1 + 3x_2 \leq 13,$$

$$2x_1 + x_2 \leq 11,$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9, \text{ et}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

est un polyèdre de $\mathbb{R}^2$.

Pour un scalaire z donné, l'ensemble $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 300x_1 + 400x_2 = z\}$ est une droite perpendiculaire au vecteur $c = (3, 4)$. Les droites obtenues pour différentes valeurs de z sont parallèles. Une solution optimale s'obtient en translatant cette droite le plus loin possible. La solution optimale s'obtient en un sommet du polyèdre.

Solution: 1 unités de L et 5 unités de T pour un profit de 1900.

Exemple 2: Problème du mélange (ou de diététique)

Cette semaine, votre entraineur sportif (ou diététicien(ne) ou . . .) vous recommande de consommer 10 unité de vitamine A, 8 unités de vitamines B et 7 unités de vitamines C.
Vous ne voulez manger que des pommes et des bananes, dont les quantités de vitamines et le prix par unité est:

	Vit. A	Vit. B	Vit. C	prix
pommes	2	1	1	4
bananes	1	2	1	3
Total à consommer	10	8	7	

Table: Données (par unité).

Exemple 2: Formulation

1. **Choix des variables**: x_1 est la quantité de pommes achetées, x_2 la quantité de bananes

2. **Contraintes**:

$$2x_1 + x_2 \geq 10, \qquad \text{(vitamine A)}$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8, \qquad \text{(vitamine B)}$$

$$x_1 + x_2 \geq 7, \qquad \text{(vitamine C)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. **Fonction objectif**: le coût total est minimum

$$\min_{x_1, x_2} \quad 4x_1 + 3x_2.$$

Exemple 2: Formulation

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ \text{tel que} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 10, \\ & x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ & x_1 + x_2 \geq 7, \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Pouvez-vous résoudre ce problème géométriquement?

Comment faire s'il y a beaucoup plus d'aliments (càd de variables) et de vitamines à obtenir (càd de contraintes)?

Répondre à cette question est un des objectifs principaux de ce cours.

Exemple 3: Problème de transport

Un produit est transportée de m origines vers n destinations. Le produit est disponible en quantités $a_1, a_2, \ldots, a_m$ aux origines et les demandes aux destinations sont de $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Le coût de transport d'une unité du produit de l'origine i à la destination j est de c_{ij} (par exemple, la distance entre i et j).

On désire déterminer les quantités du produit à transporter de i à j de manière à satisfaire les demandes tout en minimisant le coût total des transports.

Exemple 3: Formulation

1. **Choix des variables**: x_{ij} la quantité de produit à transporter de i à j
2. **Contraintes**:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i \ \forall i, \qquad \text{(resource disponible en } i\text{)}$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq b_j \ \forall j, \qquad \text{(resource nécessaire en } j\text{)}$$
$$x_{ij} \geq 0.$$

3. **Fonction objectif**: le coût total est minimum

$$\min_{x} \quad \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}.$$

Question. Quelle est une condition nécessaire et suffisante pour que le problème soit soluble?

Applications

- Planification, gestion et ordonnancement
  Production, horaires, composition d'équipages, etc.
- Design et conception
  Dimensionnement, optimisation de structures, de réseaux
- Économie et finances
  Choix de portefeuille, calcul d'équilibres
- Localisation et transport
  Placement de dépôts, de circuits intégrés, tournées
- Analyse de données, machine learning
  Système de recommandation (Netflix, Amazon, etc.), analyse d'image (p.ex., segmentation), classification automatique de documents, regroupement (clustering), etc.
- Et beaucoup d'autres...

Les deux visages de l'optimisation

1. Modélisation
   Traduction en langage mathématique du problème
   (tâche plus délicate qu'il n'y paraît)

$$\Updownarrow$$

Formulation d'un problème d'optimisation

2. Résolution
   Développement et implémentation d'algorithmes de résolution
   efficaces en théorie et en pratique

Relation étroite:

- Formuler des modèles que l'on sait résoudre
- Développer des méthodes applicables à des modèles réalistes

Optimisation

- Les problèmes d'optimisation possèdent souvent des milliers de variables et de contraintes. Ils possèdent rarement une solution analytique.
- Nous souhaitons des algorithmes d'optimisation rapides, faciles à mettre en oeuvre, peu gourmands en temps calcul, peu gourmands en mémoire, peu sensibles aux erreurs d'arrondis, dont la convergence est assurée et qui permettent une analyse post-optimale (idéalement!).
- La modélisation est un aspect crucial de l'optimisation.
- Un modèle n'est qu'un modèle. Nous vivons dans de l'approximatif satisfaisant. Nous ne cherchons pas toujours à optimiser exactement mais bien souvent à optimiser de façon satisfaisante ('satismiser').
- A chaque modèle sa méthode de résolution. Plus la classe de modèles dans laquelle on se trouve est précise, plus la méthode utilisée peut être efficace.
- En général, compromis entre la qualité du modèle, sa complexité, et la méthode de résolution (résolution exacte ou approchée - heuristiques).

Taxonomie (hiérarchie/types de problèmes d'optimisation)

$$\min_{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \; f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

dans le domaine admissible $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}$.

- **Variables**: continues, discrètes, binaires, etc.

  $\updownarrow$
- **Contraintes**: (sans), linéaires, convexe, entières, booléennes, etc.
- **Objectif**: linéaire, quadratique, non-linéaire, non-différentiable, polynomiale, convexe, etc.

Mais aussi...

Modèles: Optimisation multicritère, modèles stochastiques, modèles temporels, etc.

Changer de catégorie: parfois possible via reformulation

Terminologie : admissibilité

Problème en dimension finie

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{Décision} & \leftrightarrow & \text{vecteur de variables } x \\ \text{Meilleure} & \leftrightarrow & \text{fonction objectif } f \\ \text{Contraintes} & \leftrightarrow & \text{domaine admissible } \mathcal{D} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Optimisation}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D}$$

- ◇ Tout point x appartenant au domaine admissible est appelé solution admissible
- ◇ Lorsque $\mathcal{D} \neq \emptyset$, le problème est dit admissible ou possible (*feasible*)
- ◇ Lorsque $\mathcal{D} = \emptyset$, le problème est dit non admissible ou impossible (*infeasible*)

Terminologie : valeur optimale

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D}.$$

- La valeur optimale du problème, notée f^*, est l'infimum des valeurs de la fonction objectif pour les solutions admissibles, c-à-d

$$f^* = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

- Lorsque f^* est finie, on parle de problème borné.
- Lorsque $f^* = -\infty$, on parle de problème non-borné.
- Lorsque le problème est impossible, on pose par convention $f^* = +\infty$ (pire valeur possible pour un minimum).

Terminologie : solubilité

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f^* = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

- Une solution optimale, notée x^*, est une solution admissible qui possède la valeur optimale, c-à-d

$$x^* \text{ est une solution optimale} \quad \Leftrightarrow \quad x^* \in \mathcal{D} \text{ et } f(x^*) = f^*.$$

- Cette dernière propriété peut s'écrire de façon équivalente comme

$$x^* \in \mathcal{D} \text{ et } f(x^*) \leq f(y) \text{ pour toute solution admissible } y \in \mathcal{D}, \text{ ou}$$

$$x^* \in \mathcal{D} \text{ et aucune solution admissible } y \in \mathcal{D} \text{ ne vérifie } f(y) < f(x^*)$$

- Un problème qui possède (au moins) une solution optimale est dit soluble (*solvable*), sinon il est dit insoluble
- Un problème impossible ou non borné n'est jamais soluble, mais il existe aussi des problèmes admissibles, bornés et insolubles (par exemple $\min \frac{1}{x}$ tel que $x > 0$ donne $f^* = 0$ mais est insoluble)

Exemple

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 = c^T x \\ \text{tel que} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Solutions optimales pour différentes fonctions objectif:

- $c = (1, 1)$. Solution optimale unique (0, 0).
- $c = (1, 0)$. Ensemble infini et borné de solutions optimales: $\{(0, x_2) | 0 \leq x_2 \leq 1\}$.
- $c = (0, 1)$. Ensemble infini et non borné de solutions optimales $\{(x_1, 0) | 0 \leq x_1\}$.
- $c = (-1, -1)$. Coût optimal non borné ($f^* = -\infty$). $(x_1 = x_2 \to +\infty)$

Terminologie : types de problèmes

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad f^* = \inf \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

Sans perte de généralité, on peut ne considèrer que la minimisation.
Si maximisation, on a l'équivalence entre solutions optimales

$$x^* \text{ optimal pour } \max_{x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^* \text{ optimal pour } \min_{x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n} -f(x),$$

et pour les valeurs optimales (avec un double signe moins):

$$\sup\{f(x) \mid x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n\} = -\inf\{-f(x) \mid x \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$

Le problème de la recherche d'un point admissible (sans fonction objectif) est un cas particulier de problème d'optimisation, et peut s'exprimer formellement à l'aide d'une fonction objectif constante (ou nulle)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} 0 \text{ tel que } x \in \mathcal{D}.$$

Description du domaine admissible

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in \mathcal{D}.$$

Le domaine $\mathcal{D}$ est souvent défini à l'aide de contraintes fonctionnelles:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) = 0 \text{ pour } i \in \mathcal{E} \text{ et } h_i(x) \geq 0 \text{ pour } i \in \mathcal{I}\}.$$

- les h_i sont des fonctions (scalaires) à n variables définies sur tout $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{E}$ et $\mathcal{I}$ sont des ensembles d'indices repérant les contraintes (ils peuvent éventuellemnt être vides)
- $h_i(x) = 0$ est une contrainte d'égalité pour tout indice $i \in \mathcal{E}$
- $h_i(x) \geq 0$ est une contrainte d'inégalité pour tout indice $i \in \mathcal{I}$
- Membres de droite des inégalités sont à zéro sans perte de généralité
- Le problème de départ peut également s'écrire

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } h_i(x) = 0 \text{ pour } i \in \mathcal{E} \text{ et } h_i(x) \geq 0 \text{ pour } i \in \mathcal{I}.$$

Cas particulier : optimisation linéaire

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } h_i(x) = 0 \text{ pour } i \in \mathcal{E} \text{ et } h_i(x) \geq 0 \text{ pour } i \in \mathcal{I}$$

est appelé problème d'optimisation linéaire lorsque toutes les fonctions sont linéaires ou affines :

- ◇ Objectif : $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ (terme constant inutile)
- ◇ Contraintes : $h_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i$

d'où la formulation équivalente

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^{\mathrm{T}}x \text{ tel que } a_i^{\mathrm{T}}x = b_i \text{ pour } i \in \mathcal{E} \text{ et } a_i^{\mathrm{T}}x \geq b_i \text{ pour } i \in \mathcal{I},$$

avec les vecteurs colonnes $c = (c_1\ c_2\ \cdots\ c_n)^T$, et $a_i = (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})^T$ définis pour tout $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$

Linéaire vs. non-linéaire

- Pourquoi étudier l'optimisation linéaire ?
  - Parce que de nombreux problèmes sont modélisables linéairement
  - Parce qu'il existe un algorithme très efficace (l'algorithme du simplexe) pour résoudre ces problèmes
  - Parce que ces problèmes disposent d'une structure très riche (propriétés d'optimalité, de dualité)
- Pourquoi étudier l'optimisation non-linéaire ?
  - Parce certains problèmes sont impossibles à modéliser linéairement
  - Parce que l'algorithme du simplexe pour l'optimisation linéaire est inapplicable aux problèmes non-linéaires
  - Parce qu'il existe des liens étroits entre la formulation (choix du modèle) et la résolution (choix de la méthode) d'un problème d'optimisation non-linéaire

Partie I – Optimisation linéaire (première moitié du cours)

1. Formulations (forme standard, géométrique, reformulations, etc.)
2. Géométrie des polyèdres
3. Algorithme du simplexe
4. Dualité
5. Optimisation en nombres entiers
6. Applications

Partie II – Optimisation non-linéaire (seconde moitié du cours)