Optimisation – Séance d'exercices 4 et 5

1 Dualité I: formulation, relations d'exclusion, solution

Forme géométrique

$$\begin{array}{lll} \text{minimiser} & c^T x & \\ & Ax & \geq b. \quad \text{(primal)} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{maximiser} & b^T y & \\ & A^T y & = c, \quad \text{(dual)} \\ & y & \geq 0. \end{array}$$

Forme standard

$$\begin{array}{lll} \text{minimiser} & c^T x & \\ & Ax & = b \quad \text{(primal)} \\ & x & \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{maximiser} & b^T y & \\ & A^T y & \leq \; c \quad \text{(dual)} \end{array}$$

---

1. Trouvez le dual des problèmes

$$\begin{array}{lllll} \min_x & 3x_1 - 9x_2 & & \\ \text{tel que} & 2x_1 - x_2 + x_3 & \geq & 3, \\ & x_1 - x_2 - 3x_3 & \geq & 2, \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \min_x & 3x_1 - 9x_2 & & \\ \text{tel que} & 4x_1 - x_2 + x_3 & = & 3, \\ & x_1 - x_2 - 6x_3 & \geq & 2, \\ & x_1 - 4x_2 - 6x_3 & \leq & 8, \\ & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \min_x & c^T x & & \\ \text{tel que} & a_1^T x & = & b_1, \\ & a_2^T x & \geq & b_2, \\ & a_3^T x & \leq & b_3, \\ & x & \geq & 0. \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \min_{x \in \mathbb{R}^3} & c^T x & & \\ \text{tel que} & a^T x & = & b, \\ & x_1 & & \text{libre}, \\ & x_2 & \geq & 0, \\ & x_3 & \leq & 0. \end{array}$$

2. Trouvez une formulation duale des problèmes

$$\begin{array}{llll} \min_x & c^T x & & \\ \text{tel que} & Ax & = & b, \\ & x & \geq & a. \quad (a \geq 0) \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} \min_x & c^T x & & & & \\ \text{tel que} & b_1 & \leq & Ax & \leq & b_2, \\ & & & x & \geq & 0. \end{array}$$

3. Comment résoudre le problème

$$\begin{array}{llll} \min_x & 50x_1 + 25x_2 & & \\ \text{tel que} & x_1 + 3x_2 & \geq & 8, \\ & 3x_1 + 4x_2 & \geq & 19, \\ & 3x_1 + x_2 & \geq & 7, \\ & x_1, x_2 & \geq & 0, \end{array}$$

sans effectuer de phase d'initialisation?

4. Soit le problème

$$\begin{array}{lllll} \min_x & 2x_1 - x_2 & & \\ \text{tel que} & 2x_1 - x_2 - x_3 & \geq & 3, \\ & x_1 - x_2 + x_3 & \geq & 2, \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Quel est le dual de ce problème? Proposez des bornes supérieures et inférieures aussi précises que possible pour l'objectif optimal du primal. Faites de même pour le dual.

5. L'objectif optimal du problème

$$\begin{array}{lllll} \min_x & 7x_1 + 10x_2 & & \\ \text{tel que} & 2x_1 + 3x_2 & \geq & 10, \\ & 3x_1 + 4x_2 & \geq & 19, \\ & x_1 + 2x_2 & \geq & 9, \\ & x_1, x_2 & \geq & 0, \end{array}$$

est égal à $z_* = 47$. La solution $(0, 2, 1)$ est elle une solution admissible optimale du dual?

6. Soit le problème suivant

$$\begin{array}{lllll} \min_x & 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 & & \\ \text{tel que} & -2x_1 + 2x_2 + x_3 & \geq & 1, \\ & x_1 + 4x_2 - x_3 & \geq & 1, \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Trouvez le dual de ce problème et résolvez-le graphiquement. Utilisez les relations d'exclusion pour obtenir une solution du primal.

7. Soit le problème suivant

$$\begin{array}{lllll} \min_x & 5x_1 - 3x_2 & & \\ \text{tel que} & 2x_1 - x_2 + 4x_3 & \leq & 4, \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 5, \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 & \geq & 1, \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Le sommet associé à la base (x_1, x_2, x_3) est un sommet optimal de ce problème. Quel est le dual de ce problème? Trouvez une solution du problème dual.

8. Soit le problème d'optimisation linéaire suivant:

$$\begin{array}{llll} \min_x & \sum_{i=1}^n c_i x_i & & \\ & \sum_{i=1}^n a_i x_i & = & b \\ & x_i & \geq & 0 \quad i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Remarquez que ce problème ne possède qu'une seule contrainte.

   (a) En utilisant un argument élémentaire, trouvez une condition simple d'existence d'une solution admissible.

   (b) En supposant que le coût optimal est fini, proposez une méthode d'obtention d'une solution optimale et justifiez votre réponse. (Indice: pour répondre à cette question vous pouvez si vous le désirez faire appel au théoréme fondamental de l'optimisation linéaire.)

   (c) Sous quelles conditions le problème possède-t-il plusieurs solutions?

9. Soit le problème d'optimisation

$$\begin{aligned} \max_{x_i} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ & 2x_1 + x_3 && \leq 2 \\ & 2x_2 + x_3 && \leq 2 \\ & x_i && \geq 0 \end{aligned}$$

   (a) Enumérez les sommets de ce polyèdre. L'un des ces sommets est-il optimal?
   (b) Quelles sont (toutes) les solutions optimales?
   (c) Que deviennent ces solutions optimales si on exige que les solutions soient entières?
   (d) Ecrivez le dual de ce problème, résolvez-le, et faites le lien avec la solution du primal.

10. Soit le problème d'optimisation

$$\begin{aligned} \min_{x_i} \quad & 3x_1 - x_2 + x_3 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 && \geq 1 \\ & x_1 - x_2 + \alpha x_3 && = 2 \\ & x_1, x_2 && \geq 0 \end{aligned}$$

   oé $0.25 \leq \alpha \leq 4$ est un paramètre.

   (a) Quel est le dual de ce problème?
   (b) Résolvez le dual en fonction du paramètre α par une méthode graphique.
   (c) Déduisez les solutions du primal.

11. Une entreprise vend 20 tonnes de sa production à répartir entre 5 acheteurs (voir les prix payés dans le tableau plus bas). Pour des raisons de logistique:

   - l'acheteur A a un accord privilégié et achète au moins 2 tonnes, dans toutes les circonstances.
   - l'acheteur B achète au plus 2 tonnes.
   - l'acheteur C achète au moins 2 tonnes ou alors n'achète rien.
   - l'acheteur D achète au plus 5 tonnes.
   - l'acheteur E achète une quantité qui ne diffère pas de plus de 3 tonnes avec la quantité achetée par D.

   Les prix payés par les différents acheteurs sont, en milliers d'Euros par tonne:

Acheteur	A	B	C	D	E
Prix payé	20	50	20	25	15

   (a) Formulez ce problème comme un problème d'optimisation. Ce problème est-il linéaire ? Sinon, reformulez-le comme un problème d'optimisation linéaire.
   (b) Formulez le problème qui consisterait à maximiser la quantité vendue à l'acheteur C, parmi l'ensemble des solutions optimales du problème formulé en (a).
   (c) Résolvez le problème formulé en (a), en considérant que l'acheteur C n'achète rien.

12. Vrai ou faux? Justifiez vos choix par quelques lignes, un contre-exemple ou un dessin. Soyez assez précis pour convaincre que vous ne devinez pas la réponse mais ne fournissez toutefois pas une justification formelle et détaillée.

    (a) Le dual d'un problème d'optimisation linéaire existe toujours.

    (b) Si un problème d'optimisation linéaire possède une solution admissible, alors son dual également et les coûts optimaux sont égaux.

    (c) Si un problème d'optimisation linéaire admet un coût optimal fini, alors son dual également.

2 Dualité II: interprétation, analyse postoptimale

1. On considère le problème diététique suivant: Il s'agit d'acheter à un coût minimum des fruits, des légumes et de la viande afin d'obtenir suffisamment de vitamines A et B. Pour une alimentation saine, on considère qu'il faut consommer 11 unités de vitamines A et 4 unités de vitamines B. Les valeurs nutritives des aliments (par unité de poids) sont données dans le tableau ci-dessous:

	Légumes	Fruits	Viande
Vitamine A	1	5	1
Vitamine B	2	1	1

   Les coûts par unité de poids des aliments sont de 3 (légumes), 2 (fruits) et 10 (viande). Modélisez ce problème et résolvez-le.

   On considère ensuite le problème de l'entreprise pharmaceutique qui synthétise artificiellement de la vitamine A et B et qui vend la vitamine pure au diététicien. L'entreprise cherche à déterminer les prix de vente des vitamines qui lui assurent d'emporter tout le marché tout en maximisant son profit. Modélisez ce problème et résolvez-le. Laquelle des deux vitamines est la plus chère?

   Contre toute attente, l'entreprise décide de mettre de la vitamine A et B sur le marché à des prix de 1 et 0.5. Comment le diététicien compose-t-il le mélange?

2. On considère le problème suivant:

$$\begin{array}{lllr} \text{maximiser} & x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & & \\ & 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 & \leq & 8 + \delta \\ & 2x_1 + 2x_2 + 4x_4 & \leq & 12 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 18 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

   La solution associée à la base (x_2, x_3, x_7) est optimale pour $\delta = 0$ (x_7 est la variable d'écart de la 3éme contrainte); la solution correspondante est donnée par $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 6, 0.4, 0)$. Pour quelles valeurs de δ la base reste-t-elle optimale?

3. On considère le problème suivant:

$$\begin{array}{lllr} \text{maximiser} & 3x_1 + 13x_2 + 13x_3 & & \\ & x_1 + x_2 & \leq & 7 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \leq & 15 \\ & 2x_2 + 3x_3 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

   Une base optimale est donnée par (x_1, x_2, x_3). Pour cette base on obtient

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & -3/2 & 1 \\ -3/2 & 3/2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Donnez une solution du primal et une solution du dual.

(b) Comment évolue l'objectif optimal lorsque le terme de droite de la deuxiéme contrainte décroît?

(c) De combien d'unités le terme de droite de la premiére contrainte peut-il varier sans modifier la base optimale?

(d) De combien d'unités le coefficient objectif associé à x_1 peut-il varier sans modifier la base optimale?

(e) La base resterait-elle optimale si on ajoutait une nouvelle variable x_4 de coefficient objectif 5 et de vecteur de contrainte $(2, -1, 5)$?

(f) Trouvez une solution du problème obtenu en ajoutant la contrainte $x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$.

4. Une firme textile produit trois biens en quantités x_1, x_2, x_3. Le planning de production pour le prochain mois satisfait les contraintes suivantes

$$\begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq & 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 & \leq & 10 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

La premiére contrainte résulte de limitations techniques. La deuxiéme contrainte exprime une limitation due à la quantité de coton disponible sur le marché. Les profits associés aux produits x_1, x_2, x_3 sont de 2, 3 et 3. Comment évolue le profit lorsque la quantité de coton disponible passe de 10 à $10 + \epsilon$ pour $\epsilon > 0$? et lorsque elle passe de 10 à 12? Remplacez la deuxiéme contrainte par $2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq c$ et utilisez un argument géométrique pour trouver l'évolution du profit en fonction de c.

5. Une université belge dispose d'au plus 5000 places pour des étudiants. Elle recrute des étudiants belges et des étudiants étrangers. L'université compte 440 professeurs. L'encadrement est d'au moins un professeur pour 12 belges et d'un professeur pour 10 étrangers. L'université possde 2800 places dans des kots universitaires, elle garantit qu'au moins 40 % des étudiants belges et 80 % des étudiants étrangers trouveront place dans un kot universitaire. L'université reéoit des subsides de 2000 EUR par étudiant belge et un minerval de 3000 EUR par étudiant étranger. On suppose que l'université cherche à maximiser sont profit. On vous demande de répondre aux questions suivantes.

(a) Formulez le problème de la maximisation du profit comme un problème d'optimisation linéaire. Résolvez le problème.

(b) Trouvez la formulation duale de ce problème. Soit y_* une solution optimale du dual. Proposez une interprétation pour les différentes composantes de y_*.

(c) L'université a-t-elle avantage a recruter des professeurs supplémentaires pour 10000 EUR par professeur et par an?

(d) L'université engage des professeurs supplémentaires à 8000 EUR par an. Combien de professeurs a-t-elle avantage à engager?

6. Une firme désire produire un nouvel alliage comportant au minimum 30 % de cuivre et 20 % de zinc. La firme dispose des alliages suivants:

alliage	% de cuivre	% de zinc	% autres métaux	prix (Euro/kilo)
1	66	22	12	33
2	20	10	70	20
3	45	45	10	30
4	20	50	30	40
5	0	0	100	0

Remarquez que la firme dispose gratuitement d'un alliage ne comportant ni cuivre ni zinc. Le but est de trouver les proportions de ces alliages qui doivent être mélangées pour produire le nouvel alliage à un coût minimum. On vous demande de répondre aux questions suivantes.

(a) Formulez le problème de la minimisation du coût comme un problème d'optimisation linéaire.

(b) Trouvez la formulation duale de ce problème. Soit y_* une solution optimale du dual. Proposez une interprétation pour les différentes composantes de y_*. Résolvez ce problème dual et trouvez sa solution y_*.

(c) On suppose que le pourcentage minimum requis de cuivre augmente légèrement (il passe de 30 % à (30+δ) % avec δ petit). Comment évolue le coût optimal de production du nouvel alliage? Soyez aussi précis que possible.

(d) Que vaut le coût optimal de production du problème initial?

7. Un épargnant investit 1000 EUR. Il a le choix entre trois investissements A, B et C. Les résultats attendus et garantis pour ces investissements sont les suivants (pour 1 EUR):

	attendu	garanti
A	1.4	0.9
B	1.2	1.2
C	1.6	0.5

L'épargnant a promis d'investir au moins 600 EUR en B et C. Il souhaite en outre un intérét global d'au moins 5% et cherche la répartition de son investissement qui maximise l'espérance de son gain.

(a) Formulez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire et résolvez-le. Pour trouver la solution vous pouvez, si vous le souhaitez, choisir comme solution de départ celle qui consiste à investir 1000 EUR dans B.

(b) L'épargnant choisit d'investir *au plus* 1000 EUR. Formulez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire. La solution optimale que vous obtenez pour cette version modifiée est-elle différente de celle obtenue en 1?

(c) Ecrivez le dual du problème obtenu en 1 et proposez une interprétation pour les variables duales optimales.