

Optimisation - Partie Linéaire - Examen - Août 2016

Cet examen est à livre fermé. *Aucun appareil électronique n'est autorisé.*

Les IG et INFO répondent à toutes les questions, les Mines aux questions 1-2-3 et les ELEC 1-2.

1. [10 points] Soit le tableau simplexe suivant:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	1	$-1/2$	0	z
0	1	-1	-1	0	8
0	0	-1	-2	1	1
1	0	2	-3	0	10

Que pouvez-vous conclure sur le problème d'optimisation correspondant? Justifiez de manière précise et complète votre raisonnement.

2. [20 points] *Problème de production.* Une usine fabrique deux types de jouets en bois : des soldats et des trains. Les données de ce problème sont représentées dans le tableau ci-dessous. Par

	Prix vente	Mat. prem.	Menuiserie	Finition
1 soldat	130 €	80 €	1h	2h
1 train	110 €	70 €	1h	1h

semaine l'usine dispose de toutes les matières premières nécessaires à la fabrication et ne dispose que de 100h de finition et 80h de menuiserie. La demande des trains et des soldats est illimitée. Déterminer le plan de production qui maximise le profit de l'usine.

- (a) Modélisez ce problème comme un problème d'optimisation linéaire.
- (b) Résolvez ce problème en utilisant la méthode du simplexe. Combien de soldats et de trains allez-vous produire? Justifiez.
3. [20 points] *Vérification de votre solution à la question 2. via la dualité.* Reprenez le problème de la question 2.
- (a) Ecrivez le dual de ce problème et résolvez le en utilisant la *complémentarité* (ou avec une autre méthode si vous n'y arrivez pas).
- (b) Énoncez le théorème de la dualité forte, et utilisez ce théorème pour prouver que votre solution calculée à la question 2 est correcte¹ (ou incorrecte?).
- (c) Combien êtes-vous prêt à payer au maximum (€/heure) un ouvrier en menuiserie et en finition pour qu'il travaille une heure supplémentaire? Justifiez votre réponse de manière précise et complète.

¹Si vous n'avez pas réussi à trouver la solution optimale via la méthode du simplexe, vous pouvez également résoudre le primal géométriquement.

4. [20 points] On dispose d'un sac capable de supporter un poids maximal de 7kg et d'un ensemble d'objets ayant chacun un poids (en kg) et une valeur (en euro). L'objectif est de remplir le sac d'objets différents sans dépasser le poids maximal tout en maximisant la somme des valeurs des objets qu'il contient. Vous disposez de 5 objets détaillés dans la table ci-dessous:

objet	1	2	3	4	5
valeur	3	4	5	6	7
poids	2	3	4	5	6

- Formulez ce problème comme un problème linéaire en nombres binaires.
- Ecrivez la relaxation linéaire de ce problème et résolvez la.
- Calculez toutes les solutions optimales de ce problème **par branch and bound** en utilisant les relaxations linéaires (suivez strictement les étapes du branch and bound –n'utilisez pas par exemple de solutions admissibles que vous auriez calculées à la main) et dessinez l'arbre de recherche. Quels objets allez-vous emporter?
- Supposez maintenant que vous pouvez agrandir votre sac pour un coût de 1.25€ par kg supplémentaire. Formulez ce nouveau problème comme un problème linéaire en nombres binaires.