Exercice 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice ne possédant qu'une seule valeur propre. Démontrer que A n'est pas diagonalisable, sauf si A est une matrice scalaire (*i.e.* de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$).

Exercice 2

Un joueur dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Il en tire successivement et avec remise deux boules, portant les numéros X_1 et X_2. Calculer la probabilité que $\begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable. Quelle est la probabilité qu'elle soit inversible ?

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les éléments propres de A.
2. Donner une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
3. Calculer A^n

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -4 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de déterminer toutes les matrices réelles B telles que $B^2 = A$.

1. Déterminer des matrices $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.
2. On suppose donnée $B \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Démontrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B. En déduire que $P^{-1}BP$ est diagonale.
3. Résoudre le problème.

Exercice 5

Soit a et b des paramètres réels. Déterminer pour quelles valeurs de a et b les matrices réelles suivantes sont diagonalisables.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

On note $\mathcal{B}$ la base canonique du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$. Soit la matrice de $M_4(\mathbb{C})$:

$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ de matrice J dans la base $\mathcal{B}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.
2. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des valeurs propres de g.
   (a) Montrer que $\mathcal{S} = \{1, i, -1, -i\}$.
   (b) g est-il diagonalisable ?
   (c) Déterminer une base de chaque sous-espace propre, formée de vecteurs dont la première coordonnée vaut 1.
3. Calculer les puissances successives de la matrice J.

Exercice 7

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer $0 \notin \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow f$ surjectif.

Exercice 8

Soient f un endormophisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \in \mathrm{Sp}(f^n)$. Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(f)$.

Exercice 9

Soit u un endormorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que tout vecteur non nul en soit vecteur propre. Montrer que u est une homothétie vectorielle (*i.e.* $\exists \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in E\ , u(x) = \lambda x$).

Exercice 10

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que si λ est valeur propre de $u \circ v$ alors λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.