Exercice 1 (Question de cours.)
Donner l'énoncé et la démonstration de l'inégalité de convexité.

Exercice 2 (Question de cours.)
Donner l'énoncé du résultat de cours concernant la dérivation d'une intégrale à paramètre.

Exercice 3 (Exercice préparé.)
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{xt} dt.$$

1. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée F'.
3. En utilisant une intégration par partie, montrer que F est solution d'une équation différentielle (que l'on déterminera), et en déduire une expression simple de F. *Indication :* on rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Exercice 4 (Exercice préparé.)

1. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{p^q}\right)_{p\geq 2,\, q\geq 2}$ est sommable, et calculer sa somme.
2. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{p^q}\right)_{p\geq 1,\, q\geq 2}$ n'est pas sommable.
3. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{p^q}\right)_{p\geq 2,\, q\geq 1}$ n'est pas sommable.

Exercice 5
Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, des suites suivantes.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}$ 2) $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)dt$ avec $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue 3) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(t)^n dt$

Exercice 6
Étudier la nature des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\sin(x)e^{-x}dx$ 3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh(t)-\cos(t)}{t^{5/2}}dt$ 5) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)dt$ 6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ln(1+t)}dt$

Exercice 7
Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, croissante, telle que l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ converge.

1. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Exercice 8
Dans cet exercice on se propose de calculer l'intégrale de Gauss. On pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt.$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et démontrer que
$$F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du.$$
3. En intégrant F' sur $]0,+\infty[$, montrer que
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 9
Soit C_1, C_2 deux parties convexes d'un espace vectoriel réel E et soit $s \in [0,1]$. On pose $C = sC_1 + (1-s)C_2 = \{sx + (1-s)y \mid x \in C_1,\, y \in C_2\}$. Montrer que C est convexe.

Exercice 10
Soit f une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que
$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Montrer que f est constante ou que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 12
Soit f une fonction convexe sur l'intervalle borné $]a,b[$.

1. Montrer que f est minorée.
2. La fonction f est-elle nécessairement majorée ?