Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale de paramètre (n, p).

1. Rappeler la loi de $X+Y$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.
2. On suppose $p = 1/2$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X = Y)$.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que M soit inversible ? Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Lorsque X prend la valeur n, on place dans une urne $n+1$ boules numérotées de 0 à n, puis on tire une boule au hasard dans l'urne. On ne connaît pas la loi de X, mais on sait qu'elle admet une espérance m. On note Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi de Y. On laissera le résultat sous forme de somme.
2. Montrer que Y admet une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = m/2$.

Exercice 3

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B. On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres. On note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettre. Par exemple, la suite $AABBBA$ signifie qu les deux premiers jours, l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours $3, 4$, et 5, il a choisi le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3. On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série, et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

1. Déterminer la loi de L_1 et vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = k) = 1$.
2. Déterminer l'espérance de L_1.
3. Déterminer la loi du couple aléatoire (L_1, L_2) et en déduire la loi de L_2.
4. Calculer $\mathbb{P}(L_1 = L_2)$.

Exercice 4

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, chaque épreuve conduisant au succès avec la probabilité $p \in]0, 1[$. Soit X la variable aléatoire prenant comme valeur le rang du premier succès, et Y celle prenant comme valeur le rang du deuxième succès.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance. Idem pour Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant que Y vaut n.
5. Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 5

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs a et b. Déterminer la loi de la variable $Z = X - Y$.

Exercice 6

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $Z = \min(X, Y)$ et $T = \max(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(T = n) \cup (Z = n) = (X = n) \cup (Y = n)$. En déduire que $\mathbb{P}(T = n) = 2\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Z = n)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de T.
4. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ? Calculer la covariance de Z et T.

Exercice 7

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $U = |X - Y|$ et $V = \min(U, V)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. En déduire la loi de U et celle de V.
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?