Exercice 1
Démontrer l'inégalité de Markov.

Exercice 2
On dispose d'un dé équilibré avec lequel on fait une série de lancers qu'on arrête dès qu'on a obtenu un 6. Quelle est la probabilité qu'on ne s'arrête jamais ?

Exercice 3
Une urne contient une boule bleue et une boule rouge. On effectue l'expérience suivante : on brasse l'urne ; on en extrait une boule ; si elle est bleue, on s'arrête là ; sinon, on remet deux boules rouges (celle qu'on a tirée plus une autre) et on recommence. Calculer la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais.

Exercice 4
À un jeu télévisé, un candidat doit choisir une porte parmi trois portes. Derrière l'une des portes se cache une voiture. Le candidat gagne la voiture si il choisit la bonne porte, il est déçu sinon. Le jeu est constitué de trois étapes : le candidat choisit une porte, le présentateur ouvre une des deux portes que le candidat n'a pas choisie et derrière laquelle il n'y a rien, puis le candidat a le droit de choisir une nouvelle porte parmi les deux restantes. Le candidat a-t-il intérêt à modifier son choix ?

Exercice 5
Soit $n \geq 2$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $n-1$ boules numérotées de 1 à $n-1$ et de n boîtes $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Pour tout i compris entre 1 et n, la boîte B_i contient i jetons numérotés de 1 à i. On tire une boule de l'urne, si la boule tirée porte le numéro i on tire un jeton de la boîte B_i et un jeton de la boîte B_{i+1}. On dit qu'il y a succès si les deux jetons portent le même numéro.

1. Quelle est la probabilité p_2 de succès lorsque $n = 2$?
2. Quelle est la probabilité p_n de succès lorsque $n \geq 2$?
3. Donner un équivalent simple de p_n. (On admet $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log n$.)

Exercice 6
Deux joueurs A et B s'affrontent à pile ou face : A joue avec une pièce donnant pile avec la probabilité a et B joue avec une pièce donnant pile avec la probabilité b ($a, b \in]0, 1[$). Le joueur A commence et lance sa pièce. S'il obtient pile il gagne la partie. S'il obtient face, c'est au tour de B de lancer sa pièce. S'il obtient pile, il gagne, sinon A joue de nouveau, et ainsi de suite. . ., ils jouent à tour de rôle jusqu'à ce que l'un des deux obtienne pile et gagne la partie.

1. Calculer la probabilité que le joueur A gagne.
2. Calculer la probabilité que le joueur B gagne.
3. Calculer la probabilité que le jeu dure indéfiniment.
4. Montrer que si A et B jouent avec la même pièce, le jeu est favorable à A.

Exercice 7
On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité 1/2, la couleur rouge sinon. Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :
— il mise initialement 1 brouzouf sur la couleur noire ;
— s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
— s'il perd, il double sa mise et rejoue.

1. On suppose la fortune du joueur infinie. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.
2. On suppose toujours la fortune du joueur infinie. Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?
3. Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ brouzoufs ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

Exercice 8
Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}$. Montrer que X admet un moment à tout ordre $k \leq n$.

Exercice 9
Une urne contient b boules blanches, n boules noires, et r boules rouges ; b et n sont des entiers naturels non nuls ; r est un entier naturel. Un joueur tire une boule. Si elle est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage (avant le deuxième tirage, il reste donc $r-1$ boules rouges). Dans ce cas, si la boule tirée est blanche, il gagne, si elle est noire, il perd, si elle est rouge, il la met de côté et effectue un troisième tirage, etc. On note B_i (respectivement N_i, R_i) l'événement "le joueur tire une boule blanche (respectivement noire, rouge) lors du i-ième tirage". On note G_r l'événement "le joueur gagne en commençant ses tirages dans une urne contenant r boules rouges".

1. Calculer $\mathbb{P}(G_0)$ et $\mathbb{P}(G_1)$.
2. Trouver une relation de récurrence entre $\mathbb{P}(G_r)$ et $\mathbb{P}(G_{r-1})$ pour tour $r \geq 2$.
3. Calculer $\mathbb{P}(G_r)$.