Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale de paramètre (n,p).

1. Rappeler la loi de $X+Y$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{n}$.
2. On suppose $p=1/2$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X=Y)$.
3. Soit $M=\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que M soit inversible ? Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Lorsque X prend la valeur n, on place dans une urne $n+1$ boules numérotées de 0 à n, puis on tire une boule au hasard dans l'urne. On ne connaît pas la loi de X, mais on sait qu'elle admet une espérance m. On note Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi de Y. On laissera le résultat sous forme de somme.
2. Montrer que Y admet une espérance et que $\mathbb{E}(Y)=m/2$.

Exercice 3

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B. On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres. On note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettre. Par exemple, la suite $AABBBA$ signifie qu les deux premiers jours, l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours $3,4$, et 5, il a choisi le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3. On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série, et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

1. Déterminer la loi de L_1 et vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(L_1=k)=1$.
2. Déterminer l'espérance de L_1.
3. Déterminer la loi du couple aléatoire (L_1,L_2) et en déduire la loi de L_2.
4. Calculer $\mathbb{P}(L_1=L_2)$.

Exercice 4

On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, chaque épreuve conduisant au succès avec la probabilité $p\in]0,1[$. Soit X la variable aléatoire prenant comme valeur le rang du premier succès, et Y celle prenant comme valeur le rang du deuxième succès.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
2. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance. Idem pour Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Pour tout entier $n\geq 2$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant que Y vaut n.
5. Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 5

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs a et b. Déterminer la loi de la variable $Z=X-Y$.

Exercice 6

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre $p\in]0,1[$. On pose $Z=\min(X,Y)$ et $T=\max(X,Y)$.

1. Déterminer la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.
2. Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(T=n)\cup(Z=n)=(X=n)\cup(Y=n)$. En déduire que $\mathbb{P}(T=n)=2\mathbb{P}(X=n)-\mathbb{P}(Z=n)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de T.
4. Les variables aléatoires Z et T sont-elles indépendantes ? Calculer la covariance de Z et T.

Exercice 7

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. On note $U=|X-Y|$ et $V=\min(U,V)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V).
2. En déduire la loi de U et celle de V.
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?