Accélération du code BEM pour l'équation de Helmholtz 2D Étape 1 clustering

TP : à rendre le 10/11/2025

Rappel de la Philosophie des TPs : Le but de la série de TPs est de mettre en oeuvre un solveur BEM rapide pour l'équation de Hemholtz 2D. Nous choisissons le cas de la diffraction d'une onde incidente plane, i.e. $u^{inc} = e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}$, par un disque de rayon a centré en $\mathbf{0}$ et de frontière Γ. $\mathbf{k}$ est le vecteur qui permet de déterminer l'angle d'incidence de l'onde. Le nombre d'onde du problème est donné par $k = |\mathbf{k}|$. Le domaine extérieur est noté Ω^+. Nous allons considérer le cas d'une condition à la frontière de type Dirichlet. Ce cas test a l'avantage de présenter une solution analytique simple. Le champ diffracté est donné par :

$$u^+(r,\theta) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}, \quad r \geq a. \tag{1}$$

Les J_n sont les fonctions de Bessel de première espèce et les $H_n^{(1)}$ les fonctions de Hankel du premier type.

Grandes étapes de la BEM :

1. Reformulation de l'EDP sous forme intégrale ;
2. Résolution d'une équation intégrale pour obtenir les traces des champs sur la frontière ;
3. Application de la représentation intégrale pour obtenir le champ dans tout le domaine (non-borné pour les problèmes extérieurs).

Lors du TP1, nous avons vu que le champ diffracté dans le cas de conditions à la frontière de type Dirichlet est donné par la représentation intégrale

$$u^+(\mathbf{x}) = \int_\Gamma G(\mathbf{x},\mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \tag{2}$$

où $p = -\partial_{\mathbf{n}} u^+ - \partial_{\mathbf{n}} u^{inc}$ avec $\mathbf{n}$ la normale extérieure au disque.
Dans le TP2, p a été déterminé numériquement en résolvant l'équation intégrale

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } p \in H^{-1/2}(\Gamma) \text{ tel que}\\ &\int_\Gamma G(\mathbf{x},\mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) = -u^{\text{inc}}\end{aligned} \tag{3}$$

TP4 : Méthode des matrices hiérarchiques pour accélérer la BEM

Le but de ce TP est d'accélérer la résolution de (3) tout en vérifiant l'erreur commise par rapport à la solution analytique. Pour cela, nous allons mettre en oeuvre la méthode des matrices hiérarchiques (H-matrices), qui permet de représenter de grandes matrices de manière compacte et d'effectuer des opérations rapides tout en contrôlant la précision. Le travail se déroulera en trois étapes :

1. découpage de la géométrie en boîtes afin de construire la hiérarchie spatiale et l'arbre binaire associé ;
2. découpage de la matrice selon le critère d'admissibilité, permettant d'identifier les blocs compressibles ;
3. calcul de l'approximation data-sparse de la matrice et mise en place d'un produit matrice-vecteur rapide.

Pour ce TP on se concentre sur la premiére étape

1. Construire l'arbre binaire permettant de partitionner la géométrie à l'aide d'un critère géométrique (couper le milieu de la boîte englobante selon l'axe le plus long). Tracer l'arbre obtenu pour des géométries simples.

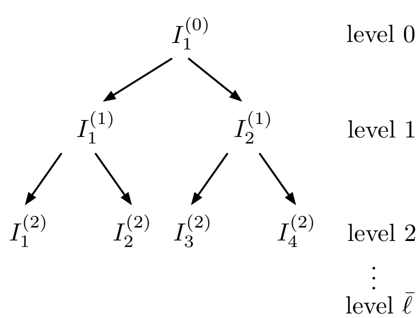


FIGURE 1 – Partionnement des degrés de liberté avec un arbre binaire.

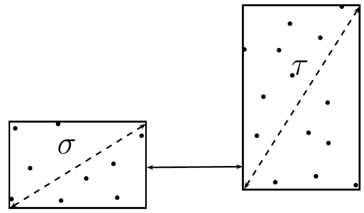
Le paramètre N_{leaf} contrôle la profondeur de l'arbre : le processus de subdivision s'arrête dès que le nombre de degrés de liberté dans une boîte devient inférieur à N_{leaf}. Analyser l'effet du paramètre N_{leaf} : comment le nombre de niveaux varie-t-il avec ce paramètre ?

Attention : assurez-vous que les noeuds correspondant à des degrés de liberté physiquement voisins soient également numérotés de manière consécutive. Si ce n'est pas le cas, une **re-numérotation** devra être effectuée lors de la construction de l'arbre pour garantir la cohérence du partitionnement.

2. Préparer une structure pour votre arbre et pré-calculer :
   — les diamètres de toutes les boîtes. Pour que ce calcul soit rapide on utilise le diamètre de la boîte englobante

$$\mathrm{diam}(X) \leq \Big(\sum_{\alpha=1}^{2} (\max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \mathbf{x}_\alpha - \min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \mathbf{x}_\alpha)^{\mathbf{2}} \Big)^{\mathbf{1/2}} =: \mathrm{diam}_{\mathrm{box}}(\mathbf{X})$$

qui est une borne supérieure.



— une fonction pour calculer les distances entre les boîtes. Ici aussi pour que le calcul soit rapide, la distance entre deux ensembles est replacée par la distance entre les faces les plus proches des boîtes englobantes

$$\operatorname{dist}(X, Y) \geq \Big(\sum_{\alpha=1}^{2} (\max(0, \min_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \mathbf{x}_\alpha - \max_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}} \mathbf{y}_\alpha))^{\mathbf{2}} + (\max(\mathbf{0}, \min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}} \mathbf{y}_\alpha - \max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \mathbf{x}_\alpha))^{\mathbf{2}}\Big)^{\mathbf{1/2}} =: \operatorname{dist}_{\text{box}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

3. Recommencer en utilisant un critère de découpage équilibré afin que les deux sous-boîtes contiennent un nombre similaire de points. Pour cela, on choisit une direction, généralement l'axe le plus étendu, et on divise l'ensemble des points selon la médiane de leurs coordonnées dans cette direction.
4. Est-ce que vous pouvez proposer d'autres approches ? Quel sont les avantages et inconvénients des différentes approches de construction de l'arbre binaire ?

BON COURAGE !