Accélération du code BEM pour l'équation de Helmholtz 2D Étape 2 : condition d'admissibilité

TP : à rendre le 24/11/2025

Rappel de la Philosophie des TPs : Le but de la série de TPs est de mettre en oeuvre un solveur BEM rapide pour l'équation de Hemholtz 2D. Nous choisissons le cas de la diffraction d'une onde incidente plane, i.e. $u^{inc} = e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}$, par un disque de rayon a centré en $\mathbf{0}$ et de frontière Γ. $\mathbf{k}$ est le vecteur qui permet de déterminer l'angle d'incidence de l'onde. Le nombre d'onde du problème est donné par $k = |\mathbf{k}|$. Le domaine extérieur est noté Ω^+. Nous allons considérer le cas d'une condition à la frontière de type Dirichlet. Ce cas test a l'avantage de présenter une solution analytique simple. Le champ diffracté est donné par :

$$u^+(r,\theta) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}, \quad r \geq a. \tag{1}$$

Les J_n sont les fonctions de Bessel de première espèce et les $H_n^{(1)}$ les fonctions de Hankel du premier type.

Grandes étapes de la BEM :

1. Reformulation de l'EDP sous forme intégrale ;
2. Résolution d'une équation intégrale pour obtenir les traces des champs sur la frontière ;
3. Application de la représentation intégrale pour obtenir le champ dans tout le domaine (non-borné pour les problèmes extérieurs).

Lors du TP1, nous avons vu que le champ diffracté dans le cas de conditions à la frontière de type Dirichlet est donné par la représentation intégrale

$$u^+(\mathbf{x}) = \int_\Gamma G(\mathbf{x},\mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \tag{2}$$

où $p = -\partial_\mathbf{n} u^+ - \partial_\mathbf{n} u^{inc}$ avec $\mathbf{n}$ la normale extérieure au disque.
Dans le TP2, p a été déterminé numériquement en résolvant l'équation intégrale

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } p \in H^{-1/2}(\Gamma) \text{ tel que} \\ &\int_\Gamma G(\mathbf{x},\mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) = -u^{\text{inc}} \end{aligned} \tag{3}$$

TP4 : Méthode des matrices hiérarchiques pour accélérer la BEM

Le but de ce TP est d'accélérer la résolution de (3) tout en vérifiant l'erreur commise par rapport à la solution analytique. Pour cela, nous allons mettre en oeuvre la méthode des matrices hiérarchiques (H-matrices), qui permet de représenter de grandes matrices de manière compacte et d'effectuer des opérations rapides tout en contrôlant la précision. Le travail se déroulera en trois étapes :

1. découpage de la géométrie en boîtes afin de construire la hiérarchie spatiale et l'arbre binaire associé ;
2. découpage de la matrice selon le critère d'admissibilité, permettant d'identifier les blocs compressibles ;
3. calcul de l'approximation data-sparse de la matrice et mise en place d'un produit matrice-vecteur rapide.

Lors des TP précédents, vous avez :
- construit la hiérarchie géométrique des degrés de liberté sous forme d'un arbre binaire ;
- utilisé cet arbre pour construire l'arbre de blocs de la matrice dense issue du problème BEM ;
- identifié les blocs admissibles à l'aide d'un critère d'admissibilité ;
- construit une approximation data-sparse à l'aide de l'ACA à pivotage complet appliqué à une matrice dense pré-calculée ;
- évalué le taux de compression et étudié son évolution en fonction de la fréquence et de la taille du problème.

Objectif. L'objectif de ce TP est de construire une approximation hiérarchique *sans pré-calculer* la matrice dense, et d'utiliser cette structure pour accélérer :
- le produit matrice–vecteur ;
- la résolution d'un système complet BEM.

1. On va commencer par la partie la plus simple. Écrire une fonction `Hmatvec(A_h, x)` qui calcule le produit matrice–vecteur :
   - produit dense classique sur les blocs non admissibles ;
   - produit $U(V^T x)$ sur les blocs admissibles approximés par ACA.
2. Vérifier la précision en comparant `Hmatvec(A_h, x)` avec le produit exact obtenu à partir de la matrice dense (pré-calculée au TP sur la BEM).
3. Comparer les temps de calcul :
   - produit classique dense ;
   - produit accéléré via la H-matrice.
4. Maintenant il nous faut éviter de calculer la matrice BEM complète et utiliser l'ACA avec pivotage partiel. Écrire une fonction qui assemble uniquement le bloc A_{XY} en fonction de X et Y. Attention ce n'est pas facile. Il faut accepter de calculer plusieurs fois la même chose !
5. À partir de l'arbre de blocs construit au TP précédent, compléter la construction de la H-matrice :

— si le bloc est non admissible, assembler le bloc dense ;
— si le bloc est admissible, appliquer ACA à pivotage partiel sans former le bloc dense.

6. Vous avez tous les outils pour résoudre le système BEM avec GMRES :
   — (a) avec la matrice dense ;
   — (b) avec la H-matrice via `Hmatvec`.
7. Estimer le coût mémoire de la H-matrice. Calculer le taux de compression

$$\tau = \frac{\text{mémoire H-matrice}}{\text{mémoire matrice dense}}.$$

   Discuter l'évolution de τ lorsque :
   — la fréquence augmente (géométrie fixe) ;
   — le nombre de degrés de liberté augmente (densité fixe).
   Commenter ces résultats au regard de la théorie des H-matrices.
8. Essayer de résoudre les problèmes les plus gros possibles en vous connectant à Cholesky ! Tester votre code sur d'autres géométries que des disques.

BON COURAGE !