Accélération du code BEM pour l'équation de Helmholtz 2D
Étape 2 : condition d'admissibilité

TP : à rendre le 24/11/2025

Rappel de la Philosophie des TPs : Le but de la série de TPs est de mettre en oeuvre un solveur BEM rapide pour l'équation de Hemholtz 2D. Nous choisissons le cas de la diffraction d'une onde incidente plane, i.e. $u^{inc} = e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}$, par un disque de rayon a centré en $\mathbf{0}$ et de frontière Γ. $\mathbf{k}$ est le vecteur qui permet de déterminer l'angle d'incidence de l'onde. Le nombre d'onde du problème est donné par $k = |\mathbf{k}|$. Le domaine extérieur est noté Ω^+. Nous allons considérer le cas d'une condition à la frontière de type Dirichlet. Ce cas test a l'avantage de présenter une solution analytique simple. Le champ diffracté est donné par :

$$u^+(r,\theta) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta}, \quad r \geq a. \tag{1}$$

Les J_n sont les fonctions de Bessel de première espèce et les $H_n^{(1)}$ les fonctions de Hankel du premier type.

Grandes étapes de la BEM :

1. Reformulation de l'EDP sous forme intégrale ;
2. Résolution d'une équation intégrale pour obtenir les traces des champs sur la frontière ;
3. Application de la représentation intégrale pour obtenir le champ dans tout le domaine (non-borné pour les problèmes extérieurs).

Lors du TP1, nous avons vu que le champ diffracté dans le cas de conditions à la frontière de type Dirichlet est donné par la représentation intégrale

$$u^+(\mathbf{x}) = \int_\Gamma G(\mathbf{x},\mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \tag{2}$$

où $p = -\partial_{\mathbf{n}} u^+ - \partial_{\mathbf{n}} u^{inc}$ avec $\mathbf{n}$ la normale extérieure au disque.
Dans le TP2, p a été déterminé numériquement en résolvant l'équation intégrale

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } p \in H^{-1/2}(\Gamma) \text{ tel que}\\ &\int_\Gamma G(\mathbf{x},\mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) = -u^{\text{inc}}\end{aligned} \tag{3}$$

TP4 : Méthode des matrices hiérarchiques pour accélérer la BEM

Le but de ce TP est d'accélérer la résolution de (3) tout en vérifiant l'erreur commise par rapport à la solution analytique. Pour cela, nous allons mettre en oeuvre la méthode des matrices hiérarchiques (H-matrices), qui permet de représenter de grandes matrices de manière compacte et d'effectuer des opérations rapides tout en contrôlant la précision. Le travail se déroulera en trois étapes :

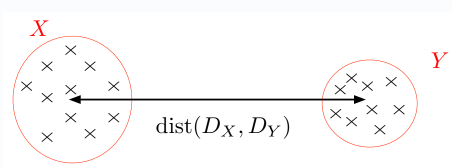
1. découpage de la géométrie en boîtes afin de construire la hiérarchie spatiale et l'arbre binaire associé ;
2. découpage de la matrice selon le critère d'admissibilité, permettant d'identifier les blocs compressibles ;
3. calcul de l'approximation data-sparse de la matrice et mise en place d'un produit matrice-vecteur rapide.

Pour ce TP on se concentre sur la deuxième étape

Objectif. Construire la structure hiérarchique d'une matrice dense associée à une géométrie donnée, à partir de l'arbre binaire construit lors du TP précédent. On souhaite identifier les blocs admissibles et non admissibles selon un critère géométrique, puis explorer la structure et le rang des blocs.

1. Écrire une fonction qui évalue le critère d'admissibilité entre deux boîtes X et Y, où η est un paramètre de la méthode.

   X et Y sont η-*admissibles* ($\eta > 0$) si

   $$\min\Big(\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\Big) < \eta \times \operatorname{dist}(X, Y)$$

   Tester cette fonction sur quelques paires de boîtes de tailles et positions différentes. Comment interpréter ce critère du point de vue géométrique ?

2. Construire récursivement l'arbre de blocs associé à votre géométrie, en utilisant l'arbre binaire obtenu au TP précédent.
   (a) Parcourir les nœuds à partir de la racine.
   (b) Si le critère d'admissibilité est satisfait, mémoriser que le bloc correspondant est admissible.
   (c) Sinon, si les boîtes ne sont pas des feuilles, subdiviser et poursuivre la construction sur les sous-boîtes correspondantes.

3. Analyser la structure de la matrice hiérarchique obtenue :
   — Comme le critère d'admissibilité ne dépend que de la géométrie, représenter visuellement la structure des blocs admissibles et non admissibles.

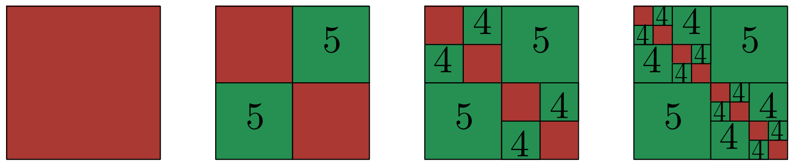


FIGURE 1 – Illustration de la structure de la matrice dans le cas d'un segment 1D. Les blocs verts sont de rang faible et les rouges de rang plein.

   — Discuter de la répartition des blocs admissibles.
   — Étudier l'effet du paramètre η (en pratique, on prend souvent $\eta = 3$). Que se passe-t-il quand η augmente ou diminue ?

4. Vérification numérique du rang des blocs admissibles

   (a) Pour quelques blocs admissibles (X, Y) identifiés à l'étape précédente, construire explicitement la sous-matrice correspondante $A_{X,Y}$ (en utilisant le TP sur la BEM).

   (b) Calculer le *rang numérique* de ces sous-matrices. Comparer ce rang à la taille du bloc correspondant. Peut-on confirmer que les blocs admissibles sont bien de rang faible ?

5. Pour évaluer le gain mémoire, utiliser la matrice construite lors du TP sur la BEM et en construire sa représentation hiérarchique à l'aide de la méthode ACA avec pivotage complet.

   Calculer le taux de compression τ, défini comme le ratio entre le coût de stockage sous forme hiérarchique et le coût de stockage dense.

   Quel est le gain obtenu ? Comment évolue ce taux de compression :
   — lorsque la fréquence augmente, à nombre de degrés de liberté fixé ?
   — à fréquence fixée, lorsque le nombre de degrés de liberté augmente ?
   — à densité de points fixée ?
   Est-ce comportement attendu ? Expliquez.

BON COURAGE !