

Anharmonic Group Elements as Generated by Machine

Ed Rogers

March 2011

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{4}(A+B)^4 &= \lambda \cdot (0.25) \cdot (B^4 + A^4) \\ &\quad + \lambda \cdot (B^3 A + B A^3) \\ &\quad + \lambda \cdot (1.5) \cdot (B^2 + A^2) \\ &\quad + \lambda \cdot (1.5) \cdot B^2 A^2 \\ &\quad + \lambda \cdot (3) \cdot B A \\ &\quad + \lambda \cdot (0.75)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[-X, H_0] = & \lambda^2 \cdot (6 \cdot \beta_{21}) \cdot (B^6 + A^6) + \lambda^2 \cdot (6 \cdot \beta_{15}) \cdot (B^6 - A^6) \\
& + \lambda^2 \cdot (4 \cdot \beta_{22}) \cdot (B^5 A + B A^5) + \lambda^2 \cdot (4 \cdot \beta_{16}) \cdot (B^5 A - B A^5) \\
& + \lambda^2 \cdot (2 \cdot \beta_{23}) \cdot (B^4 A^2 + B^2 A^4) + \lambda^2 \cdot (2 \cdot \beta_{17}) \cdot (B^4 A^2 - B^2 A^4) \\
& + \lambda \cdot (4 \cdot \beta_8) \cdot (B^4 + A^4) + \lambda \cdot (4 \cdot \beta_5) \cdot (B^4 - A^4) \\
& + \lambda^2 \cdot (4 \cdot \beta_{24}) \cdot (B^4 + A^4) + \lambda^2 \cdot (4 \cdot \beta_{18}) \cdot (B^4 - A^4) \\
& + \lambda \cdot (2 \cdot \beta_9) \cdot (B^3 A + B A^3) + \lambda \cdot (2 \cdot \beta_6) \cdot (B^3 A - B A^3) \\
& + \lambda^2 \cdot (2 \cdot \beta_{25}) \cdot (B^3 A + B A^3) + \lambda^2 \cdot (2 \cdot \beta_{19}) \cdot (B^3 A - B A^3) \\
& + \lambda \cdot (2 \cdot \beta_{10}) \cdot (B^2 + A^2) + \lambda \cdot (2 \cdot \beta_7) \cdot (B^2 - A^2) \\
& + \lambda^2 \cdot (2 \cdot \beta_{26}) \cdot (B^2 + A^2) + \lambda^2 \cdot (2 \cdot \beta_{20}) \cdot (B^2 - A^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2!}[-X, [-X, H_0]] &= \lambda^2 \cdot (-4 \cdot \beta_5 \cdot \beta_6 - 4 \cdot \beta_8 \cdot \beta_9) \cdot (B^6 + A^6) + \lambda^2 \cdot (-4 \cdot \beta_5 \cdot \beta_9 - 4 \cdot \beta_6 \cdot \beta_8) \cdot (B^6 - A^6) \\
&+ \lambda^2 \cdot (-36 \cdot \beta_5 \cdot \beta_6 + 36 \cdot \beta_8 \cdot \beta_9) \cdot (B^4 A^2 + B^2 A^4) + \lambda^2 \cdot (36 \cdot \beta_5 \cdot \beta_9 - 36 \cdot \beta_6 \cdot \beta_8) \cdot (B^4 A^2 - B^2 A^4) \\
&+ \lambda^2 \cdot (-108 \cdot \beta_5 \cdot \beta_6 + 108 \cdot \beta_8 \cdot \beta_9 - 24 \cdot \beta_5 \cdot \beta_7 + 24 \cdot \beta_8 \cdot \beta_{10}) \cdot (B^3 A + B A^3) + \lambda^2 \cdot (108 \cdot \beta_5 \cdot \beta_9 - 108 \cdot \beta_6 \cdot \beta_8 - 24 \cdot \beta_5 \cdot \beta_7 + 24 \cdot \beta_8 \cdot \beta_{10}) \cdot (B^3 A - B A^3) \\
&+ \lambda^2 \cdot (-72 \cdot \beta_5 \cdot \beta_6 + 72 \cdot \beta_8 \cdot \beta_9 - 36 \cdot \beta_5 \cdot \beta_7 + 36 \cdot \beta_8 \cdot \beta_{10}) \cdot (B^2 + A^2) + \lambda^2 \cdot (72 \cdot \beta_5 \cdot \beta_9 - 72 \cdot \beta_6 \cdot \beta_8 - 36 \cdot \beta_5 \cdot \beta_7 + 36 \cdot \beta_8 \cdot \beta_{10}) \cdot (B^2 - A^2) \\
&+ \lambda^2 \cdot (-64 \cdot \beta_5^2 + 64 \cdot \beta_8^2 - 16 \cdot \beta_6^2 + 16 \cdot \beta_9^2) \cdot B^3 A^3 \\
&+ \lambda^2 \cdot (-288 \cdot \beta_5^2 + 288 \cdot \beta_8^2 - 36 \cdot \beta_6^2 - 24 \cdot \beta_6 \cdot \beta_7 + 36 \cdot \beta_9^2 + 24 \cdot \beta_9 \cdot \beta_{10}) \cdot B^2 A^2 \\
&+ \lambda^2 \cdot (-384 \cdot \beta_5^2 + 384 \cdot \beta_8^2 - 12 \cdot \beta_6^2 - 24 \cdot \beta_6 \cdot \beta_7 + 12 \cdot \beta_9^2 + 24 \cdot \beta_9 \cdot \beta_{10} - 8 \cdot \beta_7^2 + 8 \cdot \beta_{10}^2) \cdot B A^3 \\
&+ \lambda^2 \cdot (-96 \cdot \beta_5^2 + 96 \cdot \beta_8^2 - 4 \cdot \beta_7^2 + 4 \cdot \beta_{10}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[-X, H_0] + \frac{1}{2!}[-X, [-X, H_0]] &= \lambda^2 \cdot (6 \cdot \beta_{21} - 4 \cdot \beta_5 \cdot \beta_6 - 4 \cdot \beta_8 \cdot \beta_9) \cdot (B^6 + A^6) + \lambda^2 \cdot (6 \cdot \beta_{15} - 4 \cdot \beta_5 \cdot \beta_9 - 4 \cdot \beta_6 \cdot \beta_8) \cdot (B^5 A + B A^5) \\
&+ \lambda^2 \cdot (4 \cdot \beta_{22}) \cdot (B^5 A + B A^5) + \lambda^2 \cdot (4 \cdot \beta_{16}) \cdot (B^5 A - B A^5) \\
&+ \lambda^2 \cdot (2 \cdot \beta_{23} - 36 \cdot \beta_5 \cdot \beta_6 + 36 \cdot \beta_8 \cdot \beta_9) \cdot (B^4 A^2 + B^2 A^4) + \lambda^2 \cdot (2 \cdot \beta_{17} + 36 \cdot \beta_5 \cdot \beta_6 - 36 \cdot \beta_8 \cdot \beta_9) \cdot (B^4 A^2 - B^2 A^4) \\
&+ \lambda \cdot (4 \cdot \beta_8) \cdot (B^4 + A^4) + \lambda \cdot (4 \cdot \beta_5) \cdot (B^4 - A^4) \\
&+ \lambda^2 \cdot (4 \cdot \beta_{24}) \cdot (B^4 + A^4) + \lambda^2 \cdot (4 \cdot \beta_{18}) \cdot (B^4 - A^4) \\
&+ \lambda \cdot (2 \cdot \beta_9) \cdot (B^3 A + B A^3) + \lambda \cdot (2 \cdot \beta_6) \cdot (B^3 A - B A^3) \\
&+ \lambda^2 \cdot (2 \cdot \beta_{25} - 108 \cdot \beta_5 \cdot \beta_6 + 108 \cdot \beta_8 \cdot \beta_9 - 24 \cdot \beta_5 \cdot \beta_7 + 24 \cdot \beta_8 \cdot \beta_{10}) \cdot (B^3 A + B A^3) \\
&+ \lambda \cdot (2 \cdot \beta_{10}) \cdot (B^2 + A^2) + \lambda \cdot (2 \cdot \beta_7) \cdot (B^2 - A^2) \\
&+ \lambda^2 \cdot (2 \cdot \beta_{26} - 72 \cdot \beta_5 \cdot \beta_6 + 72 \cdot \beta_8 \cdot \beta_9 - 36 \cdot \beta_5 \cdot \beta_7 + 36 \cdot \beta_8 \cdot \beta_{10}) \cdot (B^2 + A^2) - \\
&+ \lambda^2 \cdot (-64 \cdot \beta_5^2 + 64 \cdot \beta_8^2 - 16 \cdot \beta_6^2 + 16 \cdot \beta_9^2) \cdot B^3 A^3 \\
&+ \lambda^2 \cdot (-288 \cdot \beta_5^2 + 288 \cdot \beta_8^2 - 36 \cdot \beta_6^2 - 24 \cdot \beta_6 \cdot \beta_7 + 36 \cdot \beta_9^2 + 24 \cdot \beta_9 \cdot \beta_{10}) \cdot B^2 A^2 \\
&+ \lambda^2 \cdot (-384 \cdot \beta_5^2 + 384 \cdot \beta_8^2 - 12 \cdot \beta_6^2 - 24 \cdot \beta_6 \cdot \beta_7 + 12 \cdot \beta_9^2 + 24 \cdot \beta_9 \cdot \beta_{10} - 8 \cdot \beta_5 \cdot \beta_7 + 8 \cdot \beta_8 \cdot \beta_7) \cdot B^2 A^2 \\
&+ \lambda^2 \cdot (-96 \cdot \beta_5^2 + 96 \cdot \beta_8^2 - 4 \cdot \beta_7^2 + 4 \cdot \beta_{10}^2) \cdot B^2 A^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_4 - U^\dagger H_0 U &= \Lambda_4 \\
&= \frac{\lambda}{4}(A+B)^4 - ([-X, H_0] + \frac{1}{2!}[-X, [-X, H_0]]) \\
&= \lambda^2 \cdot (-6 \cdot \beta_{21} + 4 \cdot \beta_5 \cdot \beta_6 + 4 \cdot \beta_8 \cdot \beta_9) \cdot (B^6 + A^6) + \lambda^2 \cdot (-6 \cdot \beta_{15} + 4 \cdot \beta_5 \cdot \beta_9 + 4 \cdot \beta_6 \cdot \beta_8) \cdot (B^6 - A^6) \\
&\quad + \lambda^2 \cdot (-4 \cdot \beta_{22}) \cdot (B^5 A + B A^5) + \lambda^2 \cdot (-4 \cdot \beta_{16}) \cdot (B^5 A - B A^5) \\
&\quad + \lambda^2 \cdot (-2 \cdot \beta_{23} + 36 \cdot \beta_5 \cdot \beta_6 - 36 \cdot \beta_8 \cdot \beta_9) \cdot (B^4 A^2 + B^2 A^4) + \lambda^2 \cdot (-2 \cdot \beta_{17} - 36 \cdot \beta_5 \cdot \beta_9 + 36 \cdot \beta_6 \cdot \beta_8) \cdot (B^4 A^2 - B^2 A^4) \\
&\quad + \lambda \cdot (0.25 - 4 \cdot \beta_8) \cdot (B^4 + A^4) + \lambda \cdot (-4 \cdot \beta_5) \cdot (B^4 - A^4) \\
&\quad + \lambda^2 \cdot (-4 \cdot \beta_{24}) \cdot (B^4 + A^4) + \lambda^2 \cdot (-4 \cdot \beta_{18}) \cdot (B^4 - A^4) \\
&\quad + \lambda \cdot (1 - 2 \cdot \beta_9) \cdot (B^3 A + B A^3) + \lambda \cdot (-2 \cdot \beta_6) \cdot (B^3 A - B A^3) \\
&\quad + \lambda^2 \cdot (-2 \cdot \beta_{25} + 108 \cdot \beta_5 \cdot \beta_6 - 108 \cdot \beta_8 \cdot \beta_9 + 24 \cdot \beta_5 \cdot \beta_7 - 24 \cdot \beta_8 \cdot \beta_{10}) \cdot (B^3 A + B A^3) + \lambda^2 \cdot (-2 \cdot \beta_{19} - 108 \cdot \beta_5 \cdot \beta_9 + 108 \cdot \beta_6 \cdot \beta_8 - 24 \cdot \beta_5 \cdot \beta_7 + 24 \cdot \beta_8 \cdot \beta_{10}) \cdot (B^3 A - B A^3) \\
&\quad + \lambda \cdot (1.5 - 2 \cdot \beta_{10}) \cdot (B^2 + A^2) + \lambda \cdot (-2 \cdot \beta_7) \cdot (B^2 - A^2) \\
&\quad + \lambda^2 \cdot (-2 \cdot \beta_{26} + 72 \cdot \beta_5 \cdot \beta_6 - 72 \cdot \beta_8 \cdot \beta_9 + 36 \cdot \beta_5 \cdot \beta_7 - 36 \cdot \beta_8 \cdot \beta_{10}) \cdot (B^2 + A^2) + \lambda^2 \cdot (-2 \cdot \beta_{20} - 72 \cdot \beta_5 \cdot \beta_9 + 72 \cdot \beta_6 \cdot \beta_8 - 36 \cdot \beta_5 \cdot \beta_7 + 36 \cdot \beta_8 \cdot \beta_{10}) \cdot (B^2 - A^2) \\
&\quad + \lambda^2 \cdot (64 \cdot \beta_5^2 - 64 \cdot \beta_8^2 + 16 \cdot \beta_6^2 - 16 \cdot \beta_9^2) \cdot B^3 A^3 \\
&\quad + \lambda \cdot (1.5) \cdot B^2 A^2 \\
&\quad + \lambda^2 \cdot (288 \cdot \beta_5^2 - 288 \cdot \beta_8^2 + 36 \cdot \beta_6^2 + 24 \cdot \beta_6 \cdot \beta_7 - 36 \cdot \beta_9^2 - 24 \cdot \beta_9 \cdot \beta_{10}) \cdot B^2 A^2 \\
&\quad + \lambda \cdot (3) \cdot B A \\
&\quad + \lambda^2 \cdot (384 \cdot \beta_5^2 - 384 \cdot \beta_8^2 + 12 \cdot \beta_6^2 + 24 \cdot \beta_6 \cdot \beta_7 - 12 \cdot \beta_9^2 - 24 \cdot \beta_9 \cdot \beta_{10} + 8 \cdot \beta_7^2 - 8 \cdot \beta_{10}^2) \cdot B A \\
&\quad + \lambda \cdot (0.75) \\
&\quad + \lambda^2 \cdot (96 \cdot \beta_5^2 - 96 \cdot \beta_8^2 + 4 \cdot \beta_7^2 - 4 \cdot \beta_{10}^2)
\end{aligned}$$