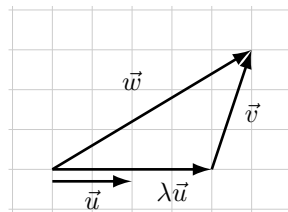


Material complementar para Geometria Analítica

Eduardo Ochs - <eduardoochs@gmail.com>

<http://angg.twu.net/material-para-GA.html>

RCN/CURO/UFF, 21/fev/2020



Introdução

Quando a gente leciona uma disciplina a gente acaba preparando material que complementa os livros nos pontos em que os alunos costumam ter mais dúvidas... e nos últimos anos em que eu lecionei Geometria Analítica a grande maioria das dúvidas — pelo menos dos alunos que se manifestavam — eram sobre como passar entre casos gerais e casos particulares: os alunos não sabiam como transformar os teoremas dos livros (“muito abstratos”!) em casos concretos, não sabiam nem como começar a tentar generalizar algo que eles vissem num caso particular, não sabiam escrever uma hipótese, não sabiam *testar* uma hipótese, não sabiam nem mesmo testar se uma determinada reta desenhada num plano correspondia a uma determinada equação de reta...

Esses alunos não sabiam estudar pelos livros. Aliás, a maioria deles nem sabia *como* estudar — eles achavam que tinham que decorar fórmulas e procedimentos, mas tinham muito pouca noção do que cada trecho das fórmulas e procedimentos queria dizer, e muitos deles até achavam que *não dava tempo* de aprender os detalhes direito, e isso acabava deixando eles paralisados.

Este PDF é um “work in progress”. Ele é essencialmente a versão de 2018.1 do material que eu usava com as minhas turmas de GA pra tentar complementar os livros-texto que tínhamos disponíveis online ou na biblioteca, que eram estes aqui:

Delgado, J., Frensel, K. e Santo, N.E., *Geometria Analítica 1*, CEDERJ.

Disponível em: <https://canalcederj.cecierj.edu.br/recurso/4690>

Venturi, J.J., *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica e*

Cônicas e Quádricas. Ed. Unificado. Disponível em:

<https://www.geometriaanalitica.com.br/>

Reis, G.L., e Silva, V.V., *Geometria Analítica*. LTC.

Steinbruch, A., e Winterle, P., *Geometria Analítica*. Ed Makron.

Boulos, P., e Camargo, I. de., *Geometria Analítica - um tratamento vetorial*. Ed. Prentice Hall Brasil.

Tem várias coisas que eu gostaria de modificar aqui, mas que não tenho tempo agora... as principais são: 1) a abordagem de vetores (que ficou axiomática demais), 2) a parte sobre senos e cossenos (em 2018.1 eu descobri, tarde demais, que os alunos aprendiam *bem* melhor de outro jeito), 3) o PDF deveria ter muitas referências explícitas aos livros pra forçar os alunos a compararem a nossa abordagem com as dos livros, mas por enquanto não tem quase nenhuma, 4) eu perdi o código-fonte em \LaTeX dos exercícios e figuras que eu preparei sobre cônicas, e ainda não tive tempo de redigitá-los e inclui-los aqui... mas aqui tem um link pro PDF dele:

<http://angg.twu.net/LATEX/2018-1-GA-conicas.pdf>

Praticamente todo o material que eu produzi para as minhas aulas de Geometria Analítica no PURO/UFF está disponível online, incluindo fotos de praticamente todos os quadros a partir de 2012.2 — mesmo os das aulas mal preparadas

— e em 2013.2 eu aprendi a fazer “versões imprimíveis” dos quadros aumentando o contraste das fotos e produzindo um arquivo PDF com todos os quadros do semestre. Veja os links abaixo:

<http://angg.twu.net/2018.1-GA.html>
<http://angg.twu.net/2018.1-GA/2018.1-GA.pdf>
<http://angg.twu.net/2018.1-GA/Makefile.html>

As mesmas idéias num nível mais alto

A partir do meio de 2018 eu comecei a aplicar algumas das idéias que estão por trás deste material — *que o melhor modo ensinar GA “para crianças” é trabalhar em casos particulares e casos gerais ao mesmo tempo, em paralelo* — em áreas mais avançadas, como Teoria de Categorias, e a apresentá-las em congressos, seminários, workshops e artigos. Links:

<http://angg.twu.net/math-b.html#zhas-for-children-2>
<http://angg.twu.net/logic-for-children-2018.html>
<http://angg.twu.net/math-b.html#2020-tallinn>

Coisas MUITO importantes sobre Geometria Analítica

A matéria é sobre duas linguagens diferentes: a

- “Geometria”, que é sobre coisas gráficas como pontos, retas e círculos, e a
- “Analítica”, que é sobre “álgebra”, sobre coisas matemáticas “formais” como contas, conjuntos e equações;

além disso Geometria Analítica é também sobre a TRADUÇÃO entre essas duas linguagens.

Lembre que boa parte do que você aprendeu sobre álgebra no ensino médio era sobre *resolver equações*.

Encontrar soluções de equações é difícil — são muitos métodos, e dá pra errar bastante no caminho — mas *testar* as soluções é fácil.

Boa parte do que você aprendeu (ou deveria ter aprendido) sobre geometria no ensino médio envolvia construções gráficas; por exemplo, a partir de pontos A, B, C ,

Seja A' o ponto médio entre B e C ,
 Seja B' o ponto médio entre A e C ,
 Seja C' o ponto médio entre A e B ,
 Seja r_a a reta que passa por A' e é ortogonal a BC ,
 Seja r_b a reta que passa por B' e é ortogonal a AC ,
 Seja r_c a reta que passa por C' e é ortogonal a AB ,
 Seja D o ponto de interseção das retas r_a, r_b e r_c ,
 então D é o centro do círculo que passa por A, B e C .

Você **VAI TER QUE** aprender a definir seus objetos — pontos, retas, conjuntos, círculos, etc... isso provavelmente vai ser algo novo pra você e é algo que precisa de MUITO treino. Dá pra passar em Cálculo 1 e em Prog 1 só aprendendo a “ler” as definições que o professor e os livros mostram, mas em Geometria Analítica NÃO DÁ, em GA você vai ter que aprender a ler **E A ESCREVER** definições.

Dicas MUITO IMPORTANTES e pouco óbvias

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...

2) Cada “seja” ou “sejam” que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.

3) Em “matematiquês” a gente quase não usa termos como “ele”, “ela”, “isso”, “aquilo” e “lá” — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer (como nas pags 10 e ??)... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos *apontando pra eles com o dedo* e dizendo “esse aqui”.

4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.

5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.

6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas “querem dizer” e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu “método gráfico” está certo você vai poder conferir se o “método gráfico” e o “método contas” dão aos mesmos resultados. Exemplo: p.18.

7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática*: se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

Substituição

Uma das coisas que vamos usar neste curso e que não costuma ser apresentada em livros básicos — mas que eu uso na optativa de “Lógica pra Crianças” — é uma operação chamada *substituição simultânea*. Exemplo:

$$((x + y) \cdot z) \left[\begin{array}{l} x := a + y \\ y := b + z \\ z := c + x \end{array} \right] = ((a + y) + (b + z)) \cdot (c + x).$$

Essa operação *pode* ser aplicada em expressões que não fazem sentido nenhum — por exemplo:

$$(\text{Vanessão } 20 \text{ reais}) \left[a := \left(\int_{\square}^{\odot} \right) \right] = (V \left(\int_{\square}^{\odot} \right) \text{ness} \left(\widetilde{\int_{\square}^{\odot}} \right) \text{o } 20 \text{ re} \left(\int_{\square}^{\odot} \right) \text{is})$$

e às vezes vamos usá-la para atribuir sentido para expresões aparentemente abstratas. Por exemplo, na parte sobre sistemas de coordenadas vamos ter definições como

$$(a, b)_{\Sigma} = (10a + 2, 100b + 3) \quad \text{para } a, b \in \mathbb{R}$$

que nos permite fazer

$$\begin{aligned} ((a, b)_{\Sigma} = (10a + 2, 100b + 3)) \left[\begin{array}{l} a := 4 \\ b := 5 \end{array} \right] \\ = ((4, 5)_{\Sigma} = (10 \cdot 4 + 2, 100 \cdot 5 + 3)) \\ = ((4, 5)_{\Sigma} = (42, 503)) \end{aligned}$$

e fazendo isto pra vários valores de a e b a gente consegue montar uma tabela (*ainda não fiz*) e entender geometricamente como a operação $(a, b)_{\Sigma}$ funciona.

A substituição também serve pra gente testar equações:

$$\begin{aligned} (x^2 - 5x + 6 = 0) [x := 1] &= (1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0) \\ &= (1 - 5 + 6 = 0) \\ &= (2 = 0) \\ &= \mathbf{F} \\ (x^2 - 5x + 6 = 0) [x := 2] &= (2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0) \\ &= (4 - 10 + 6 = 0) \\ &= (0 = 0) \\ &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

e as “set comprehensions” das seções seguintes vão nos permitir escrever o conjunto das soluções de uma equação de um jeito claro, rápido, preciso e fácil de debugar *sem usar português*:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$$

Aos poucos a gente vai começar a usar substituições mais complicadas usando implicitamente a idéia de “tipos” das próximas páginas. Por exemplo, se $t \in \mathbb{R}$ esta substituição é válida,

$$\begin{aligned} ((a, b)_{\Sigma} = (10a + 2, 100b + 3)) \left[\begin{array}{l} a := 5t \\ b := 6t \end{array} \right] \\ = ((5t, 6t)_{\Sigma} = (10 \cdot 5t + 2, 100 \cdot 6t + 3)) \end{aligned}$$

mas não é válido substituir a ou b por uma expressão cujo resultado seja uma matriz.

Alguns “tipos” de objetos matemáticos familiares

Multiplicação de matrizes:

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 10 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1230 \\ 4560 \\ 7890 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} \\
 \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} g & h & i & j \\ k & l & m & n \end{pmatrix}}_{2 \times 4} = \underbrace{\begin{pmatrix} ag + bk & ah + bl & ai + bm & aj + bn \\ cg + dk & ch + dl & ci + dm & cj + dn \\ eg + fk & eh + fl & ei + fm & ej + fn \end{pmatrix}}_{3 \times 4} \\
 \underbrace{\begin{pmatrix} g & h & i & j \\ k & l & m & n \end{pmatrix}}_{2 \times 4} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}}_{3 \times 2} = \text{erro} \quad (\text{porque } 4 \neq 3) \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 0 \\ 340 & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 \quad 3 \quad 4) \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = (234) = 234
 \end{array}$$

Soma de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 23 & 34 \\ 45 & 56 & 67 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \text{erro}$$

Multiplicação de número por matriz:

$$10 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 40 \\ 50 & 60 & 70 \end{pmatrix}$$

Operações lógicas:

“E”:	“Ou”:	“Implica”:	“Não”:
$\mathbf{F} \& \mathbf{F} = \mathbf{F}$	$\mathbf{F} \vee \mathbf{F} = \mathbf{F}$	$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{V}$	$\neg \mathbf{F} = \mathbf{V}$
$\mathbf{F} \& \mathbf{V} = \mathbf{F}$	$\mathbf{F} \vee \mathbf{V} = \mathbf{V}$	$\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{V}$	$\neg \mathbf{V} = \mathbf{F}$
$\mathbf{V} \& \mathbf{F} = \mathbf{F}$	$\mathbf{V} \vee \mathbf{F} = \mathbf{V}$	$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{F}$	
$\mathbf{V} \& \mathbf{V} = \mathbf{V}$	$\mathbf{V} \vee \mathbf{V} = \mathbf{V}$	$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{V}$	

Se $x = 6$,

$$\underbrace{2 < \underbrace{x}_6}_{\mathbf{V}} \& \underbrace{x}_6 < 5 \underbrace{\quad}_{\mathbf{F}} = \underbrace{\quad}_{\mathbf{F}}$$

“Set comprehensions”

Notação explícita, com geradores, filtros,

e um “;” separando os geradores e filtros da expressão final:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}\}}_{\text{ger}}; \underbrace{10a}_{\text{expr}} &= \{10, 20, 30, 40\} \\
 \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}\}}_{\text{ger}}; \underbrace{a}_{\text{expr}} &= \{1, 2, 3, 4\} \\
 \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}\}}_{\text{ger}}; \underbrace{a \geq 3}_{\text{filt}}; \underbrace{a}_{\text{expr}} &= \{3, 4\} \\
 \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}\}}_{\text{ger}}; \underbrace{a \geq 3}_{\text{filt}}; \underbrace{10a}_{\text{expr}} &= \{30, 40\} \\
 \underbrace{\{a \in \{10, 20\}\}}_{\text{ger}}; \underbrace{b \in \{3, 4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{a + b}_{\text{expr}} &= \{13, 14, 23, 24\} \\
 \underbrace{\{a \in \{1, 2\}\}}_{\text{ger}}; \underbrace{b \in \{3, 4\}}_{\text{ger}}; \underbrace{(a, b)}_{\text{expr}} &= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}
 \end{aligned}$$

Notações convencionais, com “|” ao invés de “;”:

Primeiro tipo — expressão final, “|”, geradores e filtros:

$$\begin{aligned}
 \{10a \mid a \in \{1, 2, 3, 4\}\} &= \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}\}}_{\text{ger}}; \underbrace{10a}_{\text{expr}} \\
 \{10a \mid a \in \{1, 2, 3, 4\}, a \geq 3\} &= \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}\}}_{\text{ger}}; \underbrace{a \geq 3}_{\text{filt}}; \underbrace{10a}_{\text{expr}} \\
 \{a \mid a \in \{1, 2, 3, 4\}\} &= \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}\}}_{\text{ger}}; \underbrace{a}_{\text{expr}}
 \end{aligned}$$

O segundo tipo — gerador, “|”, filtros —

pode ser convertido para o primeiro...

o truque é fazer a expressão final ser a variável do gerador:

$$\begin{aligned}
 \{a \in \{1, 2, 3, 4\} \mid a \geq 3\} &= \\
 \{a \mid a \in \{1, 2, 3, 4\}, a \geq 3\} &= \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}\}}_{\text{ger}}; \underbrace{a \geq 3}_{\text{filt}}; \underbrace{a}_{\text{expr}}
 \end{aligned}$$

O que distingue as duas notações “ $\{\dots \mid \dots\}$ ” é

se o que vem antes da “|” é ou não um gerador.

Observações:

$$\{\text{gerador} \mid \text{filtros}\} = \{\text{gerador}, \text{filtros}; \underbrace{\text{variável do gerador}}_{\text{expr}}\}$$

$$\{\text{expr} \mid \text{geradores e filtros}\} = \{\text{geradores e filtros}; \text{expr}\}$$

As notações “ $\{\dots \mid \dots\}$ ” são padrão e são usadas em muitos livros de matemática.

A notação “ $\{\dots; \dots\}$ ” é bem rara; eu aprendi ela em artigos sobre linguagens de programação, e resolvi apresentar ela aqui porque acho que ela ajuda a explicar as duas notações “ $\{\dots \mid \dots\}$ ”.

“Set comprehensions”: como calcular usando tabelas

Alguns exemplos:

Se $A := \{x \in \{1, 2\}; (x, 3 - x)\}$

então $A = \{(1, 2), (2, 1)\}$:

x	$(x, 3-x)$
1	(1,2)
2	(2,1)

Se $I := \{x \in \{1, 2, 3\}, y \in \{3, 4\}, x + y < 6; (x, y)\}$

então $I = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$:

x	y	$x+y < 6$	(x, y)
1	3	V	(1,3)
1	4	V	(1,4)
2	3	V	(2,3)
2	4	F	
3	3	F	
3	4	F	

Se $D := \{(x, 2x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$

então $D = \{x \in \{0, 1, 2, 3\}; (x, 2x)\}$,

$D = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$:

x	$(x, 2x)$
0	(0,0)
1	(1,2)
2	(2,4)
3	(3,6)

Se $P := \{(x, y) \in \{1, 2, 3\}^2 \mid x \geq y\}$

então $P = \{(x, y) \in \{1, 2, 3\}^2, x \geq y; (x, y)\}$,

$P = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$:

(x, y)	x	y	$x \geq y$	(x, y)
(1,1)	1	1	V	(1,1)
(1,2)	1	2	F	
(1,3)	1	3	F	
(2,1)	2	1	V	(2,1)
(2,2)	2	2	V	(2,2)
(2,3)	2	3	F	
(3,1)	3	1	V	(3,1)
(3,2)	3	2	V	(3,2)
(3,3)	3	3	V	(3,3)

Obs: os exemplos acima correspondem aos exercícios 2A, 2I, 3D e 5P das próximas páginas.

Exercícios de “set comprehensions”

1) Represente graficamente:

$$\begin{aligned} A &:= \{(1, 4), (2, 4), (1, 3)\} \\ B &:= \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\} \\ C &:= \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 4)\} \\ D &:= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\} \\ E &:= \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\} \end{aligned}$$

2) Calcule e represente graficamente:

$$\begin{aligned} A &:= \{x \in \{1, 2\}; (x, 3 - x)\} \\ B &:= \{x \in \{1, 2, 3\}; (x, 3 - x)\} \\ C &:= \{x \in \{0, 1, 2, 3\}; (x, 3 - x)\} \\ D &:= \{x \in \{0, 0.5, 1, \dots, 3\}; (x, 3 - x)\} \\ E &:= \{x \in \{1, 2, 3\}, y \in \{3, 4\}; (x, y)\} \\ F &:= \{x \in \{3, 4\}, y \in \{1, 2, 3\}; (x, y)\} \\ G &:= \{x \in \{3, 4\}, y \in \{1, 2, 3\}; (y, x)\} \\ H &:= \{x \in \{3, 4\}, y \in \{1, 2, 3\}; (x, 2)\} \\ I &:= \{x \in \{1, 2, 3\}, y \in \{3, 4\}, x + y < 6; (x, y)\} \\ J &:= \{x \in \{1, 2, 3\}, y \in \{3, 4\}, x + y > 4; (x, y)\} \\ K &:= \{x \in \{1, 2, 3, 4\}, y \in \{1, 2, 3, 4\}; (x, y)\} \\ L &:= \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}; (x, y)\} \\ M &:= \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y = 3; (x, y)\} \\ N &:= \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, x = 2; (x, y)\} \\ O &:= \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, x + y = 3; (x, y)\} \\ P &:= \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y = x; (x, y)\} \\ Q &:= \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y = x + 1; (x, y)\} \\ R &:= \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y = 2x; (x, y)\} \\ S &:= \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y = 2x + 1; (x, y)\} \end{aligned}$$

3) Calcule e represente graficamente:

$$\begin{aligned} A &:= \{(x, 0) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ B &:= \{(x, x/2) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ C &:= \{(x, x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ D &:= \{(x, 2x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ E &:= \{(x, 1) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ F &:= \{(x, 1 + x/2) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ G &:= \{(x, 1 + x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ H &:= \{(x, 1 + 2x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ I &:= \{(x, 2) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ J &:= \{(x, 2 + x/2) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ K &:= \{(x, 2 + x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ L &:= \{(x, 2 + 2x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ M &:= \{(x, 2) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ N &:= \{(x, 2 - x/2) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ O &:= \{(x, 2 - x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \\ P &:= \{(x, 2 - 2x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\} \end{aligned}$$

Produto cartesiano de conjuntos

$$A \times B := \{a \in A, b \in B; (a, b)\}$$

$$\text{Exemplo: } \{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}.$$

$$\text{Uma notação: } A^2 = A \times A.$$

$$\text{Exemplo: } \{3, 4\}^2 = \{3, 4\} \times \{3, 4\} = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Sejam:

$$A = \{1, 2, 4\},$$

$$B = \{2, 3\},$$

$$C = \{2, 3, 4\}.$$

Exercícios

4) Calcule e represente graficamente:

$$\text{a) } A \times A \quad \text{d) } B \times A \quad \text{g) } C \times A$$

$$\text{b) } A \times B \quad \text{e) } B \times B \quad \text{h) } C \times B$$

$$\text{c) } A \times C \quad \text{f) } B \times C \quad \text{i) } C \times C$$

5) Calcule e represente graficamente:

$$A := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3\}; (x, y)\}$$

$$B := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3\}, y = 2; (x, y)\}$$

$$C := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3\}, x = 1; (x, y)\}$$

$$D := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3\}, y = x; (x, y)\}$$

$$E := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y = 2x; (x, y)\}$$

$$F := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2, y = 2x; (x, y)\}$$

$$G := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2, y = x; (x, y)\}$$

$$H := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2, y = x/2; (x, y)\}$$

$$I := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2, y = x/2 + 1; (x, y)\}$$

$$J := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid y = 2x\}$$

$$K := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid y = x\}$$

$$L := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid y = x/2\}$$

$$M := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid y = x/2 + 1\}$$

$$N := \{(x, y) \in \{1, 2, 3\}^2 \mid 0x + 0y = 0\}$$

$$O := \{(x, y) \in \{1, 2, 3\}^2 \mid 0x + 0y = 2\}$$

$$P := \{(x, y) \in \{1, 2, 3\}^2 \mid x \geq y\}$$

6) Represente graficamente:

$$J' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$$

$$K' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$$

$$L' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x/2\}$$

$$M' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x/2 + 1\}$$

$$N' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + 0y = 0\}$$

$$O' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + 0y = 2\}$$

$$P' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$$

Retas

Sejam:

$$\begin{aligned} R_{a,b} &= \{ (x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^2 \mid y = ax + b \} \\ r_{a,b} &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b \} \\ R_{a,b,c} &= \{ (x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^2 \mid ax + by = c \} \\ r_{a,b,c} &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c \} \end{aligned}$$

Exercícios:

1) Represente graficamente:

- a) $R_{0,0}, R_{1,0}, R_{2,0}$.
- b) $R_{0,1}, R_{1,1}, R_{2,1}$.
- c) $R_{0,2}, R_{1,2}, R_{2,2}$.
- d) $r_{0,0}, r_{1,0}, r_{2,0}$.
- e) $r_{0,1}, r_{1,1}, r_{2,1}$.
- f) $r_{0,2}, r_{1,2}, r_{2,2}$.

Dicas:

Todo conjunto da forma $r_{a,b}$ para $a, b \in \mathbb{R}$ é uma reta.

Se você comparar os resultados dos exercícios acima você vai conseguir entender — ou pelo menos fazer hipóteses sobre — o que “querem dizer” o a e o b em $r_{a,b}$.

Se você souber dois pontos de uma reta r você consegue traçá-la.

Mais exercícios:

2) Represente graficamente:

- a) $R_{1,1,1}, R_{1,1,2}, R_{1,1,3}$.
- b) $r_{1,1,1}, r_{1,1,2}, r_{1,1,3}$.
- c) $R_{2,3,6}, r_{2,3,6}$.
- d) $r_{1/2,0}, r_{1/2,1}, r_{1/2,2}$.
- e) $r_{-1/2,0}, r_{-1/2,1}, r_{-1/2,2}$.
- f) $R_{2,2,2}, R_{2,2,4}, R_{2,2,6}$.
- g) $r_{2,2,2}, r_{2,2,4}, r_{2,2,6}$.

Mais dicas:

Dois conjuntos são diferentes se existe algum ponto que pertence a um e não pertence a outro — por exemplo, $(2, 4) \in r_{2,0}$ e $(2, 4) \notin r_{3,0}$, portanto $r_{2,0} \neq r_{3,0}$.

Duas retas são iguais se existem dois pontos diferentes que pertencem a ambas.

Mais exercícios:

- 3) Encontre $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $r_{a,b} = r_{1,3,3}$. Dica: chutar e testar.
- 4) Encontre $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $r_{a,b} = r_{2,-1,4}$. Dica: chutar e testar.
- 5) Represente graficamente $R_{0,0,1}$ e $R_{0,0,0}$. Dica: item 7 da p.2.
- 6) Represente graficamente $r_{0,0,1}$ e $r_{0,0,0}$. Dica: item 7 da p.2.

Pontos e vetores

Se a, b, c são números então

$\overrightarrow{(a, b)}$ é um ponto de \mathbb{R}^2 ,

$\overrightarrow{(a, b)}$ é um vetor em \mathbb{R}^2 ,

$\overrightarrow{(a, b, c)}$ é um ponto de \mathbb{R}^3 ,

$\overrightarrow{(a, b, c)}$ é um vetor em \mathbb{R}^3 .

Por enquanto nós só vamos usar \mathbb{R}^2 –

a *terceira parte do curso* vai ser sobre \mathbb{R}^3 .

Podemos pensar que a operação $\overrightarrow{(_, _)}$ recebe dois números e “monta” um ponto de \mathbb{R}^2 com eles; a operação $\overrightarrow{(_, _)}$ é similar, mas ela monta um vetor. Também temos operações $_, _1, _2$ que “desmontam” pontos e vetores e retornam a primeira ou a segunda componente deles: $(3, 4)_1 = 3$, $(3, 4)_2 = 4$, $\overrightarrow{(3, 4)}_1 = 3$, $\overrightarrow{(3, 4)}_2 = 4$. Se $\vec{v} = \overrightarrow{(4, 5)}$ então $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Operações com pontos e vetores (obs: $a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$):

$$1) \overrightarrow{(a, b)} + \overrightarrow{(c, d)} = \overrightarrow{(a + c, b + d)}$$

$$2) \overrightarrow{(a, b)} + \overrightarrow{(c, d)} = \overrightarrow{(a + c, b + d)}$$

$$3) \overrightarrow{(a, b)} - \overrightarrow{(c, d)} = \overrightarrow{(a - c, b - d)}$$

$$4) \overrightarrow{(a, b)} - \overrightarrow{(c, d)} = \overrightarrow{(a - c, b - d)}$$

$$5) \overrightarrow{(a, b)} - \overrightarrow{(c, d)} = \overrightarrow{(a - c, b - d)}$$

$$6) k \cdot \overrightarrow{(a, b)} = \overrightarrow{(ka, kb)}$$

$$7) \overrightarrow{(a, b)} \cdot \overrightarrow{(c, d)} = ac + bd \quad (!!!!)$$

As outras operações dão erro. Por exemplo:

$$\overrightarrow{(a, b)} + (c, d) = \text{erro}$$

$$(a, b) + \overrightarrow{(c, d)} = \text{erro}$$

$$(a, b) \cdot k = \text{erro}$$

Exercícios

6) Calcule:

$$a) (2, 3) + (\overrightarrow{(4, 5)} + \overrightarrow{(10, 20)})$$

$$b) ((2, 3) + (4, 5)) + (10, 20)$$

$$c) 4 \cdot ((20, 30) - (5, 10))$$

$$d) \overrightarrow{(2, 3)} \cdot \overrightarrow{(5, 10)}$$

$$e) \overrightarrow{(5, 10)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)}$$

$$f) (\overrightarrow{(2, 3)} \cdot \overrightarrow{(5, 10)}) \cdot \overrightarrow{(10, 100)}$$

$$g) \overrightarrow{(2, 3)} \cdot (\overrightarrow{(5, 10)} \cdot \overrightarrow{(10, 100)})$$

$$h) (\overrightarrow{(5, 10)} \cdot \overrightarrow{(10, 100)}) \cdot \overrightarrow{(2, 3)}$$

$$i) (\overrightarrow{(10, 100)} \cdot \overrightarrow{(5, 10)}) \cdot \overrightarrow{(2, 3)}$$

$$j) (\overrightarrow{(10, 100)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)}) \cdot \overrightarrow{(5, 10)}$$

Obs: dois modos de resolver o 6a:

(o segundo é o modo padrão)

$$a) (2, 3) + (\overrightarrow{(4, 5)} + \overrightarrow{(10, 20)})$$

[regra 2]

$$= \overrightarrow{(14, 25)}$$

[regra 1]

$$= (16, 28)$$

$$a) (2, 3) + (\overrightarrow{(4, 5)} + \overrightarrow{(10, 20)})$$

$$= (2, 3) + \overrightarrow{(14, 25)}$$

$$= (16, 28)$$

Como representar pontos e vetores graficamente

1) Represente num gráfico os pontos $A = (2, 1)$, $B = (4, 0)$, $C = (3, 3)$ e escreva perto de cada um destes pontos o seu nome — A , B , C . Repare que se o seu gráfico estiver claro o suficiente o leitor vai entender que os seus pontos têm coordenadas inteiras e vai conseguir descobrir as coordenadas de A , B e C .

2) Vetores correspondem a *deslocamentos* vão ser representados como setas indo de um ponto a outro. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{(2, 1)}$ corresponde a um deslocamento de duas unidades para a direita e uma unidade pra cima; uma seta indo do ponto $D = (0, 3)$ para o ponto $D + \vec{v} = (0 + 2, 3 + 1)$ é uma representação do vetor \vec{v} “apoiado no ponto D ”. Um bom modo de representar graficamente o vetor \vec{v} apoiado no ponto D é representando os pontos D e $D + \vec{v}$ — lembre de escrever os nomes D e $D + \vec{v}$ perto destes pontos no gráfico — e fazer uma seta de D para $D + \vec{v}$ e escrever \vec{v} perto dela. Represente graficamente o vetor \vec{v} apoiado no ponto D .

3) Um bom modo de representar graficamente a soma $D + \vec{v}$ é fazer o mesmo que no item anterior, representando graficamente os pontos D , $D + \vec{v}$ e a seta (“ \vec{v} ”) indo de um para o outro. Represente as somas $A + \vec{v}$, $B + \vec{v}$, $C + \vec{v}$ e $D + \vec{v}$ num gráfico só, e repare que você vai ter várias setas com o nome “ \vec{v} ” — todas elas são o mesmo vetor, mas representado “apoiado em pontos diferentes”.

4) A “aula 1” no livro do CEDERJ, que usa uma abordagem diferente da nossa, se chama “Vetores no plano - segmentos orientados”. Dê uma olhada nas três primeiras páginas da “aula 1” (até o fim da “Definição 1”) pra ter uma noção de como ele faz as coisas — repare que o início do livro não usa coordenadas, elas só aparecem depois! — e depois dê uma olhada nas proposições 1 e 2 do livro e nas definições 2 e 3.

5) Seja $\vec{w} = \overrightarrow{(0, -1)}$. Represente graficamente $A + \vec{w}$, $B + \vec{w}$, $C + \vec{w}$, $D + \vec{w}$.

6) Calcule $\vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{w} + \vec{v}$ usando as regras definidas na página anterior.

7) Represente graficamente $B + \vec{v}$, $(B + \vec{v}) + \vec{w}$ e $B + (\vec{v} + \vec{w})$ num gráfico só.

8) Leia a “Definição 4” no livro do CEDERJ e compare os desenhos dele com os seus desenhos do item anterior.

9) Represente graficamente $B + \vec{v}$, $(B + \vec{v}) + \vec{w}$, $B + (\vec{v} + \vec{w})$, $B + \vec{w}$ e $(B + \vec{w}) + \vec{v}$ num gráfico só.

10) Leia a p.23 do livro do CEDERJ.

11) Calcule $2\vec{v}$, $3\vec{v}$, $0\vec{v}$ e $(-1)\vec{v}$ usando as regras da página anterior.

12) Represente graficamente os vetores $2\vec{v}$, $3\vec{v}$, $0\vec{v}$ e $(-1)\vec{v}$ apoiando-os no ponto B .

13) Dê uma olhada nas “Propriedades da adição de vetores” e na “Definição 5” no livro do CEDERJ (páginas 23–25).

Retas (de novo)

Exercícios

1) Represente graficamente as retas abaixo.

Dica: encontre dois pontos de cada reta e marque-os no gráfico.

Dica 2: quando você tiver dificuldade substitua \mathbb{R}^2 por $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^2$.

Nas parametrizadas indique no gráfico os pontos associados a $t = 0$ e $t = 1$.

$$r_a = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \}$$

$$r_b = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 4 \}$$

$$r_c = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 2 \}$$

$$r_d = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0 \}$$

$$r_e = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 6 \}$$

$$r_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 3 \}$$

$$r_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 \}$$

$$r_m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 + x \}$$

$$r_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x \}$$

$$r_g = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(-1, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_h = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(-2, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_i = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(1, -1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_j = \{ (0, 3) + t\overrightarrow{(2, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_k = \{ (2, 0) + t\overrightarrow{(0, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$s_a = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(1, 2)} = 0 \}$$

$$s_b = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(1, 2)} = 4 \}$$

$$s_c = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(1, 2)} = 2 \}$$

$$s_d = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 0 \}$$

$$s_e = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 6 \}$$

$$s_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 3 \}$$

$$r'_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + 1y = 4 \}$$

$$r'_m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-1)x + 1y = 4 \}$$

$$r'_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 1y = 4 \}$$

$$s_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(0, 1)} = 4 \}$$

$$s_m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(-1, 1)} = 4 \}$$

$$s_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 1)} = 4 \}$$

Se você tiver dificuldade com os exercícios envolvendo o produto $\overrightarrow{(a, b)} \cdot \overrightarrow{(c, d)} = ac + bd$ faça os exercícios abaixo e depois volte pro exercício 1 acima.

2) Encontre soluções para $\overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 4$ para: a) $x = 1$, b) $x = 10$, c) $y = 5$.

3) Sejam $\vec{u}_1 = \overrightarrow{(4, 5)}$ e $\vec{u}_2 = \overrightarrow{(6, 7)}$. Calcule $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $(\vec{u}_1)_1$, $(\vec{u}_1)_2$.

4) Encontre 5 soluções diferentes para $\overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(1, 2)} = 0$. Chame-as de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , \vec{v}_3 , \vec{v}_4 , \vec{v}_5 . Desenhe no mesmo gráfico os vetores $\overrightarrow{(1, 2)}$, \vec{v}_1 , \vec{v}_2 , \vec{v}_3 , \vec{v}_4 , \vec{v}_5 apoiando todos no ponto $(0, 0)$.

Interseções de retas parametrizadas

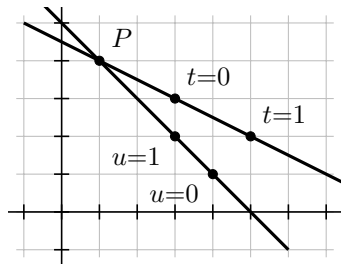
Se $r = \{ (3, 3) + t\overrightarrow{(2, -1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$

e $s = \{ (4, 1) + u\overrightarrow{(-1, 1)} \mid u \in \mathbb{R} \}$,

então r e s se intersectam no ponto $P = (1, 4)$,

que está associado a $t = -1$ (em r) e a $u = 3$ (em s).

Graficamente,



Algebricamente, podemos convencer alguém do nosso resultado assim:

$$(1, 4) = (3, 3) + (-1)\overrightarrow{(2, -1)} \in r,$$

$$(1, 4) = (4, 1) + 3\overrightarrow{(-1, 1)} \in s,$$

$$(1, 4) \in r \cap s.$$

Repare que poderíamos ter encontrado $(x, y) = P \in r \cap s$ usando um sistema:

$$(x, y) = (3 + 2t, 3 - t)$$

$$(x, y) = (4 - u, 1 + u)$$

Primeiro encontramos t e u tais que $(3 + 2t, 3 - t) = (4 - u, 1 + u)$,

depois encontramos $(x, y) = (3 + 2t, 3 - t) = (4 - u, 1 + u)$.

Exercício

1) Em cada um dos casos abaixo represente graficamente r e s , encontre $P \in r \cap s$, e verifique algebricamente que o seu P está certo.

a) $r = \{ (1, 0) + t\overrightarrow{(0, 3)} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (0, 4) + u\overrightarrow{(2, 0)} \mid u \in \mathbb{R} \}$

b) $r = \{ (1, 0) + t\overrightarrow{(3, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (0, 2) + u\overrightarrow{(2, 3)} \mid u \in \mathbb{R} \}$

c) $r = \{ (1 + 3t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (2u, 2 + 3u) \mid u \in \mathbb{R} \}$

d) $r = \{ (0, 3) + t\overrightarrow{(2, -1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (1, 0) + u\overrightarrow{(1, 3)} \mid u \in \mathbb{R} \}$

Obs: no (d) o olhômetro não basta, você vai precisar resolver um sistema.

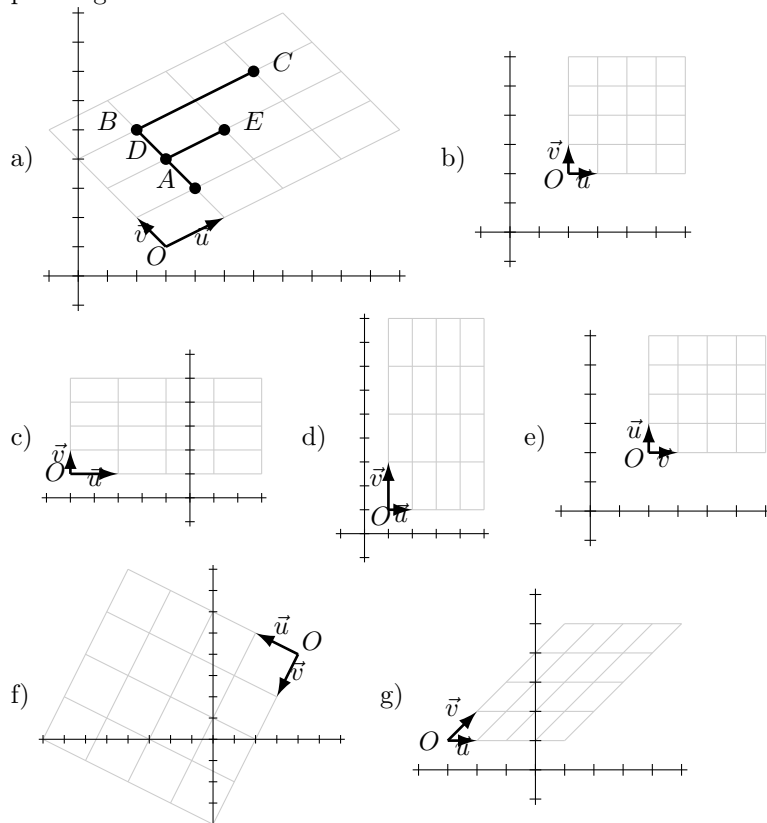
Sistemas de coordenadas

Um “sistema de coordenadas” $\Sigma = (O, \vec{u}, \vec{v})$ em \mathbb{R}^2 é uma tripla formada por um ponto e dois vetores; por exemplo, podemos ter $\Sigma = ((2, 3), \overrightarrow{(2, 1)}, \overrightarrow{(0, -1)})$ — aí $O = (2, 3)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0, -1)}$. Até agora nós só usamos pontos com coordenadas x e y , mas agora vamos começar a falar das “coordenada a e b ” de um ponto, e elas vão depender da escolha do sistema de coordenadas Σ . A definição importante (que só vale para esta página e a seguinte!) é:

$$(a, b)_{\Sigma} = O + a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Exercícios

- 1) $((a, b)_{\Sigma} = O + a\vec{u} + b\vec{v}) \left[\begin{smallmatrix} a:=3 \\ b:=4 \end{smallmatrix} \right] = ?$
- 2) $((a, b)_{\Sigma} = O + a\vec{u} + b\vec{v}) \left[\begin{smallmatrix} O:=(3,1) \\ \vec{u}:=(2,1) \\ \vec{v}:=(-1,1) \end{smallmatrix} \right] = ?$
- 3) Em cada um dos casos a até f abaixo descubra quem são O , \vec{u} e \vec{v} olhando para o gráfico.



4a) Represente graficamente os pontos $(0,0)_{\Sigma}$, $(1,0)_{\Sigma}$, $(2,0)_{\Sigma}$, $(0,1)_{\Sigma}$, $(1,1)_{\Sigma}$, $(2,1)_{\Sigma}$, $(0,2)_{\Sigma}$, $(1,2)_{\Sigma}$, $(2,2)_{\Sigma}$ num gráfico só para o Σ do item (a) acima, e escreva perto de cada ponto o nome dele — por exemplo, “ $(1,2)_{\Sigma}$ ”.

4b, 4c, 4d, 4e, 4f, 4g) Faça o mesmo para o Σ do item (b), do item (c), etc.

Sistemas de coordenadas (2)

Cada uma das figuras abaixo usa um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \vec{u}, \vec{v})$ diferente; lembre que $(a, b)_{\Sigma} = O + a\vec{u} + b\vec{v}$. Sejam:

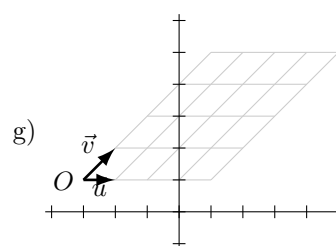
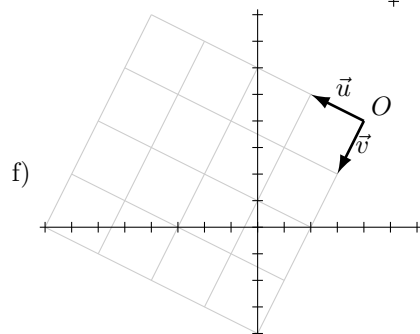
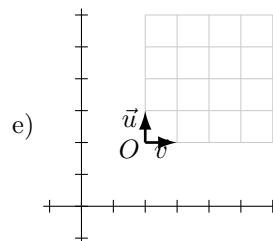
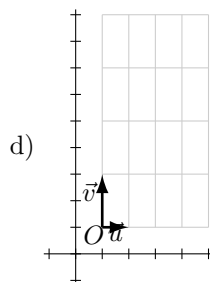
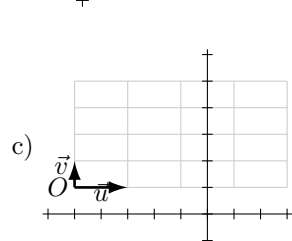
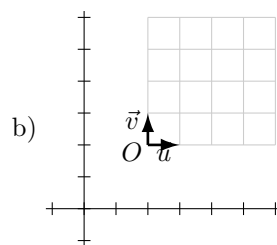
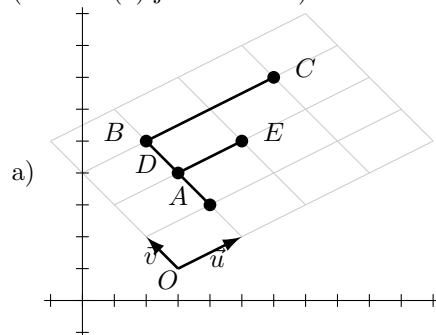
$$B = (1, 3)_{\Sigma}, \quad C = (3, 3)_{\Sigma},$$

$$D = (1, 2)_{\Sigma}, \quad E = (2, 2)_{\Sigma},$$

$$A = (1, 1)_{\Sigma}.$$

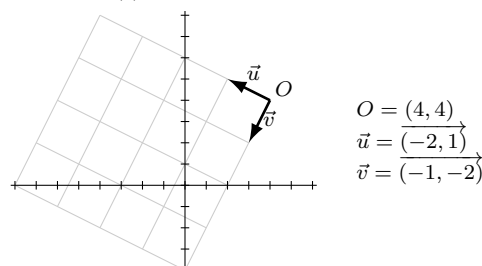
Exercício. Em cada um dos casos abaixo desenhe a figura formada pelos pontos A, B, C, D e E e pelos segmentos de reta \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{DE} .

(O item (a) já está feito.)



Sistemas de equações e sistemas de coordenadas

No item (f) da página anterior temos:



$$(a, b)_\Sigma = (4, 4) + a\overrightarrow{(-2, 1)} + b\overrightarrow{(-1, -2)}$$

$$(a, b)_\Sigma = (4 - 2a - b, 4 + a - 2b) \quad (*)$$

$(a, b)_\Sigma$	$=$	(x, y)
$(0, 0)_\Sigma$	$=$	$(4, 4)$
$(1, 0)_\Sigma$	$=$	$(2, 5)$
$(0, 1)_\Sigma$	$=$	$(3, 2)$
$A = (1, 1)_\Sigma$	$=$	$?_a$
$B = (1, 3)_\Sigma$	$=$	$?_b$
$C = (3, 3)_\Sigma$	$=$	$?_c$
$D = (1, 2)_\Sigma$	$=$	$?_d$
$E = (2, 2)_\Sigma$	$=$	$?_e$
$?_f$	$=$	$(0, 6)$
$?_g$	$=$	$(-1, 4)$
$?_h$	$=$	$(5, 1)$
$?_i$	$=$	$(1, 2)$
$?_j$	$=$	$(1, 1)$
$?_k$	$=$	$(2, 1)$

Os itens (a) até (h) acima (“ $?_a$ ” a “ $?_h$ ”) são fáceis de resolver “no olhometro” usando o gráfico, e é fácil conferir os resultados algebricamente usando a fórmula (*).

No item (i) dá pra ver pelo gráfico que os valores de a e b em $(a, b)_\Sigma = (1, 2)$ vão ser fracionários e difíceis de chutar – mas podemos obtê-los *algebricamente*, resolvendo um *sistema de equações*.

Exercícios

- 1) Resolva “ $?_j$ ” pelo sistema.
- 2) Resolva “ $?_k$ ” pelo sistema.
- 3) Verifique que as suas soluções de “ $?_a$ ” até “ $?_k$ ” obedecem (*) e (**).
- 4) Resolva “ $?_j$ ” e “ $?_k$ ” por (**).

Solução do “ $?_i$ ”:

$$\begin{aligned}
 (a, b)_\Sigma &= (1, 2) \\
 (4 - 2a - b, 4 + a - 2b) &= (1, 2) \\
 4 - 2a - b &= 1 \\
 4 + a - 2b &= 2 \\
 -2a - b &= -3 \\
 a - 2b &= -2 \\
 -2a + 3 &= b \\
 a &= -2 + 2b \\
 -2(-2 + 2b) + 3 &= b \\
 4 - 4b + 3 &= b \\
 7 &= 5b \\
 b &= \frac{7}{5} \\
 a &= -2 + 2\frac{7}{5} \\
 &= \frac{-10}{5} + \frac{14}{5} \\
 &= \frac{4}{5} \\
 (\frac{4}{5}, \frac{7}{5})_\Sigma &= (1, 2)
 \end{aligned}$$

Uma generalização:

$$\begin{aligned}
 (a, b)_\Sigma &= (x, y) \\
 (4 - 2a - b, 4 + a - 2b) &= (x, y) \\
 4 - 2a - b &= x \\
 4 + a - 2b &= y \\
 4 - 2a - x &= b \\
 a &= y + 2b - 4 \\
 &= y + 2(4 - 2a - x) - 4 \\
 &= y + 8 - 4a - 2x - 4 \\
 &= y - 2x + 4 - 4a \\
 5a &= y - 2x + 4 \\
 a &= (y - 2x + 4)/5 \\
 &= \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}x + \frac{4}{5} \\
 &= \frac{4}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \\
 b &= 4 - 2(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y) - x \\
 &= \frac{20}{5} - \frac{8}{5} + \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{5}{5}x \\
 &= \frac{12}{5} - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y \\
 (\frac{4}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y, \frac{12}{5} - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y)_\Sigma &= (x, y) \\
 \text{Vamos chamar a fórmula acima de (**).}
 \end{aligned}$$

Sistemas de equações e sistemas de coordenadas (2)

Um outro modo de organizar os problemas da página anterior é o seguinte.

Temos as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ abaixo,

$$\begin{array}{lcl} [x] & x & = 4 - 2a - b \\ [y] & y & = 4 + a - 2b \\ [a] & a & = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \\ [b] & b & = \frac{12}{5} - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y \end{array}$$

e queremos preencher a tabela abaixo de tal forma que em cada linha as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ sejam obedecidas:

a	b	x	y
0	0	4	4
1	0	2	5
0	1	3	2
1	1	.	.
1	3	.	.
3	3	.	.
1	2	.	.
2	2	.	.
.	.	0	6
.	.	-1	4
.	.	5	1
.	.	1	2
.	.	1	1
.	.	2	1

Note que:

- 1) quando as lacunas são em x e y é mais rápido usar as equações $[x]$ e $[y]$,
- 2) quando as lacunas são em a e b é mais rápido usar as equações $[a]$ e $[b]$,
- 3) as equações $[a]$ e $[b]$ são *consequências* das $[x]$ e $[y]$,
- 4) $[x]$ e $[y]$ são consequências de $(a, b)_\Sigma = (4 - 2a - b, 4 + a - 2b) = (x, y)$,
- 5) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2a - b \\ 4 + a - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2a - b \\ a - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
- 6) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_1 + au_1 + bv_1 \\ O_2 + au_2 + bv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_1 \\ O_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Exercícios

- 1) No item (g) duas páginas atrás temos $O = (-3, 1)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 1)}$, $(a, b)_\Sigma = (-3 + a + b, 1 + b)$. Obtenha as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ para este caso.
- 2) Faça o mesmo para o item (a), onde $O = (3, 1)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-1, 1)}$.

Vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo

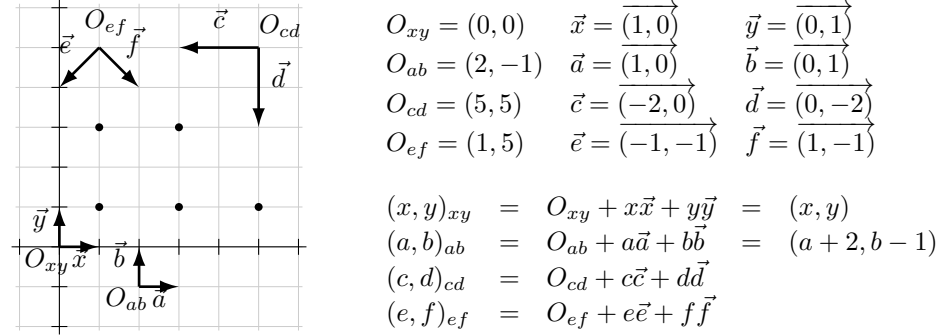
Há muitas notações possíveis para lidar com situações em que temos vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo – vamos ver *uma* delas.

Vamos ter:

- as coordenadas x, y e os eixos x e y ,
- as coordenadas a, b e os eixos a e b ,
- as coordenadas c, d e os eixos d e d ,
- as coordenadas e, f e os eixos e e f ,

e além disso vamos ter as origens O_{xy} , O_{ab} , O_{cd} , O_{ef} de cada um dos sistemas de coordenadas e os vetores \vec{x} , \vec{y} , \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} , \vec{e} , \vec{f} .

Um exemplo concreto:



Um modo de entender esta notação é:

$$\begin{aligned}
 ((c, d)_{cd} &= O_{cd} + c\vec{c} + d\vec{d}) \left[\begin{array}{l} O_{cd} := (5, 5) \\ \vec{c} := \overrightarrow{(-2, 0)} \\ \vec{d} := \overrightarrow{(0, -2)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} c := 3 \\ d := 4 \end{array} \right] \\
 &= ((c, d)_{cd} = (5, 5) + c\overrightarrow{(-2, 0)} + d\overrightarrow{(0, -2)}) \left[\begin{array}{l} c := 3 \\ d := 4 \end{array} \right] \\
 &= ((3, 4)_{cd} = (5, 5) + 3\overrightarrow{(-2, 0)} + 4\overrightarrow{(0, -2)})
 \end{aligned}$$

Nós vimos (na p.14) que as notações “ P_1 ” e “ P_2 ” dão a “primeira componente” e a “segunda componente” de um ponto P . Se usarmos as notações P_x , P_y , P_a , P_b , P_c , P_d , P_e , P_f para as “coordenadas” x , y , a , b , c , d , e , f de um ponto P temos:

$$P = (P_x, P_y)_{xy} = (P_a, P_b)_{ab} = (P_c, P_d)_{cd} = (P_e, P_f)_{ef}$$

e se considerarmos que x , y , a , b , c , d , e , f são variáveis que “variam juntas” (como nas págs 20 e 21), a condição que elas obedecem é:

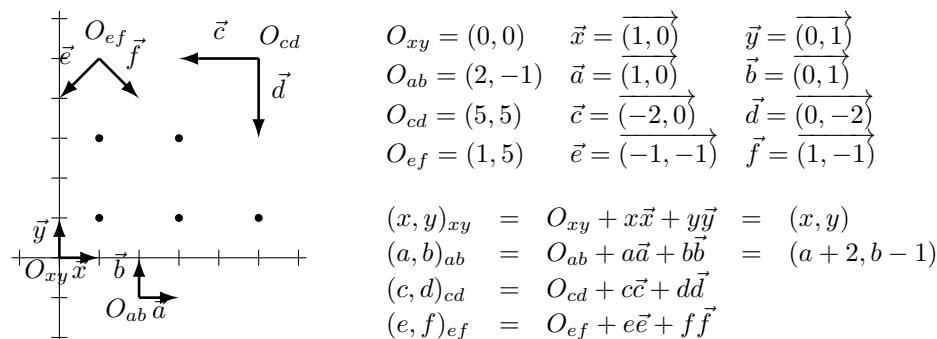
$$(x, y) = (x, y)_{xy} = (a, b)_{ab} = (c, d)_{cd} = (e, f)_{ef}$$

Exercícios

- 1) Digamos que $P = (3, 1)$. Descubra P_x , P_y , P_a , P_b , P_c , P_d , P_e , P_f .
- 2) Digamos que $(x, y) = (5, 1)$. Descubra a , b , c , d , e , f .

Vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo (2)

Podemos usar o diagrama da página anterior — reproduzido abaixo — para desenhar “grids” como os das páginas 18 e 19. Esse diagrama define sistemas de coordenadas $(O_{xy}, \vec{x}, \vec{y})$, $(O_{ab}, \vec{a}, \vec{b})$, $(O_{cd}, \vec{c}, \vec{d})$, $(O_{ef}, \vec{e}, \vec{f})$,



Exercícios

1) Trace:

uma reta contendo os pontos $(0, 0)_{ef}$, $(1, 0)_{ef}$, $(2, 0)_{ef}$ e chame-a de “ $f = 0$ ”,
 uma reta contendo os pontos $(0, 1)_{ef}$, $(1, 1)_{ef}$, $(2, 1)_{ef}$ e chame-a de “ $f = 1$ ”,
 uma reta contendo os pontos $(0, 2)_{ef}$, $(1, 2)_{ef}$, $(2, 2)_{ef}$ e chame-a de “ $f = 2$ ”,
 uma reta contendo os pontos $(0, 0)_{ef}$, $(0, 1)_{ef}$, $(0, 2)_{ef}$ e chame-a de “ $e = 0$ ”,
 uma reta contendo os pontos $(1, 0)_{ef}$, $(1, 1)_{ef}$, $(1, 2)_{ef}$ e chame-a de “ $e = 1$ ”,
 uma reta contendo os pontos $(2, 0)_{ef}$, $(2, 1)_{ef}$, $(2, 2)_{ef}$ e chame-a de “ $e = 2$ ”.

2) Faça a mesma coisa para as retas “ $c = 0$ ”, “ $c = 1$ ”, “ $c = 2$ ”, “ $d = 0$ ”, “ $d = 1$ ” e “ $d = 2$ ”, mas agora só visualizando essas retas mentalmente, sem desenhá-las.

3) Idem para “ $a = 0$ ”, “ $a = 1$ ”, “ $a = 2$ ”, “ $b = 0$ ”, “ $b = 1$ ” e “ $b = 2$ ”.

4) Verifique que o ponto $(1, 2)_{ef}$ está na interseção das retas $e = 1$ e $f = 2$.

5) Verifique que o ponto $(2, 3)_{cd}$ está na interseção das retas $c = 2$ e $d = 3$.

Obs: os exercícios acima vão ser bem importantes para a parte 2 do curso, que é sobre cônicas em \mathbb{R}^2 ... por exemplo, pra desenhar uma “hipérbole torta” em \mathbb{R}^2 a gente vai desenhar O_{uv} , \vec{u} e \vec{v} , depois as retas $u = 0$ e $v = 0$ e depois os pontos $(1/2, 2)_{uv}$, $(1, 1)_{uv}$, $(2, 1/2)_{uv}$, $(-1/2, -2)_{uv}$, $(-1, -1)_{uv}$, $(-2, -1/2)_{uv}$.

6) Complete, usando o diagrama acima e olhômetro:

ponto	$(_, _)_{xy}$	$(_, _)_{ab}$	$(_, _)_{cd}$	$(_, _)_{ef}$
P	$(1, 1)_{xy}$	$(-1, 2)_{ab}$	$(2, 2)_{cd}$	
Q	$(3, 1)_{xy}$	$(1, 2)_{ab}$	$(1, 2)_{cd}$	$(1, 3)_{ef}$
R	$(5, 1)_{xy}$			
S	$(1, 3)_{xy}$			
T	$(3, 3)_{xy}$			

Visualizando $F(x, y)$

Um bom modo de começar a entender visualmente o comportamento de uma função $F(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é fazendo diagramas como os abaixo, em que a gente escreve sobre cada ponto (x, y) o valor de $F(x, y)$ naquele ponto... por exemplo, se $F(x, y) = x^2 + y^2$ então $F(3, 2) = 9 + 4 = 13$, e a gente escreve “13” no ponto $(3, 2)$. Exemplos:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} F(x, y) \\ = x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \end{array} &
 \begin{array}{c} F(x, y) \\ = 2y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4 \\ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ -2 \ -2 \ -2 \ -2 \ -2 \ -2 \ -2 \\ -4 \ -4 \ -4 \ -4 \ -4 \ -4 \ -4 \end{array} &
 \begin{array}{c} F(x, y) \\ = x+y \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ -2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \\ -3 \ -2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c} F(x, y) \\ = x^2+y^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} -9 \ -6 \ -3 \ 0 \ 3 \ 6 \ 9 \\ -6 \ -4 \ -2 \ 0 \ 2 \ 4 \ 6 \\ -3 \ -2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ -1 \ -2 \ -3 \\ 6 \ 4 \ 2 \ 0 \ -2 \ -4 \ -6 \\ 9 \ 6 \ 3 \ 0 \ -3 \ -6 \ -9 \end{array} &
 \begin{array}{c} F(x, y) \\ = x^2+y^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 13 \ 8 \ 5 \ 4 \ 5 \ 8 \ 13 \\ 10 \ 5 \ 2 \ 1 \ 2 \ 5 \ 10 \\ 9 \ 4 \ 1 \ 0 \ 1 \ 4 \ 9 \\ 10 \ 5 \ 2 \ 1 \ 2 \ 5 \ 10 \\ 13 \ 8 \ 5 \ 4 \ 5 \ 8 \ 13 \end{array}
 \end{array}$$

Repare que dá pra usar o diagrama de $F(x, y) = x + y$ pra ver onde $x + y = 0$, onde $x + y = 3$, etc.

Exercícios

1) Faça diagramas como os acima para as funções:

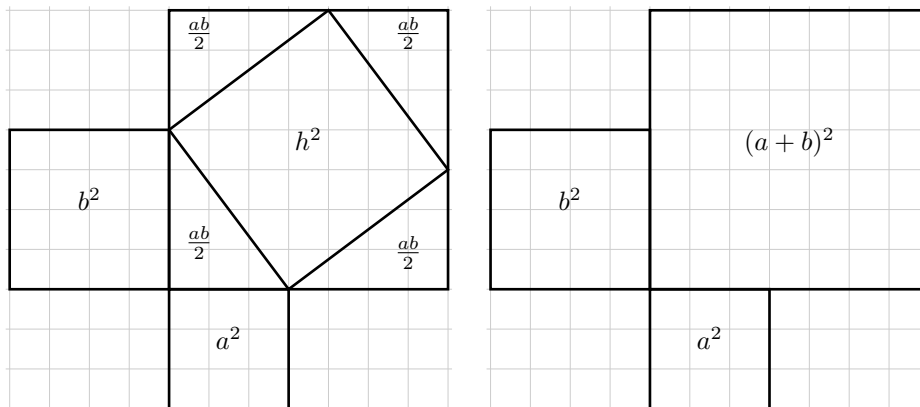
- $F(x, y) = \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)}$
- $F(x, y) = \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(3, 1)}$
- $F(x, y) = \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, -1)}$
- $F(x, y) = x^2 + y^2 \quad (x, y \in \{-5, -4, \dots, 5\}^2)$
- $F(x, y) = x^2 - y$
- $F(x, y) = y^2 - x$
- $F(x, y) = xy$

2) Use os diagramas do exercício anterior para esboçar os conjuntos abaixo (que vão ser retas ou curvas):

- | | |
|---|--|
| a0) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 0\}$ | d25) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\}$ |
| a2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 2\}$ | d4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ |
| a4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 4\}$ | d1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ |
| a-2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = -2\}$ | d0) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ |
| b0) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(3, 1)} = 0\}$ | d-1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = -1\}$ |
| b3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(3, 1)} = 3\}$ | e0) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0\}$ |
| b6) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(3, 1)} = 6\}$ | e1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 1\}$ |
| b-3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(3, 1)} = -3\}$ | f0) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x = 0\}$ |
| c0) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, -1)} = 0\}$ | f1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x = 1\}$ |
| c2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, -1)} = 2\}$ | g0) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ |
| c4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, -1)} = 4\}$ | g1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ |
| c-2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, -1)} = -2\}$ | g4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 4\}$ |

O teorema de Pitágoras

Para calcular a hipotenusa h de um triângulo retângulo com catetos a e b podemos fazer estas figuras:



Temos:

$$h^2 + 4 \frac{ab}{2} = (a+b)^2$$

$$h^2 + 4 \frac{ab}{2} = h^2 + 2ab = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$h^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$$

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A figura acima tem $a = 3$ e $b = 4$ e portanto (ééé!!!) tem $h = 5$.

Exercícios

1) Faça uma figura parecida com a acima mas com $a = 1$ e $b = 2$, e use-a pra se convencer de que num triângulo retângulo com catetos de comprimentos 1 e 2 a hipotenusa tem comprimento $\sqrt{5}$.

Repare que o teorema de Pitágoras nos dá um modo de calcular *distâncias* em \mathbb{R}^2 . Por exemplo, digamos que $A = (2, 1)$ e $B = (4, 5)$ e que queremos calcular $d(A, B)$; basta definir $C = (4, 1)$ e calcular a hipotenusa do triângulo $\triangle ABC$... seus catetos têm comprimentos $d(A, C) = d((2, 1), (4, 1)) = 2$ e $d(B, C) = d((4, 5), (4, 1)) = 4$ — distâncias entre pontos na mesma horizontal ou na mesma vertical são muito fáceis de calcular! — e $d(A, C) = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$.

Nos próximos exercícios suponha que $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$.

2) Verifique que $d(P, Q) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$.

3) Verifique que $d(P, Q) = \sqrt{(Q-P) \cdot (Q-P)}$.

4) Verifique que se $P = (0, 0)$ então $d(P, Q) = \sqrt{c^2 + d^2}$.

5) Verifique que se $Q = (0, 0)$ então $d(P, Q) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

6) Verifique que se $b = d$ então $d(P, Q) = \sqrt{(c-a)^2} = |c-a|$.

7) Mostre que nem sempre $\sqrt{(c-a)^2} = c-a$.

Comprimentos (“normas”) de vetores e ortogonalidade

Vamos definir quatro operações novas:

$\|\vec{v}\|$ é a *norma* (ou o *comprimento*) do vetor \vec{v} .

\overrightarrow{PQ} é o vetor que vai do ponto P para o ponto Q .

$d(P, Q)$ é a distância do ponto P ao ponto Q .

$\vec{v} \perp \vec{w}$ é “o vetor \vec{v} é ortogonal ao vetor \vec{w} ”.

Formalmente:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}},$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P,$$

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|,$$

$$\vec{v} \perp \vec{w} = (\vec{v} \cdot \vec{w} = 0).$$

Note que $\vec{v} \perp \vec{w}$ responde **V** ou **F**. Por exemplo,

$$\overrightarrow{(1, 2)} \perp \overrightarrow{(3, 4)} = ((1, 2) \cdot (3, 4) = 0) = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 0) = \mathbf{F}, \text{ e}$$

$$\overrightarrow{(1, 2)} \perp \overrightarrow{(20, -10)} = (20 - 20 = 0) = \mathbf{V}.$$

Exercícios

Calcule:

1) $\|\overrightarrow{(1, 2)}\|$

2) $\|\overrightarrow{(3, 4)}\|$

3) $\|\overrightarrow{(4, -3)}\|$

4) $\|\overrightarrow{10 \cdot (3, 4)}\|$

5) $\|\overrightarrow{-10 \cdot (3, 4)}\|$

6) $\|\overrightarrow{-10 \cdot (3, 4)}\|$

7) $\overrightarrow{(2, 0)(3, 4)}$

8) $\overrightarrow{(2, 0)((3, 4) + (1, 1))}$

9) $d((3, 4), (2, 0))$

10) $d((2, 0), (3, 4))$

11) $d((2, 0), (3, 4) + \overrightarrow{(1, 1)})$

12) $d(\overrightarrow{(a, b)}, \overrightarrow{(a, b) + (c, d)})$

13) $\overrightarrow{(a, b)} \cdot \overrightarrow{(b, -a)}$

14) $\overrightarrow{(a, b)} \cdot \overrightarrow{(k \cdot (b, -a))}$

15) $\overrightarrow{(a, b)} \perp \overrightarrow{(b, -a)}$

16) $\overrightarrow{(a, b)} \perp \overrightarrow{(k \cdot (b, -a))}$

17) $\overrightarrow{(1, 2)} \perp \overrightarrow{(3, 4)}$

Uma demonstração errada

Sejam:

$$(PE) = (||k\vec{v}|| = k||\vec{v}||) ,$$

$$(DE) = \left(\begin{array}{l} ||\overrightarrow{k(a,b)}|| = ||\overrightarrow{(ka,kb)}|| \\ = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} \\ = \sqrt{k^2a^2 + k^2b^2} \\ = \sqrt{k^2(a^2 + b^2)} \\ = k\sqrt{a^2 + b^2} \\ = k||\overrightarrow{(a,b)}|| \end{array} \right) .$$

Exercícios

1) Verifique se (PE) é verdade nos seguintes casos:

- a) $(PE) \left[\begin{array}{l} k:=2 \\ \vec{v}=(3,0) \end{array} \right]$
- b) $(PE) \left[\begin{array}{l} k:=2 \\ \vec{v}=(3,4) \end{array} \right]$
- c) $(PE) \left[\begin{array}{l} k:=0 \\ \vec{v}=(3,4) \end{array} \right]$
- d) $(PE) \left[\begin{array}{l} k:=-10 \\ \vec{v}=(3,4) \end{array} \right]$

Uma demonstração está correta quando todos os seus passos estão corretos e quando além disso é fácil entender porque cada passo dela é verdade. A demonstração (DE) é *aparentemente* uma demonstração correta, mas o exercício abaixo mostra um modo de encontrar o passo errado dela.

2) Calcule o valor de cada expressão entre ‘=’s em $(DE) \left[\begin{array}{l} k:=-10 \\ a:=3 \\ b:=4 \end{array} \right]$ e descubra qual é o passo errado.

O melhor modo de *aprender* a fazer demonstrações é *começar* com demonstrações que são só séries de igualdades, e nas quais cada igualdade é consequência de *alguma* regra que o leitor já conhece... isso depende do seu leitor! Se você estiver escrevendo para um “leitor burro” cada passo seu tem que ser uma aplicação de uma regra só, e onde você usar uma regra mais complicada você tem que deixar claro que regra é essa.

O melhor modo de *começar* a aprender a fazer demonstrações é escrevendo *para um leitor burro* demonstrações que são só séries de igualdades — as dos exercícios da próxima página.

Propriedades das operações básicas com pontos e vetores

Algumas propriedades de operações básicas como ‘+’, ‘−’ e ‘·’ têm nomes famosos: comutatividade, associatividade e distributividade. Sejam:

$$\begin{aligned}
 (CA) &= (A + B = B + A) \\
 (CM) &= (A \cdot B = B \cdot A) \\
 (CS) &= (A - B = B - A) \\
 (AA) &= ((A + B) + C = A + (B + C)) \\
 (AM) &= ((A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)) \\
 (AS) &= ((A - B) - C = A - (B - C)) \\
 (DMA) &= (A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C) \\
 (DMS) &= (A \cdot (B - C) = A \cdot B - A \cdot C) \\
 (DAM) &= ((A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C) \\
 (DSM) &= ((A - B) \cdot C = A \cdot C - B \cdot C) \\
 (AM') &= ((A \cdot B) \cdot C = (A \cdot C) \cdot B)
 \end{aligned}$$

Nem todas elas são verdadeiras para números — por exemplo, $(CS) \left[\begin{smallmatrix} A:=2 \\ B:=3 \end{smallmatrix} \right]$ é falsa — e algumas delas são verdadeiras para números mas não para matrizes — a p.7 tem dois exemplos de que (CM) é falsa para matrizes. Nossos primeiros exercícios de demonstrações vão ser exercícios de “V/F/Justifique” adaptando as “propriedades” acima para as operações com pontos e vetores.

Exemplos

$(DMA) \left[\begin{smallmatrix} A:=k \\ B:=(a,b) \\ C:=(c,d) \end{smallmatrix} \right]$ é verdadeira porque:

$$\begin{aligned}
 k \cdot ((a,b) + (c,d)) &= k \cdot (a+c, b+d) && \text{(pela regra 2 da p.14)} \\
 &= (k(a+c), k(b+d)) && \text{(pela regra 6 da p.14)} \\
 &= (ka+kc, kb+kd) \\
 &= (ka, kb) + (kc, kd) && \text{(pela regra 2 da p.14)} \\
 &= k(a,b) + k(c,d) && \text{(pela regra 6 da p.14)}
 \end{aligned}$$

$(CS) \left[\begin{smallmatrix} A:=(a,b) \\ B:=(c,d) \end{smallmatrix} \right]$ é falsa porque $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ mas $(c,d) + (a,b) = \text{erro}$.

Exercícios

(V/F/justifique; use as dicas da próxima página)

$$\begin{array}{lll}
 1) (CA) \left[\begin{smallmatrix} A:=(a,b) \\ B:=(c,d) \end{smallmatrix} \right] & 4) (AM) \left[\begin{smallmatrix} A:=(a,b) \\ B:=(c,d) \\ C:=(e,f) \end{smallmatrix} \right] & 7) (DMA) \left[\begin{smallmatrix} A:=k \\ B:=(a,b) \\ C:=(c,d) \end{smallmatrix} \right] \\
 2) (AA) \left[\begin{smallmatrix} A:=(a,b) \\ B:=(c,d) \\ C:=(e,f) \end{smallmatrix} \right] & 5) (AM') \left[\begin{smallmatrix} A:=(a,b) \\ B:=(c,d) \\ C:=(e,f) \end{smallmatrix} \right] & 8) (DMA) \left[\begin{smallmatrix} A:=(a,b) \\ B:=(c,d) \\ C:=(e,f) \end{smallmatrix} \right] \\
 3) (AA) \left[\begin{smallmatrix} A:=(a,b) \\ B:=(c,d) \\ C:=(e,f) \end{smallmatrix} \right] & 6) (AM) \left[\begin{smallmatrix} A:=k \\ B:=(a,b) \\ C:=(c,d) \end{smallmatrix} \right] & 9) (DAM) \left[\begin{smallmatrix} A:=a \\ B:=b \\ C:=(c,d) \end{smallmatrix} \right]
 \end{array}$$

Dicas para problemas de “V/F/Justifique”

1) Releia o item 7 da p.5. Você vai ter que aprender a reler as suas próprias demonstrações fazendo o papel de “leitor burro”.

2) O modo mais fácil de demonstrar que uma proposição é *falsa* é dando um contra-exemplo pra ela — pra mostrar que uma proposição não é verdadeira *sempre* basta mostrar *um caso* em que ela é falsa! Por exemplo:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}\right) \left[\begin{smallmatrix} a:=9 \\ b:=16 \end{smallmatrix} \right]$$

3) Em problemas que dão uma proposição e dizem “V/F/Justifique” você vai ter que primeiro decidir se a proposição é verdadeira ou falsa e depois demonstrar se ela é verdadeira (por uma série de igualdades) ou se ela é falsa (por contra-exemplo). *Note que a técnica pra demonstrar que uma proposição é verdadeira é totalmente diferente da técnica pra mostrar que ela é falsa!*

4) Releia cada demonstração de que uma proposição é verdadeira e faça anotações nela — por exemplo, escreva um ‘?’ em cada ‘=’ que não é *muito* claro para um leitor burro (‘=’ \rightarrow ‘?’) e escreva um ‘NÃO!’ em cada ‘=’ que parece estar usando uma regra errada. Por exemplo:

$$\|\vec{v}\|(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \stackrel{\text{NÃO!}}{=} \|\vec{v}\|\sqrt{a+b}$$

5) Algumas pessoas tentam “demonstrar” proposições só “traduzindo-as pro português” e aí acreditando que a versão em português da proposição é “óbvia”. *Não seja como estas pessoas!* Neste ponto do curso “demonstrações” feitas em português estão ERRADAS!

6) Aprenda a fazer demonstrações “em matematiquês” usando a notação adequada e fazendo com que cada passo da sua demonstração seja uma aplicação de alguma regra conhecida e se possível de alguma regra com nome, *ou senão eu vou reprovar você com o maior sorriso de orelha a orelha que você já viu*. DEPOIS nós vamos ver como reescrever em português algumas partes das demonstrações desta parte do curso — mas repare: “*algumas partes*” e “*depois*”!

7) O “matematiquês” permite algumas palavras em português, como “seja”, “se”, “então” e “supondo”.

8) A notação de substituição simultânea da p.6 não é usada em nenhum livro básico que eu conheça... se você for comparar a notação daqui com a dos livros de GA recomendados pro curso você vai ver que eles usam expressões em português pra indicar substituição — por exemplo, “substituindo k por -10 , a por 3 e b por 4 na demonstração (DE) temos ...”.

Propriedades das operações básicas com pontos e vetores (2)

As propriedades da p.28 podem ser postas numa forma mais curta.

Por exemplo:

$k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ é sempre verdade para $k \in \mathbb{R}$ e \vec{u}, \vec{v} vetores em \mathbb{R}^2 .

Demonstração. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{(a, b)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(c, d)}$. Então:

$$\begin{aligned}
 k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= k \cdot (\overrightarrow{(a, b)} + \overrightarrow{(c, d)}) \\
 &= k \cdot \overrightarrow{(a + c, b + d)} && \text{(pela regra 2 da p.14)} \\
 &= \overrightarrow{(k(a + c), k(b + d))} && \text{(pela regra 6 da p.14)} \\
 &= \overrightarrow{(ka + kc, kb + kd)} \\
 &= \overrightarrow{(ka, kb)} + \overrightarrow{(kc, kd)} && \text{(pela regra 2 da p.14)} \\
 &= k\overrightarrow{(a, b)} + k\overrightarrow{(c, d)} && \text{(pela regra 6 da p.14)} \\
 &= k\vec{u} + k\vec{v}
 \end{aligned}$$

Normalmente a gente usa uma convenção que diz que as letras a, b, c, k, x, y representam números reais, P, Q, R representam pontos em \mathbb{R}^2 e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ representam vetores em \mathbb{R}^2 , mas essa convenção muda de acordo com o contexto — daqui a pouco quando introduzirmos círculos o R vai passar a denotar o raio de um determinado círculo e vai passar a ser um número, e quando passarmos para \mathbb{R}^3 as letras P, Q, R vão passar a denotar pontos de \mathbb{R}^3 e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vão passar a ser vetores em \mathbb{R}^3 .

Exercícios

V/F/Justifique:

- 1) $P + \vec{v} = \vec{v} + P$
- 2) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- 3) $P + (\vec{v} + \vec{w}) = (P + \vec{v}) + \vec{w}$
- 4) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$
- 5) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v}$
- 6) $(a + b) \cdot \vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- 7) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

Observação MUITO importante: se você estiver escrevendo para um leitor que tem acesso às demonstrações que você fez na p.28 você vai poder encurtar as suas demonstrações desta página bastante — você pode usar como justificativa de um passo algo como “pela demonstração do exercício 9 da p.28, com [...e aí aqui você indica a substituição necessária]”. Ah, e quando você estiver escrevendo pra leitores menos burros você às vezes vai poder omitir qual é a substituição — mas só com bastante treino a gente aprende o que a gente pode omitir sem perder a clareza.

Propriedades de normas e distâncias

Exercícios

1) V/F/justifique. Cada um dos itens abaixo pode ser feito “abrindo os vetores”, isto é, começando com algo como “digamos que $\vec{u} = \overrightarrow{(a, b)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(c, d)}$ ”, mas também pode ser feito usando propriedades “em forma mais curta” como as da p.30. Dica: o (1e) tem uma solução *bem* curta se você souber invocar a propriedade certa.

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$
- b) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- c) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$.
- c') $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$.
- d) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- d') $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- e) $\|\|\vec{u}\| \vec{v}\| = \|\|\vec{v}\| \vec{u}\|$

2) V/F/justifique. Aprenda a lidar com proposição com hipóteses (os “se”s) e use um pouco de criatividade.

- a) Se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ então $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.
- b) Se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ então $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0$.
- c) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$.
- d) Existe uma reta que contém os pontos $A = (1, 3)$, $B = (-1, 2)$ e $C = (5, 4)$.
- d') Existe uma reta que contém os pontos $A = (1, 3)$, $B = (-1, 2)$ e $C = (5, 5)$.
- e) O triângulo com vértices $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$ e $C = (-2, 1)$ é retângulo.
- e') O triângulo com vértices $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$ e $C = (-4, 0)$ é retângulo.
- f) Todo vetor em \mathbb{R}^2 é combinação linear de $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 1)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(4, 2)}$.

Obs: quase todos os exercícios desta página faziam parte da primeira lista de exercícios de GA de um curso daqui do PURO de alguns anos atrás.

Uma demonstração (comentada)

Em 18/abril eu mostrei no quadro como eu faria a demonstração do exercício 4 da p.28... a minha demonstração seria assim:

Queremos ver se esta proposição é sempre verdadeira:

$$(AM) \left[\begin{array}{l} A := \overrightarrow{(a,b)} \\ B := \overrightarrow{(c,d)} \\ C := \overrightarrow{(e,f)} \end{array} \right]$$

Repare que esta proposição é:

$$((A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)) \left[\begin{array}{l} A := \overrightarrow{(a,b)} \\ B := \overrightarrow{(c,d)} \\ C := \overrightarrow{(e,f)} \end{array} \right]$$

que é:

$$(\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)}) \cdot \overrightarrow{(e,f)} = \overrightarrow{(a,b)} \cdot (\overrightarrow{(c,d)} \cdot \overrightarrow{(e,f)}) \quad (\star)$$

Calculando o lado esquerdo de (\star) , temos:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)}) \cdot \overrightarrow{(e,f)} &= \overrightarrow{(ac + bd) \cdot (e,f)} \\ &= \overrightarrow{((ac + bd)e, (ac + bd)f)}, \end{aligned}$$

que dá um vetor, e o lado direito de (\star) dá:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(a,b)} \cdot (\overrightarrow{(c,d)} \cdot \overrightarrow{(e,f)}) &= \overrightarrow{(a,b)} \cdot \underbrace{(ce + df)}_{\text{número!}} \\ &= \text{erro,} \end{aligned}$$

portanto a igualdade (\star) é falsa — o lado esquerdo dela dá um vetor, e o lado direito dá erro.

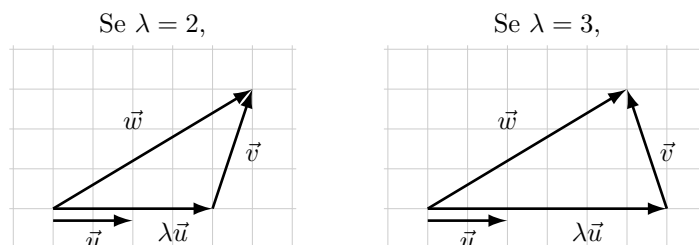
Esse exercício é um “V/F/Justifique” sobre algo que num primeiro momento nem parece uma proposição. Eu começo a demonstração dando a entender, com o “Queremos ver se esta proposição...” que a expressão $(AM)[\dots]$ é uma proposição “disfarçada”. Os passos “Repare que esta proposição é” e “que é:” reescrevem a expressão $(AM)[\dots]$ até ela virar algo que é claramente uma proposição sobre vetores, e que eu nomeio como “ (\star) ”. Até esse momento eu não dei nenhum indício pro leitor se a $(AM)[\dots]$, que é equivalente a (\star) , é verdadeira ou falsa; aí eu mostro como calcular o lado esquerda da (\star) , depois como calcular o lado direito dela, e mostro que o resultado do lado esquerdo é *sempre* diferente do do lado direito — o que neste caso é mais fácil do que encontrar um contra-exemplo.

Repare que a demonstração fica bem mais curta e clara com o truque de dar um nome para a proposição (\star) — eu avisei lá na dica 3 da p.5 que era útil aprender a nomear objetos. =)

Projeção ortogonal

Digamos que $\lambda \vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$. Então $\vec{v} = \vec{w} - \lambda \vec{u}$.

Vamos fazer duas figuras disto para o caso em que $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 0)}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{(5, 3)}$.



Repare que nenhum dos triângulos acima é retângulo.

Como podemos encontrar o λ que faça $\text{ang}(\lambda \vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$?

Suponha que \vec{u} e \vec{w} estão dados e que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Se as nossas condições são $\lambda \vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$ então temos $\vec{v} = \vec{w} - \lambda \vec{u}$, $\lambda \vec{u} \perp \vec{v}$, e só vai existir um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ que obedece estas condições. Veja:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{w} - \lambda \vec{u}, \\ \vec{u} &\perp \vec{w} - \lambda \vec{u}, \\ \vec{u} \cdot (\vec{w} - \lambda \vec{u}) &= 0, \\ \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{u} \cdot \lambda \vec{u} &= 0, \\ \vec{u} \cdot \vec{w} - \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}) &= 0, \\ \vec{u} \cdot \vec{w} &= \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}), \\ \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} &= \lambda \end{aligned}$$

Uma nova operação: a projeção ortogonal, $\text{Pr}_{\vec{u}} \vec{w}$

Notação: $\text{Pr}_{\vec{u}} \vec{w}$

Pronúncia: $\text{Pr}_{\vec{u}} \vec{w}$ é “projeção sobre \vec{u} de \vec{w} ”.

Bem informalmente, é como se os raios do sol fossem ortogonais a \vec{u} , e o sol projeta uma “sombra” do vetor \vec{w} sobre o prolongamento do vetor \vec{u} .

Definição 1 (fácil de calcular): $\text{Pr}_{\vec{u}} \vec{w} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$.

Definição 2 (fácil de visualizar): $\text{Pr}_{\vec{u}} \vec{w}$ é o múltiplo $\lambda \vec{u}$ do vetor \vec{u} que faz com que $\vec{u} \perp \vec{v}$ quando \vec{v} é o vetor que obedece $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \vec{v}$.

Exercícios

1) Em cada um dos casos abaixo calcule λ , $\text{Pr}_{\vec{u}} \vec{w}$ e \vec{v} e represente graficamente $\vec{w} = \lambda \vec{u} + \vec{v}$.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{(3, 0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(-1, 2)}$ c) $\vec{u} = \overrightarrow{(3, 1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1, 3)}$

b) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 2)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0, 1)}$

2) Calcule e represente graficamente:

a) $\text{Pr}_{\overrightarrow{(3, 1)}} \overrightarrow{(0, 2)}$ c) $\text{Pr}_{\overrightarrow{(3, 1)}} \overrightarrow{(3, 2)}$

b) $\text{Pr}_{\overrightarrow{(3, 1)}} \overrightarrow{(3, 0)}$

Projeções no olhometro

Quando a gente tem um pouco de prática com o “significado geométrico” da operação Pr a gente consegue 1) visualizar $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$, 2) calcular exatamente o resultado de $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ “no olhometro” em casos simples. Os exercícios abaixo são pra você melhorar a sua capacidade de calcular projeções ortogonais no olhometro; lembre que toda vez que você tiver dúvidas você pode recorrer às contas.

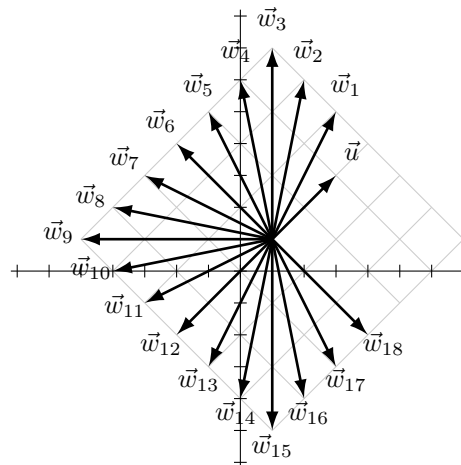
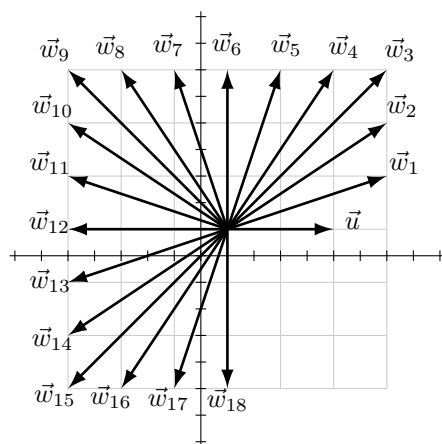
Exercícios

1) Sejam $\vec{w} = (3, 4)$, $\vec{u} = (0, 1)$, $A = (2, 0)$, $B = A + \vec{w}$. Represente graficamente A , B , \vec{u} , \vec{w} , e para cada $\lambda \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ desenhe no seu gráfico o triângulo $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$ correspondente e calcule \vec{v} e $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Qual o λ que faz com que $\vec{u} \perp \vec{v}$?

2) Faça a mesma coisa que no (1), mas mudando o \vec{u} para $\vec{u} = (1, 1)$.

3) Digamos que $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{u}$, $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_2 = \lambda_2\vec{u}$, etc. Determine λ_1 , λ_2 , etc na figura abaixo à esquerda.

4) Digamos que $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{u}$, $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_2 = \lambda_2\vec{u}$, etc. Determine λ_1 , λ_2 , etc na figura abaixo à direita.



5) Sejam $A = (1, 1)$, $B = (3, 1)$, $C = (4, 4)$.

Calcule e represente graficamente:

$$\text{AB)} P = A + \text{Pr}_{\vec{AB}}\vec{AC}$$

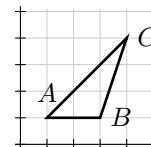
$$\text{BC)} S = B + \text{Pr}_{\vec{BC}}\vec{BA}$$

$$\text{AC)} Q = A + \text{Pr}_{\vec{AC}}\vec{AB}$$

$$\text{CA)} T = C + \text{Pr}_{\vec{CA}}\vec{CB}$$

$$\text{BA)} R = B + \text{Pr}_{\vec{BA}}\vec{BC}$$

$$\text{CB)} U = C + \text{Pr}_{\vec{CB}}\vec{CA}$$



6) Leia a p.55 do livro do CEDERJ. Compare a abordagem dele com a nossa.

7) Leia as págs 35 a 38 do Reis/Silva. Compare a abordagem dele com a nossa.

Repare que tanto o livro do CEDERJ quanto o do Reis/Silva começam a mencionar senos, cossenos e tangentes bem antes de definirem o produto $\vec{u} \cdot \vec{v}$!

Propriedades da projeção

Exercícios

1) V/F/Justifique:

- | | |
|---|---|
| a) () $\text{Pr}_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = \text{Pr}_{\vec{u}}\vec{v} + \text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ | j) () $\ k\vec{v}\ = k\ \vec{v}\ $ |
| b) () $\text{Pr}_{(\vec{u}+\vec{v})}\vec{w} = \text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} + \text{Pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ | k) () $\ k\vec{v}\ = k \ \vec{v}\ $ |
| c) () $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} = \text{Pr}_{\vec{w}}\vec{u}$ | l) () $\ k\vec{v}\ = \ \vec{v}\ $ |
| d) () $\text{Pr}_{(k\vec{u})}\vec{w} = k \text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ | m) () Se $ab = ac$ então $b = c$ |
| e) () $\text{Pr}_{(k\vec{u})}\vec{w} = k \text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ | n) () Se $a\vec{u} = b\vec{u}$ então $a = b$ |
| f) () $\text{Pr}_{(k\vec{u})}\vec{w} = \text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ | o) () Se $a\vec{u} = a\vec{v}$ então $\vec{u} = \vec{v}$ |
| g) () $\text{Pr}_{\vec{u}}(k\vec{w}) = k \text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ | p) () Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$ |
| h) () $\text{Pr}_{\vec{u}}(k\vec{w}) = k \text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ | |
| i) () $\text{Pr}_{\vec{u}}(k\vec{w}) = \text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ | |

2) Demonstre que se \vec{v} e \vec{w} são não-nulos e $\vec{v} \perp \vec{w}$ então:

- $\text{Pr}_{\vec{v}}(k\vec{w}) = \vec{0}$
- $\text{Pr}_{\vec{v}}(k\vec{v}) = k\vec{v}$
- $\text{Pr}_{\vec{v}}(a\vec{v} + b\vec{w}) + \text{Pr}_{\vec{w}}(a\vec{v} + b\vec{w}) = a\vec{v} + b\vec{w}$

3) Demonstre:

- Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$
- Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$
- Se $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ então $\vec{u} \perp \vec{v}$
- Se $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ então $\vec{u} \perp \vec{v}$

4) Demonstre:

- Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\|\vec{u}\|^2 \leq \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$
- Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\|\vec{u}\| \leq \|\vec{u} + \vec{v}\|$
- Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ então $\|\vec{u}\|^2 < \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$
- Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ então $\|\vec{u}\| < \|\vec{u} + \vec{v}\|$

5) Digamos que $r = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$ seja uma reta, que B seja um ponto de \mathbb{R}^2 e que $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$. Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Demonstre que:

- $d(A + t\vec{u}, B)$ é mínimo quando $d(A + t\vec{u}, B)^2$ é mínimo
- $d(A + t\vec{u}, B)^2 = \|\overrightarrow{AB} - t\vec{u}\|^2$
- $\|\overrightarrow{AB} - t\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|t\vec{u}\|^2$
- $\|\overrightarrow{AB} - t\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + t^2\|\vec{u}\|^2$

Senos e cossenos

Vamos começar com uma revisão rápida de graus e radianos...

Lembre que $180^\circ = \pi$ e que radianos são “adimensionais” — a gente escreve “ π radianos” só como “ π ”.

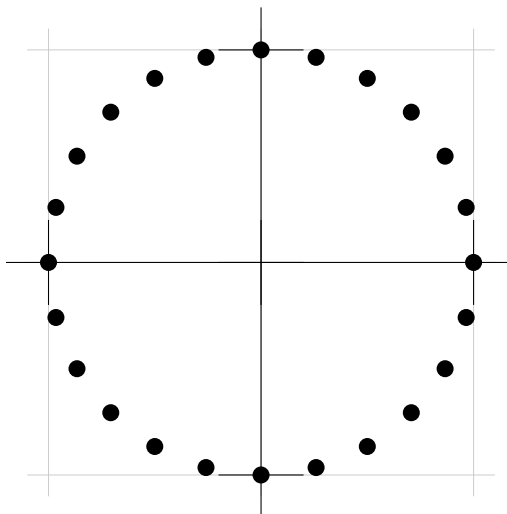
O símbolo “ $^\circ$ ” pode ser interpretado como uma multiplicação por uma determinada constante: $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \pi/2$, $45^\circ = \pi/4$, $1^\circ = \pi/180$, $234^\circ = 234 \frac{\pi}{180}$, $x^\circ = x \frac{\pi}{180}$.

Vou usar a expressão “nossos ângulos preferidos” pra me referir aos ângulos que têm senos e cossenos fáceis de lembrar e de calcular. Formalmente,

$$\begin{aligned} A &= \{k \cdot 90^\circ + a \mid k \in \{0, 1, 2, 3\}, a \in \{0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}\} \\ &= \{0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, \dots\} \end{aligned}$$

Algumas pessoas viram a tabela à esquerda abaixo no ensino médio...

θ	$(\cos \theta, \sin \theta)$
0°	$(\sqrt{4}/2, \sqrt{0}/2)$
30°	$(\sqrt{3}/2, \sqrt{1}/2)$
45°	$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
60°	$(\sqrt{1}/2, \sqrt{3}/2)$
90°	$(\sqrt{0}/2, \sqrt{4}/2)$
120°	$(-\sqrt{1}/2, \sqrt{3}/2)$
135°	$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
150°	$(-\sqrt{3}/2, \sqrt{1}/2)$
180°	$(-\sqrt{4}/2, \sqrt{0}/2)$
210°	$(-\sqrt{3}/2, -\sqrt{1}/2)$
225°	$(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$
240°	$(-\sqrt{1}/2, -\sqrt{3}/2)$
270°	$(\sqrt{0}/2, -\sqrt{4}/2)$
300°	$(\sqrt{1}/2, -\sqrt{3}/2)$
315°	$(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$
330°	$(\sqrt{3}/2, -\sqrt{1}/2)$
360°	$(\sqrt{4}/2, \sqrt{0}/2)$



Exercícios

Dicas: $\sqrt{0}/2 = 0$, $\sqrt{1}/2 = 0.5$, $\sqrt{4}/2 = 1$, e use as aproximações $\sqrt{2}/2 \approx 0.7$ e $\sqrt{3}/2 \approx 0.85$. Nas contas com os “nossos ângulos preferidos” comece sempre com os múltiplos de 90° — em que as contas são facilímas —, depois inclua os múltiplos de 45° , e só depois inclua os múltiplos de 30° .

1) Identifique cada ponto da forma $(\cos \theta, \sin \theta)$, onde $\theta \in A$, com pontos da figura à direita acima.

2) Verifique que o triângulo $\Delta(0, 0)(\sqrt{2}/2, 0)(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ é retângulo, isósceles e tem hipotenusa 1.

3) Verifique que o triângulo $\Delta(0, 0)(1, 0)(0.5, \sqrt{3}/2)$ é equilátero.

4) Verifique que o triângulo $\Delta(0, 0)(0.5, 0)(0.5, \sqrt{3}/2)$ é retângulo, com hipotenusa 1, e um dos seus catetos tem comprimento $1/2$.

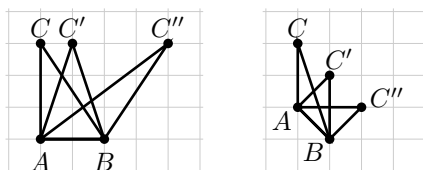
Áreas e determinantes em \mathbb{R}^2

Notações: se \vec{u} e \vec{v} são vetores em \mathbb{R}^2 então $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$ é a área do paralelogramo gerado por \vec{u} e \vec{v} ; se A, B, C são pontos de \mathbb{R}^2 então $\text{Área}(\Delta ABC)$ é a área do triângulo ΔABC . Triângulos são “metades de paralelogramos”.

O slogan “a área de um triângulo é base vezes altura sobre 2” pode ser interpretado de várias formas. Podemos pensar que a base do triângulo ΔABC é a distância $d(A, B)$ (um número), ou que a base é o segmento \overline{AB} ; e podemos usar o slogan pra mudar um ponto do triângulo original mantendo a mesma base e a mesma altura, obtendo um triângulo $\Delta ABC'$ com $\text{Área}(\Delta ABC) = \text{Área}(\Delta ABC')$. Quando a base \overline{AB} é um segmento horizontal “manter a mesma altura” quer dizer deslizar o ponto C ao longo de uma reta horizontal; quando \overline{AB} é um segmento qualquer “manter a mesma altura” quer dizer deslizar C ao longo de uma reta r paralela a AB e que passa por C — ou seja,

$$C' \in r = \{C + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

No diagrama à esquerda abaixo temos $\text{Área}(\Delta ABC) = \text{Área}(\Delta ABC') = \text{Área}(\Delta ABC'')$; no diagrama à direita abaixo também.



Idéias. Temos $\text{Área}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\text{Área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Quando $\vec{u} \perp \vec{v}$ a área pode ser calculada de forma bem fácil: $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. Quando $\text{ang}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 90^\circ$ podemos calcular $\text{Área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ encontrando um ponto C' “por deslizamento”, isto é, tal que $C' = C + t\overrightarrow{AB}$, que obedeça $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC'}$. A tradução disto pra vetores é $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Área}(\vec{u}, \vec{v} + t\vec{u})$. Podemos deslocar os pontos A e B ao invés de C : se $A' = A + \alpha\overrightarrow{BC}$ e $B' = B + \beta\overrightarrow{AC}$ então $\text{Área}(\Delta ABC) = \text{Área}(\Delta A'BC) = \text{Área}(\Delta AB'C)$; $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Área}(\vec{u} + t\vec{v}, \vec{v})$.

Determinantes. A notação usual para determinantes de matrizes 2×2 é $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, mas também vamos usar $\det((\overrightarrow{(a, b)}, \overrightarrow{(c, d)}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Determinantes calculam a área “com sinal”; truque: $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v}) = |\det(\vec{u}, \vec{v})|$.

Áreas e determinantes em R^2 (2)

Exercícios

1) Para cada um dos casos abaixo represente graficamente o paralelogramo gerado por \vec{u} e \vec{v} e calcule $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$. Use deslizamentos se precisar mas não use determinantes.

2) Para cada um dos casos abaixo represente graficamente o paralelogramo gerado por \vec{u} e \vec{v} e calcule $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$. Use determinantes mas não use deslizamentos.

- | | |
|--|--|
| a) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 0)}, \vec{v} = \overrightarrow{(0, 3)}$ | g) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 1)}, \vec{v} = \overrightarrow{(-1, 2)}$ |
| b) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 0)}, \vec{v} = \overrightarrow{(0, -3)}$ | h) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 1)}, \vec{v} = \overrightarrow{(-2, 4)}$ |
| c) $\vec{u} = \overrightarrow{(-2, 0)}, \vec{v} = \overrightarrow{(0, 3)}$ | i) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 1)}, \vec{v} = \overrightarrow{(1, 3)}$ |
| d) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 0)}, \vec{v} = \overrightarrow{(1, 4)}$ | j) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 1)}, \vec{v} = \overrightarrow{(0, 1)}$ |
| e) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 0)}, \vec{v} = \overrightarrow{(1, 3)}$ | k) $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 0)}, \vec{v} = \overrightarrow{(-1, 2)}$ |
| f) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 0)}, \vec{v} = \overrightarrow{(1, 0)}$ | |

Pontos mais próximos e pontos simétricos

Exercícios

1) Sejam $A = (2, 3)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 0)}$, $r = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$, $B = (4, 0)$. Sejam B' o ponto de r mais próximo de B e $B'' = B' + \overrightarrow{BB'}$. Represente graficamente A , \vec{u} , r , B , B' , B'' .

2) Sejam A , \vec{u} e r como no exercício anterior. Seja $C = (5, 1)$. Sejam C' o ponto de r mais próximo de C e $C'' = C' + \overrightarrow{CC'}$. Represente graficamente C , C' , C'' no gráfico do exercício anterior.

3) Vamos usar a mesma convenção dos exercícios anteriores para as letras D, E, \dots — D' é o ponto de r mais próximo a D , $D'' = D' + \overrightarrow{DD'}$, etc. Sejam $D = (4, 2)$ e $E = (3, 3)$. Represente graficamente D , D' , D'' , E , E' , E'' no mesmo gráfico dos exercícios 1 e 2.

4) Sejam $A = (4, 1)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(0, 1)}$, $r = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 2)$, $D = (4, 3)$, $E = (5, 4)$. Represente graficamente num gráfico só (separado do dos exercícios anteriores!) A , \vec{u} , r , B , B' , B'' , C , D' , C'' , D , D' , D'' , E , E' , E'' .

5) Idem, mas agora $A = (0, 4)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1, -1)}$, $B = (1, 4)$, $C = (2, 4)$, $D = (2, 1)$, $E = (1, 1)$.

6) Idem, mas agora $A = (0, 4)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(2, -1)}$, $B = (1, 1)$, $C = (3, 0)$, $D = (4, 2)$, $E = (3, 5)$, $F = (3, 4)$, $G = (3, 3)$, $H = (3, 2)$. Obs: aqui nem todos os pontos são fáceis de calcular, mas você sabe desenhar aproximações para ele no olhometro.

Repare que quando $r = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$ a gente sempre pode calcular o “ponto de r mais próximo de B ”, B' , fazendo $B' = A + \text{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}$ — e isto nos dá uma primeira fórmula para calcular $d(B, r)$:

$$\begin{aligned} d(B, r) &= d(B, B') \\ &= d(B, A + \text{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}) \\ &= \|\overrightarrow{B} - (A + \text{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB})\| \\ &= \|\overrightarrow{AB} - \text{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}\| \\ &= \|\text{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}\| \end{aligned}$$

7) Calcule $d(B, r)$, $d(C, r)$, $d(D, r)$, $d(E, r)$ no gráfico dos exercícios 1, 2 e 3 acima, de dois modos: primeiro aproveite que você conhece B' , C' , etc e use $d(B, r) = d(B, B')$, $d(C, r) = d(C, C')$, etc; depois use a fórmula $d(B, r) = \|\overrightarrow{AB} - \text{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}\|$.

8) Faça o mesmo para $d(B, r)$, \dots , $d(E, r)$ no gráfico do exercício 4.

9) Faça o mesmo para $d(B, r)$, \dots , $d(E, r)$ no gráfico do exercício 5.

10) Faça o mesmo para o exercício 6.

Exercícios sobre coeficientes

11) Encontre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $\text{Pr}_{\overrightarrow{(2, -1)}}(x, y) = \overrightarrow{(ax + by, cx + dy)}$.

12) Encontre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $\text{Pr}_{\overrightarrow{(3, 4)}}(x, y) = \overrightarrow{(ax + by, cx + dy)}$.

Círculos (via pontos óbvios)

Seja $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9 \}$.

O conjunto S é um círculo (juro! Depois vamos ver porquê), e se conseguirmos um número suficiente de pontos de S vamos conseguir desenhar o círculo, determinar o seu centro e o seu raio, etc.

Uma gambiarra: é fácil encontrar os “quatro pontos óbvios” que são soluções de $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$ — a gente primeiro faz $(x - 4)^2 = 0$ e encontra os dois valores de y que são soluções de $0 + (y - 3)^2 = 9$, depois a gente faz $(y - 3)^2 = 0$ e encontra os dois valores de x que são soluções de $(x - 4)^2 + 0 = 9$.

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{4} - 4}_0^2 + \underbrace{\underbrace{\underbrace{y}_{6} - 3}_3^2}_9 = 9 & \underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{4} - 4}_0^2 + \underbrace{\underbrace{\underbrace{y}_{0} - 3}_{-3}}_9^2 = 9 \\ \Rightarrow (x, y) = (4, 6) & \Rightarrow (x, y) = (4, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{7} - 4}_3^2 + \underbrace{\underbrace{\underbrace{y}_{3} - 3}_0^2}_0 = 9 & \underbrace{\underbrace{\underbrace{x}_{1} - 4}_{-3}}_9^2 + \underbrace{\underbrace{\underbrace{y}_{3} - 3}_0^2}_0 = 9 \\ \Rightarrow (x, y) = (7, 3) & \Rightarrow (x, y) = (1, 3) \end{array}$$

Os pontos óbvios vão ser o ponto mais alto do círculo, o mais baixo, o mais à esquerda e o mais à direita.

Exercícios

1) Cada um dos conjuntos abaixo é um círculo.

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4 \}$$

$$C' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 1 \}$$

$$C'' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 1 \}$$

$$C''' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1 \}$$

$$C'''' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25 \}$$

Para cada um deles

- encontre os 4 pontos óbvios do círculo,
- represente graficamente o círculo,
- dê o centro e o raio do círculo.

2) Tente fazer o mesmo para estes círculos degenerados.

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 0 \}$$

$$C' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = -1 \}$$

Círculos e cônicas

Quase todos os problemas das listas da Ana Isabel sobre círculos usam equações desta forma:

$$(A) \quad ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$$

onde $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

Os que nós vimos têm equações desta forma:

$$(B) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = c$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Uma equação de cônica é uma equação desta forma:

$$(C) \quad ax^2 + bx + c + dxy + ey + fy^2 = 0$$

onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Exercícios

Converta as seguintes equações da forma (B) para a forma (A).

$$1) (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

$$2) (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

Converta as seguintes equações da forma (A) para a forma (B).

$$3) x^2 + 2x + y^2 - 2y - 7 = 0$$

$$4) x^2 + y^2 - 6y - 9 = 0$$

$$5) x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$$

$$6) x^2 + y^2 + 6y - 8 = 0$$

$$7) x^2 - y^2 = 0$$

Dica: “completar quadrados”...

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x + a)^2 + b = x^2 + 2ax + a^2 + b$$

$$(x + a)^2 + b - a^2 = x^2 + 2ax + b$$

Interseção de círculo e reta (algebricamente)

Método: comece com equações

$$(D) \quad ax^2 + bx + dx^2 + ey + f = 0,$$

$$(E) \quad y = gx + h$$

e substitua cada y em (D) por $gx + h$. Converta a equação que você obteve para a forma

$$(F) \quad ix^2 + jx + k = 0,$$

resolva-a por Bháskara e chame as soluções de x_1 e x_2 .

Use (E) para definir $y_1 = gx_1 + h$ e $y_2 = gx_2 + h$.

Os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são as interseções do círculo com a reta.

Exercícios. Sejam C o círculo de centro $(5, 5)$ e raio 5,

$$r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 3 \}, \quad r' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 5 - 3x \}.$$

8) Calcule $C \cap r$.

9) Calcule $C \cap r'$.

Uma decomposição (e várias utilidades para ângulos)

Sejam A e B dois pontos diferentes de \mathbb{R}^2 .

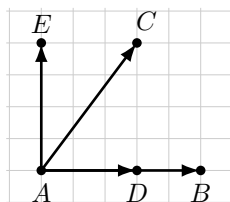
Seja C um ponto de \mathbb{R}^2 .

Seja r a reta que passa por A e B .

Seja s uma reta ortogonal a r que passa por A .

Seja D o ponto de r mais próximo de C .

Seja E o ponto de s mais próximo de C .



Essa construção decompõe o vetor \overrightarrow{AC} em uma componente, \overrightarrow{AD} , paralela a \overrightarrow{AB} , e outra componente, \overrightarrow{AE} , ortogonal a \overrightarrow{AB} .

Formalmente: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, com $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}$.

($\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AB}$ quer dizer $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.)

A função “ang” sempre responde um ângulo entre 0° e 180° (lembre da ‘ $\sqrt{\cdot}$!’); daí sempre temos $0 \leq \sin(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})) \leq 1$, mas $\cos \theta < 0$ para θ obtuso.

Seja $\theta = \text{ang}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{ang}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$. Lembre que “cosseno é cateto adjacente sobre hipotenusa” e “seno é cateto oposto sobre hipotenusa”.

Repare que $ADCE$ é um retângulo e que:

- 1) $|\cos \theta| = d(A, D)/d(A, C)$,
- 2) $\sin \theta = d(D, C)/d(A, C) = d(A, E)/d(A, C)$,
- 3) $d(A, D) = |\cos(\theta)| d(A, C)$,
- 4) $d(A, E) = \sin(\theta) d(A, C)$,
- 5) $\overrightarrow{AD} = \text{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC}$,
- 6) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
- 7) $\text{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC} = \text{Pr}_{\overrightarrow{AB}} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \text{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} + \text{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AE} = \text{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$
- 7') $\|\text{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AD}\| = |\cos \theta| \|\overrightarrow{AC}\|$
- 8) $\text{Área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{Área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AE}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot (\sin \theta \|\overrightarrow{AC}\|)$
- 8') $\text{Área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \sin \theta \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|$
- 9) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})) \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ (“fórmula do cosseno”)

Note que as afirmações 1–9 acima não usam θ , só $\sin \theta$ e $\cos \theta$.

Exercícios

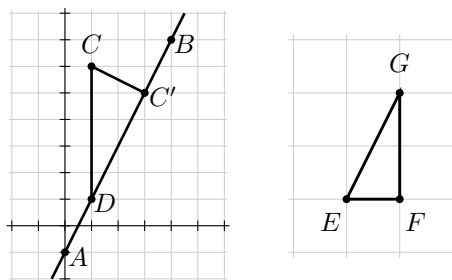
- 1) Verifique as afirmações 1–9 no caso $\overrightarrow{AB} = \langle 5, 0 \rangle$, $\overrightarrow{AC} = \langle 3, 4 \rangle$.
- 2) Verifique as afirmações 1–9 no caso $\overrightarrow{AB} = \langle 4, 4 \rangle$, $\overrightarrow{AC} = \langle 0, 2 \rangle$.
- 3) Verifique as afirmações 1–9 no caso $\overrightarrow{AB} = \langle 4, 4 \rangle$, $\overrightarrow{AC} = \langle -2, 0 \rangle$.

Distância entre ponto e reta: segundo modo

Sejam A e B dois pontos diferentes de \mathbb{R}^2 e seja r a reta que contém A e B . Seja P um ponto qualquer de \mathbb{R}^2 . Na p.39 nós vimos um primeiro modo de calcular $d(C, r)$ — a gente encontrava o ponto $C' \in r$ mais próximo de C e depois calculava $d(C, C')$. Agora vamos ver um outro modo no qual as contas ficam bem mais rápidas, mas que só faz sentido se a gente entende ângulos.

Seja s uma reta vertical que passa por C e seja $D \in r \cap s$.

Seja $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b \}$; m é o coeficiente angular de r .



O triângulo retângulo $\Delta CC'D$ é semelhante a um outro triângulo bem mais simples, ΔEFG , que tem um cateto horizontal e outro vertical e cuja hipotenusa é paralela à reta r ; temos $\overrightarrow{EG} = \langle 1, m \rangle$ (hipotenusa), $\overrightarrow{EF} = \langle 1, 0 \rangle$ (cateto horizontal) e $\overrightarrow{FG} = \langle 0, m \rangle$ (cateto vertical).

Queremos calcular $d(C, C')$ mas é trabalhoso fazer isto diretamente, então vamos calcular $d(C, D)$, que é fácil, e a proporção $d(C, C')/d(C, D)$ (que é o cosseno de um ângulo — qual?)... temos:

- se $C = (C_x, C_y)$ então $D = (C_x, mC_x + b)$,
- $d(C, D) = |C_y - (mC_x + b)| = |mC_x + b - C_y|$,
- $d(C, C') = \frac{d(C, C')}{d(C, D)} d(C, D)$,
- $\frac{d(C, C')}{d(C, D)} = \frac{d(E, F)}{d(E, G)} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$,
- $d(C, C') = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} |mC_x + b - C_y|$,
- $d(C, r) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} |mC_x + b - C_y|$.

Obs: o meu truque pra lembrar é essa fórmula é: seja $dv(C, r)$ a “distância vertical” de C até r , isto é, a distância entre C e o ponto $r \cap s$, onde s é uma reta vertical que passa por C . A distância $d(C, r)$ é igual à “distância vertical” $dv(C, r)$ vezes alguma coisa que tem $\sqrt{1+m^2}$ no meio, e os casos mais fáceis de testar são os com coeficientes angulares iguais a 0, 1 ou 2... lembrando isso eu faço alguns testes e encontro a fórmula certa.

Exercício. Em cada um dos casos abaixo represente graficamente r e $F(x, y) = dv((x, y), r)$; use a notação da p.24 para representar $F(x, y)$.

- 1) $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 2 \}$
- 2) $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x \}$
- 3) $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3 \}$

Áreas de retângulos e paralelogramos em \mathbb{R}^3

Notação: se \vec{u} e \vec{v} são vetores em \mathbb{R}^3 então $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$ é a área do paralelogramo gerado por \vec{u} e \vec{v} . Quando $\vec{u} \perp \vec{v}$ a área pode ser calculada de forma bem fácil: $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.

Exercícios

1) Visualize os paralelogramos abaixo e calcule a área de cada um deles. Em alguns casos você vai ter que usar truques pouco óbvios; em outros casos talvez você vá ter que responder “não sei”.

- | | |
|---|--|
| a) $\text{Área}(\overrightarrow{(2, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)})$ | g) $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 3, 0)}, \overrightarrow{(4, 3, 0)})$ |
| b) $\text{Área}(\overrightarrow{(0, 3, 0)}, \overrightarrow{(0, 0, -4)})$ | h) $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 3, 0)}, \overrightarrow{(3, 4, 0)})$ |
| c) $\text{Área}(\overrightarrow{(5, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 5, 0)})$ | i) $\text{Área}(\overrightarrow{(5, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 4, 3)})$ |
| d) $\text{Área}(\overrightarrow{(5, 0, 0)}, \overrightarrow{(4, 3, 0)})$ | j) $\text{Área}(\overrightarrow{(5, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 4)})$ |
| e) $\text{Área}(\overrightarrow{(5, 0, 0)}, \overrightarrow{(3, 4, 0)})$ | k) $\text{Área}(\overrightarrow{(5, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 0, 5)})$ |
| f) $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 3, 0)}, \overrightarrow{(-3, 4, 0)})$ | |

Podemos calcular áreas de paralelogramos em \mathbb{R}^3 usando um truque de “deslizamento” parecido com o que usamos para áreas e determinantes em \mathbb{R}^2 . Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $k \in \mathbb{R}$, então $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Área}(\vec{u}, \vec{v} + k\vec{u})$ — e repare que $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$ é a área de um retângulo e $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v} + k\vec{u})$ é a área de um paralelogramo.

2) Use o truque acima em cada um dos itens abaixo. Visualize o paralelogramo $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v} + k\vec{u})$ e o retângulo $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$ associado a ele, e calcule as áreas.

- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)} + \overrightarrow{(4, 0, 0)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)} + \frac{3}{4}\overrightarrow{(4, 0, 0)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)} + \frac{2}{4}\overrightarrow{(4, 0, 0)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)} + \frac{1}{4}\overrightarrow{(4, 0, 0)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 3, 0)}, \overrightarrow{(0, 0, 1)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 3, 0)} + \overrightarrow{(0, 0, 1)}, \overrightarrow{(0, 0, 1)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 3, 0)} + 2\overrightarrow{(0, 0, 1)}, \overrightarrow{(0, 0, 1)})$
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 3, 0)} + 3\overrightarrow{(0, 0, 1)}, \overrightarrow{(0, 0, 1)})$

3) Faça o mesmo nos casos abaixo, mas agora você vai ter que escolher os vetores \vec{u} e \vec{v} adequados você mesmo.

- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)} + \overrightarrow{(4, 0, 0)})$ (mudar)
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)} + \frac{3}{4}\overrightarrow{(4, 0, 0)})$ (mudar)
- $\text{Área}(\overrightarrow{(4, 0, 0)}, \overrightarrow{(0, 3, 0)} + \frac{2}{4}\overrightarrow{(4, 0, 0)})$ (mudar)

4) Demonstre que se $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $a, k \in \mathbb{R}$ então:

$$\text{Área}(\vec{u}, a(\vec{v} + k\vec{u})) = |a| \text{Área}(\vec{u}, \vec{v} + k\vec{u}).$$

Retas e planos em \mathbb{R}^3

Obs: adaptado da aula de 4/jul/2016:

<http://angg.twu.net/2016.1-GA/2016.1-GA.pdf>

Sejam:

$$r_1 = \{ (2, 2, 0) + t\overrightarrow{(0, -1, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_2 = \{ (2, 2, 1) + t\overrightarrow{(0, -1, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_3 = \{ (2, 2, 0) + t\overrightarrow{(0, 1, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_4 = \{ (0, 2, 1) + t\overrightarrow{(1, 0, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_5 = \{ (1, 2, 1) + t\overrightarrow{(2, 0, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

Quais destas retas se interceptam?

Em que pontos? Em que 't's?

Quais destas retas são paralelas?

Quais destas retas são coincidentes?

A terminologia para retas que não se interceptam e não são paralelas é estranha – “retas reversas”.

As retas acima são *parametrizadas*.

O que é uma *equação de reta* em \mathbb{R}^3 ?

$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 5y = 6 \}$ é uma reta em \mathbb{R}^2 ;

$\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 5y + 6z = 7 \}$ é um *plano* em \mathbb{R}^3 ...

Exercício: encontre

três pontos não colineares de $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \}$,

três pontos não colineares de $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 \}$,

três pontos não colineares de $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1 \}$,

três pontos não colineares de $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 3 \}$,

três pontos não colineares de $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \}$,

e visualize cada um destes planos.

Alguns dos nossos planos preferidos:

$$\pi_{xy} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \} \text{ (} x \text{ e } y \text{ variam, } z = 0 \text{)}$$

$$\pi_{xz} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \} \text{ (} x \text{ e } z \text{ variam, } y = 0 \text{)}$$

$$\pi_{yz} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \} \text{ (} y \text{ e } z \text{ variam, } x = 0 \text{)}$$

Notação (temporária):

$$[\text{equação}] = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{equação} \}$$

Obs: $\pi_{xy} = [z = 0]$, $\pi_{xz} = [y = 0]$, $\pi_{yz} = [x = 0]$.

Exercício: visualize:

$$\pi_1 = [x = 1], \quad \pi_8 = [y = x],$$

$$\pi_2 = [y = 1], \quad \pi_9 = [y = 2x],$$

$$\pi_3 = [z = 1], \quad \pi_{10} = [z = x],$$

$$\pi_4 = [z = 4], \quad \pi_{11} = [z = x + 1],$$

$$\pi_5 = [z = 2],$$

Quais deles planos são paralelos?

Quais deles planos se cortam? Onde?

Retas e planos em \mathbb{R}^3 (2)

Dá pra parametrizar planos em \mathbb{R}^3 ...

Sejam

$$\pi_6 = \{ \underbrace{(2, 2, 0) + a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0)}_{(a,b)_{\Sigma_6}} \mid a, b \in \mathbb{R} \},$$

$$\pi_7 = \{ \underbrace{(3, 2, 1) + a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0)}_{(a,b)_{\Sigma_7}} \mid a, b \in \mathbb{R} \}.$$

Calcule e visualize:

$$(0, 0)_{\Sigma_6}, (1, 0)_{\Sigma_6}, (0, 1)_{\Sigma_6}, (1, 1)_{\Sigma_6},$$

$$(0, 0)_{\Sigma_7}, (1, 0)_{\Sigma_7}, (0, 1)_{\Sigma_7}, (1, 1)_{\Sigma_7},$$

e resolva:

$$(a, b)_{\Sigma_6} = (0, 3, 0),$$

$$(a, b)_{\Sigma_7} = (2, 4, 1),$$

$$(a, b)_{\Sigma_7} = (2, 4, 0).$$

Nossos três modos preferidos de descrever planos em \mathbb{R}^3 (por equações) são:

$$[z = ax + by + c] \text{ (“} z \text{ em função de } x \text{ e } y \text{”),}$$

$$[y = ax + bz + c] \text{ (“} y \text{ em função de } x \text{ e } z \text{”),}$$

$$[x = ay + bz + c] \text{ (“} x \text{ em função de } y \text{ e } z \text{”).}$$

Na p.10 nós vimos este tipo de diagrama aqui, que nos ajuda a visualizar as curvas de nível de funções de x e y :

$$\begin{array}{rcccccccc} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ F(x,y) & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ = x+2y \Rightarrow & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Use diagramas deste tipo para visualizar

$$[z = x + y],$$

$$[z = x + y + 2],$$

$$[z = x - y + 4].$$

Sejam:

$$\pi_{12} = [z = x + y],$$

$$\pi_{13} = [z = x - y + 4]$$

Exercício: encontre pontos de $r = \pi_{12} \cap \pi_{13}$ tais que

a) $x = 0$, b) $x = 1$, c) $x = 3$; depois

d) encontre uma parametrização para r ,

e) encontre uma parametrização para r na qual $t = x$.

Alguns dos nossos modos preferidos de descrever retas em \mathbb{R}^3 :

$$[y = ax + b, z = cx + d] \text{ (“} y \text{ e } z \text{ em função de } x \text{”),}$$

$$[x = ay + b, z = cy + d] \text{ (“} x \text{ e } z \text{ em função de } y \text{”),}$$

$$[x = az + b, y = cz + d] \text{ (“} x \text{ e } y \text{ em função de } z \text{”).}$$

Encontre uma descrição da forma $[y = ax + b, z = cx + d]$ para a r acima.

(Dica: use o “chutar e testar”!)

Determinantes em \mathbb{R}^3

Lembre que o determinante em \mathbb{R}^2 mede áreas (de paralelogramos), e às vezes ele responde números negativos:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ac - bd \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bd - ac = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Vamos usar a seguinte notação (temporária):

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}] &= [\overrightarrow{(u_1, u_2)}, \overrightarrow{(v_1, v_2)}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \quad (\text{em } \mathbb{R}^2) \\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= [\overrightarrow{(u_1, u_2, u_3)}, \overrightarrow{(v_1, v_2, v_3)}, \overrightarrow{(w_1, w_2, w_3)}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (\text{em } \mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

“ $[\vec{u}, \vec{v}]$ ” e “ $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ ” querem dizer

“empilhe os vetores numa matriz quadrada e tire o determinante dela”.

A definição de determinante em \mathbb{R}^3 – como conta – é:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} &= \begin{pmatrix} u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_4 + u_3 v_4 w_5 \\ -u_3 v_2 w_1 - u_4 v_3 w_2 - u_5 v_4 w_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 \\ -u_3 v_2 w_1 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

As seguintes definições são padrão:

$$\vec{\mathbf{i}} = \overrightarrow{(1, 0, 0)} \quad \vec{\mathbf{j}} = \overrightarrow{(0, 1, 0)} \quad \vec{\mathbf{k}} = \overrightarrow{(0, 0, 1)}$$

Exercício: calcule

- $[\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}]$
- $[\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{j}}]$
- $[\vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{k}}]$
- $[\vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{i}}]$
- $[\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}]$
- $[\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{i}}]$
- $[\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{i}}]$
- $[2\vec{\mathbf{i}}, 3\vec{\mathbf{j}}, 4\vec{\mathbf{k}}]$
- $[a\vec{\mathbf{i}}, b\vec{\mathbf{j}}, c\vec{\mathbf{k}}]$
- $[a\vec{\mathbf{i}} + b\vec{\mathbf{j}} + c\vec{\mathbf{k}}, d\vec{\mathbf{j}} + e\vec{\mathbf{k}}, f\vec{\mathbf{k}}]$
- $[a\vec{\mathbf{i}}, b\vec{\mathbf{i}} + c\vec{\mathbf{j}}, d\vec{\mathbf{i}} + e\vec{\mathbf{j}} + f\vec{\mathbf{k}}]$

Determinantes em \mathbb{R}^3 (2)

Lembre que o determinante em \mathbb{R}^2 mede áreas, que são “base vezes altura”, e que a gente pode deslizar um lado (\vec{v}) do paralelogramo gerado por \vec{u} e \vec{v} “numa direção paralela a \vec{u} ”, sem alterar nem a “base” nem a “altura”...

Algebricamente: $[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{v} + a\vec{u}]$.

E deslizando o \vec{u} , temos $[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u} + a\vec{v}, \vec{v}]$.

Em \mathbb{R}^3 podemos pensar que o determinante $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ mede a área da base — a área do paralelogramo gerado por \vec{u} e \vec{v} — vezes a altura.

Se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são ortogonais entre si então

a “área da base” é $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$, e a “altura” é $\|\vec{w}\|$.

(Obs: em \mathbb{R}^3 , $\overrightarrow{(a, b, c)} \cdot \overrightarrow{(d, e, f)} = ad + be + cf$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{v}}$, $\vec{u} \perp \vec{v} = (\vec{u} \cdot \vec{v} = 0)$, $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\vec{u}$.)

Propriedades mais importantes dos determinantes em \mathbb{R}^3 :

$$[a\vec{u}, b\vec{v}, c\vec{w}] = abc[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + a\vec{u} + b\vec{v}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v} + a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}]$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u} + a\vec{v} + b\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}]$$

Quase todas as idéias sobre determinantes em \mathbb{R}^3 que a gente vai ver agora ficam mais fáceis de entender se a gente as entende em três etapas: 1) com \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} ortogonais entre si, e todos com comprimento 1; 2) usando vetores $\vec{u}' = a\vec{u}$, $\vec{v}' = b\vec{v}$, $\vec{w}' = c\vec{w}$ construídos a partir dos anteriores; estes \vec{u}' , \vec{v}' e \vec{w}' são ortogonais entre si, mas podem ter qualquer comprimento, 3) usando vetores $\vec{u}'' = \vec{u}'$, $\vec{v}'' = \vec{v}' + d\vec{u}'$ e $\vec{w}'' = \vec{w}' + e\vec{u}' + f\vec{v}'$.

Exercício importantíssimo (encontrar coeficientes):

a) Encontre a, b, c tais que $\overrightarrow{(a, b, c)} \cdot \overrightarrow{(x, y, z)} = 2x + 3y + 4z$

b) Encontre a, b, c, d tais que $\overrightarrow{(a, b, c)} \cdot \overrightarrow{(x, y, z)} + d = 2x + 3y + 4z + 5$

c) Encontre a, b, c tais que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a, b, c)} \cdot \overrightarrow{(x, y, z)}$

d) Encontre a, b, c tais que $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a, b, c)} \cdot \overrightarrow{(x, y, z)}$

e) Encontre a, b, c tais que $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a, b, c)} \cdot \overrightarrow{(w_1, w_2, w_3)}$

O produto cruzado (\times) em R^3

O “produto cruzado” (ou “produto vetorial”) $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido como se ele fosse “uma parte da conta do determinante”: $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Exercício: verifique que no item (e) acima temos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \langle \vec{u}_2\vec{v}_3 - \vec{u}_3\vec{v}_2, \vec{u}_3\vec{v}_1 - \vec{u}_1\vec{v}_3, \vec{u}_1\vec{v}_2 - \vec{u}_2\vec{v}_1 \rangle.$$

Idéia importantíssima:

1) para quaisquer \vec{u} e \vec{v} , se \vec{w} é ortogonal a \vec{u} e \vec{v} e $\|\vec{w}\| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ é exatamente a área do paralelogramo gerado por \vec{u} e \vec{v} (exceto talvez pelo sinal);

2) para quaisquer \vec{u} e \vec{v} , se \vec{w} é ortogonal a \vec{u} e \vec{v} e $\|\vec{w}\| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + a\vec{u} + b\vec{v}]$ é exatamente a área do paralelogramo gerado por \vec{u} e \vec{v} (exceto talvez pelo sinal);

3) para quaisquer \vec{u} e \vec{v} , se \vec{w} é ortogonal a \vec{u} e \vec{v} e $\|\vec{w}\| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}]$ é $c \cdot \text{área}(\vec{u}, \vec{v})$ (exceto talvez pelo sinal);

4) para quaisquer \vec{u} e \vec{v} , se \vec{w} é ortogonal a \vec{u} e \vec{v} e $\|\vec{w}\| = 1$, então $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w})$ é $c \cdot \text{área}(\vec{u}, \vec{v})$ (exceto talvez pelo sinal);

5) para quaisquer \vec{u} e \vec{v} , se \vec{w} é ortogonal a \vec{u} e \vec{v} e $\|\vec{w}\| = 1$, então $\vec{u} \times \vec{v} = \text{área}(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{w}$ (exceto talvez pelo sinal).

Exercício:

Use o (5) acima para tentar descobrir quais são as duas respostas possíveis para $\vec{u} \times \vec{v}$ nos casos a e b abaixo, e depois compare as suas respostas com resposta “algébrica” dada pela fórmula lá no alto da página.

- a) $\vec{u} = \langle 3, 0, 0 \rangle$, $\vec{v} = \langle 0, 4, 0 \rangle$, $\vec{w} = \langle 0, 0, 1 \rangle$
 b) $\vec{u} = \langle 0, 3, 0 \rangle$, $\vec{v} = \langle 0, 3, 3 \rangle$, $\vec{w} = \langle 1, 0, 0 \rangle$

Alguns usos do ‘ \times ’

1) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \text{área}(\vec{u}, \vec{v})$

2) $\vec{u} \times \vec{v}$ sempre dá um vetor ortogonal a \vec{u} e \vec{v}

3) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se e só se $\text{área}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, ou seja, se \vec{u} e \vec{v} são colineares (i.e., paralelos).

4) Digamos que

$$r = \{ A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \},$$

$$r' = \{ B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R} \},$$

$$B = A + \vec{w}.$$

Então r e r' são reversas se e só se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$.

(Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ então r e r' são ou paralelas, ou coincidentes, ou se cortam).

5) Pra testar se quatro pontos $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ são coplanares, encontre $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tais que $A + \vec{u} = B$, $A + \vec{v} = C$, $A + \vec{w} = D$; temos $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ se e só se A, B, C, D forem coplanares.

6) (Difícil!) Sejam

$$r = \{ A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \},$$

$$r' = \{ B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R} \},$$

$$B = A + \vec{w}.$$

$$\text{Então: } d(r, r') = \underbrace{\underbrace{\|\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\|}_{\text{volume}} / \underbrace{\text{área}(\vec{u}, \vec{v})}_{\text{área da base}}}_{\text{altura}}.$$

7) (Difícil!) Sejam

$$r = \{ A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \},$$

$$r' = \{ B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R} \},$$

$$B = A + \vec{w}.$$

Como a gente encontra uma reta s que corte r e r' e seja ortogonal a ambas?

Sejam $C_t = A + t\vec{u}$ e $D_{t'} = B + t'\vec{v}$.

Queremos que $\overrightarrow{C_t D_{t'}}$ seja ortogonal a \vec{u} e \vec{v} ,

ou seja, que $\overrightarrow{C_t D_{t'}}$ seja paralelo a $\vec{u} \times \vec{v}$,

ou seja, que $\overrightarrow{C_t D_{t'}} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$,

ou seja, que $(D_{t'} - C_t) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$,

ou seja, que $((B + t'\vec{v}) - (A + t\vec{u})) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$,

ou seja, que $(t'\vec{v} - t\vec{u} + \vec{AB}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$,

o que dá um sistema que nos permite encontrar t e t' com poucas contas...

Sabendo t e t' sabemos C_t e $D_{t'}$, e a reta s passa por C_t e $D_{t'}$.

Agora você deve ser capaz de resolver os exercícios 1 a 20 da lista 9 da Ana Isabel! Yaaaaay! (=) (=) (=)

- 2 Introdução
- 4 Coisas MUITO importantes sobre Geometria Analítica
- 5 Dicas MUITO IMPORTANTES e pouco óbvias
- 6 Substituição
- 7 Alguns “tipos” de objetos matemáticos familiares
- 8 “Set comprehensions”
- 9 “Set comprehensions”: como calcular usando tabelas
- 10 Exercícios de “set comprehensions”
- 11 Produto cartesiano de conjuntos
- 12 Gabarito dos exercícios de set comprehensions
- 13 Retas
- 14 Pontos e vetores
- 15 Como representar pontos e vetores graficamente
- 16 Retas (de novo)
- 17 Interseções de retas parametrizadas
- 18 Sistemas de coordenadas
- 19 Sistemas de coordenadas (2)
- 20 Sistemas de equações e sistemas de coordenadas
- 21 Sistemas de equações e sistemas de coordenadas (2)
- 22 Vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo
- 23 Vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo (2)
- 24 Visualizando $F(x, y)$
- 25 O teorema de Pitágoras
- 26 Comprimentos (“normas”) de vetores e ortogonalidade
- 27 Uma demonstração errada
- 28 Propriedades das operações básicas com pontos e vetores
- 29 Dicas para problemas de “V/F/Justifique”
- 30 Propriedades das operações básicas com pontos e vetores (2)
- 31 Propriedades de normas e distâncias
- 32 Uma demonstração (comentada)
- 33 Projeção ortogonal
- 34 Projeções no olhometro
- 35 Propriedades da projeção
- 36 Senos e cossenos
- 37 Áreas e determinantes em R^2
- 38 Áreas e determinantes em R^2 (2)
- 39 Pontos mais próximos e pontos simétricos
- 40 Círculos (via pontos óbvios)
- 41 Círculos e cônicas
- 42 Uma decomposição (e várias utilidades para ângulos)
- 43 Distância entre ponto e reta: segundo modo
- 44 Áreas de retângulos e paralelogramos em R^3
- 45 Retas e planos em R^3
- 46 Retas e planos em R^3 (2)
- 47 Determinantes em R^3
- 48 Determinantes em R^3 (2)

- 49 O produto cruzado (\times) em R^3
- 50 Alguns usos do ' \times '