Examen M2 SeCReTS 2016-2017.

Remise à niveau en mathématiques.

Remarques :

- Pour chacune des questions, on demande de justifier les étapes en mentionnant notamment les algorithmes utilisés.
- Aucun document ni aucune calculatrice ne sont admis.
- La durée de l'examen est de deux heures.

Question 1 (Théorie)

Montrez le théorème des restes chinois dans le cas des entiers (en incluant l'étude des systèmes de congruences).

Question 2 (Application de la théorie)

Considérons l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ (c-à-d $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$) muni de l'opération binaire addition $+$ classique. On supposera les propriétés de cette opération comme acquises. Considérez l'ensemble produit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Considérez la relation binaire, pour tous $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ si et seulement si } a + d = b + c$$

1. Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
2. Définissez les classes d'équivalence que l'on notera $\overline{(a, b)}$ si (a, b) est une représentant. Représentez graphiquement chacune d'entre-elles sur le plan dont les points sont les points de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Notre but est de définir une opération binaire $\oplus$ sur ces classes d'équivalence.

1. Montrez que si $(a, b) \sim (a', b')$ et $(c, d) \sim (c', d')$ alors $(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$.
2. Déduisez-en que l'opération binaire $\overline{(a, b)} \oplus \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}$ pour tous $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est bien définie (ne dépend pas du représentant choisi). Nous avons donc construit une structure quotient muni d'une opération $\oplus$.
3. Donnez la classe d'équivalence qui est l'élément neutre de la structure quotient.
4. Donnez l'opposé de la classe de représentant (a, b).

Question 3 (Calcul)

1. Calculez le nombre d'éléments du groupe multiplicatif de $(\mathbb{Z}_{703}, +, *)$ en justifiant le raisonnement.
2. Considérons $[X + (P(X))] \in \mathbb{Z}_2[X]/(P(X))$ où $P(X) \in \mathbb{Z}_2[X]$ est le polynôme primitif $X^2 + X + 1$. Calculez $[X + (P(X))]^{101}$ en justifiant le raisonnement.

b. Considérons le polynôme

$$P(X) = X^4 + 2X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$$

et l'anneau

$$(\mathbb{Z}_3[X]/(P(X)), +, *) .$$

1. Déterminez le nombre d'éléments de cet anneau.
2. Soit les classes de représentants $A = 2X^2 + 1$ et $B = X^2 + X + 2$. Donnez le représentant minimal de la somme et du produit de ces classes.
3. En utilisant un algorithme systématique et efficace, donnez, s'ils existent, le représentant minimal de l'inverse de la classe de représentant A et le représentant minimal de l'inverse de la classe de représentant B.

Question 4 (Calcul)

Chaque classe de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ de représentant x sera notée dans la suite $\overline{x}$. On cherche à déterminer le polynôme de degré minimal $P(x)$ de l'ensemble $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\overline{2}) = \overline{4}$, $P(\overline{3}) = \overline{3}$ et $P(\overline{5}) = \overline{7}$.

1. Exprimez ce problème sous forme de la résolution d'un système de congruences. Expliquez le raisonnement.
2. Résolvez le système de congruences ci-dessus à l'aide d'une formule explicite et exhibez le polynôme de degré minimal que l'on recherche.