Examen M2 SeCReTS 2015-2016.

Remise à niveau en mathématiques.

Remarques :

- Pour chacune des questions, on demande de justifier les étapes en mentionnant notamment les algorithmes utilisés.
- Aucun document ni aucune calculatrice ne sont admis.
- La durée de l'examen est de deux heures.

Question 1 (Théorie)

- Enoncez et démontrez le théorème de Lagrange.
- Démontrez que si $(A, +, *)$ est un anneau et I un idéal de A alors $(A/I, +, *)$ est un anneau possédant un neutre multiplicatif. On suppose connu que si $(G, +)$ est un groupe et H un sous-groupe distingué de G alors $(G/H, +)$ est un groupe de neutre H.

Question 2 (Application de la théorie)

1. Considérons l'ensemble des classes de congruence $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ muni de la multiplication que l'on note $\cdot$. Chaque classe de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ de représentant x sera notée dans la suite $\overline{x}$. Considérons la relation binaire, pour tous $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$,

   $$\overline{x} \sim \overline{y} \text{ si et seulement si il existe } i \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \overline{x} = \overline{2}^{i} \cdot \overline{y}\,.$$

   (a) Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

   (b) Donnez l'ensemble des classes d'équivalence de l'ensemble $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ pour cette relation d'équivalence.

2. Considérons l'ensemble des nombres naturels $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$) muni de l'opération binaire addition $+$ classique. On supposera les propriétés de cette opération comme acquises. Considérez l'ensemble produit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Considérez la relation binaire, pour tous $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

   $$(a, b) \sim (c, d) \text{ si et seulement si } a + d = b + c$$

   (a) Montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

   (b) Définissez les classes d'équivalence que l'on notera $\overline{(a, b)}$ si (a, b) est une représentant. Représentez graphiquement chacune d'entre-elles sur le plan dont les points sont les points de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Question 3 (Calcul)

a. Considérons le groupe multiplicatif de $(\mathbb{Z}_{703}, +, *)$.

1. Calculez le nombre d'éléments de ce groupe en justifiant le raisonnement.

b. Considérons le polynôme

$$P(X) = X^4 + 2X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$$

et l'anneau

$$(\mathbb{Z}_3[X]/(P(X)), +, *).$$

1. Déterminez le nombre d'éléments de cet anneau.
2. Soit les classes de représentants $A = 2X^2 + 1$ et $B = X^2 + X + 2$. Donnez le représentant minimal de la somme et du produit de ces classes.
3. En utilisant un algorithme systématique, donnez, s'ils existent, le représentant minimal de l'inverse de la classe de représentant A et le représentant minimal de l'inverse de la classe de représentant B.

Question 4 (Calcul)

Chaque classe de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ de représentant x sera notée dans la suite $\overline{x}$. On cherche à déterminer le polynôme de degré minimal $P(x)$ de l'ensemble $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\overline{2}) = \overline{5}$, $P(\overline{3}) = \overline{10}$ et $P(\overline{5}) = \overline{7}$.

1. Exprimez ce problème sous forme de la résolution d'un système de congruences. Expliquez le raisonnement.
2. Résolvez le système de congruences ci-dessus à l'aide d'une formule explicite et exhibez le polynôme de degré minimal que l'on recherche.