Tries

Definição e Construção

Prof. Edson Alves - UnB/FGA

Sumário

Definição

Árvores de sufixos

- Árvores de sufixos são estruturas de dados que representam o conjunto $B(s)$ de todas as substrings de uma string s dada

Árvores de sufixos

- Árvores de sufixos são estruturas de dados que representam o conjunto $B(s)$ de todas as substrings de uma string s dada
- A relação de pertinência ($r \in B(s)$?) é o mais básico problema associado a esta estrutura

Árvores de sufixos

- Árvores de sufixos são estruturas de dados que representam o conjunto $B(s)$ de todas as substrings de uma string s dada
- A relação de pertinência ($r \in B(s)$?) é o mais básico problema associado a esta estrutura
- Uma "boa" árvore de sufixos tem três características fundamentais:

Árvores de sufixos

- Árvores de sufixos são estruturas de dados que representam o conjunto $B(s)$ de todas as substrings de uma string s dada
- A relação de pertinência ($r \in B(s)$?) é o mais básico problema associado a esta estrutura
- Uma "boa" árvore de sufixos tem três características fundamentais:
  1. pode ser construída com tamanho linear

Árvores de sufixos

- Árvores de sufixos são estruturas de dados que representam o conjunto $B(s)$ de todas as substrings de uma string s dada
- A relação de pertinência ($r \in B(s)$?) é o mais básico problema associado a esta estrutura
- Uma "boa" árvore de sufixos tem três características fundamentais:
  1. pode ser construída com tamanho linear
  2. pode ser construída em tempo linear

Árvores de sufixos

- Árvores de sufixos são estruturas de dados que representam o conjunto $B(s)$ de todas as substrings de uma string s dada
- A relação de pertinência ($r \in B(s)$?) é o mais básico problema associado a esta estrutura
- Uma "boa" árvore de sufixos tem três características fundamentais:
  1. pode ser construída com tamanho linear
  2. pode ser construída em tempo linear
  3. pode responder questão de pertinência em complexidade linear em relação ao tamanho de s

Conceitos elementares

- Seja G um grafo acíclico direcionado, com raiz, cujas arestas recebem, como rótulos, caracateres ou palavras de um alfabeto A de tamanho constante

Conceitos elementares

- Seja G um grafo acíclico direcionado, com raiz, cujas arestas recebem, como rótulos, caracateres ou palavras de um alfabeto A de tamanho constante
- Seja $label(e)$ o rótulo da aresta e

Conceitos elementares

- Seja G um grafo acíclico direcionado, com raiz, cujas arestas recebem, como rótulos, caracateres ou palavras de um alfabeto A de tamanho constante
- Seja $label(e)$ o rótulo da aresta e
- O rótulo de um caminho p é a concatenação dos rótulos de todas as arestas do caminho

Conceitos elementares

- Seja G um grafo acíclico direcionado, com raiz, cujas arestas recebem, como rótulos, caracateres ou palavras de um alfabeto A de tamanho constante
- Seja $label(e)$ o rótulo da aresta e
- O rótulo de um caminho p é a concatenação dos rótulos de todas as arestas do caminho
- Tal grafo representa um conjunto de strings, que são definidas pelos rótulos de todos os caminhos possíveis em G

Conceitos elementares

- Seja G um grafo acíclico direcionado, com raiz, cujas arestas recebem, como rótulos, caracateres ou palavras de um alfabeto A de tamanho constante
- Seja $label(e)$ o rótulo da aresta e
- O rótulo de um caminho p é a concatenação dos rótulos de todas as arestas do caminho
- Tal grafo representa um conjunto de strings, que são definidas pelos rótulos de todos os caminhos possíveis em G
- Seja

$$\mathcal{L}(G) = \{\ label(p) \mid p \text{ é caminho em } G \text{ com início na raiz } \}$$

Conceitos elementares

- Seja G um grafo acíclico direcionado, com raiz, cujas arestas recebem, como rótulos, caracateres ou palavras de um alfabeto A de tamanho constante
- Seja $label(e)$ o rótulo da aresta e
- O rótulo de um caminho p é a concatenação dos rótulos de todas as arestas do caminho
- Tal grafo representa um conjunto de strings, que são definidas pelos rótulos de todos os caminhos possíveis em G
- Seja

$$\mathcal{L}(G) = \{\ label(p) \mid p \text{ é caminho em } G \text{ com início na raiz }\}$$

- G representa todas as substrings de s se $\mathcal{L}(G) = B(s)$

Conceitos elementares

- Seja G um grafo acíclico direcionado, com raiz, cujas arestas recebem, como rótulos, caracateres ou palavras de um alfabeto A de tamanho constante
- Seja $label(e)$ o rótulo da aresta e
- O rótulo de um caminho p é a concatenação dos rótulos de todas as arestas do caminho
- Tal grafo representa um conjunto de strings, que são definidas pelos rótulos de todos os caminhos possíveis em G
- Seja

$$\mathcal{L}(G) = \{\ label(p) \mid p \text{ é caminho em } G \text{ com início na raiz }\}$$

- G representa todas as substrings de s se $\mathcal{L}(G) = B(s)$
- Um nó n cujo caminho da raiz até n tem como rótulo um sufixo de s é denominado nó essencial

Tries

- Uma *trie* de substrings de s, ou simplesmente *trie*, é o grafo G que representa todas as substrings de s, cujos rótulos consistem apenas de um único caractere

Tries

- Uma *trie* de substrings de s, ou simplesmente *trie*, é o grafo G que representa todas as substrings de s, cujos rótulos consistem apenas de um único caractere
- O nome foi cunhado em 1961 por Edward Fredkin, a partir da sílaba central da palavra *retrieval*

Tries

- Uma *trie* de substrings de s, ou simplesmente *trie*, é o grafo G que representa todas as substrings de s, cujos rótulos consistem apenas de um único caractere
- O nome foi cunhado em 1961 por Edward Fredkin, a partir da sílaba central da palavra *retrieval*
- A pronúncia é semelhante a palavra *tree*, mas a grafia é diferente para diferenciar esta estrutura das árvores em geral

Tries

- Uma *trie* de substrings de s, ou simplesmente *trie*, é o grafo G que representa todas as substrings de s, cujos rótulos consistem apenas de um único caractere
- O nome foi cunhado em 1961 por Edward Fredkin, a partir da sílaba central da palavra *retrieval*
- A pronúncia é semelhante a palavra *tree*, mas a grafia é diferente para diferenciar esta estrutura das árvores em geral
- A próxima figura ilustra a *trie* da palavra "BANANA"

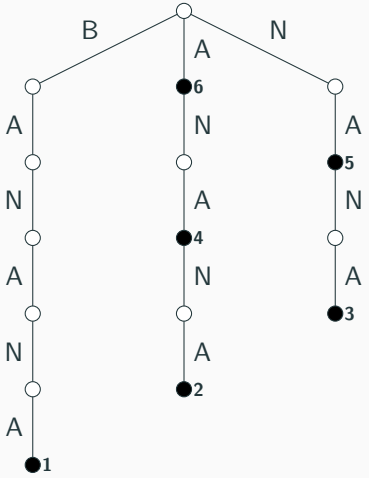
Tries

- Uma *trie* de substrings de s, ou simplesmente *trie*, é o grafo G que representa todas as substrings de s, cujos rótulos consistem apenas de um único caractere
- O nome foi cunhado em 1961 por Edward Fredkin, a partir da sílaba central da palavra *retrieval*
- A pronúncia é semelhante a palavra *tree*, mas a grafia é diferente para diferenciar esta estrutura das árvores em geral
- A próxima figura ilustra a *trie* da palavra "BANANA"
- Os nós pretos são nós essenciais

Tries

- Uma *trie* de substrings de s, ou simplesmente *trie*, é o grafo G que representa todas as substrings de s, cujos rótulos consistem apenas de um único caractere
- O nome foi cunhado em 1961 por Edward Fredkin, a partir da sílaba central da palavra *retrieval*
- A pronúncia é semelhante a palavra *tree*, mas a grafia é diferente para diferenciar esta estrutura das árvores em geral
- A próxima figura ilustra a *trie* da palavra "BANANA"
- Os nós pretos são nós essenciais
- Os números ao lado dos nós essenciais são os índices do caractere inicial do sufixo

Visualização da *trie* da palavra 'BANANA'



Construção *naive* $O(N^2)$ **da** *trie*

Construção *naive* da *trie*

- Seja s uma string de tamanho N

Construção *naive* da *trie*

- Seja s uma string de tamanho N
- Cada nó da *trie* de s pode ter até $|A|$ filhos, onde A é o alfabeto

Construção *naive* da *trie*

- Seja s uma string de tamanho N
- Cada nó da *trie* de s pode ter até $|A|$ filhos, onde A é o alfabeto
- Assim, cada nó pode ser implementado como um vetor de pares ou como um mapa, onde o par (c, n), indicando que há uma aresta de rótulo c que aponta para o nó n

Construção *naive* da *trie*

- Seja s uma string de tamanho N
- Cada nó da *trie* de s pode ter até $|A|$ filhos, onde A é o alfabeto
- Assim, cada nó pode ser implementado como um vetor de pares ou como um mapa, onde o par (c, n), indicando que há uma aresta de rótulo c que aponta para o nó n
- A raiz da árvore será o nó identificado por $n = 0$

Construção *naive* da *trie*

- Seja s uma string de tamanho N
- Cada nó da *trie* de s pode ter até $|A|$ filhos, onde A é o alfabeto
- Assim, cada nó pode ser implementado como um vetor de pares ou como um mapa, onde o par (c, n), indicando que há uma aresta de rótulo c que aponta para o nó n
- A raiz da árvore será o nó identificado por $n = 0$
- Para cada caractere c do sufixo $s[i..N]$, e iniciando na raiz, verifica-se se existe a aresta (c, n)

Construção *naive* da *trie*

- Seja s uma string de tamanho N
- Cada nó da *trie* de s pode ter até $|A|$ filhos, onde A é o alfabeto
- Assim, cada nó pode ser implementado como um vetor de pares ou como um mapa, onde o par (c, n), indicando que há uma aresta de rótulo c que aponta para o nó n
- A raiz da árvore será o nó identificado por $n = 0$
- Para cada caractere c do sufixo $s[i..N]$, e iniciando na raiz, verifica-se se existe a aresta (c, n)
- Em caso, afirmativo, segue-se esta aresta e se processa o caractere que sucede c

Construção *naive* da *trie*

- Seja s uma string de tamanho N
- Cada nó da *trie* de s pode ter até $|A|$ filhos, onde A é o alfabeto
- Assim, cada nó pode ser implementado como um vetor de pares ou como um mapa, onde o par (c, n), indicando que há uma aresta de rótulo c que aponta para o nó n
- A raiz da árvore será o nó identificado por $n = 0$
- Para cada caractere c do sufixo $s[i..N]$, e iniciando na raiz, verifica-se se existe a aresta (c, n)
- Em caso, afirmativo, segue-se esta aresta e se processa o caractere que sucede c
- Caso não exista, cria-se um novo nó m, adiciona-se ao nó atual a aresta (c, m), e segue o processamento para m e para o próximo caractere

Construção *naive* da *trie*

- Seja s uma string de tamanho N
- Cada nó da *trie* de s pode ter até $|A|$ filhos, onde A é o alfabeto
- Assim, cada nó pode ser implementado como um vetor de pares ou como um mapa, onde o par (c, n), indicando que há uma aresta de rótulo c que aponta para o nó n
- A raiz da árvore será o nó identificado por $n = 0$
- Para cada caractere c do sufixo $s[i..N]$, e iniciando na raiz, verifica-se se existe a aresta (c, n)
- Em caso, afirmativo, segue-se esta aresta e se processa o caractere que sucede c
- Caso não exista, cria-se um novo nó m, adiciona-se ao nó atual a aresta (c, m), e segue o processamento para m e para o próximo caractere
- Esta construção tem complexidade $O(N^2)$

Construção *naive* da *trie*

- Seja s uma string de tamanho N
- Cada nó da *trie* de s pode ter até $|A|$ filhos, onde A é o alfabeto
- Assim, cada nó pode ser implementado como um vetor de pares ou como um mapa, onde o par (c, n), indicando que há uma aresta de rótulo c que aponta para o nó n
- A raiz da árvore será o nó identificado por $n = 0$
- Para cada caractere c do sufixo $s[i..N]$, e iniciando na raiz, verifica-se se existe a aresta (c, n)
- Em caso, afirmativo, segue-se esta aresta e se processa o caractere que sucede c
- Caso não exista, cria-se um novo nó m, adiciona-se ao nó atual a aresta (c, m), e segue o processamento para m e para o próximo caractere
- Esta construção tem complexidade $O(N^2)$
- A memória necessária também é $O(N^2)$

Implementação *naive* da *trie*

```cpp
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
using Node = map<char, int>;
using Trie = vector<Node>;

Trie build_naive(const string& s)
{
    int root = 0, next = 0;

    Trie trie(1);       // Instancia o nó raiz vazio

    for (int i = s.size() - 1; i >= 0; --i)
    {
        string suffix = s.substr(i);
        int v = root;

        for (auto c : suffix)
        {
            auto it = trie[v].find(c);
```

Implementação *naive* da *trie*

```
22              if (it != trie[v].end())
23              {
24                  v = it->second;
25              } else
26              {
27                  trie.push_back({ });
28                  trie[v][c] = ++next;
29                  v = next;
30              }
31          }
32      }
33
34      return trie;
35  }
```

Busca de substring em um *trie*

- A *trie* da string s pode ser utilizada para identificar se uma string p é ou não substring de s

Busca de substring em um *trie*

- A *trie* da string s pode ser utilizada para identificar se uma string p é ou não substring de s
- O algoritmo é semelhante à busca em uma árvore binária, e tem complexidade $O(m)$, onde $m = |p|$

Busca de substring em um *trie*

- A *trie* da string s pode ser utilizada para identificar se uma string p é ou não substring de s
- O algoritmo é semelhante à busca em uma árvore binária, e tem complexidade $O(m)$, onde $m = |p|$
- Por exemplo, se $s =$ "BANANA" e $p =$ "NAN", partindo da raiz, tem-se "N" na aresta à direita, "A" na única aresta e "N" na aresta seguinte: logo p é substring de s

Busca de substring em um *trie*

- A *trie* da string s pode ser utilizada para identificar se uma string p é ou não substring de s
- O algoritmo é semelhante à busca em uma árvore binária, e tem complexidade $O(m)$, onde $m = |p|$
- Por exemplo, se $s =$ "BANANA" e $p =$ "NAN", partindo da raiz, tem-se "N" na aresta à direita, "A" na única aresta e "N" na aresta seguinte: logo p é substring de s
- Como o nó de chegada é branco, p não é sufixo de s

Busca de substring em um *trie*

- A *trie* da string s pode ser utilizada para identificar se uma string p é ou não substring de s
- O algoritmo é semelhante à busca em uma árvore binária, e tem complexidade $O(m)$, onde $m = |p|$
- Por exemplo, se $s =$ "BANANA" e $p =$ "NAN", partindo da raiz, tem-se "N" na aresta à direita, "A" na única aresta e "N" na aresta seguinte: logo p é substring de s
- Como o nó de chegada é branco, p não é sufixo de s
- Para $p =$ "NAS", o último caractere ("S") não seria encontrado

Busca de substring em um *trie*

- A *trie* da string s pode ser utilizada para identificar se uma string p é ou não substring de s
- O algoritmo é semelhante à busca em uma árvore binária, e tem complexidade $O(m)$, onde $m = |p|$
- Por exemplo, se $s =$ "BANANA" e $p =$ "NAN", partindo da raiz, tem-se "N" na aresta à direita, "A" na única aresta e "N" na aresta seguinte: logo p é substring de s
- Como o nó de chegada é branco, p não é sufixo de s
- Para $p =$ "NAS", o último caractere ("S") não seria encontrado
- O mesmo vale para $p =$ "MAS", porém a falha acontece logo no primeiro caractere

Busca de substring em um *trie*

- A *trie* da string s pode ser utilizada para identificar se uma string p é ou não substring de s
- O algoritmo é semelhante à busca em uma árvore binária, e tem complexidade $O(m)$, onde $m = |p|$
- Por exemplo, se $s =$ "BANANA" e $p =$ "NAN", partindo da raiz, tem-se "N" na aresta à direita, "A" na única aresta e "N" na aresta seguinte: logo p é substring de s
- Como o nó de chegada é branco, p não é sufixo de s
- Para $p =$ "NAS", o último caractere ("S") não seria encontrado
- O mesmo vale para $p =$ "MAS", porém a falha acontece logo no primeiro caractere
- Para $p =$ "NANAN" a busca se encerraria ao atingir um nó nulo

Implementação da busca em $O(m)$ em uma *trie*

```
66 bool search(const Trie& trie, const string& s)
67 {
68     int v = 0;
69
70     for (auto c : s)
71     {
72         auto it = trie[v].find(c);
73
74         if (it == trie[v].end())
75             return false;
76
77         v = it->second;
78     }
79
80     return true;
81 }
```

Trie com marcadores

- A construção proposta para a *trie* permite ao algoritmo de busca descrito apenas determinar se a substring p ocorre ou não em s

Trie com marcadores

- A construção proposta para a *trie* permite ao algoritmo de busca descrito apenas determinar se a substring p ocorre ou não em s
- Se for preciso determinar a posição (ou posições) desta ocorrência, é preciso modificar a construção da *trie*, de modo que seja possível discriminar os nós essenciais dos demais

Trie com marcadores

- A construção proposta para a *trie* permite ao algoritmo de busca descrito apenas determinar se a substring p ocorre ou não em s
- Se for preciso determinar a posição (ou posições) desta ocorrência, é preciso modificar a construção da *trie*, de modo que seja possível discriminar os nós essenciais dos demais
- Uma maneira de fazê-lo é adicionar um caractere terminador (em geral, o caractere '#'), que não pertença a string original

Trie com marcadores

- A construção proposta para a *trie* permite ao algoritmo de busca descrito apenas determinar se a substring p ocorre ou não em s
- Se for preciso determinar a posição (ou posições) desta ocorrência, é preciso modificar a construção da *trie*, de modo que seja possível discriminar os nós essenciais dos demais
- Uma maneira de fazê-lo é adicionar um caractere terminador (em geral, o caractere '#'), que não pertença a string original
- A este caractere estará associado o índice i da string tal que o sufixo terminado no marcador é igual a $S[i..N]$

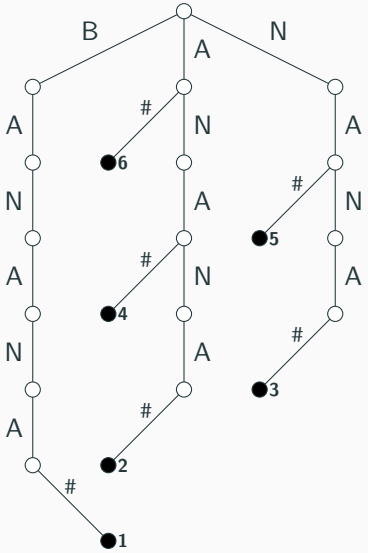
Trie com marcadores

- A construção proposta para a *trie* permite ao algoritmo de busca descrito apenas determinar se a substring p ocorre ou não em s
- Se for preciso determinar a posição (ou posições) desta ocorrência, é preciso modificar a construção da *trie*, de modo que seja possível discriminar os nós essenciais dos demais
- Uma maneira de fazê-lo é adicionar um caractere terminador (em geral, o caractere '#'), que não pertença a string original
- A este caractere estará associado o índice i da string tal que o sufixo terminado no marcador é igual a $S[i..N]$
- Importante notar que o segundo elemento do par terá dois significados distintos: ou será um ponteiro para o próximo nó, ou o índice do sufixo caso o rótulo da aresta seja o terminador

Trie com marcadores

- A construção proposta para a *trie* permite ao algoritmo de busca descrito apenas determinar se a substring p ocorre ou não em s
- Se for preciso determinar a posição (ou posições) desta ocorrência, é preciso modificar a construção da *trie*, de modo que seja possível discriminar os nós essenciais dos demais
- Uma maneira de fazê-lo é adicionar um caractere terminador (em geral, o caractere '#'), que não pertença a string original
- A este caractere estará associado o índice i da string tal que o sufixo terminado no marcador é igual a $S[i..N]$
- Importante notar que o segundo elemento do par terá dois significados distintos: ou será um ponteiro para o próximo nó, ou o índice do sufixo caso o rótulo da aresta seja o terminador
- É preciso atentar a esta diferença na implementação das rotinas de construção e busca

Visualização da *trie* da palavra ‘BANANA’ com terminador



Construção da *trie* com marcador

```
83 Trie build_naive_with_marker(const string& s)
84 {
85     int root = 0, next = 0;
86
87     Trie trie(1);       // Instancia o nó raiz vazio
88
89     for (int i = s.size() - 1; i >= 0; --i)
90     {
91         string suffix = s.substr(i) + '#';
92         int v = root;
93
94         for (auto c : suffix)
95         {
96             if (c == '#')
97             {
98                 trie[v][c] = i;
99                 break;
100            }
101
102            auto it = trie[v].find(c);
```

Construção da *trie* com marcador

```
104             if (it != trie[v].end())
105             {
106                 v = it->second;
107             } else
108             {
109                 trie.push_back({ });
110                 trie[v][c] = ++next;
111                 v = next;
112             }
113         }
114     }
115
116     return trie;
117 }
```

Identificação das ocorrências de uma substring em uma *trie* com marcadores

```
119 vector<int> find(const Trie& trie, const string& s)
120 {
121     vector<int> is;
122     int v = 0;
123 
124     for (auto c : s)
125     {
126         auto it = trie[v].find(c);
127 
128         if (it == trie[v].end())
129             return is;
130 
131         v = it->second;
132     }
133 
134     queue<int> q;
135     q.push(v);
136 
```

Identificação das ocorrências de uma substring em uma *trie* com marcadores

```
137     while (not q.empty())
138     {
139         auto u = q.front();
140         q.pop();
141 
142         for (auto [c, v] : trie[u])
143         {
144             if (c == '#')
145                 is.push_back(v);
146             else
147                 q.push(v);
148         }
149     }
150 
151     return is;
152 }
```

Número de substrings distintas

- Outra informação que pode ser obtida a partir da *trie* é o número de substring distintas de s

Número de substrings distintas

- Outra informação que pode ser obtida a partir da *trie* é o número de substring distintas de s
- Se s tem n caracteres, ela terá $n(n+1)/2$ substrings não vazias, não necessariamente distintas

Número de substrings distintas

- Outra informação que pode ser obtida a partir da *trie* é o número de substring distintas de s
- Se s tem n caracteres, ela terá $n(n+1)/2$ substrings não vazias, não necessariamente distintas
- Estas substrings correspondem a todos os pares de índices (i, j), com $i \leq j$, onde $i, j = 1, 2, \ldots, n$

Número de substrings distintas

- Outra informação que pode ser obtida a partir da *trie* é o número de substring distintas de s
- Se s tem n caracteres, ela terá $n(n+1)/2$ substrings não vazias, não necessariamente distintas
- Estas substrings correspondem a todos os pares de índices (i, j), com $i \leq j$, onde $i, j = 1, 2, \ldots, n$
- Em uma *trie*, qualquer nó, exceto a raiz, representa uma substring distinta, formada pela concatenação dos rótulos do caminho da raiz até o nó em questão

Contagem de substrings distintas em uma *trie*

```cpp
size_t unique_substrings(const Trie& trie)
{
    size_t count = 0;
    queue<int> q;
    q.push(0);

    while (not q.empty()) {          // BFS para contabilizar o número de nós
        auto u = q.front();
        q.pop();

        for (auto [c, v] : trie[u]) {
            if (c != '#') {
                ++count;
                q.push(v);
            }
        }
    }

    return count;
}
```

Considerações sobre a construção *naive* da *trie*

- Embora as buscas apresentadas satisfaçam o terceiro critério para uma boa árvore de sufixo, os outros dois critérios não são satisfeitos

Considerações sobre a construção *naive* da *trie*

- Embora as buscas apresentadas satisfaçam o terceiro critério para uma boa árvore de sufixo, os outros dois critérios não são satisfeitos
- Se a string s inicial tem N caracteres, a construção e o espaço em memória são $O(N^2)$.

Considerações sobre a construção *naive* da *trie*

- Embora as buscas apresentadas satisfaçam o terceiro critério para uma boa árvore de sufixo, os outros dois critérios não são satisfeitos
- Se a string s inicial tem N caracteres, a construção e o espaço em memória são $O(N^2)$.
- É possível melhorar a complexidade da construção da *trie*, por meio de um algoritmo *online*

Considerações sobre a construção *naive* da *trie*

- Embora as buscas apresentadas satisfaçam o terceiro critério para uma boa árvore de sufixo, os outros dois critérios não são satisfeitos
- Se a string s inicial tem N caracteres, a construção e o espaço em memória são $O(N^2)$.
- É possível melhorar a complexidade da construção da *trie*, por meio de um algoritmo *online*
- O espaço em memória, contudo, permanecerá $O(N^2)$, por conta da representação de cada caractere por meio de uma aresta

Considerações sobre a construção *naive* da *trie*

- Embora as buscas apresentadas satisfaçam o terceiro critério para uma boa árvore de sufixo, os outros dois critérios não são satisfeitos
- Se a string s inicial tem N caracteres, a construção e o espaço em memória são $O(N^2)$.
- É possível melhorar a complexidade da construção da *trie*, por meio de um algoritmo *online*
- O espaço em memória, contudo, permanecerá $O(N^2)$, por conta da representação de cada caractere por meio de uma aresta
- Assim, a redução de memória só é possível por meio de uma mudança na representação dos caracteres e dos sufixos, o que leva a uma outra estrutura, a *suffix trie*

Construção *online* **da** *trie*

Algoritmo *online* para construção de uma *trie*

- A construção pode ser melhorada por meio de um algoritmo *online*

Algoritmo *online* para construção de uma *trie*

- A construção pode ser melhorada por meio de um algoritmo *online*
- A ideia principal é, ao invés de construir toda a *trie* de s de uma só vez, construí-la a partir da *trie* de $s[1..(N-1)]$

Algoritmo *online* para construção de uma *trie*

- A construção pode ser melhorada por meio de um algoritmo *online*
- A ideia principal é, ao invés de construir toda a *trie* de s de uma só vez, construí-la a partir da *trie* de $s[1..(N-1)]$
- Seja T_j a *trie* do prefixo $s[1..j]$ de s

Algoritmo *online* para construção de uma *trie*

- A construção pode ser melhorada por meio de um algoritmo *online*
- A ideia principal é, ao invés de construir toda a *trie* de s de uma só vez, construí-la a partir da *trie* de $s[1..(N-1)]$
- Seja T_j a *trie* do prefixo $s[1..j]$ de s
- A principal observação a ser feita é que T_j pode ser construída a partir da inserção do caractere $s[j]$ em T_{j-1}, nas arestas dos novos nós a serem adicionados aos nós essenciais de T_{j-1}, quando for o caso

Algoritmo *online* para construção de uma *trie*

- A construção pode ser melhorada por meio de um algoritmo *online*
- A ideia principal é, ao invés de construir toda a *trie* de s de uma só vez, construí-la a partir da *trie* de $s[1..(N-1)]$
- Seja T_j a *trie* do prefixo $s[1..j]$ de s
- A principal observação a ser feita é que T_j pode ser construída a partir da inserção do caractere $s[j]$ em T_{j-1}, nas arestas dos novos nós a serem adicionados aos nós essenciais de T_{j-1}, quando for o caso
- Isto acontecerá quando o nó essencial não tem um filho ligado a ele por meio de uma aresta cujo rótulo é $s[j]$

Algoritmo *online* para construção de uma *trie*

- A construção pode ser melhorada por meio de um algoritmo *online*
- A ideia principal é, ao invés de construir toda a *trie* de s de uma só vez, construí-la a partir da *trie* de $s[1..(N-1)]$
- Seja T_j a *trie* do prefixo $s[1..j]$ de s
- A principal observação a ser feita é que T_j pode ser construída a partir da inserção do caractere $s[j]$ em T_{j-1}, nas arestas dos novos nós a serem adicionados aos nós essenciais de T_{j-1}, quando for o caso
- Isto acontecerá quando o nó essencial não tem um filho ligado a ele por meio de uma aresta cujo rótulo é $s[j]$
- O ponto principal, portanto, se torna determinar a sequência dos nós essenciais $v_k, v_{k-1}, \ldots, v_2, v_1, v_0$, onde v_i corresponde ao prefixo $s[1..i]$ de T_k

Algoritmo *online* para construção de uma *trie*

- A construção pode ser melhorada por meio de um algoritmo *online*
- A ideia principal é, ao invés de construir toda a *trie* de s de uma só vez, construí-la a partir da *trie* de $s[1..(N-1)]$
- Seja T_j a *trie* do prefixo $s[1..j]$ de s
- A principal observação a ser feita é que T_j pode ser construída a partir da inserção do caractere $s[j]$ em T_{j-1}, nas arestas dos novos nós a serem adicionados aos nós essenciais de T_{j-1}, quando for o caso
- Isto acontecerá quando o nó essencial não tem um filho ligado a ele por meio de uma aresta cujo rótulo é $s[j]$
- O ponto principal, portanto, se torna determinar a sequência dos nós essenciais $v_k, v_{k-1}, \ldots, v_2, v_1, v_0$, onde v_i corresponde ao prefixo $s[1..i]$ de T_k
- Esta tarefa pode ser feita por meio do uso de *links* de sufixos

Links de sufixos

- Seja u um nó de T_k

Links de sufixos

- Seja u um nó de T_k
- Defina o *link* de sufixo $suf(u) = v$, onde v é um nó cujo caminho $p(v)$ da raiz até v é igual ao caminho de $[2..p(u)]$, isto é, o caminho $p(u)$ sem o seu primeiro caractere

Links de sufixos

- Seja u um nó de T_k
- Defina o *link* de sufixo $suf(u) = v$, onde v é um nó cujo caminho $p(v)$ da raiz até v é igual ao caminho de $[2..p(u)]$, isto é, o caminho $p(u)$ sem o seu primeiro caractere
- Por definição, se a raiz de T_k corresponde ao vértice v_0, então $suf(v_0) = v_0$

Links de sufixos

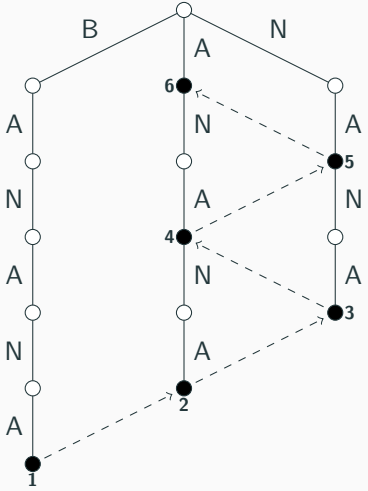
- Seja u um nó de T_k
- Defina o *link* de sufixo $suf(u) = v$, onde v é um nó cujo caminho $p(v)$ da raiz até v é igual ao caminho de $[2..p(u)]$, isto é, o caminho $p(u)$ sem o seu primeiro caractere
- Por definição, se a raiz de T_k corresponde ao vértice v_0, então $suf(v_0) = v_0$
- Contudo, interpretar $suf(v_0)$ como `nullptr` pode ser mais interessante na implementação do algoritmo

Links de sufixos

- Seja u um nó de T_k
- Defina o *link* de sufixo $suf(u) = v$, onde v é um nó cujo caminho $p(v)$ da raiz até v é igual ao caminho de $[2..p(u)]$, isto é, o caminho $p(u)$ sem o seu primeiro caractere
- Por definição, se a raiz de T_k corresponde ao vértice v_0, então $suf(v_0) = v_0$
- Contudo, interpretar $suf(v_0)$ como `nullptr` pode ser mais interessante na implementação do algoritmo
- Esta definição leva a igualdade

$$(v_k, v_{k-1}, \ldots, v_0) = (v_k, suf(v_k), suf^2(v_k), \ldots, suf^{k-1}(v_k))$$

Visualização dos *links* de sufixos da *trie* da palavra 'BANANA'



Construção *online* da *trie*

A construção *online* de T_k a partir de T_{k-1} pode ser feita por meio dos seguintes passos:

Construção *online* da *trie*

A construção *online* de T_k a partir de T_{k-1} pode ser feita por meio dos seguintes passos:

1. identifique os nós essenciais $v_{k-1}, v_{k-2}, \ldots, v_1, v_0$ de T_{k-1}, em ordem decrescente em relação ao tamanho do sufixo relacionado

Construção *online* da *trie*

A construção *online* de T_k a partir de T_{k-1} pode ser feita por meio dos seguintes passos:

1. identifique os nós essenciais $v_{k-1}, v_{k-2}, \ldots, v_1, v_0$ de T_{k-1}, em ordem decrescente em relação ao tamanho do sufixo relacionado
2. escolha os nós v_i consecutivos até que se atinja um nó v_t tal que exista um filho de v_t unido por uma aresta cujo rótulo é $s[k]$

Construção *online* da *trie*

A construção *online* de T_k a partir de T_{k-1} pode ser feita por meio dos seguintes passos:

1. identifique os nós essenciais $v_{k-1}, v_{k-2}, \ldots, v_1, v_0$ de T_{k-1}, em ordem decrescente em relação ao tamanho do sufixo relacionado
2. escolha os nós v_i consecutivos até que se atinja um nó v_t tal que exista um filho de v_t unido por uma aresta cujo rótulo é $s[k]$
3. para cada um dos nós escolhidos, crie novos nós filhos ligados por arestas cujos rótulos sejam $s[k]$

Construção *online* da *trie*

A construção *online* de T_k a partir de T_{k-1} pode ser feita por meio dos seguintes passos:

1. identifique os nós essenciais $v_{k-1}, v_{k-2}, \ldots, v_1, v_0$ de T_{k-1}, em ordem decrescente em relação ao tamanho do sufixo relacionado
2. escolha os nós v_i consecutivos até que se atinja um nó v_t tal que exista um filho de v_t unido por uma aresta cujo rótulo é $s[k]$
3. para cada um dos nós escolhidos, crie novos nós filhos ligados por arestas cujos rótulos sejam $s[k]$
4. atualize os *links* de sufixos para os novos nós recém-criados

Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 0$

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1

Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 1$

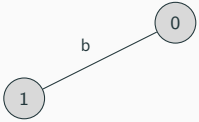
$c =$ 'b'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1

Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 1$

$c =$ 'b'

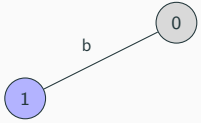


i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	1	0

Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 2$

$c =$ 'a'



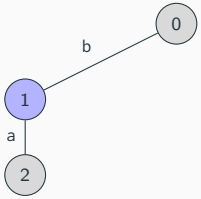
i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	1	0

Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 2$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	1	0
2	2	0

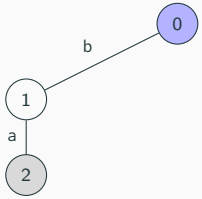


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 2$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	1	0
2	2	0

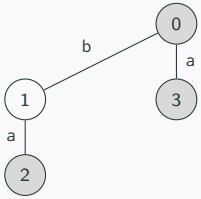


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 2$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	2	3

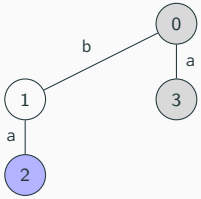


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 3$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	2	3

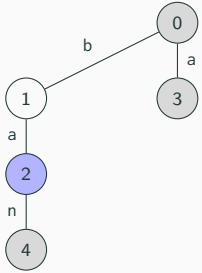


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 3$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	2	3
3	4	0

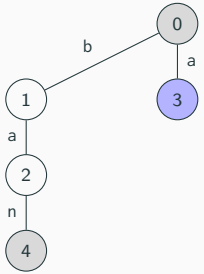


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 3$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	2	3
3	4	0

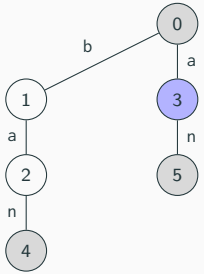


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 3$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	5	3
3	4	5

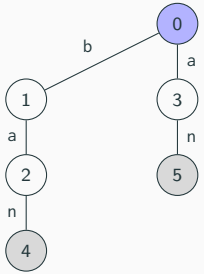


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 3$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	5	3
3	4	5

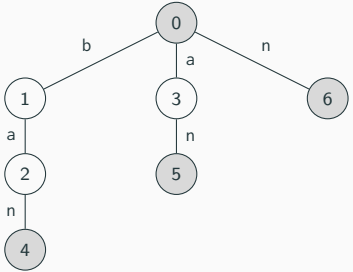


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 3$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	4	5

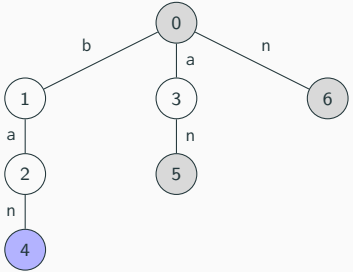


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 4$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	4	5

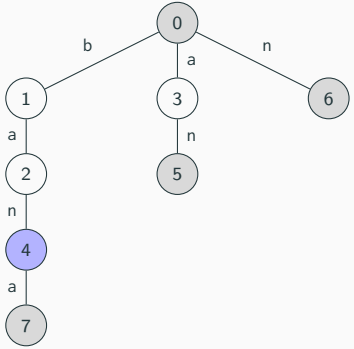


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 4$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	4	5
4	7	0

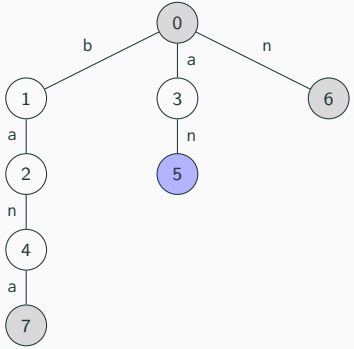


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 4$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	4	5
4	7	0

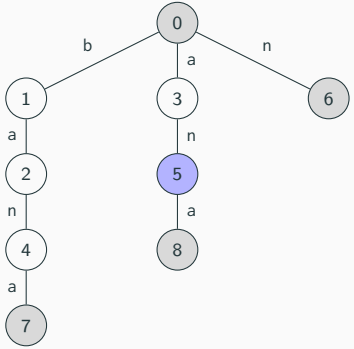


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 4$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	8	5
4	7	8

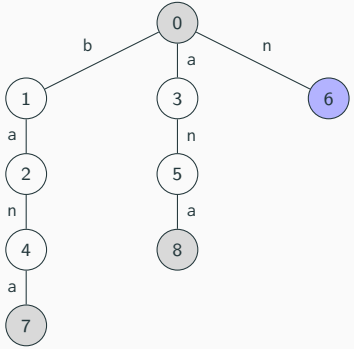


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 4$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	8	5
4	7	8

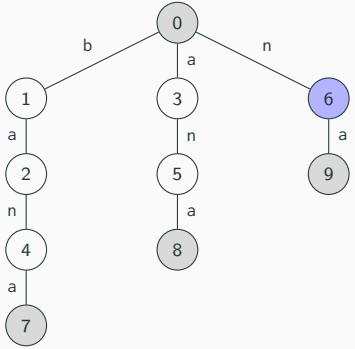


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 4$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	9	6
3	8	9
4	7	8

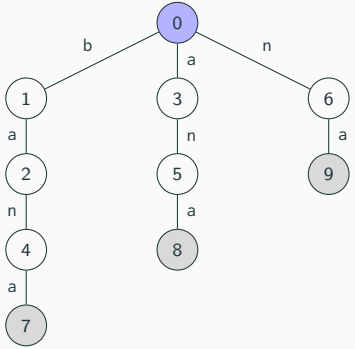


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 4$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	9	6
3	8	9
4	7	8

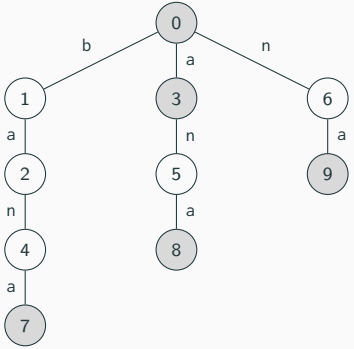


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 4$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	9	3
3	8	9
4	7	8

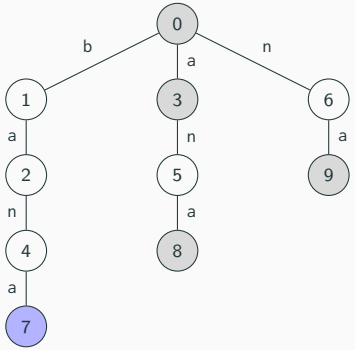


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 5$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	9	3
3	8	9
4	7	8

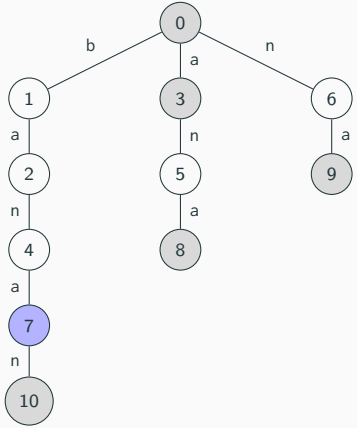


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 5$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	9	3
3	8	9
4	7	8
5	10	0

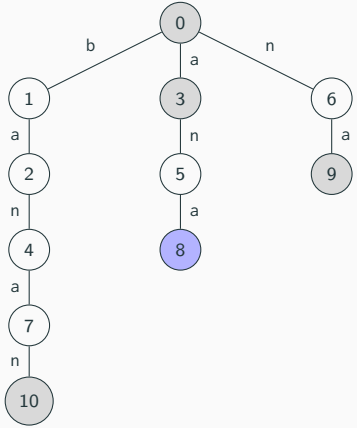


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 5$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	9	3
3	8	9
4	7	8
5	10	0

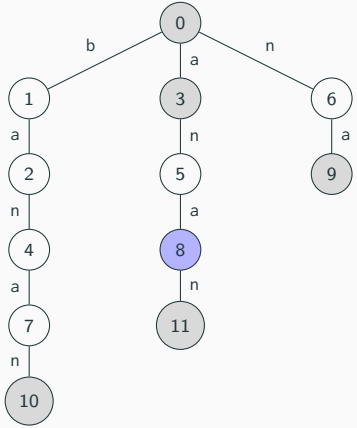


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 5$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	9	3
3	8	9
4	11	8
5	10	11

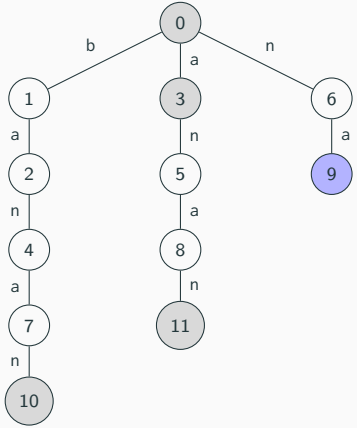


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 5$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	9	3
3	8	9
4	11	8
5	10	11

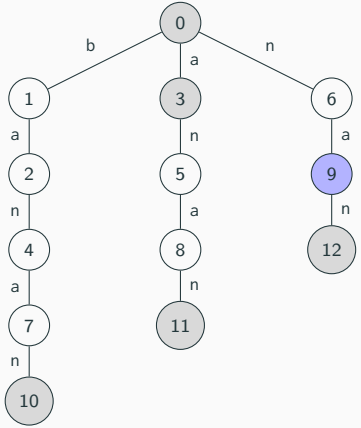


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 5$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	9	3
3	12	9
4	11	12
5	10	11

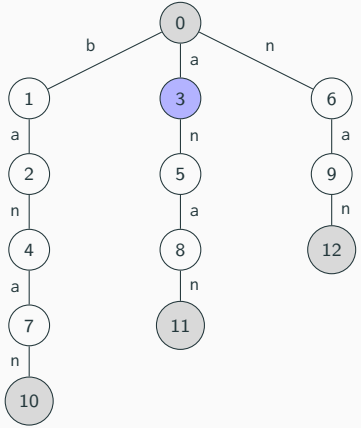


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 5$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	9	3
3	12	9
4	11	12
5	10	11

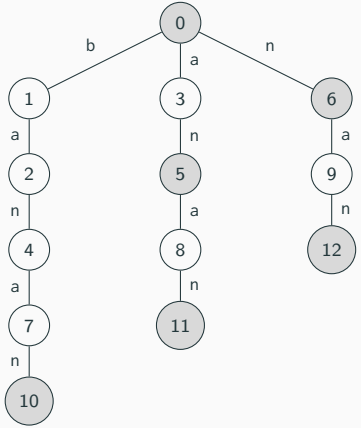


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 5$

$c =$ 'n'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	12	5
4	11	12
5	10	11

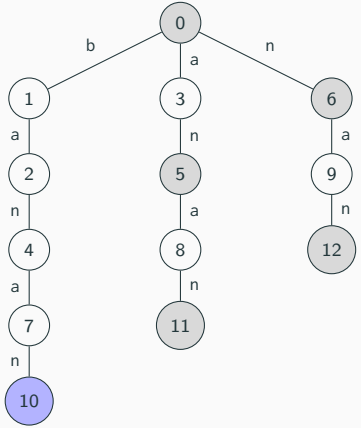


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 6$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	12	5
4	11	12
5	10	11

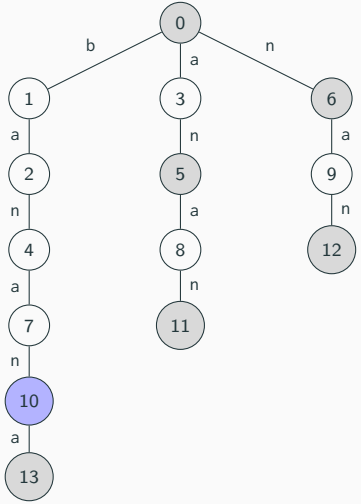


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 6$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	12	5
4	11	12
5	10	11
6	13	0

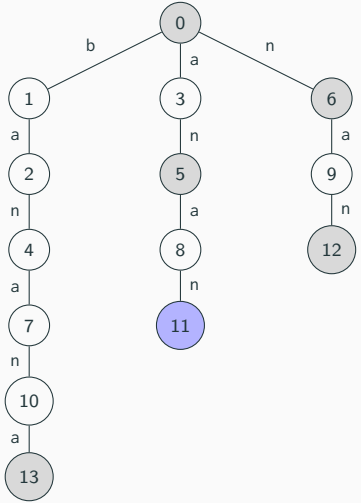


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 6$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	12	5
4	11	12
5	10	11
6	13	0

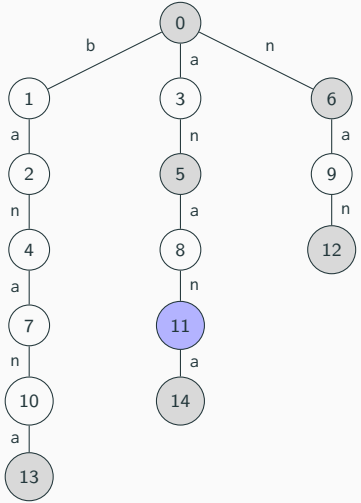


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 6$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	12	5
4	11	12
5	14	11
6	13	14

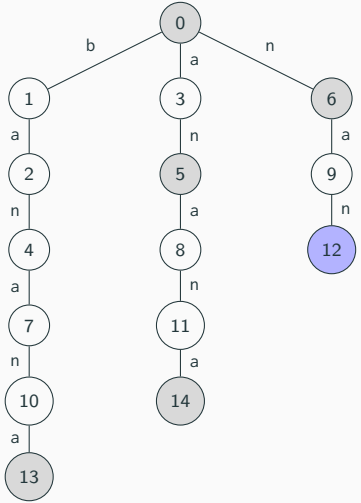


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 6$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	12	5
4	11	12
5	14	11
6	13	14

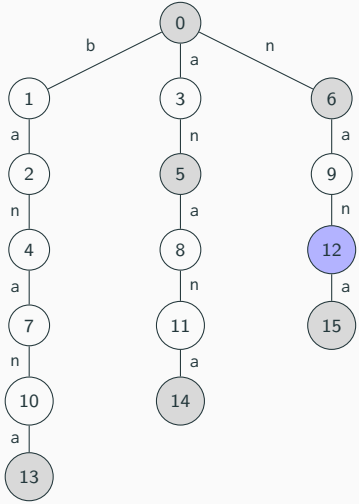


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 6$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	12	5
4	15	12
5	14	15
6	13	14

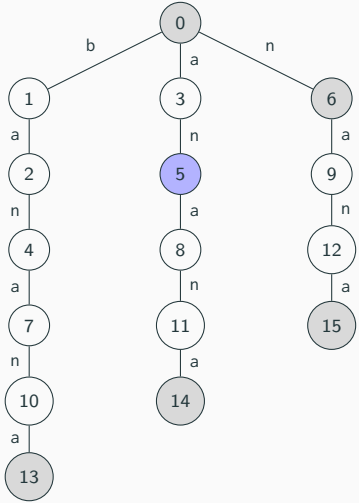


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 6$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	6	0
2	5	6
3	12	5
4	15	12
5	14	15
6	13	14

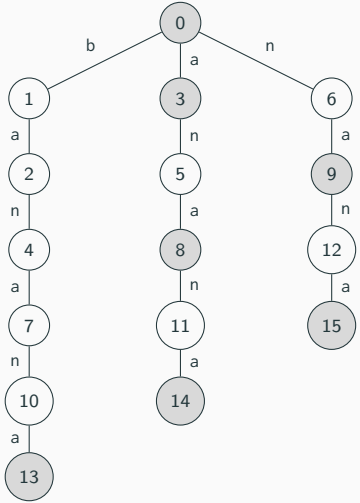


Visualização da construção *online* da *trie*

$k = 6$

$c =$ 'a'

i	v_i	$suf[v_i]$
0	0	-1
1	3	0
2	9	3
3	8	9
4	15	8
5	14	15
6	13	14



Implementação da construção *online* da *trie*

```
Trie build_online(const string& s)
{
    int next = 0, deepest = 0;  // deepest = v_(k-1)
    string S = s + '#';         // adiciona o terminador
    vector<int> suf { -1 };     // suf[root] = NULL
    Trie trie(1);               // Instancia o nó raiz vazio

    for (size_t i = 0; i < S.size(); ++i)
    {
        // Calculo de Tk, com k = i + 1
        char c = S[i];
        int u = deepest;

        while (u >= 0)
        {
            // Procura por c no nó u
            auto it = trie[u].find(c);

```

Implementação da construção *online* da *trie*

```
27              // Caso #1: link não encontrado
28              if (it == trie[u].end())
29              {
30                  // Adiciona um novo nó, com aresta c
31                  trie.push_back({ });
32                  trie[u][c] = ++next;
33
34                  // valor sentinela: será corrigido na próxima iteração
35                  suf.push_back(0);
36
37                  if (u != deepest)
38                      suf[next - 1] = next;   // correção atrasada
39                  else
40                      deepest = next;         // v_k é o nó recém-criado
41              } else
42              {
43                  // Caso #2: link encontrado: suf[v_t] aponta para ele
44                  suf[next] = it->second;
45                  break;
46              }
```

Implementação da construção *online* da *trie*

```
48              u = suf[u];     // v_(r-1) = suf[v_r]
49          }
50      }
51
52      return trie;
53  }
```

Considerações sobre a construção *online* da *trie*

- Observe que, na implementação proposta, os valores v_k são usandos implicitamente

Considerações sobre a construção *online* da *trie*

- Observe que, na implementação proposta, os valores v_k são usandos implicitamente
- Para uma string s de tamanho n, a construção *online* da *trie* tem complexidade $O(|T_n|)$

Considerações sobre a construção *online* da *trie*

- Observe que, na implementação proposta, os valores v_k são usandos implicitamente
- Para uma string s de tamanho n, a construção *online* da *trie* tem complexidade $O(|T_n|)$
- Embora ainda não seja a complexidade desejada ($O(n)$), esta estratégia será pode ser utilizada, com alguns ajustes, para atingir tal complexidade

Considerações sobre a construção *online* da *trie*

- Observe que, na implementação proposta, os valores v_k são usandos implicitamente
- Para uma string s de tamanho n, a construção *online* da *trie* tem complexidade $O(|T_n|)$
- Embora ainda não seja a complexidade desejada ($O(n)$), esta estratégia será pode ser utilizada, com alguns ajustes, para atingir tal complexidade
- Para reduzir o tamanho em memória da *trie* uma estratégia possível é compactar as cadeias, onde uma cadeia é o maior caminho possível composto por nós não-essenciais com grau de saída um

Considerações sobre a construção *online* da *trie*

- Observe que, na implementação proposta, os valores v_k são usandos implicitamente
- Para uma string s de tamanho n, a construção *online* da *trie* tem complexidade $O(|T_n|)$
- Embora ainda não seja a complexidade desejada ($O(n)$), esta estratégia será pode ser utilizada, com alguns ajustes, para atingir tal complexidade
- Para reduzir o tamanho em memória da *trie* uma estratégia possível é compactar as cadeias, onde uma cadeia é o maior caminho possível composto por nós não-essenciais com grau de saída um
- Esta compactação resulta em uma nova estrutura, denominada *suffix tree*

Referências

1. CP Algorithms. Suffix Tree. Ukkonen's Algorithm, acesso em 02/10/2019.
2. **CROCHEMORE**, Maxime; **RYTTER**, Wojciech. *Jewels of Stringology: Text Algorithms*, WSPC, 2002.
3. **ROY, TUSHAR**. Trie, acesso em 02/10/2019.
4. **HALIM**, Steve; **HALIM**, Felix. *Competitive Programming 3*, Lulu, 2013.
5. Wikipédia. Trie, acesso em 02/10/2019.