



Universidade Federal
de Campina Grande

Processamento Adaptativo de Sinais

Algoritmo LMS

Edson P. da Silva

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPgEE).

Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica (UAEE)

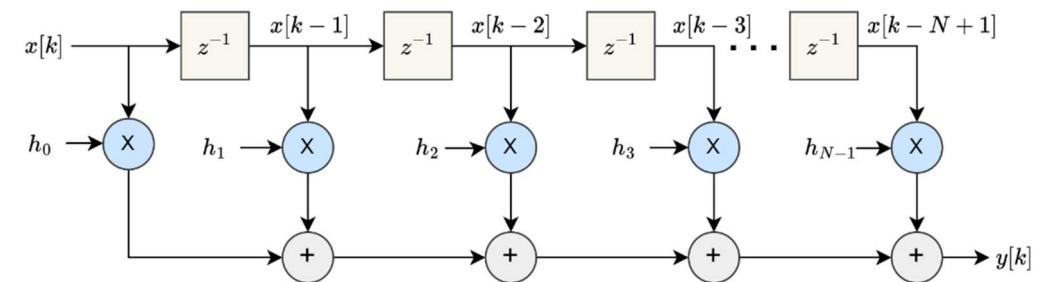
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)



Sumário

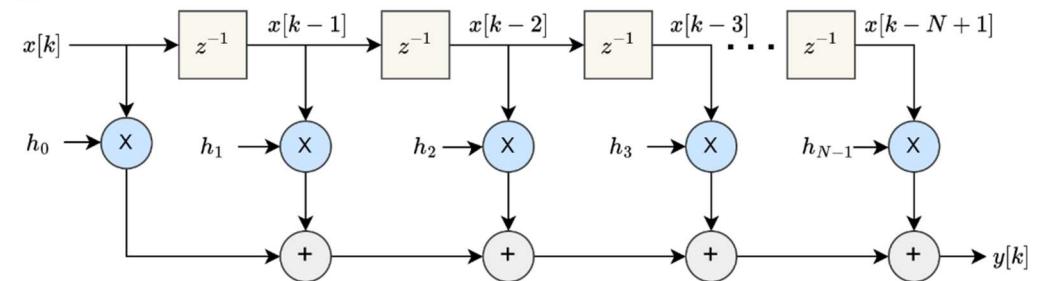
1. Filtro de Wiener.
2. Algoritmo LMS.
3. Propriedades do algoritmo LMS.
 - Convergência do vetor gradiente estocástico.
 - Convergência do vetor de coeficientes.
 - Comportamento do sinal de erro.
 - Comportamento em ambientes não-estacionários.

Filtro de Wiener



Filtro de Wiener

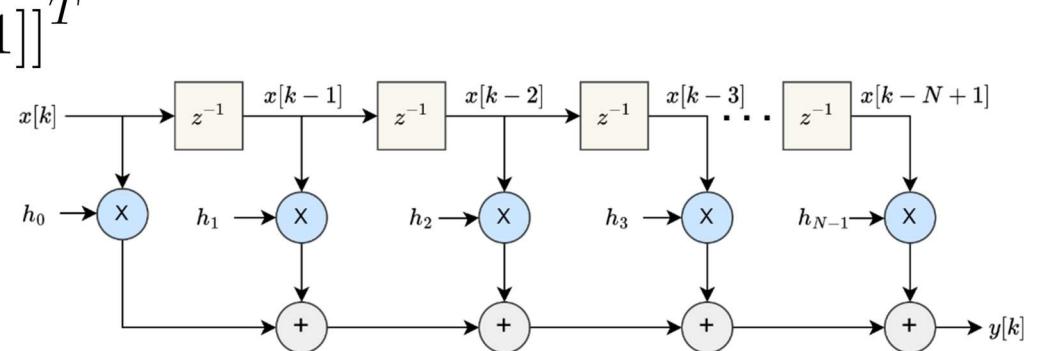
$$\mathbf{x}[k] = [x[k], x[k-1], \dots, x[k-N+1]]^T$$



Filtro de Wiener

$$\mathbf{x}[k] = [x[k], x[k-1], \dots, x[k-N+1]]^T$$

$$\mathbf{h}[k] = [h_0[k], h_1[k], \dots, h_{N-1}[k]]^T$$

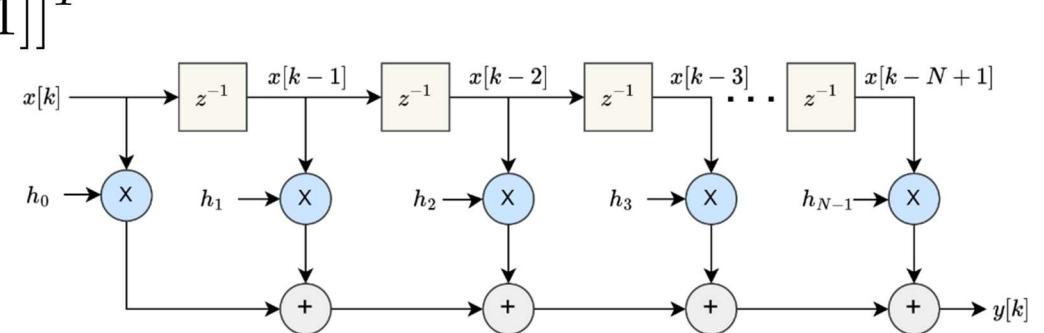


Filtro de Wiener

$$\mathbf{x}[k] = [x[k], x[k-1], \dots, x[k-N+1]]^T$$

$$\mathbf{h}[k] = [h_0[k], h_1[k], \dots, h_{N-1}[k]]^T$$

$$y[k] = \sum_{i=0}^{N-1} h_i[k] x[k-i] = \mathbf{h}^T[k] \mathbf{x}[k]$$

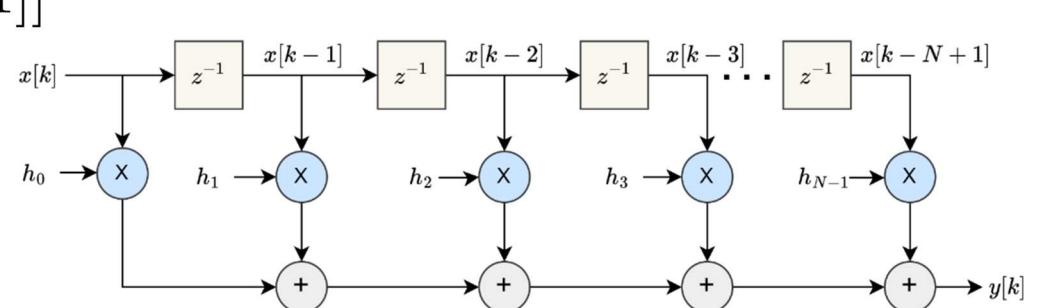


Filtro de Wiener

$$\mathbf{x}[k] = [x[k], x[k-1], \dots, x[k-N+1]]^T$$

$$\mathbf{h}[k] = [h_0[k], h_1[k], \dots, h_{N-1}[k]]^T$$

$$y[k] = \sum_{i=0}^{N-1} h_i[k] x[k-i] = \mathbf{h}^T[k] \mathbf{x}[k]$$



Assumindo-se que os processos que geram a entrada do filtro $\mathbf{x}[k] \in \mathbb{R}^N$ (\mathbb{C}^N) e o sinal de referência $d[k]$ são conjuntamente WSS, o vetor de coeficientes \mathbf{h}_{opt} que minimiza o erro médio quadrático (*mean squared error* - MSE) entre as saídas do filtro $y[k]$ e o sinal de referência correspondente $d[k]$

$$J(\mathbf{h}) = \mathbb{E} [e^2[k]] = \mathbb{E} [(d[k] - y[k])^2]$$

é dado por $\mathbf{h}_{opt} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}$, em que $\mathbf{R} = \mathbb{E} [\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k]]$ e $\mathbf{p} = \mathbb{E} [d[k] \mathbf{x}[k]]$.



Universidade Federal
de Campina Grande

Filtro de Wiener



Universidade Federal
de Campina Grande

Filtro de Wiener

- Determinar R e p pode ser uma tarefa muito complicada.

Filtro de Wiener

- Determinar \mathbf{R} e \mathbf{p} pode ser uma tarefa muito complicada.
- Na prática, se boas aproximações $\hat{\mathbf{R}}$ da matrix \mathbf{R} e $\hat{\mathbf{p}}$ do vetor \mathbf{p} podem ser obtidas, pode-se recorrer a algoritmos baseados no gradiente descendente que busquem iterativamente \mathbf{h}_{opt} .

Filtro de Wiener

- Determinar \mathbf{R} e \mathbf{p} pode ser uma tarefa muito complicada.
- Na prática, se boas aproximações $\hat{\mathbf{R}}$ da matrix \mathbf{R} e $\hat{\mathbf{p}}$ do vetor \mathbf{p} podem ser obtidas, pode-se recorrer a algoritmos baseados no gradiente descendente que busquem iterativamente \mathbf{h}_{opt} .
- Esse é o princípio do algoritmo mais utilizado em problemas de filtragem adaptativa: o algoritmo LMS (*least-mean-square* - LMS).

Algoritmo LMS



Universidade Federal
de Campina Grande

Algoritmo LMS

Baseado na solução de Wiener, o algoritmo do gradiente descendente pode ser definido como:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}[k+1] &= \mathbf{h}[k] - \mu \nabla_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] \\ \mathbf{h}[k+1] &= \mathbf{h}[k] - \mu (2\mathbf{R}\mathbf{h}[k] - 2\mathbf{p})\end{aligned}$$

Algoritmo LMS

Baseado na solução de Wiener, o algoritmo do gradiente descendente pode ser definido como:

$$\mathbf{h}[k + 1] = \mathbf{h}[k] - \mu \nabla_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k]$$

$$\mathbf{h}[k + 1] = \mathbf{h}[k] - \mu (2\hat{\mathbf{R}}\mathbf{h}[k] - 2\hat{\mathbf{p}})$$

Se as aproximações $\hat{\mathbf{R}}[k]$ e $\hat{\mathbf{p}}[k]$ são conhecidas no instante k , então

$$\mathbf{h}[k + 1] = \mathbf{h}[k] - \mu (2\hat{\mathbf{R}}[k]\mathbf{h}[k] - 2\hat{\mathbf{p}}[k])$$

Algoritmo LMS

Baseado na solução de Wiener, o algoritmo do gradiente descendente pode ser definido como:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}[k+1] &= \mathbf{h}[k] - \mu \nabla_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] \\ \mathbf{h}[k+1] &= \mathbf{h}[k] - \mu (2\hat{\mathbf{R}}\mathbf{h}[k] - 2\hat{\mathbf{p}})\end{aligned}$$

Se as aproximações $\hat{\mathbf{R}}[k]$ e $\hat{\mathbf{p}}[k]$ são conhecidas no instante k , então

$$\mathbf{h}[k+1] = \mathbf{h}[k] - \mu (2\hat{\mathbf{R}}[k]\mathbf{h}[k] - 2\hat{\mathbf{p}}[k])$$

Uma possibilidade é utilizar as *estimativas instantâneas*

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{R}}[k] &= \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] \\ \hat{\mathbf{p}}[k] &= d[k]\mathbf{x}[k]\end{aligned}$$

Algoritmo LMS



Universidade Federal
de Campina Grande

Algoritmo LMS

Nesse caso, teremos que uma aproximação $\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k]$ para o gradiente $\nabla_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k]$ é dada por:

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] &= 2\hat{\mathbf{R}}[k]\mathbf{h}[k] - 2\hat{\mathbf{p}}[k] \\ &= 2\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k] - 2d[k]\mathbf{x}[k]\end{aligned}$$

Algoritmo LMS

Nesse caso, teremos que uma aproximação $\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k]$ para o gradiente $\nabla_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k]$ é dada por:

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] &= 2\hat{\mathbf{R}}[k]\mathbf{h}[k] - 2\hat{\mathbf{p}}[k] \\ &= 2\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k] - 2d[k]\mathbf{x}[k] \\ &= 2\mathbf{x}[k]y[k] - 2d[k]\mathbf{x}[k]\end{aligned}$$

Algoritmo LMS

Nesse caso, teremos que uma aproximação $\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k]$ para o gradiente $\nabla_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k]$ é dada por:

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] &= 2\hat{\mathbf{R}}[k]\mathbf{h}[k] - 2\hat{\mathbf{p}}[k] \\ &= 2\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k] - 2d[k]\mathbf{x}[k] \\ &= 2\mathbf{x}[k]y[k] - 2d[k]\mathbf{x}[k] \\ &= -2(d[k] - y[k])\mathbf{x}[k]\end{aligned}$$

Algoritmo LMS

Nesse caso, teremos que uma aproximação $\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k]$ para o gradiente $\nabla_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k]$ é dada por:

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] &= 2\hat{\mathbf{R}}[k]\mathbf{h}[k] - 2\hat{\mathbf{p}}[k] \\&= 2\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k] - 2d[k]\mathbf{x}[k] \\&= 2\mathbf{x}[k]y[k] - 2d[k]\mathbf{x}[k] \\&= -2(d[k] - y[k])\mathbf{x}[k] \\\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] &= -2e[k]\mathbf{x}[k]\end{aligned}$$

Algoritmo LMS

Nesse caso, teremos que uma aproximação $\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k]$ para o gradiente $\nabla_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k]$ é dada por:

$$\begin{aligned}
 \hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] &= 2\hat{\mathbf{R}}[k]\mathbf{h}[k] - 2\hat{\mathbf{p}}[k] \\
 &= 2\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k] - 2d[k]\mathbf{x}[k] \\
 &= 2\mathbf{x}[k]y[k] - 2d[k]\mathbf{x}[k] \\
 &= -2(d[k] - y[k])\mathbf{x}[k] \\
 \hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] &= -2e[k]\mathbf{x}[k]
 \end{aligned}$$

O algoritmo de gradiente descendente (estocástico!) resultante é conhecido como LMS:

$$\mathbf{h}[k + 1] = \mathbf{h}[k] + 2\mu e[k]\mathbf{x}[k]$$

Algoritmo LMS

Algorithm 1 Algoritmo LMS

- 1: **Entrada:** Sinal desejado $d[k]$, sinal de entrada $x[k]$, passo de adaptação μ , ordem do filtro N .
- 2: **Iniciar:** Coeficientes do filtro $\mathbf{h} = [0, 0, \dots, 0]$ (comprimento N)
- 3: ▷ Podem ser inicializados de maneira arbitrária.
- 4: **for** $k = N$ até $M - 1$ **do** ▷ Onde M é o comprimento do sinal
- 5: Construir o vetor de entrada $\mathbf{x}[k] = [x[k], x[k - 1], \dots, x[k - N + 1]]^T$
- 6: Calcular a saída do filtro:

$$y[k] = \mathbf{h}^T \mathbf{x}[k]$$

- 7: Calcular o sinal de erro:

$$e[k] = d[k] - y[k]$$

- 8: Atualizar os coeficientes do filtro:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h} + \mu e[k] \mathbf{x}[k]$$

- 9: **end for**
 - 10: **Saída:** Coeficientes finais do filtro \mathbf{h}
-

Algoritmo LMS



Universidade Federal
de Campina Grande



Universidade Federal
de Campina Grande

Algoritmo LMS

- O algoritmo LMS é amplamente utilizado em várias aplicações de filtragem adaptativa devido à sua simplicidade computacional. Existem muitos outros algoritmos que têm o LMS como origem.

Algoritmo LMS

- O algoritmo LMS é amplamente utilizado em várias aplicações de filtragem adaptativa devido à sua simplicidade computacional. Existem muitos outros algoritmos que têm o LMS como origem.
- Normalmente, cada iteração do LMS requer $N + 1$ multiplicações para a atualização dos coeficientes do filtro e N multiplicações para o cálculo do erro.

Algoritmo LMS

- O algoritmo LMS é amplamente utilizado em várias aplicações de filtragem adaptativa devido à sua simplicidade computacional. Existem muitos outros algoritmos que têm o LMS como origem.
- Normalmente, cada iteração do LMS requer $N + 1$ multiplicações para a atualização dos coeficientes do filtro e N multiplicações para o cálculo do erro.
- Para o caso de ambiente estacionário, é possível demonstrar que o algoritmo LMS alcançará convergência não enviesada na média para a solução de Wiener.

Algoritmo LMS

- O algoritmo LMS é amplamente utilizado em várias aplicações de filtragem adaptativa devido à sua simplicidade computacional. Existem muitos outros algoritmos que têm o LMS como origem.
- Normalmente, cada iteração do LMS requer $N + 1$ multiplicações para a atualização dos coeficientes do filtro e N multiplicações para o cálculo do erro.
- Para o caso de ambiente estacionário, é possível demonstrar que o algoritmo LMS alcançará convergência não enviesada na média para a solução de Wiener.
- O algoritmo LMS possui comportamento estável quando implementado com aritmética de precisão finita.

Convergência do vetor gradiente estocástico

Convergência do gradiente estocástico:

$$\hat{\nabla}_{\boldsymbol{h}} J(\boldsymbol{h})[k] = 2 \left[\boldsymbol{x}[k] \boldsymbol{x}^T[k] \boldsymbol{h}[k] - d[k] \boldsymbol{x}[k] \right]$$

Convergência do vetor gradiente estocástico

Convergência do gradiente estocástico:

$$\hat{\nabla}_{\boldsymbol{h}} J(\boldsymbol{h})[k] = 2 \left[\boldsymbol{x}[k] \boldsymbol{x}^T[k] \boldsymbol{h}[k] - d[k] \boldsymbol{x}[k] \right]$$

$$\mathbb{E} \left[\hat{\nabla}_{\boldsymbol{h}} J(\boldsymbol{h})[k] \right] = 2\mathbb{E} \left[\boldsymbol{x}[k] \boldsymbol{x}^T[k] \right] \boldsymbol{h}[k] - \mathbb{E} [d[k] \boldsymbol{x}[k]]$$

Convergência do vetor gradiente estocástico



Universidade Federal
de Campina Grande

Convergência do gradiente estocástico:

$$\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] = 2 \left[\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}[k] - d[k] \mathbf{x}[k] \right]$$

$$\mathbb{E} \left[\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] \right] = 2\mathbb{E} \left[\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k] \right] \mathbf{h}[k] - \mathbb{E} [d[k] \mathbf{x}[k]]$$

$$\mathbb{E} \left[\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] \right] = \nabla_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k], \text{ estimador não-enviesado.}$$

Convergência do vetor gradiente estocástico

Convergência do gradiente estocástico:

$$\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] = 2 \left[\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}[k] - d[k] \mathbf{x}[k] \right]$$

$$\mathbb{E} \left[\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] \right] = 2 \mathbb{E} \left[\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k] \right] \mathbf{h}[k] - \mathbb{E} [d[k] \mathbf{x}[k]]$$

$$\mathbb{E} \left[\hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k] \right] = \nabla_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k], \text{ estimador não-enviesado.}$$

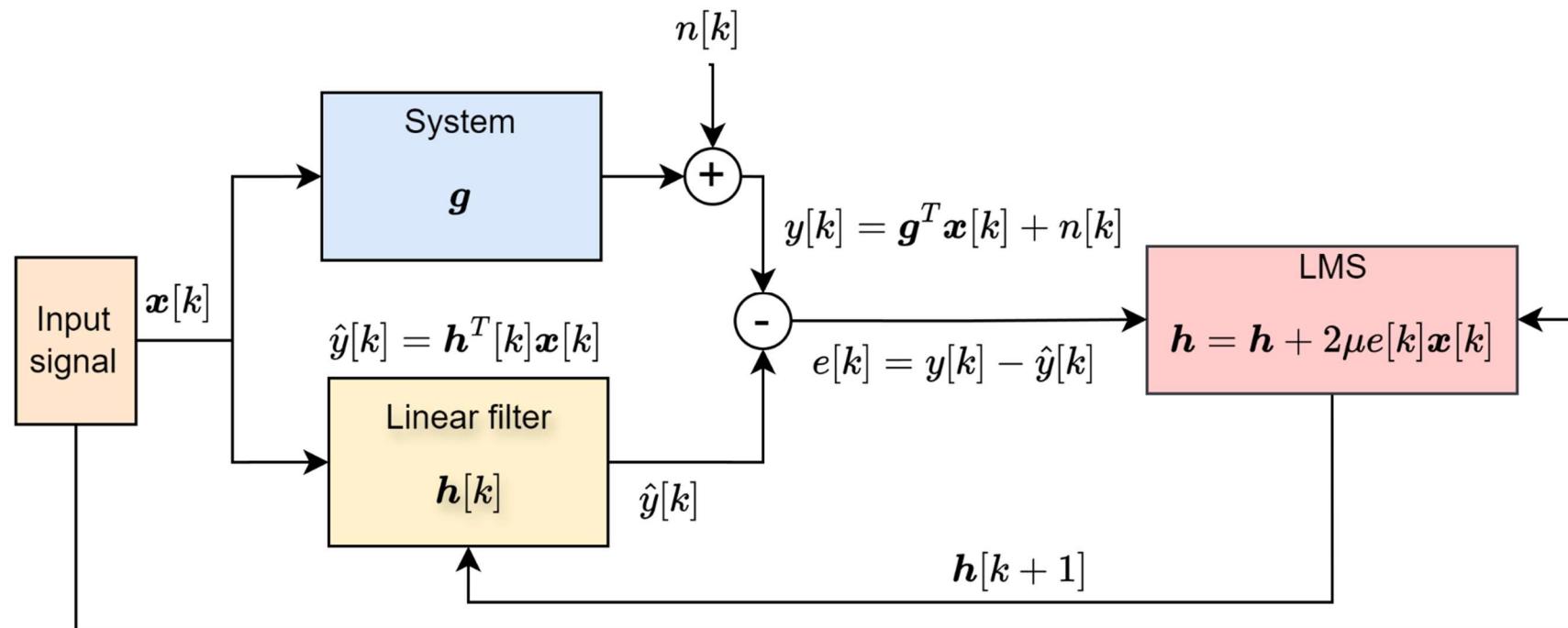
Num ambiente ergódico se, para um valor fixo de \mathbf{h} , o gradiente for calculado para um grande número de vetores de entrada e saída de referência:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\nabla}_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})[k+i] \rightarrow \nabla_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Considere a aplicação do algoritmo LMS no problema da identificação dos coeficientes \mathbf{g} de um sistema FIR:



Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\mathbf{h}[k + 1] = \mathbf{h}[k] + 2\mu e[k]\mathbf{x}[k]$$

$$\mathbf{h}[k + 1] - \mathbf{g} = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g} + 2\mu e[k]\mathbf{x}[k]$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\mathbf{h}[k + 1] = \mathbf{h}[k] + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k]$$

$$\mathbf{h}[k + 1] - \mathbf{g} = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g} + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k]$$

$$\Delta\mathbf{h}[k + 1] = \Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k]$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\mathbf{h}[k+1] = \mathbf{h}[k] + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k] \quad e[k] = \mathbf{x}^T[k] \mathbf{g} + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}[k]$$

$$\mathbf{h}[k+1] - \mathbf{g} = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g} + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k]$$

$$\Delta\mathbf{h}[k+1] = \Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k]$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}[k+1] &= \mathbf{h}[k] + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k] & e[k] &= \mathbf{x}^T[k] \mathbf{g} + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}[k] \\ \mathbf{h}[k+1] - \mathbf{g} &= \mathbf{h}[k] - \mathbf{g} + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k] & e_{\text{opt}}[k] &= \mathbf{x}^T[k] \mathbf{g} + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{g} = n[k] \\ \Delta\mathbf{h}[k+1] &= \Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k]\end{aligned}$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}[k+1] &= \mathbf{h}[k] + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k] & e[k] &= \mathbf{x}^T[k] \mathbf{g} + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}[k] \\ \mathbf{h}[k+1] - \mathbf{g} &= \mathbf{h}[k] - \mathbf{g} + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k] & e_{\text{opt}}[k] &= \mathbf{x}^T[k] \mathbf{g} + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{g} = n[k] \\ \Delta\mathbf{h}[k+1] &= \Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k] & e[k] &= e_{\text{opt}}[k] - \mathbf{x}^T[k] \Delta\mathbf{h}[k] \end{aligned}$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}[k+1] &= \mathbf{h}[k] + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k] & e[k] &= \mathbf{x}^T[k] \mathbf{g} + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}[k] \\ \mathbf{h}[k+1] - \mathbf{g} &= \mathbf{h}[k] - \mathbf{g} + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k] & e_{\text{opt}}[k] &= \mathbf{x}^T[k] \mathbf{g} + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{g} = n[k] \\ \Delta\mathbf{h}[k+1] &= \Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k] & e[k] &= e_{\text{opt}}[k] - \mathbf{x}^T[k] \Delta\mathbf{h}[k] \\ \Delta\mathbf{h}[k+1] &= \Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu(e_{\text{opt}}[k] - \mathbf{x}^T[k] \Delta\mathbf{h}[k]) \mathbf{x}[k] \end{aligned}$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}[k+1] &= \mathbf{h}[k] + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k] & e[k] &= \mathbf{x}^T[k] \mathbf{g} + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}[k] \\ \mathbf{h}[k+1] - \mathbf{g} &= \mathbf{h}[k] - \mathbf{g} + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k] & e_{\text{opt}}[k] &= \mathbf{x}^T[k] \mathbf{g} + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{g} = n[k] \\ \Delta\mathbf{h}[k+1] &= \Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e[k] \mathbf{x}[k] & e[k] &= e_{\text{opt}}[k] - \mathbf{x}^T[k] \Delta\mathbf{h}[k] \\ \Delta\mathbf{h}[k+1] &= \Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu(e_{\text{opt}}[k] - \mathbf{x}^T[k] \Delta\mathbf{h}[k]) \mathbf{x}[k] \\ \Delta\mathbf{h}[k+1] &= \Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e_{\text{opt}}[k] \mathbf{x}[k] - 2\mu \mathbf{x}^T[k] \Delta\mathbf{h}[k] \mathbf{x}[k] \end{aligned}$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\Delta\mathbf{h}[k+1] = \Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e_{\text{opt}}[k]\mathbf{x}[k] - 2\mu\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\Delta\mathbf{h}[k]$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\Delta\mathbf{h}[k + 1] = \Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e_{\text{opt}}[k]\mathbf{x}[k] - 2\mu\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\Delta\mathbf{h}[k]$$

$$\Delta\mathbf{h}[k + 1] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e_{\text{opt}}[k]\mathbf{x}[k]$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\Delta\mathbf{h}[k + 1] = \Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e_{\text{opt}}[k]\mathbf{x}[k] - 2\mu\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\Delta\mathbf{h}[k]$$

$$\Delta\mathbf{h}[k + 1] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e_{\text{opt}}[k]\mathbf{x}[k]$$

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] = \mathbb{E} [(\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\Delta\mathbf{h}[k]] + 2\mu\mathbb{E} [e_{\text{opt}}[k]\mathbf{x}[k]]$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\Delta\mathbf{h}[k + 1] = \Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e_{\text{opt}}[k]\mathbf{x}[k] - 2\mu\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\Delta\mathbf{h}[k]$$

$$\Delta\mathbf{h}[k + 1] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e_{\text{opt}}[k]\mathbf{x}[k]$$

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] = \mathbb{E} [(\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\Delta\mathbf{h}[k]] + 2\mu\mathbb{E} [e_{\text{opt}}[k]\mathbf{x}[k]]$$

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] = \mathbb{E} [(\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])] \mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k]] + \mathbf{0}$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\Delta\mathbf{h}[k + 1] = \Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e_{\text{opt}}[k]\mathbf{x}[k] - 2\mu\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\Delta\mathbf{h}[k]$$

$$\Delta\mathbf{h}[k + 1] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\Delta\mathbf{h}[k] + 2\mu e_{\text{opt}}[k]\mathbf{x}[k]$$

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] = \mathbb{E} [(\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\Delta\mathbf{h}[k]] + 2\mu\mathbb{E} [e_{\text{opt}}[k]\mathbf{x}[k]]$$

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] = \mathbb{E} [(\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])] \mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k]] + \mathbf{0}$$

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbb{E} [\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]])\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k]]$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k]]$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k]]$$

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})^{k+1}\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[0]]$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k]]$$

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})^{k+1}\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[0]]$$

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] \rightarrow 0, k \rightarrow \infty, \text{ se } 0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}}$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo:

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k]]$$

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})^{k+1}\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[0]]$$

$$\mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k + 1]] \rightarrow 0, k \rightarrow \infty, \text{ se } 0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}}$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] \rightarrow \mathbf{g}, k \rightarrow \infty, \text{ se } 0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}}$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo, a matrix de covariância $\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]]$ será dada por:

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo, a matrix de covariância $\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]]$ será dada por:

$$\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]] = \mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k]\Delta\mathbf{h}^T[k]]$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo, a matrix de covariância $\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]]$ será dada por:

$$\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]] = \mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k]\Delta\mathbf{h}^T[k]] \quad \text{cov}[\Delta\mathbf{h}'[k]] = \mathbb{E} [\mathbf{Q}^T \Delta\mathbf{h}[k]\Delta\mathbf{h}^T[k]\mathbf{Q}]$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo, a matrix de covariância $\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]]$ será dada por:

$$\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]] = \mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k]\Delta\mathbf{h}^T[k]] \quad \text{cov}[\Delta\mathbf{h}'[k]] = \mathbb{E} [\mathbf{Q}^T \Delta\mathbf{h}[k]\Delta\mathbf{h}^T[k]\mathbf{Q}]$$

$$\mathbf{v}'[k] = \text{diag}[\text{cov}[\Delta\mathbf{h}'[k]]]$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo, a matrix de covariância $\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]]$ será dada por:

$$\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]] = \mathbb{E} [\Delta\mathbf{h}[k]\Delta\mathbf{h}^T[k]] \quad \text{cov}[\Delta\mathbf{h}'[k]] = \mathbb{E} [\mathbf{Q}^T \Delta\mathbf{h}[k]\Delta\mathbf{h}^T[k]\mathbf{Q}]$$

$$\mathbf{v}'[k] = \text{diag}[\text{cov}[\Delta\mathbf{h}'[k]]]$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'[k+1] &= (\mathbf{I} - 4\mu\Lambda + 8\mu^2\Lambda^2 + 4\mu^2\lambda\lambda^T) \mathbf{v}'[k] + 4\mu^2\sigma_n^2\boldsymbol{\lambda} \\ &= \mathbf{B}\mathbf{v}'(k) + 4\mu^2\sigma_n^2\boldsymbol{\lambda}\end{aligned}$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo, a matrix de covariância $\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]]$ será dada por:

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo, a matrix de covariância $\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]]$ será dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'[k+1] &= (\mathbf{I} - 4\mu\boldsymbol{\Lambda} + 8\mu^2\boldsymbol{\Lambda}^2 + 4\mu^2\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^T) \mathbf{v}'[k] + 4\mu^2\sigma_n^2\boldsymbol{\lambda} \\ &= \mathbf{B}\mathbf{v}'(k) + 4\mu^2\sigma_n^2\boldsymbol{\lambda}\end{aligned}$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo, a matrix de covariância $\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]]$ será dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'[k+1] &= (\mathbf{I} - 4\mu\boldsymbol{\Lambda} + 8\mu^2\boldsymbol{\Lambda}^2 + 4\mu^2\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^T) \mathbf{v}'[k] + 4\mu^2\sigma_n^2\boldsymbol{\lambda} \\ &= \mathbf{B}\mathbf{v}'(k) + 4\mu^2\sigma_n^2\boldsymbol{\lambda}\end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = [b_{ij}] = \begin{cases} 1 - 4\mu\lambda_i + 8\mu^2\lambda_i^2 + 4\mu^2\lambda_i^2 & \text{for } i = j \\ 4\mu^2\lambda_i\lambda_j & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

Convergência do vetor de coeficientes

Comportamento do vetor de coeficientes durante o período de convergência:

Seja $\Delta\mathbf{h}[k]$ a diferença entre $\mathbf{h}[k]$ e o vetor ideal \mathbf{g} , temos: $\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k] - \mathbf{g}$.
Logo, a matrix de covariância $\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]]$ será dada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'[k+1] &= (\mathbf{I} - 4\mu\boldsymbol{\Lambda} + 8\mu^2\boldsymbol{\Lambda}^2 + 4\mu^2\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{\lambda}^T) \mathbf{v}'[k] + 4\mu^2\sigma_n^2\boldsymbol{\lambda} \\ &= \mathbf{B}\mathbf{v}'(k) + 4\mu^2\sigma_n^2\boldsymbol{\lambda}\end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = [b_{ij}] = \begin{cases} 1 - 4\mu\lambda_i + 8\mu^2\lambda_i^2 + 4\mu^2\lambda_i^2 & \text{for } i = j \\ 4\mu^2\lambda_i\lambda_j & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

$$0 < \mu < \frac{1}{2\lambda_{\max} + \sum_{j=0}^N \lambda_j} < \frac{1}{\sum_{j=0}^N \lambda_j} = \frac{1}{\text{tr}[\mathbf{R}]}$$



Universidade Federal
de Campina Grande

Comportamento do sinal de erro

Comportamento do sinal de erro

Considere o sinal de erro utilizado no algoritmo LMS aplicado ao problema de identificação de um sistema linear:

$$e[k] = d[k] + n[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k]$$

Comportamento do sinal de erro

Considere o sinal de erro utilizado no algoritmo LMS aplicado ao problema de identificação de um sistema linear:

$$e[k] = d[k] + n[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k]$$

$$e[k] = \sum_{i=0}^{\infty} g[i]x[k-i] + n[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k]$$

Comportamento do sinal de erro

Considere o sinal de erro utilizado no algoritmo LMS aplicado ao problema de identificação de um sistema linear:

$$e[k] = d[k] + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}[k]$$

$$e[k] = \sum_{i=0}^{\infty} g[i]x[k-i] + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}[k]$$

$$e[k] = \sum_{i=0}^{N-1} g[i]x[k-i] + \sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}[k]$$

onde $g[i]$ são os coeficientes não-identificados do sistema que gerou $d[k]$.

Comportamento do sinal de erro

Considere o sinal de erro utilizado no algoritmo LMS aplicado ao problema de identificação de um sistema linear:

$$e[k] = d[k] + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}[k]$$

$$e[k] = \sum_{i=0}^{\infty} g[i]x[k-i] + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}[k]$$

$$e[k] = \sum_{i=0}^{N-1} g[i]x[k-i] + \sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] + n[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}[k]$$

onde $g[i]$ são os coeficientes não-identificados do sistema que gerou $d[k]$.

$$e[k] = \mathbf{x}^T[k](\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k]) + \sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] + n[k]$$



Universidade Federal
de Campina Grande

Comportamento do sinal de erro

Comportamento do sinal de erro

$$\mathbb{E}[e[k]] = \mathbb{E} [x^T[k](\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k])] + \mathbb{E} \left[\sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] \right] + \mathbb{E} [n[k]]$$

Comportamento do sinal de erro

$$\mathbb{E}[e[k]] = \mathbb{E} [x^T[k](\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k])] + \mathbb{E} \left[\sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] \right] + \mathbb{E} [n[k]]$$

$$\mathbb{E}[e[k]] = \mathbb{E} [x^T[k]] \mathbb{E} [(\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k])] + \sum_{i=N}^{\infty} g[i]\mathbb{E} [x[k-i]] + \mathbb{E} [n[k]]$$

Comportamento do sinal de erro

$$\mathbb{E}[e[k]] = \mathbb{E} [x^T[k](\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k])] + \mathbb{E} \left[\sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] \right] + \mathbb{E} [n[k]]$$

$$\mathbb{E}[e[k]] = \mathbb{E} [x^T[k]] \mathbb{E} [(\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k])] + \sum_{i=N}^{\infty} g[i]\mathbb{E} [x[k-i]] + \mathbb{E} [n[k]]$$

Logo,

$\mathbb{E}[e[k]] = 0$, se $x[k]$ e $n[k]$ possuírem valor médio nulo.



Erro médio quadrático mínimo - MMSE

Universidade Federal
de Campina Grande

Erro médio quadrático mínimo - MMSE

$$\mathbb{E}[e^2[k]] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{x}^T[k](\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k]) + \sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] + n[k] \right)^2 \right]$$

Erro médio quadrático mínimo - MMSE

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[e^2[k]] &= \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{x}^T[k](\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k]) + \sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] + n[k] \right)^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{x}^T[k](\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k]))^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] \right)^2 \right] + \mathbb{E} [n^2[k]]
 \end{aligned}$$

Erro médio quadrático mínimo - MMSE

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[e^2[k]] &= \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{x}^T[k](\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k]) + \sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] + n[k] \right)^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{x}^T[k](\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k]))^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] \right)^2 \right] + \mathbb{E} [n^2[k]] \\
 &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{x}^T[k](\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k]))^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] \right)^2 \right] + \mathbb{E} [n^2[k]]
 \end{aligned}$$

Erro médio quadrático mínimo - MMSE

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[e^2[k]] &= \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{x}^T[k](\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k]) + \sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] + n[k] \right)^2 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{x}^T[k](\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k]))^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] \right)^2 \right] + \mathbb{E} [n^2[k]] \\
 &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{x}^T[k](\mathbf{g}' - \mathbf{h}[k]))^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=N}^{\infty} g[i]x[k-i] \right)^2 \right] + \mathbb{E} [n^2[k]] \\
 J_{min} &= \sigma_x^2 \sum_{i=N}^{\infty} g^2[i] + \sigma_n^2
 \end{aligned}$$

Comportamento transiente

Os coeficientes do filtro adaptativo exibirão convergência na média cujo comportamento será ditato por N curvas de decaimento geométrico com razões $r_{h_i} = (1 - 2\mu\lambda_i)$. Cada uma dessas curvas pode ser aproximada por uma envoltória exponencial com constantes de tempo τ_{h_i}

$$r_{h_i}^k = e^{-\frac{k}{\tau_{h_i}}} = 1 - \frac{k}{\tau_{h_i}} + \frac{k^2}{2!\tau_{h_i}^2} + \dots$$

Comportamento transiente

Os coeficientes do filtro adaptativo exibirão convergência na média cujo comportamento será ditato por N curvas de decaimento geométrico com razões $r_{h_i} = (1 - 2\mu\lambda_i)$. Cada uma dessas curvas pode ser aproximada por uma envoltória exponencial com constantes de tempo τ_{h_i}

$$r_{h_i}^k = e^{-\frac{k}{\tau_{h_i}}} = 1 - \frac{k}{\tau_{h_i}} + \frac{k^2}{2!\tau_{h_i}^2} + \dots$$

Logo, se $k = 1$, temos:

$$r_{h_i} = e^{-\frac{1}{\tau_{h_i}}} = 1 - \frac{1}{\tau_{h_i}} + \frac{1}{2!\tau_{h_i}^2} + \dots$$

Comportamento transiente

Os coeficientes do filtro adaptativo exibirão convergência na média cujo comportamento será ditato por N curvas de decaimento geométrico com razões $r_{h_i} = (1 - 2\mu\lambda_i)$. Cada uma dessas curvas pode ser aproximada por uma envoltória exponencial com constantes de tempo τ_{h_i}

$$r_{h_i}^k = e^{-\frac{k}{\tau_{h_i}}} = 1 - \frac{k}{\tau_{h_i}} + \frac{k^2}{2!\tau_{h_i}^2} + \dots$$

Logo, se $k = 1$, temos:

$$r_{h_i} = e^{-\frac{1}{\tau_{h_i}}} = 1 - \frac{1}{\tau_{h_i}} + \frac{1}{2!\tau_{h_i}^2} + \dots$$

Podemos ainda aproximar:

$$r_{h_i} \approx 1 - \frac{1}{\tau_{h_i}}$$

Comportamento transiente

Os coeficientes do filtro adaptativo exibirão convergência na média cujo comportamento será ditato por N curvas de decaimento geométrico com razões $r_{h_i} = (1 - 2\mu\lambda_i)$. Cada uma dessas curvas pode ser aproximada por uma envoltória exponencial com constantes de tempo τ_{h_i}

$$r_{h_i}^k = e^{-\frac{k}{\tau_{h_i}}} = 1 - \frac{k}{\tau_{h_i}} + \frac{k^2}{2!\tau_{h_i}^2} + \dots$$

Logo, se $k = 1$, temos:

$$r_{h_i} = e^{-\frac{1}{\tau_{h_i}}} = 1 - \frac{1}{\tau_{h_i}} + \frac{1}{2!\tau_{h_i}^2} + \dots$$

Podemos ainda aproximar:

$$r_{h_i} \approx 1 - \frac{1}{\tau_{h_i}} \implies (1 - 2\mu\lambda_i) = 1 - \frac{1}{\tau_{h_i}}$$

Comportamento transiente

Os coeficientes do filtro adaptativo exibirão convergência na média cujo comportamento será ditato por N curvas de decaimento geométrico com razões $r_{h_i} = (1 - 2\mu\lambda_i)$. Cada uma dessas curvas pode ser aproximada por uma envoltória exponencial com constantes de tempo τ_{h_i}

$$r_{h_i}^k = e^{-\frac{k}{\tau_{h_i}}} = 1 - \frac{k}{\tau_{h_i}} + \frac{k^2}{2!\tau_{h_i}^2} + \dots$$

Logo, se $k = 1$, temos:

$$r_{h_i} = e^{-\frac{1}{\tau_{h_i}}} = 1 - \frac{1}{\tau_{h_i}} + \frac{1}{2!\tau_{h_i}^2} + \dots$$

Podemos ainda aproximar:

$$r_{h_i} \approx 1 - \frac{1}{\tau_{h_i}} \implies (1 - 2\mu\lambda_i) = 1 - \frac{1}{\tau_{h_i}} \implies \tau_{h_i} = \frac{1}{2\mu\lambda_i}$$

Comportamento transiente

Os coeficientes do filtro adaptativo exibirão convergência na média cujo comportamento será ditato por N curvas de decaimento geométrico com razões $r_{h_i} = (1 - 2\mu\lambda_i)$. Cada uma dessas curvas pode ser aproximada por uma envoltória exponencial com constantes de tempo τ_{h_i}

$$r_{h_i}^k = e^{-\frac{k}{\tau_{h_i}}} = 1 - \frac{k}{\tau_{h_i}} + \frac{k^2}{2!\tau_{h_i}^2} + \dots$$

Logo, se $k = 1$, temos:

$$r_{h_i} = e^{-\frac{1}{\tau_{h_i}}} = 1 - \frac{1}{\tau_{h_i}} + \frac{1}{2!\tau_{h_i}^2} + \dots$$

Podemos ainda aproximar:

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}}$$

$$r_{h_i} \approx 1 - \frac{1}{\tau_{h_i}} \implies (1 - 2\mu\lambda_i) = 1 - \frac{1}{\tau_{h_i}} \implies \tau_{h_i} = \frac{1}{2\mu\lambda_i}$$



Universidade Federal
de Campina Grande

Comportamento transiente

Se μ é otimisticamente escolhido como sendo aproximadamente $\frac{1}{\lambda_{\max}}$, temos que:

Comportamento transiente

Se μ é otimisticamente escolhido como sendo aproximadamente $\frac{1}{\lambda_{\max}}$, temos que:

$$\tau_{h_i} = \frac{1}{2\mu\lambda_i} \implies \tau_{h_i} \approx \frac{\lambda_{\max}}{2\lambda_i} \leq \frac{\lambda_{\max}}{2\lambda_{\min}}$$

Comportamento transiente

Se μ é otimisticamente escolhido como sendo aproximadamente $\frac{1}{\lambda_{\max}}$, temos que:

$$\tau_{h_i} = \frac{1}{2\mu\lambda_i} \implies \tau_{h_i} \approx \frac{\lambda_{\max}}{2\lambda_i} \leq \frac{\lambda_{\max}}{2\lambda_{\min}}$$

Nessa condição, supondo que a convergência é atingida quando o modo mais lento decai a um centésimo do valor inicial, ou seja,

$$e^{\frac{-k}{\tau_{\max}}} = 0.01,$$

o número de iterações necessárias para que a convergência seja alcançada será dado por

$$k \approx 4.6 \frac{\lambda_{\max}}{2\lambda_{\min}}$$

Comportamento em ambientes não-estacionários



Universidade Federal
de Campina Grande

Comportamento em ambientes não-estacionários



Universidade Federal
de Campina Grande

- Frequentemente os ambientes em que os filtros adaptativos estão sendo empregados tem características não-estacionárias.

Comportamento em ambientes não-estacionários

- Frequentemente os ambientes em que os filtros adaptativos estão sendo empregados tem características não-estacionárias.
- Nestes casos, a matrix de correlação R e o vetor de correlação cruzada p passam a ser dependentes do tempo ($R \rightarrow R[k]$, $p \rightarrow p[k]$).

Comportamento em ambientes não-estacionários



Universidade Federal
de Campina Grande

- Frequentemente os ambientes em que os filtros adaptativos estão sendo empregados tem características não-estacionárias.
- Nestes casos, a matrix de correlação \mathbf{R} e o vetor de correlação cruzada \mathbf{p} passam a ser dependentes do tempo ($\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}[k]$, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}[k]$).
- Consequentemente, o vetor de coeficientes ótimos (i.e. que minimizam o MSE) \mathbf{h}_{opt} também passa a depender do tempo, de modo que, $\mathbf{h}_{opt}[k] = \mathbf{R}^{-1}[k]\mathbf{p}[k]$.

Comportamento em ambientes não-estacionários

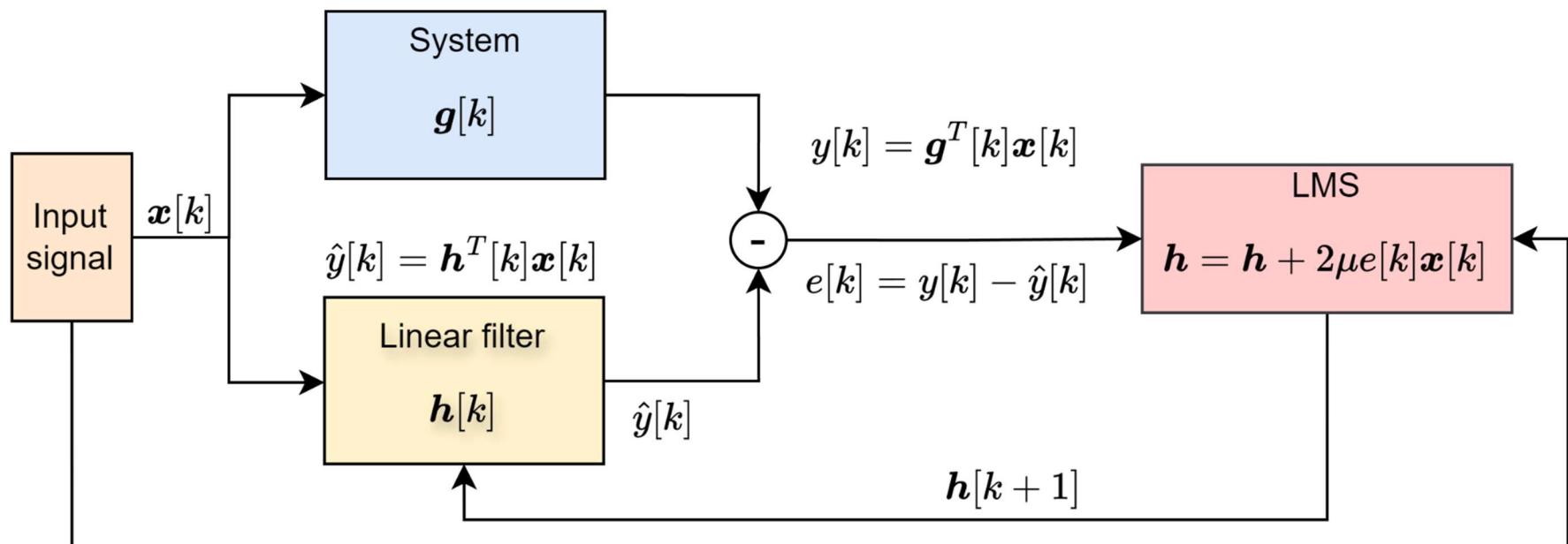


Universidade Federal
de Campina Grande

- Frequentemente os ambientes em que os filtros adaptativos estão sendo empregados tem características não-estacionárias.
- Nestes casos, a matrix de correlação \mathbf{R} e o vetor de correlação cruzada \mathbf{p} passam a ser dependentes do tempo ($\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}[k]$, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}[k]$).
- Consequentemente, o vetor de coeficientes ótimos (i.e. que minimizam o MSE) \mathbf{h}_{opt} também passa a depender do tempo, de modo que, $\mathbf{h}_{opt}[k] = \mathbf{R}^{-1}[k]\mathbf{p}[k]$.
- Nesse contexto, cabe perguntar se o algoritmo LMS é capaz de rastrear as $\mathbf{h}_{opt}[k]$.

Comportamento em ambientes não-estacionários

- Considere o problema de identificação de um sistema linear com uma resposta ao impulso variante no tempo $\mathbf{g}[k]$. Considere que a saída do sistema $y[k]$ é medida por um sensor de ruído.



Comportamento em ambientes não-estacionários



Universidade Federal
de Campina Grande

Comportamento em ambientes não-estacionários



Universidade Federal
de Campina Grande

- As expressões para atualização dos coeficientes do filtro segundo o algoritmo LMS são dadas por:

$$\mathbf{h}[k+1] = \mathbf{h}[k] + 2\mu e[k]\mathbf{x}[k] \quad e[k] = \mathbf{x}^T[k]\mathbf{g}[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k]$$

Comportamento em ambientes não-estacionários



Universidade Federal
de Campina Grande

- As expressões para atualização dos coeficientes do filtro segundo o algoritmo LMS são dadas por:

$$\mathbf{h}[k+1] = \mathbf{h}[k] + 2\mu e[k]\mathbf{x}[k] \quad e[k] = \mathbf{x}^T[k]\mathbf{g}[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k]$$

$$\mathbf{h}[k+1] = \mathbf{h}[k] + 2\mu \mathbf{x}[k](\mathbf{x}^T[k]\mathbf{g}[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k])$$

Comportamento em ambientes não-estacionários

- As expressões para atualização dos coeficientes do filtro segundo o algoritmo LMS são dadas por:

$$\mathbf{h}[k+1] = \mathbf{h}[k] + 2\mu e[k]\mathbf{x}[k] \quad e[k] = \mathbf{x}^T[k]\mathbf{g}[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k]$$

$$\mathbf{h}[k+1] = \mathbf{h}[k] + 2\mu \mathbf{x}[k](\mathbf{x}^T[k]\mathbf{g}[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k])$$

- Suponha que um conjunto de dados de experimentos de identificação adaptativa não-estacionária tenha sido construído, em que o sinal de entrada do sistema a cada experimento é obtido do mesmo processo estocástico.

Comportamento em ambientes não-estacionários

- As expressões para atualização dos coeficientes do filtro segundo o algoritmo LMS são dadas por:

$$\mathbf{h}[k+1] = \mathbf{h}[k] + 2\mu e[k]\mathbf{x}[k] \quad e[k] = \mathbf{x}^T[k]\mathbf{g}[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k]$$

$$\mathbf{h}[k+1] = \mathbf{h}[k] + 2\mu \mathbf{x}[k](\mathbf{x}^T[k]\mathbf{g}[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}[k])$$

- Suponha que um conjunto de dados de experimentos de identificação adaptativa não-estacionária tenha sido construído, em que o sinal de entrada do sistema a cada experimento é obtido do mesmo processo estocástico.
- Se as entradas do sistema são obtidas a partir de um processo estacionário, isto implica que a matriz \mathbf{R} é invariante com o tempo.

Comportamento em ambientes não-estacionários



Universidade Federal
de Campina Grande

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

Comportamento em ambientes não-estacionários



Universidade Federal
de Campina Grande

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbb{E} [\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k]] (\mathbf{g}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

Comportamento em ambientes não-estacionários

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbb{E} [\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k]] (\mathbf{g}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{g}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

Comportamento em ambientes não-estacionários

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbb{E} [\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k]] (\mathbf{g}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{g}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

Comportamento em ambientes não-estacionários

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbb{E} [\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k]] (\mathbf{g}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{g}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]]) - \mathbf{h}_{opt}[k+1]$$

Comportamento em ambientes não-estacionários

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbb{E} [\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k]] (\mathbf{g}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{g}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]]) \quad \text{Atraso do vetor } \mathbf{h}[k]: \\ \mathbf{l}_\mathbf{h}[k] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] - \mathbf{h}_{opt}[k]$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]]) - \mathbf{h}_{opt}[k+1]$$

Comportamento em ambientes não-estacionários

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbb{E} [\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k]] (\mathbf{g}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{g}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]]) \quad \text{Atraso do vetor } \mathbf{h}[k]: \\ \mathbf{l}_h[k] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] - \mathbf{h}_{opt}[k]$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]]) - \mathbf{h}_{opt}[k+1]$$

$$\mathbf{l}_h[k+1] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]]) - \mathbf{h}_{opt}[k+1]$$

Comportamento em ambientes não-estacionários

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbb{E} [\mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k]] (\mathbf{g}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{g}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]])$$

Atraso do vetor $\mathbf{h}[k]$:

$$\mathbf{l}_h[k] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] - \mathbf{h}_{opt}[k]$$

$$\mathbb{E} [\mathbf{h}[k+1]] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]]) - \mathbf{h}_{opt}[k+1]$$

$$\mathbf{l}_h[k+1] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]]) - \mathbf{h}_{opt}[k+1]$$

$$\mathbf{l}_h[k+1] = \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]] - \mathbf{h}_{opt}[k] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E} [\mathbf{h}[k]]) - \mathbf{h}_{opt}[k+1] + \mathbf{h}_{opt}[k]$$

Comportamento em ambientes não-estacionários

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E}[\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbb{E}[\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]] (\mathbf{g}[k] - \mathbb{E}[\mathbf{h}[k]])$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E}[\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{g}[k] - \mathbb{E}[\mathbf{h}[k]])$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}[k+1]] = \mathbb{E}[\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E}[\mathbf{h}[k]])$$

Atraso do vetor $\mathbf{h}[k]$:

$$\mathbf{l}_h[k] = \mathbb{E}[\mathbf{h}[k]] - \mathbf{h}_{opt}[k]$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}[k+1]] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] = \mathbb{E}[\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E}[\mathbf{h}[k]]) - \mathbf{h}_{opt}[k+1]$$

$$\mathbf{l}_h[k+1] = \mathbb{E}[\mathbf{h}[k]] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E}[\mathbf{h}[k]]) - \mathbf{h}_{opt}[k+1]$$

$$\mathbf{l}_h[k+1] = \mathbb{E}[\mathbf{h}[k]] - \mathbf{h}_{opt}[k] + 2\mu \mathbf{R}(\mathbf{h}_{opt}[k] - \mathbb{E}[\mathbf{h}[k]]) - \mathbf{h}_{opt}[k+1] + \mathbf{h}_{opt}[k]$$

$$\mathbf{l}_h[k+1] = \mathbf{l}_h[k] - 2\mu \mathbf{R} \mathbf{l}_h[k] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] + \mathbf{h}_{opt}[k]$$

Comportamento em ambientes não-estacionários



Universidade Federal
de Campina Grande

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

$$\mathbf{l}_h[k+1] = \mathbf{l}_h[k] - 2\mu \mathbf{R} \mathbf{l}_h[k] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] + \mathbf{h}_{opt}[k]$$

Comportamento em ambientes não-estacionários

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

$$\mathbf{l}_h[k+1] = \mathbf{l}_h[k] - 2\mu \mathbf{R} \mathbf{l}_h[k] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] + \mathbf{h}_{opt}[k]$$

$$\mathbf{l}_h[k+1] = (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}) \mathbf{l}_h[k] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] + \mathbf{h}_{opt}[k]$$

Comportamento em ambientes não-estacionários

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

$$\mathbf{l}_h[k+1] = \mathbf{l}_h[k] - 2\mu \mathbf{R} \mathbf{l}_h[k] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] + \mathbf{h}_{opt}[k]$$

$$\mathbf{l}_h[k+1] = (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}) \mathbf{l}_h[k] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] + \mathbf{h}_{opt}[k]$$

$$\mathbf{l}'_h[k+1] = (\mathbf{I} - 2\mu \boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{l}'_h[k] - \mathbf{h}'_{opt}[k+1] + \mathbf{h}'_{opt}[k]$$

Comportamento em ambientes não-estacionários

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

$$\mathbf{l}_h[k+1] = \mathbf{l}_h[k] - 2\mu \mathbf{R} \mathbf{l}_h[k] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] + \mathbf{h}_{opt}[k]$$

$$\mathbf{l}_h[k+1] = (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}) \mathbf{l}_h[k] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] + \mathbf{h}_{opt}[k]$$

$$\mathbf{l}'_h[k+1] = (\mathbf{I} - 2\mu \boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{l}'_h[k] - \mathbf{h}'_{opt}[k+1] + \mathbf{h}'_{opt}[k]$$

$$l'_i[k+1] = (1 - 2\mu \lambda_i) l'_i[k] - h'_{opt,i}[k+1] + h'_{opt,i}[k]$$

Comportamento em ambientes não-estacionários

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

$$\mathbf{l}_h[k+1] = \mathbf{l}_h[k] - 2\mu \mathbf{R} \mathbf{l}_h[k] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] + \mathbf{h}_{opt}[k]$$

$$\mathbf{l}_h[k+1] = (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}) \mathbf{l}_h[k] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] + \mathbf{h}_{opt}[k]$$

$$\mathbf{l}'_h[k+1] = (\mathbf{I} - 2\mu \boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{l}'_h[k] - \mathbf{h}'_{opt}[k+1] + \mathbf{h}'_{opt}[k]$$

$$l'_i[k+1] = (1 - 2\mu \lambda_i) l'_i[k] - h'_{opt,i}[k+1] + h'_{opt,i}[k]$$

- Utilizando a transformada z , i.e. $L'_i(z) = \mathcal{Z}\{l'_i[k]\}$ e $H'_{opt,i}(z) = \mathcal{Z}\{h'_{opt,i}[k]\}$:

Comportamento em ambientes não-estacionários

- Desse modo, aplicando-se o operador valor esperado:

$$\mathbf{l}_h[k+1] = \mathbf{l}_h[k] - 2\mu \mathbf{R} \mathbf{l}_h[k] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] + \mathbf{h}_{opt}[k]$$

$$\mathbf{l}_h[k+1] = (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}) \mathbf{l}_h[k] - \mathbf{h}_{opt}[k+1] + \mathbf{h}_{opt}[k]$$

$$\mathbf{l}'_h[k+1] = (\mathbf{I} - 2\mu \boldsymbol{\Lambda}) \mathbf{l}'_h[k] - \mathbf{h}'_{opt}[k+1] + \mathbf{h}'_{opt}[k]$$

$$l'_i[k+1] = (1 - 2\mu \lambda_i) l'_i[k] - h'_{opt,i}[k+1] + h'_{opt,i}[k]$$

- Utilizando a transformada z , i.e. $L'_i(z) = \mathcal{Z}\{l'_i[k]\}$ e $H'_{opt,i}(z) = \mathcal{Z}\{h'_{opt,i}[k]\}$:

$$L'_i(z)z = (1 - 2\mu \lambda_i) L'_i(z) - H'_{opt,i}(z)z + H'_{opt,i}(z)$$

Comportamento em ambientes não-estacionários



Universidade Federal
de Campina Grande

Comportamento em ambientes não-estacionários



Universidade Federal
de Campina Grande

$$(z - 1 + 2\mu\lambda_i) L'_i(z) = (-z + 1) H'_{opt,i}(z)$$

Comportamento em ambientes não-estacionários



Universidade Federal
de Campina Grande

$$(z - 1 + 2\mu\lambda_i) L'_i(z) = (-z + 1) H'_{opt,i}(z)$$

$$L'_i(z) = -\frac{(z - 1)}{(z - 1 + 2\mu\lambda_i)} H'_{opt,i}(z)$$

Comportamento em ambientes não-estacionários



Universidade Federal
de Campina Grande

$$(z - 1 + 2\mu\lambda_i) L'_i(z) = (-z + 1) H'_{opt,i}(z)$$

$$L'_i(z) = -\frac{(z - 1)}{(z - 1 + 2\mu\lambda_i)} H'_{opt,i}(z) \implies L'_i(z) = G(z) H'_{opt,i}(z)$$

Comportamento em ambientes não-estacionários



Universidade Federal
de Campina Grande

$$(z - 1 + 2\mu\lambda_i) L'_i(z) = (-z + 1) H'_{opt,i}(z)$$

$$L'_i(z) = -\frac{(z - 1)}{(z - 1 + 2\mu\lambda_i)} H'_{opt,i}(z) \implies L'_i(z) = G(z) H'_{opt,i}(z)$$

$$G(z) = -\frac{(z - 1)}{(z - 1 + 2\mu\lambda_i)}$$