Processamento Adaptativo de Sinais

Filtro de Kalman

Edson P. da Silva

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPgEE).
Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica (UAEE)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Sumário

Universidade Federal de Campina Grande

1. Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados.
2. Definindo o problema de filtragem.
3. Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto.
4. Considerações sobre a operação do Filtro de Kalman.

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

Universidade Federal de Campina Grande

- **Modelos dinâmicos no espaço de estados**: são uma representação matemática de sistemas dinâmicos descritos por um conjunto de variáveis chamadas *variáveis de estado*, que evoluem ao longo do tempo de acordo com equações diferenciais (ou diferenciais parciais) no caso contínuo, ou equações em diferenças no caso discreto.

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

- **Modelos dinâmicos no espaço de estados**: são uma representação matemática de sistemas dinâmicos descritos por um conjunto de variáveis chamadas *variáveis de estado*, que evoluem ao longo do tempo de acordo com equações diferenciais (ou diferenciais parciais) no caso contínuo, ou equações em diferenças no caso discreto.

- As *variáveis de estado* representam as quantidades mínimas de informação necessárias para descrever completamente o comportamento de um sistema em qualquer instante no tempo. Essas variáveis permitem prever a evolução futura do sistema sem depender de informações outras que não o valor das próprias variáveis naquele instante.

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

Universidade Federal de Campina Grande

- **Exemplo** (sistema massa-mola ideal): considere um sistema massa-mola ideal, cuja equação do movimento é governada pela segunda lei de Newton

$$F(t) = ma(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t)$$

ou,

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0$$

Onde:

  - m é a massa do objeto.
  - k é a constante elástica da mola.
  - $x(t)$ é o deslocamento da massa no tempo t.

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

- Para converter essa equação de segunda ordem em um sistema de equações de primeira ordem, definimos o vetor de estados $\boldsymbol{x}$ da seguinte forma:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Portanto, as equações podem ser reescritas como:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{k}{m}x(t)$$

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

Universidade Federal de Campina Grande

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

Universidade Federal de Campina Grande

- Agora, podemos expressar na forma matricial a evolução do vetor $\boldsymbol{x}(t)$ no espaço de estados como:

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t), \text{ onde } \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}.$$

A equação acima é também conhecida como *equação do processo*.

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

Universidade Federal de Campina Grande

- Agora, podemos expressar na forma matricial a evolução do vetor $\boldsymbol{x}(t)$ no espaço de estados como:

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t), \text{ onde } \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}.$$

  A equação acima é também conhecida como *equação do processo*.

- Suponha que dispomos de um sensor que mensura (*observa*) a posição da massa a cada instante no tempo. A equação de *observação* do sistema é dada por:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

  Portanto, $y(t) = x(t)$.

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

Universidade Federal de Campina Grande

- Discretização via método das diferenças finitas: seja $f(t)$ uma função contínua e diferenciável, sua expansão em série de Taylor em torno de t_0 pode ser obtida como

$$f\left(t_0+\Delta t\right)=f\left(t_0\right)+\frac{f'\left(t_0\right)}{1!}\Delta t+\frac{f^{(2)}\left(t_0\right)}{2!}(\Delta t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(t_0\right)}{n!}(\Delta t)^n+R_n(t)$$

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

Universidade Federal de Campina Grande

- Discretização via método das diferenças finitas: seja $f(t)$ uma função contínua e diferenciável, sua expansão em série de Taylor em torno de t_0 pode ser obtida como

$$f\left(t_0+\Delta t\right)=f\left(t_0\right)+\frac{f'\left(t_0\right)}{1!}\Delta t+\frac{f^{(2)}\left(t_0\right)}{2!}(\Delta t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(t_0\right)}{n!}(\Delta t)^n+R_n(t)$$

$$f\left(t_0+\Delta t\right)=f\left(t_0\right)+f'\left(t_0\right)\Delta t+R_1(t).$$

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

Universidade Federal de Campina Grande

- Discretização via método das diferenças finitas: seja $f(t)$ uma função contínua e diferenciável, sua expansão em série de Taylor em torno de t_0 pode ser obtida como

$$f\left(t_0+\Delta t\right)=f\left(t_0\right)+\frac{f'\left(t_0\right)}{1!}\Delta t+\frac{f^{(2)}\left(t_0\right)}{2!}(\Delta t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(t_0\right)}{n!}(\Delta t)^n+R_n(t)$$

$$f\left(t_0+\Delta t\right)=f\left(t_0\right)+f'\left(t_0\right)\Delta t+R_1(t).$$

$$f'\left(t_0\right)\approx\frac{f\left(t_0+\Delta t\right)-f\left(t_0\right)}{\Delta t}$$

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

- Discretização via método das diferenças finitas: seja $f(t)$ uma função contínua e diferenciável, sua expansão em série de Taylor em torno de t_0 pode ser obtida como

$$f\left(t_0+\Delta t\right)=f\left(t_0\right)+\frac{f'\left(t_0\right)}{1!}\Delta t+\frac{f^{(2)}\left(t_0\right)}{2!}(\Delta t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(t_0\right)}{n!}(\Delta t)^n+R_n(t)$$

$$f\left(t_0+\Delta t\right)=f\left(t_0\right)+f'\left(t_0\right)\Delta t+R_1(t).$$

$$f'\left(t_0\right)\approx\frac{f\left(t_0+\Delta t\right)-f\left(t_0\right)}{\Delta t}\qquad\qquad f''\left(t_0\right)\approx\frac{f'\left(t_0+\Delta t\right)-f'\left(t_0\right)}{\Delta t}$$

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

- Para discretizar esse sistema, aplicamos uma discretização temporal com um período de amostragem T_s. Assim, definimos o vetor de estados discretos:

$$\boldsymbol{x}[k] = \begin{bmatrix} x[kT_s] \\ v[kT_s] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[k] \\ v[k] \end{bmatrix}$$

  e teremos então a seguinte equação de transição de estados para o modelo discretizado pelo método das diferenças finitas

$$\boldsymbol{x}[k] = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ -\frac{k}{m}T_s & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}[k-1]$$

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

Universidade Federal de Campina Grande

- Para discretizar esse sistema, aplicamos uma discretização temporal com um período de amostragem T_s. Assim, definimos o vetor de estados discretos:

$$\boldsymbol{x}[k] = \begin{bmatrix} x[kT_s] \\ v[kT_s] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[k] \\ v[k] \end{bmatrix}$$

  e teremos então a seguinte equação de transição de estados para o modelo discretizado pelo método das diferenças finitas

$$\boldsymbol{x}[k] = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ -\frac{k}{m}T_s & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}[k-1]$$

- A equação de *observação* do modelo discretizado é dada por:

$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}[k]$$

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

Universidade Federal
de Campina Grande

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

Universidade Federal de Campina Grande

- De maneira geral, seja $\boldsymbol{x}[k]$ o vetor de estados do modelo discretizado no tempo:

$$\boldsymbol{x}[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k-1] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[k-1] + \boldsymbol{n}[k-1]$$

$$\boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}[k] + \boldsymbol{v}[k]$$

Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

- De maneira geral, seja $\boldsymbol{x}[k]$ o vetor de estados do modelo discretizado no tempo:

$$\boldsymbol{x}[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k-1] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[k-1] + \boldsymbol{n}[k-1]$$

$$\boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}[k] + \boldsymbol{v}[k]$$

- Incialmente, consideraremos a ausência de entradas externas $\boldsymbol{u}[k]$:

$$\boldsymbol{x}[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k-1] + \boldsymbol{n}[k-1]$$

$$\boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{v}[k]$$

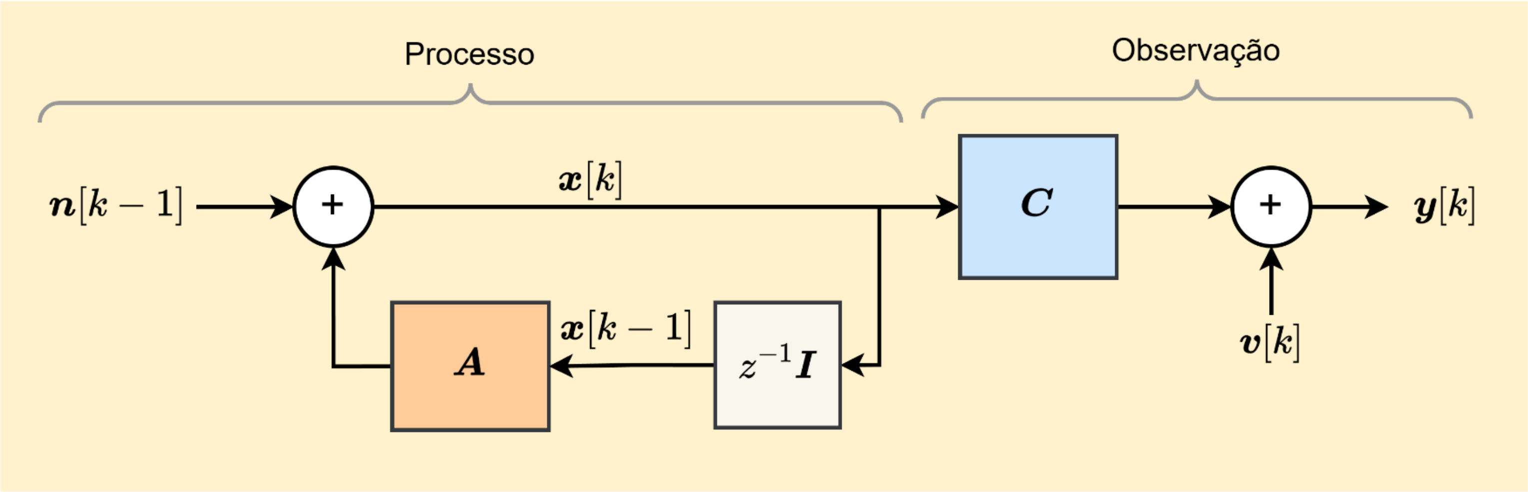
Modelagem de sistemas dinâmicos no espaço de estados

- Incialmente, consideraremos a ausência de entradas externas $\boldsymbol{u}[k]$:

$$\boldsymbol{x}[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k-1] + \boldsymbol{n}[k-1]$$

$$\boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{v}[k]$$

Modelo no espaço de estados



Definindo o problema da filtragem

Universidade Federal de Campina Grande

- Considere um sistema linear cuja evolução temporal é descrita pelas seguintes equações no espaço de estados:

$$\boldsymbol{x}[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k-1] + \boldsymbol{n}[k-1]$$

$$\boldsymbol{y}[k] = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{v}[k]$$

  em que $\boldsymbol{x}[k] \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ é um vetor de estados do sistema, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ é a matriz que governa a transição entre estados, $\boldsymbol{n}[k] \in \mathbb{R}^{N\times 1}$ é o ruído do processo, $\boldsymbol{y}[k] \in \mathbb{R}^{L\times 1}$ é o vetor de saídas, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{L\times N}$ é a matriz de observações e $\boldsymbol{v}[k] \in \mathbb{R}^{L\times 1}$ é o ruído de medição.

Definindo o problema da filtragem

Definindo o problema da filtragem

- O problema de filtragem a ser considerado consiste no cálculo de uma estimativa $\hat{\boldsymbol{x}}[k]$ do vetor $\boldsymbol{x}[k]$ quando são conhecidas a sequência de medições $\boldsymbol{y}[k-1],\ \boldsymbol{y}[k-2], ..., \boldsymbol{y}[0]$, o estado inicial do sistema $\boldsymbol{x}[0]$ e as distribuições de probabilidade de $\boldsymbol{n}[k]$ e $\boldsymbol{v}[k]$.

Definindo o problema da filtragem

Universidade Federal de Campina Grande

- O problema de filtragem a ser considerado consiste no cálculo de uma estimativa $\hat{\boldsymbol{x}}[k]$ do vetor $\boldsymbol{x}[k]$ quando são conhecidas a sequência de medições $\boldsymbol{y}[k-1]$, $\boldsymbol{y}[k-2], ..., \boldsymbol{y}[0]$, o estado inicial do sistema $\boldsymbol{x}[0]$ e as distribuições de probabilidade de $\boldsymbol{n}[k]$ e $\boldsymbol{v}[k]$.

- **O problema de filtragem de Kalman no tempo discreto**: considere o sistema linear de dimensão finita no tempo discreto, $k \geq 0$, obtenha uma estimativa $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$ do vetor $\boldsymbol{x}[k]$, dada a sequência de medições $\boldsymbol{Y}[k-1]$ e uma estimativa $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$, dada a sequência de medições $\boldsymbol{Y}[k]$.

  Assuma que $\boldsymbol{n}[k]$ e $\boldsymbol{v}[k]$ são independentes e descritas por distribuições de probabilidade gaussianas de média nula, i.e. $\boldsymbol{n}[k] \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}_n)$ e $\boldsymbol{v}[k] \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}_v)$, em que $\boldsymbol{\Sigma}_n = \sigma_n^2 \boldsymbol{I}_N$ e $\boldsymbol{\Sigma}_v = \sigma_v^2 \boldsymbol{I}_L$.

  Além disso, assuma que o estado inicial do sistema $\boldsymbol{x}[0] \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{P}_0)$, independente de $\boldsymbol{n}[k]$ e $\boldsymbol{v}[k]$.

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- Erro de estimação *a priori*: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- Erro de estimação *a priori*: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$ $\quad \boldsymbol{R}_e[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- Erro de estimação *a priori*: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] \quad \boldsymbol{R}_e[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]$
- Erro de estimação *a posteriori*: $\boldsymbol{\varepsilon}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- Erro de estimação *a priori*: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$ $\quad \boldsymbol{R}_e[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]$
- Erro de estimação *a posteriori*: $\boldsymbol{\varepsilon}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$ $\quad \boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}[k]\boldsymbol{\varepsilon}^T[k]\right]$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- Erro de estimação *a priori*: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] \quad \boldsymbol{R}_e[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]$
- Erro de estimação *a posteriori*: $\boldsymbol{\varepsilon}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k] \quad \boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}[k]\boldsymbol{\varepsilon}^T[k]\right]$
- Considere o seguinte estimador linear para $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- Erro de estimação *a priori*: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$ $\quad \boldsymbol{R}_e[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]$
- Erro de estimação *a posteriori*: $\boldsymbol{\varepsilon}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$ $\quad \boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}[k]\boldsymbol{\varepsilon}^T[k]\right]$
- Considere o seguinte estimador linear para $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$$

Temos, então: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- Erro de estimação *a priori*: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$ $\quad \boldsymbol{R}_e[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]$
- Erro de estimação *a posteriori*: $\boldsymbol{\varepsilon}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$ $\quad \boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}[k]\boldsymbol{\varepsilon}^T[k]\right]$
- Considere o seguinte estimador linear para $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$$

Temos, então: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$

$$\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k-1] + \boldsymbol{n}[k] - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- Erro de estimação *a priori*: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$ $\quad \boldsymbol{R}_e[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]$
- Erro de estimação *a posteriori*: $\boldsymbol{\varepsilon}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$ $\quad \boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}[k]\boldsymbol{\varepsilon}^T[k]\right]$
- Considere o seguinte estimador linear para $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$$

Temos, então: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$

$$\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k-1] + \boldsymbol{n}[k] - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$$

$$\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}[k-1] + \boldsymbol{n}[k]$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- Erro de estimação *a priori*: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$ $\quad \boldsymbol{R}_e[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]$
- Erro de estimação *a posteriori*: $\boldsymbol{\varepsilon}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$ $\quad \boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}[k]\boldsymbol{\varepsilon}^T[k]\right]$
- Considere o seguinte estimador linear para $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$$

Temos, então: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$

$$\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k-1] + \boldsymbol{n}[k] - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$$

$$\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}[k-1] + \boldsymbol{n}[k]$$

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\right] = \boldsymbol{A}\mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}[k-1]\right] + \mathbb{E}\left[\boldsymbol{n}[k]\right]$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- Erro de estimação *a priori*: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$ $\quad \boldsymbol{R}_e[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]$
- Erro de estimação *a posteriori*: $\boldsymbol{\varepsilon}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$ $\quad \boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}[k]\boldsymbol{\varepsilon}^T[k]\right]$
- Considere o seguinte estimador linear para $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$$

Temos, então: $\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$

$$\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}[k-1] + \boldsymbol{n}[k] - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$$

$$\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}[k-1] + \boldsymbol{n}[k]$$

$$\mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\right] = \boldsymbol{A}\mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}[k-1]\right] + \mathbb{E}\left[\boldsymbol{n}[k]\right]$$

Se $\mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}[k-1]\right] = \boldsymbol{0}$, então $\mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\right] = \boldsymbol{0}$, e o estimador é não-enviesado.

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- Calculando a matriz de covariância do erro *a priori*:

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- Calculando a matriz de covariância do erro *a priori*:

$$\boldsymbol{R}_e[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- Calculando a matriz de covariância do erro *a priori*:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_e[k] &= \mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}[k-1]+\boldsymbol{n}[k])(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}[k-1]+\boldsymbol{n}[k])^T\right]\end{aligned}$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- Calculando a matriz de covariância do erro *a priori*:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_e[k] &= \mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}[k-1]+\boldsymbol{n}[k])(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}[k-1]+\boldsymbol{n}[k])^T\right] \\
&= \boldsymbol{A}\mathbb{E}\left[(\boldsymbol{\varepsilon}[k-1]\boldsymbol{\varepsilon}[k-1]^T\right]\boldsymbol{A}^T+\mathbb{E}\left[\boldsymbol{n}[k]\boldsymbol{n}^T[k]\right]
\end{aligned}
$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- Calculando a matriz de covariância do erro *a priori*:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_e[k] &= \mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}[k-1]+\boldsymbol{n}[k])(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}[k-1]+\boldsymbol{n}[k])^T\right] \\
&= \boldsymbol{A}\mathbb{E}\left[(\boldsymbol{\varepsilon}[k-1]\boldsymbol{\varepsilon}[k-1]^T\right]\boldsymbol{A}^T + \mathbb{E}\left[\boldsymbol{n}[k]\boldsymbol{n}^T[k]\right] \\
&= \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_\varepsilon[k-1]\boldsymbol{A}^T + \sigma_n^2\boldsymbol{I}_N
\end{aligned}
$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- Considere o seguinte estimador linear para $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k].$$

  em que as matrizes $\tilde{\boldsymbol{K}}[k]$ e $\boldsymbol{K}[k]$ definem uma combinação linear entre a estimativa *a priori* e a nova observação (inovação) $\boldsymbol{y}[k]$ disponível no instante k.

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- Considere o seguinte estimador linear para $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k].$$

em que as matrizes $\tilde{\boldsymbol{K}}[k]$ e $\boldsymbol{K}[k]$ definem uma combinação linear entre a estimativa *a priori* e a nova observação (inovação) $\boldsymbol{y}[k]$ disponível no instante k.

Temos, então:

$$\boldsymbol{\varepsilon}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- Considere o seguinte estimador linear para $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k].$$

  em que as matrizes $\tilde{\boldsymbol{K}}[k]$ e $\boldsymbol{K}[k]$ definem uma combinação linear entre a estimativa *a priori* e a nova observação (inovação) $\boldsymbol{y}[k]$ disponível no instante k.

Temos, então:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}[k] &= \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k] \\ &= \boldsymbol{x}[k] - \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k]\end{aligned}$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- Considere o seguinte estimador linear para $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k].$$

  em que as matrizes $\tilde{\boldsymbol{K}}[k]$ e $\boldsymbol{K}[k]$ definem uma combinação linear entre a estimativa *a priori* e a nova observação (inovação) $\boldsymbol{y}[k]$ disponível no instante k.

Temos, então:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}[k] &= \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k] \\
&= \boldsymbol{x}[k] - \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\
&= \boldsymbol{x}[k] + \tilde{\boldsymbol{K}}[k](\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{x}[k]) - \boldsymbol{K}[k](\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{v}[k])
\end{aligned}$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- Considere o seguinte estimador linear para $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k].$$

em que as matrizes $\tilde{\boldsymbol{K}}[k]$ e $\boldsymbol{K}[k]$ definem uma combinação linear entre a estimativa *a priori* e a nova observação (inovação) $\boldsymbol{y}[k]$ disponível no instante k.

Temos, então:

$$\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}[k] &= \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k] \\
&= \boldsymbol{x}[k] - \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\
&= \boldsymbol{x}[k] + \tilde{\boldsymbol{K}}[k](\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{x}[k]) - \boldsymbol{K}[k](\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{v}[k])
\end{aligned}$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- Considere o seguinte estimador linear para $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k].$$

em que as matrizes $\tilde{\boldsymbol{K}}[k]$ e $\boldsymbol{K}[k]$ definem uma combinação linear entre a estimativa *a priori* e a nova observação (inovação) $\boldsymbol{y}[k]$ disponível no instante k.

$$\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] = \boldsymbol{x}[k] - \boldsymbol{e}[k]$$

Temos, então:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}[k] &= \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k]\\ &= \boldsymbol{x}[k] - \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k]\\ &= \boldsymbol{x}[k] + \tilde{\boldsymbol{K}}[k](\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{x}[k]) - \boldsymbol{K}[k](\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{v}[k])\end{aligned}$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- Considere o seguinte estimador linear para $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k].$$

em que as matrizes $\tilde{\boldsymbol{K}}[k]$ e $\boldsymbol{K}[k]$ definem uma combinação linear entre a estimativa *a priori* e a nova observação (inovação) $\boldsymbol{y}[k]$ disponível no instante k.

$$\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] = \boldsymbol{x}[k] - \boldsymbol{e}[k]$$

Temos, então:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}[k] &= \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k] \\
&= \boldsymbol{x}[k] - \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\
&= \boldsymbol{x}[k] + \tilde{\boldsymbol{K}}[k](\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{x}[k]) - \boldsymbol{K}[k](\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{v}[k]) \\
&= (\boldsymbol{I}_N - \tilde{\boldsymbol{K}}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}[k] + \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k]
\end{aligned}$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- Considere o seguinte estimador linear para $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k]$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k].$$

em que as matrizes $\tilde{\boldsymbol{K}}[k]$ e $\boldsymbol{K}[k]$ definem uma combinação linear entre a estimativa *a priori* e a nova observação (inovação) $\boldsymbol{y}[k]$ disponível no instante k.

$$\boldsymbol{e}[k] = \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] = \boldsymbol{x}[k] - \boldsymbol{e}[k]$$

Temos, então:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}[k] &= \boldsymbol{x}[k] - \hat{\boldsymbol{x}}[k|k] \\
&= \boldsymbol{x}[k] - \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\
&= \boldsymbol{x}[k] + \tilde{\boldsymbol{K}}[k](\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{x}[k]) - \boldsymbol{K}[k](\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}[k] + \boldsymbol{v}[k]) \\
&= (\boldsymbol{I}_N - \tilde{\boldsymbol{K}}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}[k] + \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k]
\end{aligned}$$

Para que $\mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}[k]] = \boldsymbol{0}$, temos que $\tilde{\boldsymbol{K}}[k] = \boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C}$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k]$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] &= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\ &= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k]\end{aligned}$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] &= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\ &= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\ &= \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k](\boldsymbol{y}[k] - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1])\end{aligned}$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] &= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\
&= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\
&= \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k](\boldsymbol{y}[k] - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]) \\
&= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\left(\boldsymbol{y}[k] - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]\right)
\end{aligned}
$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] &= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\
&= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\
&= \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k](\boldsymbol{y}[k] - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]) \\
&= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\left(\boldsymbol{y}[k] - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]\right)
\end{aligned}
$$

O erro *a posteriori* será dado por:

$$
\boldsymbol{\varepsilon}[k] = (\boldsymbol{I}_N - \tilde{\boldsymbol{K}}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}[k] + \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k]
$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] &= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\
&= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\
&= \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k](\boldsymbol{y}[k] - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]) \\
&= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\left(\boldsymbol{y}[k] - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]\right)
\end{aligned}$$

O erro *a posteriori* será dado por:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}[k] &= (\boldsymbol{I}_N - \tilde{\boldsymbol{K}}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}[k] + \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k] \\
&= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{I}_N + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C} - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}[k] + (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k]
\end{aligned}$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] &= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\ &= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{y}[k] \\ &= \hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] + \boldsymbol{K}[k](\boldsymbol{y}[k] - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1]) \\ &= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\left(\boldsymbol{y}[k] - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]\right)\end{aligned}$$

O erro *a posteriori* será dado por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}[k] &= (\boldsymbol{I}_N - \tilde{\boldsymbol{K}}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}[k] + \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k] \\ &= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{I}_N + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C} - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}[k] + (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k] \\ &= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k]\end{aligned}$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo: $\boldsymbol{\varepsilon}[k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k]$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo: $\boldsymbol{\varepsilon}[k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k]$

- Calculando a matriz de covariância do erro *a posteriori*:

$$\boldsymbol{R}_{\varepsilon}[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}[k]\boldsymbol{\varepsilon}^{T}[k]\right]$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo: $\boldsymbol{\varepsilon}[k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k]$

- Calculando a matriz de covariância do erro *a posteriori*:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{\varepsilon}[k] &= \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}[k]\boldsymbol{\varepsilon}^T[k]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(\tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k])(\tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k])^T\right] \end{aligned}$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

Desse modo: $\boldsymbol{\varepsilon}[k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k]$

- Calculando a matriz de covariância do erro *a posteriori*:

$$\boldsymbol{R}_{\varepsilon}[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}[k]\boldsymbol{\varepsilon}^T[k]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[(\tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k])(\tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k])^T\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] - \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{v}^T[k]\boldsymbol{K}^T[k]\right]$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

Desse modo: $\boldsymbol{\varepsilon}[k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k]$

- Calculando a matriz de covariância do erro *a posteriori*:

$$\boldsymbol{R}_{\varepsilon}[k] = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\varepsilon}[k]\boldsymbol{\varepsilon}^T[k]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[(\tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k])(\tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k] - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k])^T\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] - \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{v}^T[k]\boldsymbol{K}^T[k]\right]$$

$$+\mathbb{E}\left[-\boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{v}[k]\boldsymbol{v}^T[k]\boldsymbol{K}^T[k]\right]$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal
de Campina Grande

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

$$\boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \boldsymbol{K}[k]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{v}[k]\boldsymbol{v}^T[k]\right]\boldsymbol{K}^T[k]$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{\varepsilon}[k] &= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \boldsymbol{K}[k]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{v}[k]\boldsymbol{v}^T[k]\right]\boldsymbol{K}^T[k] \\ &= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{R}_e[k]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \boldsymbol{K}[k]\sigma_v^2\boldsymbol{I}_L\boldsymbol{K}^T[k] \end{aligned}$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_\varepsilon[k] &= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \boldsymbol{K}[k]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{v}[k]\boldsymbol{v}^T[k]\right]\boldsymbol{K}^T[k] \\
&= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{R}_e[k]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \boldsymbol{K}[k]\sigma_v^2\boldsymbol{I}_L\boldsymbol{K}^T[k] \\
&= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{R}_e[k]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{K}^T[k]
\end{aligned}$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_\varepsilon[k] &= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \boldsymbol{K}[k]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{v}[k]\boldsymbol{v}^T[k]\right]\boldsymbol{K}^T[k] \\ &= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{R}_e[k]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \boldsymbol{K}[k]\sigma_v^2\boldsymbol{I}_L\boldsymbol{K}^T[k] \\ &= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{R}_e[k]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{K}^T[k]\end{aligned}$$

Logo:

$$\boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k](\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})^T + \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{K}^T[k]$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_\varepsilon[k] &= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \boldsymbol{K}[k]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{v}[k]\boldsymbol{v}^T[k]\right]\boldsymbol{K}^T[k] \\
&= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{R}_e[k]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \boldsymbol{K}[k]\sigma_v^2\boldsymbol{I}_L\boldsymbol{K}^T[k] \\
&= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{R}_e[k]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{K}^T[k]
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_\varepsilon[k] &= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k](\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})^T + \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{K}^T[k] \\
&= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k] - (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{K}^T[k] + \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{K}^T[k]
\end{aligned}$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Desse modo:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_\varepsilon[k] &= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{e}[k]\boldsymbol{e}^T[k]\right]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \boldsymbol{K}[k]\mathbb{E}\left[\boldsymbol{v}[k]\boldsymbol{v}^T[k]\right]\boldsymbol{K}^T[k] \\
&= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{R}_e[k]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \boldsymbol{K}[k]\sigma_v^2\boldsymbol{I}_L\boldsymbol{K}^T[k] \\
&= \tilde{\boldsymbol{K}}[k]\boldsymbol{R}_e[k]\tilde{\boldsymbol{K}}^T[k] + \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{K}^T[k]
\end{aligned}
$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_\varepsilon[k] &= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k](\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})^T + \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{K}^T[k] \\
&= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k] - (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{K}^T[k] + \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{K}^T[k] \\
&= (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k] - \left[(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]\right]\boldsymbol{K}^T[k]
\end{aligned}
$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- O traço da matriz $\boldsymbol{R}_\varepsilon[k]$ determina quão boa é a estimativa *a posteriori* do estado $\boldsymbol{x}[k]$. O ganho de Kalman $\boldsymbol{K}[k]$ deve ser escolhido de forma a minimizar o traço de $\boldsymbol{R}_\varepsilon[k]$.

$$\boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k] - \left[(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]\right]\boldsymbol{K}^T[k]$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- O traço da matriz $\boldsymbol{R}_\varepsilon[k]$ determina quão boa é a estimativa *a posteriori* do estado $\boldsymbol{x}[k]$. O ganho de Kalman $\boldsymbol{K}[k]$ deve ser escolhido de forma a minimizar o traço de $\boldsymbol{R}_\varepsilon[k]$.

$$\boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k] - \left[(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]\right]\boldsymbol{K}^T[k]$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_\varepsilon[k])}{\partial \boldsymbol{K}[k]} = -2(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T + 2\sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- O traço da matriz $\boldsymbol{R}_\varepsilon[k]$ determina quão boa é a estimativa *a posteriori* do estado $\boldsymbol{x}[k]$. O ganho de Kalman $\boldsymbol{K}[k]$ deve ser escolhido de forma a minimizar o traço de $\boldsymbol{R}_\varepsilon[k]$.

$$\boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k] - \left[(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]\right]\boldsymbol{K}^T[k]$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_\varepsilon[k])}{\partial\boldsymbol{K}[k]} = -2(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T + 2\sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_\varepsilon[k])}{\partial\boldsymbol{K}[k]} = 0 \implies (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k] = 0$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- O traço da matriz $\boldsymbol{R}_\varepsilon[k]$ determina quão boa é a estimativa *a posteriori* do estado $\boldsymbol{x}[k]$. O ganho de Kalman $\boldsymbol{K}[k]$ deve ser escolhido de forma a minimizar o traço de $\boldsymbol{R}_\varepsilon[k]$.

$$\boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k] - \left[(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]\right]\boldsymbol{K}^T[k]$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_\varepsilon[k])}{\partial \boldsymbol{K}[k]} = -2(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T + 2\sigma_v^2\boldsymbol{K}[k]$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{R}_\varepsilon[k])}{\partial \boldsymbol{K}[k]} = 0 \implies (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k] = 0$$

Note que: $\boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- O ganho de Kalman $\boldsymbol{K}[k]$ é dado então por:

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- O ganho de Kalman $\boldsymbol{K}[k]$ é dado então por:

$$(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k] = 0$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

- O ganho de Kalman $\boldsymbol{K}[k]$ é dado então por:

$$(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k] = 0$$

$$\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k] = 0$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- O ganho de Kalman $\boldsymbol{K}[k]$ é dado então por:

$$(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k] = 0$$

$$\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k] = 0$$

$$\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \boldsymbol{K}[k](\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T + \sigma_v^2\boldsymbol{I}_L) = 0$$

Determinação do Filtro de Kalman no tempo discreto

Universidade Federal de Campina Grande

- O ganho de Kalman $\boldsymbol{K}[k]$ é dado então por:

$$(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k] = 0$$

$$\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \sigma_v^2\boldsymbol{K}[k] = 0$$

$$\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T - \boldsymbol{K}[k](\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T + \sigma_v^2\boldsymbol{I}_L) = 0$$

$$\boldsymbol{K}[k] = \boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T\left[\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T + \sigma_v^2\boldsymbol{I}_L\right]^{-1}$$

Filtro de Kalman

Filtro de Kalman

Universidade Federal de Campina Grande

Inicialização: $\hat{\boldsymbol{x}}[0|0] = \boldsymbol{x}[0]$, $\boldsymbol{R}_{\varepsilon}[0] = \boldsymbol{x}[0]\boldsymbol{x}^T[0]$.

Filtro de Kalman

Universidade Federal de Campina Grande

Inicialização: $\hat{\boldsymbol{x}}[0|0] = \boldsymbol{x}[0]$, $\boldsymbol{R}_\varepsilon[0] = \boldsymbol{x}[0]\boldsymbol{x}^T[0]$.

Predição do estado (estimativa *a priori*): $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$

Filtro de Kalman

Inicialização: $\hat{\boldsymbol{x}}[0|0] = \boldsymbol{x}[0]$, $\boldsymbol{R}_{\varepsilon}[0] = \boldsymbol{x}[0]\boldsymbol{x}^T[0]$.

Predição do estado (estimativa *a priori*): $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$

Predição da matriz de covariância *a priori*: $\boldsymbol{R}_e[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_{\varepsilon}[k-1]\boldsymbol{A}^T + \sigma_n^2\boldsymbol{I}_N$

Filtro de Kalman

Inicialização: $\hat{\boldsymbol{x}}[0|0] = \boldsymbol{x}[0]$, $\boldsymbol{R}_\varepsilon[0] = \boldsymbol{x}[0]\boldsymbol{x}^T[0]$.

Predição do estado (estimativa *a priori*): $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$

Predição da matriz de covariância *a priori*: $\boldsymbol{R}_e[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_\varepsilon[k-1]\boldsymbol{A}^T + \sigma_n^2 \boldsymbol{I}_N$

Cálculo do ganho ótimo de Kalman: $\boldsymbol{K}[k] = \boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T \left[\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T + \sigma_v^2 \boldsymbol{I}_L\right]^{-1}$

Filtro de Kalman

Inicialização: $\hat{\boldsymbol{x}}[0|0] = \boldsymbol{x}[0]$, $\boldsymbol{R}_\varepsilon[0] = \boldsymbol{x}[0]\boldsymbol{x}^T[0]$.

Predição do estado (estimativa *a priori*): $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$

Predição da matriz de covariância *a priori*: $\boldsymbol{R}_e[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_\varepsilon[k-1]\boldsymbol{A}^T + \sigma_n^2\boldsymbol{I}_N$

Cálculo do ganho ótimo de Kalman: $\boldsymbol{K}[k] = \boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T\left[\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T + \sigma_v^2\boldsymbol{I}_L\right]^{-1}$

Atualização da estimativa do estado (estimativa *a posteriori*):

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\left(\boldsymbol{y}[k] - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]\right)$$

Filtro de Kalman

Inicialização: $\hat{\boldsymbol{x}}[0|0] = \boldsymbol{x}[0]$, $\boldsymbol{R}_\varepsilon[0] = \boldsymbol{x}[0]\boldsymbol{x}^T[0]$.

Predição do estado (estimativa *a priori*): $\hat{\boldsymbol{x}}[k|k-1] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]$

Predição da matriz de covariância *a priori*: $\boldsymbol{R}_e[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_\varepsilon[k-1]\boldsymbol{A}^T + \sigma_n^2\boldsymbol{I}_N$

Cálculo do ganho ótimo de Kalman: $\boldsymbol{K}[k] = \boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T\left[\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T + \sigma_v^2\boldsymbol{I}_L\right]^{-1}$

Atualização da estimativa do estado (estimativa *a posteriori*):

$$\hat{\boldsymbol{x}}[k|k] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\left(\boldsymbol{y}[k] - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1|k-1]\right)$$

Atualização da matriz de covariância *a posteriori*:

$$\boldsymbol{R}_\varepsilon[k] = (\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C})\boldsymbol{R}_e[k]$$

Filtro de Kalman

Universidade Federal de Campina Grande

Observações:

- Em 1960, R. E. Kalman publicou seu famoso artigo* descrevendo uma solução recursiva para o problema de filtragem linear de dados discretos. Desde então, em diversas áreas de processamento de sinais, o filtro de Kalman tem sido objeto de extensa pesquisa e aplicação.

  $*$ Kalman, R. E. 1960. *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, Transaction of the ASME—Journal of Basic Engineering,pp. 35-45 (March 1960).

Filtro de Kalman

Universidade Federal de Campina Grande

Observações:

- Em 1960, R. E. Kalman publicou seu famoso artigo* descrevendo uma solução recursiva para o problema de filtragem linear de dados discretos. Desde então, em diversas áreas de processamento de sinais, o filtro de Kalman tem sido objeto de extensa pesquisa e aplicação.

  $*$ Kalman, R. E. 1960. *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, Transaction of the ASME—Journal of Basic Engineering,pp. 35-45 (March 1960).

- A solução do filtro de Kalman corresponde ao estimador ótimo de erro quadrático médio mínimo (MSE) sempre que o ruído e o vetor de estado forem conjuntamente gaussianos; caso contrário, é a solução linear ótima de MSE mínimo.

Filtro de Kalman

Universidade Federal de Campina Grande

Observações:

Filtro de Kalman

Universidade Federal de Campina Grande

Observações:

Inicialização
(1) Estado inicial
$\hat{\boldsymbol{x}}[-1]$
(2) Matriz de covariância inicial
$\boldsymbol{R}_{\epsilon}[-1]$

Filtro de Kalman

Observações:

Inicialização
(1) Estado inicial
$\hat{\boldsymbol{x}}[-1]$
(2) Matriz de covariância inicial
$\boldsymbol{R}_\epsilon[-1]$

Atualização temporal (Predição)
(1) Projeta o próximo estado
$\hat{\boldsymbol{x}}[k\|k-1] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1\|k-1] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[k-1]$
(2) Projeta a próxima matriz de covariância do erro de estimação
$\boldsymbol{R}_e[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_\epsilon[k-1]\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{R}_n$

Filtro de Kalman

Observações:

Inicialização
(1) Estado inicial
$\hat{\boldsymbol{x}}[-1]$
(2) Matriz de covariância inicial
$\boldsymbol{R}_\epsilon[-1]$

Atualização temporal (Predição)
(1) Projeta o próximo estado
$\hat{\boldsymbol{x}}[k\|k-1] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1\|k-1] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[k-1]$
(2) Projeta a próxima matriz de covariância do erro de estimação
$\boldsymbol{R}_e[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_\epsilon[k-1]\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{R}_n$

Atualização com valor medido (Correção)
(1) Cálculo do ganho de Kalman
$\boldsymbol{K}[k] = \boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{R}_v\right)^{-1}$
(2) Atualizar estimativa com medida $\boldsymbol{y}_k$
$\hat{\boldsymbol{x}}[k\|k] = \hat{\boldsymbol{x}}[k\|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\left(\boldsymbol{y}[k] - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}[k\|k-1]\right)$
(3) Atualizar matriz de covariância do erro de estimação
$\boldsymbol{R}_\epsilon[k] = \left(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{R}_e[k]$

Filtro de Kalman

Universidade Federal de Campina Grande

Observações:

Inicialização
(1) Estado inicial
$\hat{\boldsymbol{x}}[-1]$
(2) Matriz de covariância inicial
$\boldsymbol{R}_\epsilon[-1]$

Atualização temporal (Predição)
(1) Projeta o próximo estado
$\hat{\boldsymbol{x}}[k\|k-1] = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}[k-1\|k-1] + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}[k-1]$
(2) Projeta a próxima matriz de covariância do erro de estimação
$\boldsymbol{R}_e[k] = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_\epsilon[k-1]\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{R}_n$

Atualização com valor medido (Correção)
(1) Cálculo do ganho de Kalman
$\boldsymbol{K}[k] = \boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_e[k]\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{R}_v\right)^{-1}$
(2) Atualizar estimativa com medida $\boldsymbol{y}_k$
$\hat{\boldsymbol{x}}[k\|k] = \hat{\boldsymbol{x}}[k\|k-1] + \boldsymbol{K}[k]\left(\boldsymbol{y}[k] - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}[k\|k-1]\right)$
(3) Atualizar matriz de covariância do erro de estimação
$\boldsymbol{R}_\epsilon[k] = \left(\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{K}[k]\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{R}_e[k]$

Filtro de Kalman

Observações:

- Na implementação prática do filtro, a covariância do ruído de medição $\boldsymbol{R}_v$ geralmente é conhecida. Estimar a covariância do erro de medição é geralmente viável, uma vez que é necessário medir os estados do processo de qualquer forma (durante a operação do filtro). Desse modo, a dispor de um conjunto de medições pode-se estimar a variância do ruído de medição.

Filtro de Kalman

Observações:

- Na implementação prática do filtro, a covariância do ruído de medição $\boldsymbol{R}_v$ geralmente é conhecida. Estimar a covariância do erro de medição é geralmente viável, uma vez que é necessário medir os estados do processo de qualquer forma (durante a operação do filtro). Desse modo, a dispor de um conjunto de medições pode-se estimar a variância do ruído de medição.

- A determinação da covariância do ruído de processo $\boldsymbol{R}_n$ é geralmente mais difícil, pois, em geral, não temos a capacidade de observar diretamente o processo que estamos estimando. Às vezes, um modelo de processo relativamente simples (ainda que impreciso) pode produzir resultados aceitáveis se considerarmos uma quantidade suficiente de incerteza no processo através da seleção adequada de $\boldsymbol{R}_n$. Certamente, neste caso, espera-se que as medições do processo sejam confiáveis.