



Universidade Federal
de Campina Grande

Processamento Adaptativo de Sinais

Algoritmo RLS

Edson P. da Silva

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPgEE).

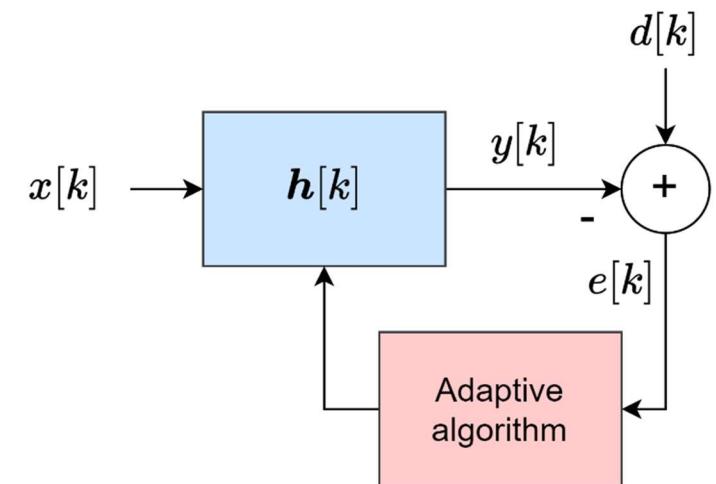
Unidade Acadêmica de Engenharia Elétrica (UAEE)

Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Sumário

1. Mínimos quadrados.
2. Mínimos quadrados recursivos.
3. Algoritmo RLS.
4. Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori* e *a posteriori*.
5. Propriedades da solução de mínimos quadrados.

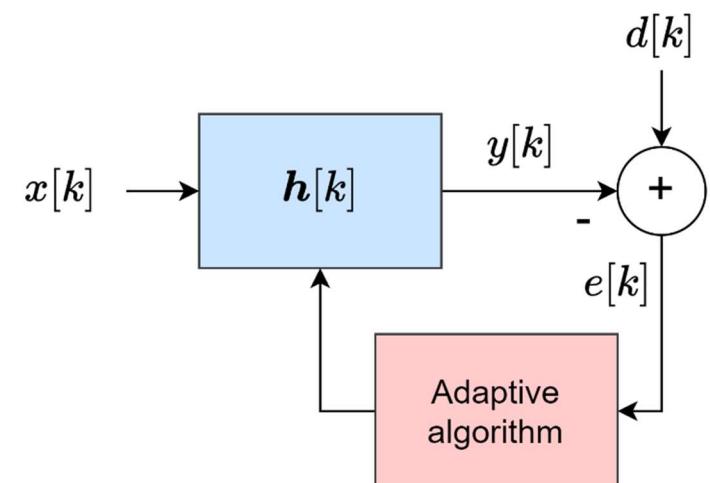
Mínimos Quadrados



Mínimos Quadrados

- Considere como função objetivo a soma dos quadrados dos erros de M saídas consecutivas do filtro:

$$J(\mathbf{h}) \triangleq \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} |e[k - i]|^2$$

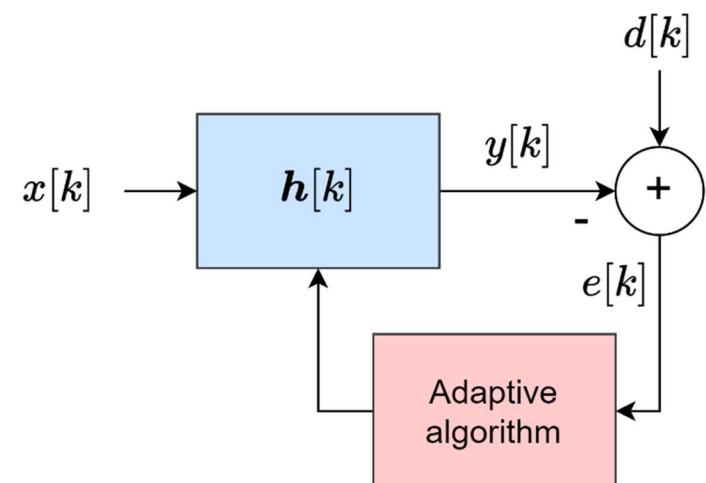


Mínimos Quadrados

- Considere como função objetivo a soma dos quadrados dos erros de M saídas consecutivas do filtro:

$$J(\mathbf{h}) \triangleq \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} |e[k-i]|^2$$

$$\mathbf{x}[k] = [x[k], x[k-1], \dots, x[k-N+1]]^T$$



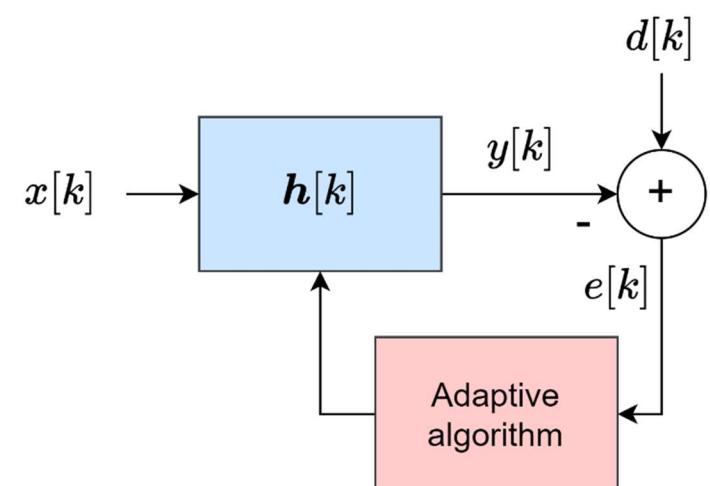
Mínimos Quadrados

- Considere como função objetivo a soma dos quadrados dos erros de M saídas consecutivas do filtro:

$$J(\mathbf{h}) \triangleq \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} |e[k-i]|^2$$

$$\mathbf{x}[k] = [x[k], x[k-1], \dots, x[k-N+1]]^T$$

$$\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]^T$$



Mínimos Quadrados

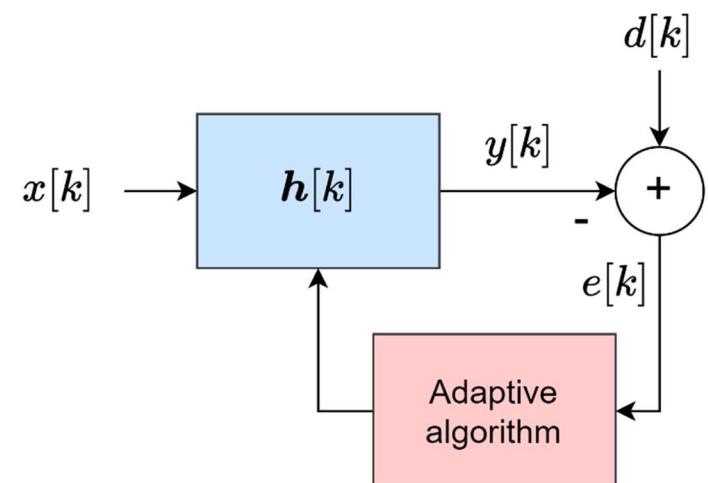
- Considere como função objetivo a soma dos quadrados dos erros de M saídas consecutivas do filtro:

$$J(\mathbf{h}) \triangleq \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} |e[k-i]|^2$$

$$\mathbf{x}[k] = [x[k], x[k-1], \dots, x[k-N+1]]^T$$

$$\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]^T$$

$$y[k] = \sum_{i=0}^{N-1} h_i x[k-i] = \mathbf{h}^T \mathbf{x}[k] = \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}$$





Universidade Federal
de Campina Grande

Mínimos Quadrados

O erro em cada instante k será dado por:

$$e[k] = d[k] - \mathbf{x}[k]^T \mathbf{h}$$

$$e[k-1] = d[k-1] - \mathbf{x}[k-1]^T \mathbf{h}$$

⋮

$$e[k-M+1] = d[k-M+1] - \mathbf{x}[k-M+1]^T \mathbf{h}$$

Na forma matricial:

Mínimos Quadrados

O erro em cada instante k será dado por:

$$e[k] = d[k] - \mathbf{x}[k]^T \mathbf{h}$$

$$e[k-1] = d[k-1] - \mathbf{x}[k-1]^T \mathbf{h}$$

⋮

$$e[k-M+1] = d[k-M+1] - \mathbf{x}[k-M+1]^T \mathbf{h}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M+1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x[k] & x[k-1] & \cdots & x[k-N+1] \\ x[k-1] & x[k-2] & \cdots & x[k-N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k-M+1] & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix}$$

Mínimos Quadrados

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M+1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x[k] & x[k-1] & \cdots & x[k-N+1] \\ x[k-1] & x[k-2] & \cdots & x[k-N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k-M+1] & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix}$$

Mínimos Quadrados

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M+1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x[k] & x[k-1] & \cdots & x[k-N+1] \\ x[k-1] & x[k-2] & \cdots & x[k-N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k-M+1] & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$e = d - Xh$$

Mínimos Quadrados

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M+1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x[k] & x[k-1] & \cdots & x[k-N+1] \\ x[k-1] & x[k-2] & \cdots & x[k-N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k-M+1] & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

Mínimos Quadrados

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M+1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x[k] & x[k-1] & \cdots & x[k-N+1] \\ x[k-1] & x[k-2] & \cdots & x[k-N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k-M+1] & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

Mínimos Quadrados

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M+1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x[k] & x[k-1] & \cdots & x[k-N+1] \\ x[k-1] & x[k-2] & \cdots & x[k-N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k-M+1] & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

Mínimos Quadrados

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M+1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x[k] & x[k-1] & \cdots & x[k-N+1] \\ x[k-1] & x[k-2] & \cdots & x[k-N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k-M+1] & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

$$J(\mathbf{h}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} |e[k-i]|^2$$

Mínimos Quadrados

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M+1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x[k] & x[k-1] & \cdots & x[k-N+1] \\ x[k-1] & x[k-2] & \cdots & x[k-N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k-M+1] & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{h}) &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} |e[k-i]|^2 \\ &= \frac{1}{M} \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \frac{1}{M} \|\mathbf{e}\|^2 \end{aligned}$$

Mínimos Quadrados

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M+1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x[k] & x[k-1] & \cdots & x[k-N+1] \\ x[k-1] & x[k-2] & \cdots & x[k-N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k-M+1] & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{h}) &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} |e[k-i]|^2 \\ &= \frac{1}{M} \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \frac{1}{M} \|\mathbf{e}\|^2 \\ &= \frac{1}{M} \|\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}\|^2 \end{aligned}$$

Mínimos Quadrados

$$\begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M+1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x[k] & x[k-1] & \cdots & x[k-N+1] \\ x[k-1] & x[k-2] & \cdots & x[k-N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[k-M+1] & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}$$

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e[k] \\ e[k-1] \\ \vdots \\ e[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{h}) &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} |e[k-i]|^2 \\ &= \frac{1}{M} \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \frac{1}{M} \|\mathbf{e}\|^2 \\ &= \frac{1}{M} \|\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}\|^2 \end{aligned}$$

Solução de mínimos quadrados (*Least Squares* - LS):

$$\mathbf{h}_{\text{LS}} = \arg \min_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h}) = \arg \min_{\mathbf{h}} \|\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}\|^2$$



Mínimos Quadrados

Universidade Federal
de Campina Grande



Mínimos Quadrados

Universidade Federal
de Campina Grande

$$J(\boldsymbol{h}) \propto \|\boldsymbol{d} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{h}\|^2$$



Mínimos Quadrados

Universidade Federal
de Campina Grande

$$J(\mathbf{h}) \propto \|\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}\|^2$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{h}) &= (\mathbf{d}^T - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T) (\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}) \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{X}\mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{h} \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{d} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{h} \end{aligned}$$

Mínimos Quadrados

$$J(\mathbf{h}) \propto \|\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}\|^2$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{h}) &= (\mathbf{d}^T - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T) (\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}) \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{X}\mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{h} \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{d} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{h} \end{aligned}$$

Calculando o gradiente de $J(\mathbf{h})$ com relação ao vetor de coeficientes \mathbf{h} , temos:

$$\nabla J(\mathbf{h}) \triangleq \frac{\partial J(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{h} - 2\mathbf{X}^T \mathbf{d}$$

Mínimos Quadrados

$$J(\mathbf{h}) \propto \|\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}\|^2$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{h}) &= (\mathbf{d}^T - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T) (\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}) \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{X}\mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{h} \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{d} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{h} \end{aligned}$$

Calculando o gradiente de $J(\mathbf{h})$ com relação ao vetor de coeficientes \mathbf{h} , temos:

$$\nabla J(\mathbf{h}) \triangleq \frac{\partial J(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{h} - 2\mathbf{X}^T \mathbf{d}$$

Logo:

$$\nabla J(\mathbf{h}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{h} = \mathbf{X}^T \mathbf{d}$$

Mínimos Quadrados

$$J(\mathbf{h}) \propto \|\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}\|^2$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{h}) &= (\mathbf{d}^T - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T) (\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}) \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{X}\mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{h} \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{d} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{h} \end{aligned}$$

Calculando o gradiente de $J(\mathbf{h})$ com relação ao vetor de coeficientes \mathbf{h} , temos:

$$\nabla J(\mathbf{h}) \triangleq \frac{\partial J(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = 2\mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{h} - 2\mathbf{X}^T \mathbf{d}$$

Logo:

Solução de mínimos quadrados:

$$\nabla J(\mathbf{h}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{X}^T \mathbf{X}\mathbf{h} = \mathbf{X}^T \mathbf{d} \implies \mathbf{h}_{\text{LS}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{d}$$



Universidade Federal
de Campina Grande

Mínimos Quadrados

Solução de mínimos quadrados: $\mathbf{h}_{\text{LS}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{d}$



Universidade Federal
de Campina Grande

Mínimos Quadrados

Solução de mínimos quadrados: $\mathbf{h}_{\text{LS}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{d}$

Observações:

Mínimos Quadrados

Solução de mínimos quadrados: $\mathbf{h}_{\text{LS}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{d}$

Observações:

- A solução existe apenas se $M > N$.

Mínimos Quadrados

Solução de mínimos quadrados: $\mathbf{h}_{\text{LS}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{d}$

Observações:

- A solução existe apenas se $M > N$.
- O sistema linear $\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{h} = \mathbf{X}^T \mathbf{d}$ é conhecido como *equações normais de Yule-Walker*.

Mínimos Quadrados

Solução de mínimos quadrados: $\boldsymbol{h}_{\text{LS}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{d}$

Observações:

- A solução existe apenas se $M > N$.
- O sistema linear $\mathbf{X}^T \mathbf{X} \boldsymbol{h} = \mathbf{X}^T \mathbf{d}$ é conhecido como *equações normais de Yule-Walker*.
- A solução $\boldsymbol{h}_{\text{LS}}$ será única se a matriz \mathbf{X} tiver posto completo.

Mínimos Quadrados

Solução de mínimos quadrados: $\mathbf{h}_{\text{LS}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{d}$

Observações:

- A solução existe apenas se $M > N$.
- O sistema linear $\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{h} = \mathbf{X}^T \mathbf{d}$ é conhecido como *equações normais de Yule-Walker*.
- A solução \mathbf{h}_{LS} será única se a matriz \mathbf{X} tiver posto completo.
- Se a solução não for única, como no caso de um sistema sobredeterminado, é possível identificar uma solução apropriada (entre as infinitas soluções) utilizando algum critério adicional de otimização. Em particular, a solução \mathbf{h}_{psi} que minimiza a norma quadrática euclideana $\|\mathbf{h}\|^2$ é dada por

$$\mathbf{h}_{\text{psi}} = \mathbf{X}^T (\mathbf{X} \mathbf{X}^T)^{-1} \mathbf{d}$$

⁷ em que $\mathbf{X}^T (\mathbf{X} \mathbf{X}^T)^{-1}$ é conhecida como a matriz pseudoinversa de \mathbf{X} .



Universidade Federal
de Campina Grande

Mínimos Quadrados

Solução de mínimos quadrados: $h_{\text{LS}} = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{d}$

Observações:

Mínimos Quadrados

Solução de mínimos quadrados: $\mathbf{h}_{\text{LS}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{d}$

Observações:

- A matrix $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ é uma estimativa temporal da matrix de correlação:

$$\mathbf{R}_{xx}[k] \propto \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{x}[k-i] \mathbf{x}^T[k-i] = \mathbf{X}^T \mathbf{X},$$

em que o fator $1/M$ é omitido por simplicidade.

Mínimos Quadrados

Solução de mínimos quadrados: $\mathbf{h}_{\text{LS}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{d}$

Observações:

- A matrix $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ é uma estimativa temporal da matrix de correlação:

$$\mathbf{R}_{xx}[k] \propto \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{x}[k-i] \mathbf{x}^T[k-i] = \mathbf{X}^T \mathbf{X},$$

em que o fator $1/M$ é omitido por simplicidade.

- O vetor $\mathbf{X}^T \mathbf{d}$ é uma média temporal do vetor de correlação cruzada:

$$\mathbf{p}_{xd}[k] \propto \sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{x}[k-i] \mathbf{d}[k-i] = \mathbf{X}^T \mathbf{d},$$

em que o fator $1/M$ é omitido por simplicidade.



Mínimos Quadrados Ponderados

Universidade Federal
de Campina Grande

Mínimos Quadrados Ponderados

- Considere a seguinte função objetivo que corresponde à soma ponderada dos quadrados dos erros de M saídas consecutivas do filtro:

$$J(\mathbf{h}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i |\epsilon[k-i]|^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i (d[k-i] - \mathbf{x}^T[k-i]\mathbf{h}[k])^2$$

em que ϵ é o *erro a posteriori* e $0 < \lambda < 1$ é um *fator de esquecimento*, que reduz o peso de erros passados no somatório função objetivo.

Mínimos Quadrados Ponderados

- Considere a seguinte função objetivo que corresponde à soma ponderada dos quadrados dos erros de M saídas consecutivas do filtro:

$$J(\mathbf{h}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i |\epsilon[k-i]|^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i (d[k-i] - \mathbf{x}^T[k-i] \mathbf{h}[k])^2$$

em que ϵ é o *erro a posteriori* e $0 < \lambda < 1$ é um *fator de esquecimento*, que reduz o peso de erros passados no somatório função objetivo.

$$\mathbf{x}[k] = [x[k], x[k-1], \dots, x[k-N+1]]^T$$

Mínimos Quadrados Ponderados

- Considere a seguinte função objetivo que corresponde à soma ponderada dos quadrados dos erros de M saídas consecutivas do filtro:

$$J(\mathbf{h}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i |\epsilon[k-i]|^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i (d[k-i] - \mathbf{x}^T[k-i] \mathbf{h}[k])^2$$

em que ϵ é o *erro a posteriori* e $0 < \lambda < 1$ é um *fator de esquecimento*, que reduz o peso de erros passados no somatório função objetivo.

$$\mathbf{x}[k] = [x[k], x[k-1], \dots, x[k-N+1]]^T$$

$$\mathbf{h}[k] = [h_0[k], h_1[k], \dots, h_{N-1}[k]]^T$$

Mínimos Quadrados Ponderados

- Considere a seguinte função objetivo que corresponde à soma ponderada dos quadrados dos erros de M saídas consecutivas do filtro:

$$J(\mathbf{h}) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i |\epsilon[k-i]|^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i (d[k-i] - \mathbf{x}^T[k-i] \mathbf{h}[k])^2$$

em que ϵ é o *erro a posteriori* e $0 < \lambda < 1$ é um *fator de esquecimento*, que reduz o peso de erros passados no somatório função objetivo.

$$\mathbf{x}[k] = [x[k], x[k-1], \dots, x[k-N+1]]^T$$

$$\mathbf{h}[k] = [h_0[k], h_1[k], \dots, h_{N-1}[k]]^T$$

$$y[k] = \sum_{i=0}^{N-1} h_i[k] x[k-i] = \mathbf{h}^T[k] \mathbf{x}[k] = \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}[k]$$



Mínimos Quadrados Ponderados

Universidade Federal
de Campina Grande



Mínimos Quadrados Ponderados

Universidade Federal
de Campina Grande

$$\epsilon = d - Xh$$



Mínimos Quadrados Ponderados

Universidade Federal
de Campina Grande

$$\epsilon = d - Xh$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

Mínimos Quadrados Ponderados

$$\epsilon = d - Xh$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

$$d = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

Mínimos Quadrados Ponderados

$$\epsilon = d - Xh$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$d = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

Mínimos Quadrados Ponderados

$$\epsilon = d - Xh$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$d = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \Lambda_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda^{M-2} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^{M-1} \end{bmatrix}$$

Mínimos Quadrados Ponderados

$$\epsilon = d - Xh$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$J(h) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i |\epsilon[k-i]|^2$$

$$d = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \Lambda_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda^{M-2} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^{M-1} \end{bmatrix}$$

Mínimos Quadrados Ponderados

$$\epsilon = d - Xh$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$J(h) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i |\epsilon[k-i]|^2$$

$$= \frac{1}{M} \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{\epsilon}$$

$$d = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \boldsymbol{\Lambda}_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda^{M-2} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^{M-1} \end{bmatrix}$$

Mínimos Quadrados Ponderados

$$\epsilon = d - Xh$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$\begin{aligned} J(h) &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i |\epsilon[k-i]|^2 \\ &= \frac{1}{M} \epsilon^T \Lambda_M \epsilon \\ &= \frac{1}{M} (d - Xh)^T \Lambda_M (d - Xh) \end{aligned}$$

$$d = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \Lambda_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda^{M-2} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^{M-1} \end{bmatrix}$$



Mínimos Quadrados Ponderados

Universidade Federal
de Campina Grande



Mínimos Quadrados Ponderados

Universidade Federal
de Campina Grande

$$J(\mathbf{h}) \propto (\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h})^T \boldsymbol{\Lambda}_M (\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h})$$

Mínimos Quadrados Ponderados

$$J(\mathbf{h}) \propto (\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h})^T \boldsymbol{\Lambda}_M (\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h})$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{h}) &= \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} \\ &= \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} \end{aligned}$$

Mínimos Quadrados Ponderados

$$J(\mathbf{h}) \propto (\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h})^T \boldsymbol{\Lambda}_M (\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h})$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{h}) &= \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X}\mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X}\mathbf{h} \\ &= \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X}\mathbf{h} \end{aligned}$$

Calculando o gradiente de $J(\mathbf{h})$ com relação ao vetor de coeficientes \mathbf{h} , temos:

$$\nabla J(\mathbf{h}) \triangleq \frac{\partial J(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = 2\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X}\mathbf{h} - 2\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$$

Mínimos Quadrados Ponderados

$$J(\mathbf{h}) \propto (\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h})^T \boldsymbol{\Lambda}_M (\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h})$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{h}) &= \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} \\ &= \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} \end{aligned}$$

Calculando o gradiente de $J(\mathbf{h})$ com relação ao vetor de coeficientes \mathbf{h} , temos:

$$\nabla J(\mathbf{h}) \triangleq \frac{\partial J(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = 2\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} - 2\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$$

Logo:

$$\nabla J(\mathbf{h}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$$

Mínimos Quadrados Ponderados

$$J(\mathbf{h}) \propto (\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h})^T \boldsymbol{\Lambda}_M (\mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h})$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{h}) &= \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} \\ &= \mathbf{d}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} - \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} + \mathbf{h}^T \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} \end{aligned}$$

Calculando o gradiente de $J(\mathbf{h})$ com relação ao vetor de coeficientes \mathbf{h} , temos:

$$\nabla J(\mathbf{h}) \triangleq \frac{\partial J(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = 2\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} - 2\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$$

Logo:

$$\nabla J(\mathbf{h}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$$

Solução de mínimos quadrados ponderados:

$$\mathbf{h}_{\text{LS}} = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$$

Mínimos Quadrados Ponderados

Solução de mínimos quadrados: $\boldsymbol{h}_{\text{LS}} = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$

Observações:

Mínimos Quadrados Ponderados

Solução de mínimos quadrados: $\boldsymbol{h}_{\text{LS}} = \left(\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{X} \right)^{-1} \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{d}$

Observações:

- A matrix $\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{X}$ é uma média temporal ponderada da matrix de correlação :

$$\boldsymbol{R}_{xx}[k] \propto \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i \boldsymbol{x}[k-i] \boldsymbol{x}^T[k-i] = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{X}.$$

Mínimos Quadrados Ponderados

Solução de mínimos quadrados: $\mathbf{h}_{\text{LS}} = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$

Observações:

- A matrix $\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X}$ é uma média temporal ponderada da matrix de correlação :

$$\mathbf{R}_{xx}[k] \propto \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i \mathbf{x}[k-i] \mathbf{x}^T[k-i] = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X}.$$

- O vetor $\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$ é uma média temporal ponderada do vetor de correlação cruzada:

$$\mathbf{p}_{xd}[k] \propto \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i \mathbf{x}[k-i] \mathbf{d}[k-i] = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$$

Mínimos Quadrados Ponderados

Solução de mínimos quadrados: $\mathbf{h}_{\text{LS}} = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$

Observações:

- A matrix $\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X}$ é uma média temporal ponderada da matrix de correlação :

$$\mathbf{R}_{xx}[k] \propto \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i \mathbf{x}[k-i] \mathbf{x}^T[k-i] = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X}.$$

- O vetor $\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$ é uma média temporal ponderada do vetor de correlação cruzada:

$$\mathbf{p}_{xd}[k] \propto \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i \mathbf{x}[k-i] \mathbf{d}[k-i] = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$$

- Logo, a solução de mínimos quadrados é dada por: $\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k] \mathbf{p}_{xd}[k]$



Mínimos Quadrados Recursivos

Universidade Federal
de Campina Grande

Mínimos Quadrados Recursivos

- O cálculo de $\mathbf{R}_{xx}[k]$ pode ser feito de maneira recursiva:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{xx}[k] &= \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k - 1] \\ &= \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i]\mathbf{x}^T[i]\end{aligned}$$

Mínimos Quadrados Recursivos

- O cálculo de $\mathbf{R}_{xx}[k]$ pode ser feito de maneira recursiva:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{xx}[k] &= \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1] \\ &= \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i]\mathbf{x}^T[i]\end{aligned}$$

- O cálculo da inversa da matrix $\mathbf{R}_{xx}[k]$ possui custo computacional $O(N^3)$.

Mínimos Quadrados Recursivos

- O cálculo de $\mathbf{R}_{xx}[k]$ pode ser feito de maneira recursiva:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{xx}[k] &= \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1] \\ &= \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i]\mathbf{x}^T[i]\end{aligned}$$

- O cálculo da inversa da matrix $\mathbf{R}_{xx}[k]$ possui custo computacional $O(N^3)$.
- A complexidade no cálculo de $\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]$ pode ser reduzida a $O(N^2)$, utilizando-se o lema da inversão de matrizes:

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} [\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}]^{-1} \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}$$

em que $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ são matrizes de dimensões apropriadas, sendo \mathbf{A} e \mathbf{C} não-singulares.



Mínimos Quadrados Recursivos

Universidade Federal
de Campina Grande

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B [DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1} DA^{-1}$$



Mínimos Quadrados Recursivos

Universidade Federal
de Campina Grande

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} [\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}]^{-1} \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1]$$



Mínimos Quadrados Recursivos

Universidade Federal
de Campina Grande

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} [\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}]^{-1} \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1] \quad \mathbf{B} = \mathbf{D}^T = \mathbf{x}[k]$$



Mínimos Quadrados Recursivos

Universidade Federal
de Campina Grande

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} [\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}]^{-1} \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1] \quad \mathbf{B} = \mathbf{D}^T = \mathbf{x}[k] \quad \mathbf{C} = 1$$

Mínimos Quadrados Recursivos

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} [\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}]^{-1} \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1] \quad \mathbf{B} = \mathbf{D}^T = \mathbf{x}[k] \quad \mathbf{C} = 1$$

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}]^{-1} = [\lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]]^{-1} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]$$

Mínimos Quadrados Recursivos

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} [\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}]^{-1} \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1] \quad \mathbf{B} = \mathbf{D}^T = \mathbf{x}[k] \quad \mathbf{C} = 1$$

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}]^{-1} = [\lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]]^{-1} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}^{-1}[k-1]$$

Mínimos Quadrados Recursivos

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} [\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}]^{-1} \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1] \quad \mathbf{B} = \mathbf{D}^T = \mathbf{x}[k] \quad \mathbf{C} = 1$$

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}]^{-1} = [\lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]]^{-1} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}^{-1}[k-1]$$

$$[\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}]^{-1} = \left[\frac{1}{\lambda} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{R}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k] + 1 \right]^{-1}$$



Mínimos Quadrados Recursivos

Universidade Federal
de Campina Grande



Mínimos Quadrados Recursivos

Universidade Federal
de Campina Grande

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B [DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1} DA^{-1}$$

Mínimos Quadrados Recursivos

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B [DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1} DA^{-1}$$

Logo, temos a seguinte expressão para o cálculo recursivo de $\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]$:

$$\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k] = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1] - \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]}{\lambda + \mathbf{x}^T[k]\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{x}[k]} \right]$$

Mínimos Quadrados Recursivos

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} [\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1}]^{-1} \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}$$

Logo, temos a seguinte expressão para o cálculo recursivo de $\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]$:

$$\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k] = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1] - \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]}{\lambda + \mathbf{x}^T[k]\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{x}[k]} \right]$$

- O cálculo do vetor $\mathbf{p}_{xd}[k]$ pode ser feito de maneira recursiva:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{xd}[k] &= \mathbf{x}[k]\mathbf{d}[k] + \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1] \\ &= \mathbf{x}[k]\mathbf{d}[k] + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i]\mathbf{d}[i] \end{aligned}$$

Algoritmo RLS

Algorithm 1 Algoritmo RLS (*Recursive Least Squares*)

- 1: **Entrada:** Sinal desejado $d[k]$, sinal de entrada $x[k]$, fator de esquecimento λ , ordem do filtro N .
- 2: **Iniciar:** Coeficientes do filtro $\mathbf{h} = [0, 0, \dots, 0]^T$ (comprimento N)
- 3: ▷ Podem ser inicializados de maneira arbitrária.
- 4: **Iniciar:** Vetor de correlação cruzada $\mathbf{p}_{xd} = [0, 0, \dots, 0]^T$ (comprimento N)
- 5:
- 6: **Iniciar:** Inversa da matrix de correlação determinística $\mathbf{R}_{xx}^{-1} = \delta \mathbf{I}$
- 7: ▷ Em que δ é um número muito pequeno.
- 8: **for** $k = N$ até $M - 1$ **do** ▷ Onde M é o comprimento do sinal
- 9: Construir o vetor de entrada $\mathbf{x}[k] = [x[k], x[k - 1], \dots, x[k - N + 1]]^T$
- 10: Atualizar \mathbf{R}_{xx}^{-1} :

$$\mathbf{R}_{xx}^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{R}_{xx}^{-1} - \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{x}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{R}_{xx}^{-1}}{\lambda + \mathbf{x}^T[k] \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{x}[k]} \right]$$

- 11: Atualizar \mathbf{p}_{xd} :

$$\mathbf{p}_{xd} = \mathbf{x}[k]d[k] + \lambda \mathbf{p}_{xd}$$

- 12: Atualizar os coeficientes do filtro:

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd}$$

- 13: Calcular o sinal de erro:

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{h}^T \mathbf{x}[k]$$

- 14: **end for**
 - 15: **Saída:** Coeficientes finais do filtro \mathbf{h}
-



Universidade Federal
de Campina Grande

Algoritmo RLS



Universidade Federal
de Campina Grande

Algoritmo RLS

Formulação alternativa do algoritmo RLS: considere $\mathbf{P}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]$.

Algoritmo RLS

Formulação alternativa do algoritmo RLS: considere $\mathbf{P}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]$.

$$\mathbf{P}[k] = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{P}[k-1] - \frac{\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]}{\lambda + \mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]} \right]$$

Algoritmo RLS

Formulação alternativa do algoritmo RLS: considere $\mathbf{P}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]$.

$$\mathbf{P}[k] = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{P}[k-1] - \frac{\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]}{\lambda + \mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]} \right]$$

$$\mathbf{P}[k] = \lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1] - \frac{\lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]\lambda^{-1}\mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]}{1 + \lambda^{-1}\mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]}$$

Algoritmo RLS

Formulação alternativa do algoritmo RLS: considere $\mathbf{P}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]$.

$$\mathbf{P}[k] = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{P}[k-1] - \frac{\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]}{\lambda + \mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]} \right]$$

$$\mathbf{P}[k] = \lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1] - \frac{\lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]\lambda^{-1}\mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]}{1 + \lambda^{-1}\mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]}$$

Ganho de Kalman: $\mathbf{g}[k] = \frac{\lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]}{1 + \lambda^{-1}\mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]}$

Algoritmo RLS

Formulação alternativa do algoritmo RLS: considere $\mathbf{P}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]$.

$$\mathbf{P}[k] = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{P}[k-1] - \frac{\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]}{\lambda + \mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]} \right]$$

$$\mathbf{P}[k] = \lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1] - \frac{\lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]\lambda^{-1}\mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]}{1 + \lambda^{-1}\mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]}$$

Ganho de Kalman: $\mathbf{g}[k] = \frac{\lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]}{1 + \lambda^{-1}\mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]}$

Equação de Riccati: $\mathbf{P}[k] = \lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1] - \lambda^{-1}\mathbf{g}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{P}[k-1]$



Universidade Federal
de Campina Grande

Algoritmo RLS



Universidade Federal
de Campina Grande

Algoritmo RLS

Temos, então:

$$\boldsymbol{g}[k] = \frac{\lambda^{-1} \boldsymbol{P}^{-1}[k-1] \boldsymbol{x}[k]}{1 + \lambda^{-1} \boldsymbol{x}^T[k] \boldsymbol{P}^{-1}[k-1] \boldsymbol{x}[k]}$$

Algoritmo RLS

Temos, então:

$$\mathbf{g}[k] = \frac{\lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]}$$

$$\mathbf{g}[k] + \lambda^{-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k] = \lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]$$

Algoritmo RLS

Temos, então: $\mathbf{g}[k] = \frac{\lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]}$

$$\mathbf{g}[k] + \lambda^{-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k] = \lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]$$

$$\mathbf{g}[k] = \lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k] - \lambda^{-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]$$

Algoritmo RLS

Temos, então: $\mathbf{g}[k] = \frac{\lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]}$

$$\mathbf{g}[k] + \lambda^{-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k] = \lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]$$

$$\mathbf{g}[k] = \lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k] - \lambda^{-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]$$

$$\mathbf{g}[k] = (\lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] - \lambda^{-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1]) \mathbf{x}[k]$$

Algoritmo RLS

Temos, então: $\mathbf{g}[k] = \frac{\lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]}$

$$\mathbf{g}[k] + \lambda^{-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k] = \lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]$$

$$\mathbf{g}[k] = \lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k] - \lambda^{-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]$$

$$\mathbf{g}[k] = \left(\lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] - \lambda^{-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \right) \mathbf{x}[k]$$

$$\mathbf{P}[k] = \lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] - \lambda^{-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1]$$

Algoritmo RLS

Temos, então: $\mathbf{g}[k] = \frac{\lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]}$

$$\mathbf{g}[k] + \lambda^{-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k] = \lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]$$

$$\mathbf{g}[k] = \lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k] - \lambda^{-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \mathbf{x}[k]$$

$$\mathbf{g}[k] = \underbrace{\left(\lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] - \lambda^{-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1] \right)}_{\mathbf{P}[k] = \lambda^{-1} \mathbf{P}^{-1}[k-1] - \lambda^{-1} \mathbf{g}[k] \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}^{-1}[k-1]} \mathbf{x}[k]$$

Portanto: $\mathbf{g}[k] = \mathbf{P}[k] \mathbf{x}[k]$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a priori* $e[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]$$

$$\mathbf{p}_{xd}[k] = \mathbf{x}[k]d[k] + \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a priori* $e[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]$$

$$\mathbf{p}_{xd}[k] = \mathbf{x}[k]d[k] + \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a priori* $e[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]$$

$$\mathbf{p}_{xd}[k] = \mathbf{x}[k]d[k] + \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k] \implies \mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] = \mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a priori* $e[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]$$

$$\mathbf{p}_{xd}[k] = \mathbf{x}[k]d[k] + \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k] \implies \mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] = \mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$(\mathbf{R}_{xx}[k] - \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] = (\mathbf{p}_{xd}[k] - \mathbf{x}[k]d[k])$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a priori* $e[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]$$

$$\mathbf{p}_{xd}[k] = \mathbf{x}[k]d[k] + \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k] \implies \mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] = \mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$(\mathbf{R}_{xx}[k] - \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] = (\mathbf{p}_{xd}[k] - \mathbf{x}[k]d[k])$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] - \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{x}[k]d[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a priori* $e[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]$$

$$\mathbf{p}_{xd}[k] = \mathbf{x}[k]d[k] + \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k] \implies \mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] = \mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$(\mathbf{R}_{xx}[k] - \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] = (\mathbf{p}_{xd}[k] - \mathbf{x}[k]d[k])$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] - \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{x}[k]d[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] - \mathbf{x}[k](y[k] - d[k]) = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a priori* $e[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]$$

$$\mathbf{p}_{xd}[k] = \mathbf{x}[k]d[k] + \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k] \implies \mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] = \mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$(\mathbf{R}_{xx}[k] - \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] = (\mathbf{p}_{xd}[k] - \mathbf{x}[k]d[k])$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] - \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{x}[k]d[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] - \mathbf{x}[k](y[k] - d[k]) = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a priori* $e[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a priori* $e[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{p}_{xd}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a priori* $e[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a priori* $e[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{x}[k]e[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a priori* $e[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{x}[k]e[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{g}[k]e[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a priori* $e[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{x}[k]e[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k]\mathbf{x}[k]e[k]$$

Lembrando que:

$$\mathbf{P}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k].$$

$$\mathbf{g}[k] = \mathbf{P}[k]\mathbf{x}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a priori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Algorithm 1 Algoritmo RLS com erro *a priori*

- 1: **Entrada:** Sinal desejado $d[k]$, sinal de entrada $x[k]$, fator de esquecimento λ , ordem do filtro N .
- 2: **Iniciar:** Coeficientes do filtro $\mathbf{h} = [0, 0, \dots, 0]^T$ (comprimento N)
3: ▷ Podem ser inicializados de maneira arbitrária.
- 4: **Iniciar:** Inversa da matrix de correlação determinística $\mathbf{P} = \delta \mathbf{I}$
5: ▷ Em que δ é um número muito pequeno.
- 6: **for** $k = N$ até $M - 1$ **do** ▷ Onde M é o comprimento do sinal
- 7: Construir o vetor de entrada $\mathbf{x}[k] = [x[k], x[k - 1], \dots, x[k - N + 1]]^T$
- 8: Calcular ganho de Kalman:

$$\mathbf{g} = \frac{\lambda^{-1} \mathbf{P} \mathbf{x}[k]}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P} \mathbf{x}[k]}$$

- 9: Calcular erro a priori: $e[k] = d[k] - \mathbf{h}^T \mathbf{x}[k]$
- 10: Atualizar os coeficientes do filtro: $\mathbf{h} = \mathbf{h} + \mathbf{g} e[k]$
- 11: Atualizar a matriz \mathbf{P} : $\mathbf{P} = \lambda^{-1} \mathbf{P} - \lambda^{-1} \mathbf{g} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}$
- 12: **end for**
- 13: **Saída:** Coeficientes finais do filtro \mathbf{h}

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a posteriori* $\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$:

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a posteriori* $\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a posteriori* $\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$(\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = (\lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1] + \mathbf{x}[k]d[k])$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a posteriori* $\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$(\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = (\lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1] + \mathbf{x}[k]d[k])$$

$$\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{x}[k]d[k] = \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a posteriori* $\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$(\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = (\lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1] + \mathbf{x}[k]d[k])$$

$$\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{x}[k]d[k] = \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{x}[k]\epsilon[k] = \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a posteriori* $\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$(\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = (\lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1] + \mathbf{x}[k]d[k])$$

$$\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{x}[k]d[k] = \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{x}[k]\epsilon[k] = \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{p}_{xd}[k-1] + \lambda^{-1}\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{x}[k]\epsilon[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a posteriori* $\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$(\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = (\lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1] + \mathbf{x}[k]d[k])$$

$$\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{x}[k]d[k] = \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{x}[k]\epsilon[k] = \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{p}_{xd}[k-1] + \lambda^{-1}\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{x}[k]\epsilon[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \lambda^{-1}\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{x}[k]\epsilon[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a posteriori* $\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$(\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = (\lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1] + \mathbf{x}[k]d[k])$$

$$\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{x}[k]d[k] = \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{x}[k]\epsilon[k] = \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{p}_{xd}[k-1] + \lambda^{-1}\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{x}[k]\epsilon[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \lambda^{-1}\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{x}[k]\epsilon[k]$$

Ganho de Kalman alternativo:

$$\tilde{\mathbf{g}}[k] = \lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Atualização dos coeficientes com erro *a posteriori* $\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$(\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k])\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = (\lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1] + \mathbf{x}[k]d[k])$$

$$\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{x}[k]d[k] = \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{x}[k]\epsilon[k] = \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{p}_{xd}[k-1] + \lambda^{-1}\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{x}[k]\epsilon[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \lambda^{-1}\mathbf{R}_{xx}^{-1}[k-1]\mathbf{x}[k]\epsilon[k]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \tilde{\mathbf{g}}[k]\epsilon[k]$$

Ganho de Kalman alternativo:

$$\tilde{\mathbf{g}}[k] = \lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Perceba que as seguintes relações podem ser derivadas:

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Perceba que as seguintes relações podem ser derivadas:

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$$

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \tilde{\mathbf{g}}[k] \epsilon[k]):$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Perceba que as seguintes relações podem ser derivadas:

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$$

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \tilde{\mathbf{g}}[k] \epsilon[k]):$$

$$\epsilon[k] = e[k] - \mathbf{x}^T[k] \tilde{\mathbf{g}}[k] \epsilon[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Perceba que as seguintes relações podem ser derivadas:

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$$

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \tilde{\mathbf{g}}[k] \epsilon[k]):$$

$$\epsilon[k] = e[k] - \mathbf{x}^T[k] \tilde{\mathbf{g}}[k] \epsilon[k]$$

$$\epsilon[k] = \frac{e[k]}{1 + \mathbf{x}^T[k] \tilde{\mathbf{g}}[k]}$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Perceba que as seguintes relações podem ser derivadas:

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$$

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \tilde{\mathbf{g}}[k] \epsilon[k]):$$

$$\epsilon[k] = e[k] - \mathbf{x}^T[k] \tilde{\mathbf{g}}[k] \epsilon[k]$$

$$\epsilon[k] = \frac{e[k]}{1 + \mathbf{x}^T[k] \tilde{\mathbf{g}}[k]}$$

$$\epsilon[k] = \frac{e[k]}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}[k-1] \mathbf{x}[k]}$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Perceba que as seguintes relações podem ser derivadas:

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$$

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \tilde{\mathbf{g}}[k] \epsilon[k]):$$

$$\epsilon[k] = e[k] - \mathbf{x}^T[k] \tilde{\mathbf{g}}[k] \epsilon[k]$$

$$\epsilon[k] = \frac{e[k]}{1 + \mathbf{x}^T[k] \tilde{\mathbf{g}}[k]}$$

$$\epsilon[k] = \frac{e[k]}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}[k-1] \mathbf{x}[k]}$$

Fator de conversão entre erros:

$$\tilde{\alpha}[k] = 1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}[k-1] \mathbf{x}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Perceba que as seguintes relações podem ser derivadas:

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$$

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \tilde{\mathbf{g}}[k] \epsilon[k]):$$

$$\epsilon[k] = e[k] - \mathbf{x}^T[k] \tilde{\mathbf{g}}[k] \epsilon[k]$$

$$\epsilon[k] = \frac{e[k]}{1 + \mathbf{x}^T[k] \tilde{\mathbf{g}}[k]}$$

$$\epsilon[k] = \frac{e[k]}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}[k-1] \mathbf{x}[k]} \implies \epsilon[k] = \frac{e[k]}{\tilde{\alpha}[k]}$$

Fator de conversão entre erros:

$$\tilde{\alpha}[k] = 1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}[k-1] \mathbf{x}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Perceba que as seguintes relações podem ser derivadas:

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]$$

$$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{x}^T[k] (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1] + \tilde{\mathbf{g}}[k] \epsilon[k]):$$

$$\epsilon[k] = e[k] - \mathbf{x}^T[k] \tilde{\mathbf{g}}[k] \epsilon[k]$$

$$\epsilon[k] = \frac{e[k]}{1 + \mathbf{x}^T[k] \tilde{\mathbf{g}}[k]}$$

$$\epsilon[k] = \frac{e[k]}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}[k-1] \mathbf{x}[k]} \implies \epsilon[k] = \frac{e[k]}{\tilde{\alpha}[k]} \implies \mathbf{g}[k] = \frac{\tilde{\mathbf{g}}[k]}{\tilde{\alpha}[k]}$$

Fator de conversão entre erros:

$$\tilde{\alpha}[k] = 1 + \lambda^{-1} \mathbf{x}^T[k] \mathbf{P}[k-1] \mathbf{x}[k]$$

Algoritmo RLS com atualização em função do erro *a posteriori*



Universidade Federal
de Campina Grande

Algorithm 1 Algoritmo RLS com erro *a posteriori*

- 1: **Entrada:** Sinal desejado $d[k]$, sinal de entrada $x[k]$, fator de esquecimento λ , ordem do filtro N .
 - 2: **Iniciar:** Coeficientes do filtro $\mathbf{h} = [0, 0, \dots, 0]^T$ (comprimento N)
 - 3: ▷ Podem ser inicializados de maneira arbitrária.
 - 4: **Iniciar:** Inversa da matrix de correlação determinística $\mathbf{P} = \delta \mathbf{I}$
▷ Em que δ é um número muito pequeno.
 - 5: ▷ Onde M é o comprimento do sinal
 - 6: **for** $k = N$ até $M - 1$ **do** ▷ Construir o vetor de entrada $\mathbf{x}[k] = [x[k], x[k - 1], \dots, x[k - N + 1]]^T$
 - 7: Calcular ganho de Kalman modificado: $\tilde{\mathbf{g}} = \lambda^{-1} \mathbf{P} \mathbf{x}[k]$
 - 8: Calcular erro a priori: $e[k] = d[k] - \mathbf{h}^T \mathbf{x}[k]$
 - 9: Calcular fator de conversão: $\tilde{\alpha} = 1 + \tilde{\mathbf{g}}^T \mathbf{x}[k]$
 - 10: Calcular erro a posteriori: $\epsilon[k] = e[k]/\tilde{\alpha}$
 - 11: Atualizar os coeficientes do filtro: $\mathbf{h} = \mathbf{h} + \tilde{\mathbf{g}} \epsilon[k]$
 - 12: Atualizar a matriz \mathbf{P} : $\mathbf{P} = \lambda^{-1} \mathbf{P} - \lambda^{-1} (\tilde{\mathbf{g}}/\tilde{\alpha}) \mathbf{x}[k]^T \mathbf{P}$
 - 13: **end for**
 - 14: **Saída:** Coeficientes finais do filtro \mathbf{h}
-

Comparativo

RLS	Atualização <i>a priori</i>	Atualização <i>a posteriori</i>
Ganho de Kalman	$\mathbf{g}[k] = \mathbf{P}[k]\mathbf{x}[k]$	$\tilde{\mathbf{g}}[k] = \lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]$
Erro <i>a priori</i>	$e[k] = d[k] - \mathbf{h}^T[k-1]\mathbf{x}[k]$	$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{h}[k]^T\mathbf{x}[k]$
Fator de conversão	$\alpha[k] = 1 - \mathbf{g}[k]^T\mathbf{x}[k]$	$\tilde{\alpha}[k] = 1 + \tilde{\mathbf{g}}^T[k]\mathbf{x}[k]$
Erro <i>a posteriori</i>	$\epsilon[k] = \alpha[k]e[k]$	$\epsilon[k] = \tilde{\alpha}^{-1}[k]e[k]$
Atualização de \mathbf{h}	$\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{g}[k]e[k]$	$\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k-1] + \tilde{\mathbf{g}}[k]\epsilon[k]$

Comparativo

RLS	Atualização <i>a priori</i>	Atualização <i>a posteriori</i>
Ganho de Kalman	$\mathbf{g}[k] = \mathbf{P}[k]\mathbf{x}[k]$	$\tilde{\mathbf{g}}[k] = \lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]$
Erro <i>a priori</i>	$e[k] = d[k] - \mathbf{h}^T[k-1]\mathbf{x}[k]$	$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{h}[k]^T\mathbf{x}[k]$
Fator de conversão	$\alpha[k] = 1 - \mathbf{g}[k]^T\mathbf{x}[k]$	$\tilde{\alpha}[k] = 1 + \tilde{\mathbf{g}}^T[k]\mathbf{x}[k]$
Erro <i>a posteriori</i>	$\epsilon[k] = \alpha[k]e[k]$	$\epsilon[k] = \tilde{\alpha}^{-1}[k]e[k]$
Atualização de \mathbf{h}	$\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{g}[k]e[k]$	$\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k-1] + \tilde{\mathbf{g}}[k]\epsilon[k]$

Observações:

Comparativo

RLS	Atualização <i>a priori</i>	Atualização <i>a posteriori</i>
Ganho de Kalman	$\mathbf{g}[k] = \mathbf{P}[k]\mathbf{x}[k]$	$\tilde{\mathbf{g}}[k] = \lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]$
Erro <i>a priori</i>	$e[k] = d[k] - \mathbf{h}^T[k-1]\mathbf{x}[k]$	$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{h}[k]^T\mathbf{x}[k]$
Fator de conversão	$\alpha[k] = 1 - \mathbf{g}[k]^T\mathbf{x}[k]$	$\tilde{\alpha}[k] = 1 + \tilde{\mathbf{g}}^T[k]\mathbf{x}[k]$
Erro <i>a posteriori</i>	$\epsilon[k] = \alpha[k]e[k]$	$\epsilon[k] = \tilde{\alpha}^{-1}[k]e[k]$
Atualização de \mathbf{h}	$\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{g}[k]e[k]$	$\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k-1] + \tilde{\mathbf{g}}[k]\epsilon[k]$

Observações:

- A complexidade computacional do algoritmo RLS é $O(N^2)$.

Comparativo

RLS	Atualização <i>a priori</i>	Atualização <i>a posteriori</i>
Ganho de Kalman	$\mathbf{g}[k] = \mathbf{P}[k]\mathbf{x}[k]$	$\tilde{\mathbf{g}}[k] = \lambda^{-1}\mathbf{P}[k-1]\mathbf{x}[k]$
Erro <i>a priori</i>	$e[k] = d[k] - \mathbf{h}^T[k-1]\mathbf{x}[k]$	$\epsilon[k] = d[k] - \mathbf{h}[k]^T\mathbf{x}[k]$
Fator de conversão	$\alpha[k] = 1 - \mathbf{g}[k]^T\mathbf{x}[k]$	$\tilde{\alpha}[k] = 1 + \tilde{\mathbf{g}}^T[k]\mathbf{x}[k]$
Erro <i>a posteriori</i>	$\epsilon[k] = \alpha[k]e[k]$	$\epsilon[k] = \tilde{\alpha}^{-1}[k]e[k]$
Atualização de \mathbf{h}	$\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{g}[k]e[k]$	$\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}[k-1] + \tilde{\mathbf{g}}[k]\epsilon[k]$

Observações:

- A complexidade computacional do algoritmo RLS é $O(N^2)$.
- Existem versões rápidas do algoritmo RLS (fast RLS), nas quais as propriedades de simetria e redundância são utilizadas para reduzir a complexidade a $O(7N)$.

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Princípio da ortogonalidade: o vetor de erros e os vetores de entrada $x[k]$ são ortogonais.

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Princípio da ortogonalidade: o vetor de erros e os vetores de entrada $x[k]$ são ortogonais.

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon [k] \\ \epsilon [k - 1] \\ \vdots \\ \epsilon [k - M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Princípio da ortogonalidade: o vetor de erros e os vetores de entrada $\mathbf{x}[k]$ são ortogonais.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Princípio da ortogonalidade: o vetor de erros e os vetores de entrada $\mathbf{x}[k]$ são ortogonais.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Princípio da ortogonalidade: o vetor de erros e os vetores de entrada $\mathbf{x}[k]$ são ortogonais.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

$$\Lambda_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda^{M-2} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^{M-1} \end{bmatrix}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Princípio da ortogonalidade: o vetor de erros e os vetores de entrada $\mathbf{x}[k]$ são ortogonais.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \boldsymbol{\Lambda}_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda^{M-2} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^{M-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Princípio da ortogonalidade: o vetor de erros e os vetores de entrada $\mathbf{x}[k]$ são ortogonais.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \boldsymbol{\Lambda}_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda^{M-2} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^{M-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} \quad \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h} - \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Princípio da ortogonalidade: o vetor de erros e os vetores de entrada $\mathbf{x}[k]$ são ortogonais.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \Lambda_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda^{M-2} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^{M-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{X} \mathbf{h} = \mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{d} \quad \mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{X} \mathbf{h} - \mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}^T \Lambda_M (\mathbf{X} \mathbf{h} - \mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Princípio da ortogonalidade: o vetor de erros e os vetores de entrada $\mathbf{x}[k]$ são ortogonais.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

Vetor de erros *a posteriori*:
 $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \Lambda_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda^{M-2} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^{M-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{X} \mathbf{h} = \mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{d} \quad \mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{X} \mathbf{h} - \mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}^T \Lambda_M (\mathbf{X} \mathbf{h} - \mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Princípio da ortogonalidade: o vetor de erros e os vetores de entrada $\mathbf{x}[k]$ são ortogonais.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

Vetor de erros *a posteriori*:
 $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \Lambda_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda^{M-2} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^{M-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{X} \mathbf{h} = \mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{d} \quad \mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{X} \mathbf{h} - \mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}^T \Lambda_M (\mathbf{X} \mathbf{h} - \mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{X}^T \Lambda_M (-\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Princípio da ortogonalidade: o vetor de erros e os vetores de entrada $\mathbf{x}[k]$ são ortogonais.

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon[k] \\ \epsilon[k-1] \\ \vdots \\ \epsilon[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[k] \\ \mathbf{x}^T[k-1] \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T[k-M] \end{bmatrix}_{M \times N}$$

Vetor de erros *a posteriori*:
 $\epsilon = \mathbf{d} - \mathbf{X}\mathbf{h}$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d[k] \\ d[k-1] \\ \vdots \\ d[k-M] \end{bmatrix}_{M \times 1} \quad \Lambda_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda^{M-2} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^{M-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{X} \mathbf{h} = \mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{d} \quad \mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{X} \mathbf{h} - \mathbf{X}^T \Lambda_M \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}^T \Lambda_M (\mathbf{X} \mathbf{h} - \mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{X}^T \Lambda_M (-\epsilon) = \mathbf{0} \implies \mathbf{X}^T \epsilon = \mathbf{0}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Relação entre a solução de mínimos quadrados e a solução de Wiener:

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}} = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} \quad \boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] = \boldsymbol{R}_{xx}^{-1}[k] \boldsymbol{p}_{xd}[k]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Relação entre a solução de mínimos quadrados e a solução de Wiener:

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}} = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} \quad \boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] = \boldsymbol{R}_{xx}^{-1}[k] \boldsymbol{p}_{xd}[k]$$

- A matrix $\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X}$ é uma média temporal ponderada da matrix de correlação:

$$\boldsymbol{R}_{xx}[k] \propto \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i \mathbf{x}[k-i] \mathbf{x}^T[k-i] = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X}.$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Relação entre a solução de mínimos quadrados e a solução de Wiener:

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}} = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} \quad \boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k] \mathbf{p}_{xd}[k]$$

- A matrix $\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X}$ é uma média temporal ponderada da matrix de correlação:

$$\mathbf{R}_{xx}[k] \propto \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i \mathbf{x}[k-i] \mathbf{x}^T[k-i] = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X}.$$

- O vetor $\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$ é uma média temporal ponderada do vetor de correlação cruzada:

$$\mathbf{p}_{xd}[k] \propto \sum_{i=0}^{M-1} \lambda^i \mathbf{x}[k-i] d[k-i] = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Portanto, a solução de mínimos quadrados converge para a solução de Wiener se os sinais envolvidos forem ergódicos e estacionários:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k] \mathbf{p}_{xd}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{p}_{xd} = \mathbf{h}_{\text{opt}}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Considere que o sinal de referência $d[k]$ pode ser representado por um processo média móvel, perturbado por ruído aditivo gaussiano:

$$d[k] = \mathbf{h}_0^T \mathbf{x}[k] + n[k] = \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}_0 + n[k]$$

em que \mathbf{h}_0 é um vetor de parâmetros fixo e $n[k]$ é uma variável aleatória gaussiana com média nula e variância σ_n^2 .

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Considere que o sinal de referência $d[n]$ pode ser representado por um processo média móvel, perturbado por ruído aditivo gaussiano:

$$d[k] = \mathbf{h}_0^T \mathbf{x}[k] + n[k] = \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}_0 + n[k]$$

em que \mathbf{h}_0 é um vetor de parâmetros fixo e $n[k]$ é uma variável aleatória gaussiana com média nula e variância σ_n^2 .

- Desse modo: $\mathbf{d} = \mathbf{X}\mathbf{h}_0 + \mathbf{n}$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Considere que o sinal de referência $d[k]$ pode ser representado por um processo média móvel, perturbado por ruído aditivo gaussiano:

$$d[k] = \mathbf{h}_0^T \mathbf{x}[k] + n[k] = \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}_0 + n[k]$$

em que \mathbf{h}_0 é um vetor de parâmetros fixo e $n[k]$ é uma variável aleatória gaussiana com média nula e variância σ_n^2 .

- Desse modo: $\mathbf{d} = \mathbf{X}\mathbf{h}_0 + \mathbf{n}$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} \right]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Considere que o sinal de referência $d[k]$ pode ser representado por um processo média móvel, perturbado por ruído aditivo gaussiano:

$$d[k] = \mathbf{h}_0^T \mathbf{x}[k] + n[k] = \mathbf{x}^T[k] \mathbf{h}_0 + n[k]$$

em que \mathbf{h}_0 é um vetor de parâmetros fixo e $n[k]$ é uma variável aleatória gaussiana com média nula e variância σ_n^2 .

- Desse modo: $\mathbf{d} = \mathbf{X}\mathbf{h}_0 + \mathbf{n}$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d} \right]$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M (\mathbf{X}\mathbf{h}_0 + \mathbf{n}) \right]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M (\mathbf{X} \mathbf{h}_0 + \mathbf{n}) \right]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M (\mathbf{X} \mathbf{h}_0 + \mathbf{n}) \right]$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h}_0 + \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{n} \right]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M (\mathbf{X} \mathbf{h}_0 + \mathbf{n}) \right]$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h}_0 + \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{n} \right]$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h}_0 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{n} \right]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M (\mathbf{X} \mathbf{h}_0 + \mathbf{n}) \right]$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h}_0 + \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{n} \right]$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h}_0 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{n} \right]$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} [\mathbf{h}_0] + \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \right] \mathbb{E}[\mathbf{n}]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M (\mathbf{X} \mathbf{h}_0 + \mathbf{n}) \right]$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h}_0 + \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{n} \right]$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h}_0 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{n} \right]$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} [\mathbf{h}_0] + \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \right] \mathbb{E}[\mathbf{n}] \implies \mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbf{h}_0$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M (\mathbf{X} \mathbf{h}_0 + \mathbf{n}) \right]$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h}_0 + \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{n} \right]$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h}_0 \right] + \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{n} \right]$$

$$\mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbb{E}[\mathbf{h}_0] + \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{n} \right] \mathbb{E}[\mathbf{n}] \implies \mathbb{E}[\mathbf{h}_{\text{LS}}] = \mathbf{h}_0$$

- Desse modo, se \mathbf{n} possui média nula e é descorrelacionado de \mathbf{X} , então \mathbf{h}_{LS} é um estimador não enviesado de \mathbf{h}_0 .

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Considere o erro de estimação $\Delta h[k]$ no instante k , dado por,

$$\Delta h[k] = h_{\text{LS}}[k] - h_0$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Considere o erro de estimação $\Delta h[k]$ no instante k , dado por,

$$\Delta h[k] = h_{\text{LS}}[k] - h_0$$

$$p_{xd}[k] = x[k]d[k] + \lambda p_{xd}[k-1]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Considere o erro de estimação $\Delta h[k]$ no instante k , dado por,

$$\Delta h[k] = h_{\text{LS}}[k] - h_0$$

$$p_{xd}[k] = x[k]d[k] + \lambda p_{xd}[k-1] \quad R_{xx}[k]h_{\text{LS}}[k] = p_{xd}[k]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Considere o erro de estimação $\Delta\mathbf{h}[k]$ no instante k , dado por,

$$\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_0$$

$$\mathbf{p}_{xd}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{d}[k] + \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1] \quad \mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{d}[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Considere o erro de estimacão $\Delta\mathbf{h}[k]$ no instante k , dado por,

$$\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_0$$

$$\mathbf{p}_{xd}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{d}[k] + \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1] \quad \mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{d}[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k](\Delta\mathbf{h}[k] + \mathbf{h}_0) = \mathbf{x}[k]\mathbf{d}[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1](\Delta\mathbf{h}[k-1] + \mathbf{h}_0)$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Considere o erro de estimativa $\Delta\mathbf{h}[k]$ no instante k , dado por,

$$\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_0$$

$$\mathbf{p}_{xd}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{d}[k] + \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1] \quad \mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{d}[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k](\Delta\mathbf{h}[k] + \mathbf{h}_0) = \mathbf{x}[k]\mathbf{d}[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1](\Delta\mathbf{h}[k-1] + \mathbf{h}_0)$$

Seja o erro mínimo no instante k definido por: $e_o[k] = \mathbf{d}[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_0$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Considere o erro de estimativa $\Delta\mathbf{h}[k]$ no instante k , dado por,

$$\Delta\mathbf{h}[k] = \mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_0$$

$$\mathbf{p}_{xd}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{d}[k] + \lambda\mathbf{p}_{xd}[k-1] \quad \mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{p}_{xd}[k]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{d}[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1]\mathbf{h}_{\text{LS}}[k-1]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k](\Delta\mathbf{h}[k] + \mathbf{h}_0) = \mathbf{x}[k]\mathbf{d}[k] + \lambda\mathbf{R}_{xx}[k-1](\Delta\mathbf{h}[k-1] + \mathbf{h}_0)$$

Seja o erro mínimo no instante k definido por: $e_o[k] = \mathbf{d}[k] - \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_0$

$$\mathbf{d}[k] = e_o[k] + \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_0$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

Substituindo $d[k]$, temos:

$$\mathbf{R}_{xx}[k](\Delta \mathbf{h}[k] + \mathbf{h}_0) = \mathbf{x}[k](e_o[k] + \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_0) + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1](\Delta \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{h}_0)$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

Substituindo $d[k]$, temos:

$$\mathbf{R}_{xx}[k](\Delta \mathbf{h}[k] + \mathbf{h}_0) = \mathbf{x}[k](e_o[k] + \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_0) + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1](\Delta \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{h}_0)$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k](\Delta \mathbf{h}[k] + \mathbf{h}_0) = \mathbf{x}[k]e_o[k] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_0 + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1](\Delta \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{h}_0)$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

Substituindo $d[k]$, temos:

$$\mathbf{R}_{xx}[k](\Delta \mathbf{h}[k] + \mathbf{h}_0) = \mathbf{x}[k](e_o[k] + \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_0) + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1](\Delta \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{h}_0)$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k](\Delta \mathbf{h}[k] + \mathbf{h}_0) = \mathbf{x}[k]e_o[k] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_0 + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1](\Delta \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{h}_0)$$

Sabemos que: $\mathbf{R}_{xx}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1]$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

Substituindo $d[k]$, temos:

$$\mathbf{R}_{xx}[k](\Delta \mathbf{h}[k] + \mathbf{h}_0) = \mathbf{x}[k](e_o[k] + \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_0) + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1](\Delta \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{h}_0)$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k](\Delta \mathbf{h}[k] + \mathbf{h}_0) = \mathbf{x}[k]e_o[k] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_0 + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1](\Delta \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{h}_0)$$

Sabemos que: $\mathbf{R}_{xx}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1]$

Logo:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\Delta \mathbf{h}[k] = \mathbf{x}[k]e_o[k] + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1]\Delta \mathbf{h}[k-1]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

Substituindo $d[k]$, temos:

$$\mathbf{R}_{xx}[k](\Delta \mathbf{h}[k] + \mathbf{h}_0) = \mathbf{x}[k](e_o[k] + \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_0) + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1](\Delta \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{h}_0)$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k](\Delta \mathbf{h}[k] + \mathbf{h}_0) = \mathbf{x}[k]e_o[k] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_0 + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1](\Delta \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{h}_0)$$

Sabemos que: $\mathbf{R}_{xx}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1]$

Logo:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\Delta \mathbf{h}[k] = \mathbf{x}[k]e_o[k] + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1]\Delta \mathbf{h}[k-1]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\Delta \mathbf{h}[k] = \lambda^{k+1} \mathbf{R}_{xx}[-1]\Delta \mathbf{h}[-1] + \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i]e_o[i]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

Substituindo $d[k]$, temos:

$$\mathbf{R}_{xx}[k](\Delta \mathbf{h}[k] + \mathbf{h}_0) = \mathbf{x}[k](e_o[k] + \mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_0) + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1](\Delta \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{h}_0)$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k](\Delta \mathbf{h}[k] + \mathbf{h}_0) = \mathbf{x}[k]e_o[k] + \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k]\mathbf{h}_0 + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1](\Delta \mathbf{h}[k-1] + \mathbf{h}_0)$$

Sabemos que: $\mathbf{R}_{xx}[k] = \mathbf{x}[k]\mathbf{x}^T[k] + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1]$

Logo:

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\Delta \mathbf{h}[k] = \mathbf{x}[k]e_o[k] + \lambda \mathbf{R}_{xx}[k-1]\Delta \mathbf{h}[k-1]$$

$$\mathbf{R}_{xx}[k]\Delta \mathbf{h}[k] = \lambda^{k+1} \mathbf{R}_{xx}[-1]\Delta \mathbf{h}[-1] + \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i]e_o[i]$$

$$\Delta \mathbf{h}[k] = \lambda^{k+1} \mathbf{P}[k] \mathbf{R}_{xx}[-1]\Delta \mathbf{h}[-1] + \mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i]e_o[i]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\mathbb{E}[\Delta \mathbf{h}[k]] = \mathbb{E} [\lambda^{k+1} \mathbf{P}[k] \mathbf{R}_{xx}[-1] \Delta \mathbf{h}[-1]] + \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i] e_o[i] \right]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta \mathbf{h}[k]] &= \mathbb{E} \left[\lambda^{k+1} \mathbf{P}[k] \mathbf{R}_{xx}[-1] \Delta \mathbf{h}[-1] \right] + \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i] e_o[i] \right] \\ \mathbb{E}[\Delta \mathbf{h}[k]] &= \lambda^{k+1} \mathbb{E} [\mathbf{P}[k]] \frac{1}{\delta} \mathbf{I} \Delta \mathbf{h}[-1] + \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i] e_o[i] \right]\end{aligned}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta \mathbf{h}[k]] &= \mathbb{E} \left[\lambda^{k+1} \mathbf{P}[k] \mathbf{R}_{xx}[-1] \Delta \mathbf{h}[-1] \right] + \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i] e_o[i] \right] \\ \mathbb{E}[\Delta \mathbf{h}[k]] &= \lambda^{k+1} \mathbb{E} [\mathbf{P}[k]] \frac{1}{\delta} \mathbf{I} \Delta \mathbf{h}[-1] + \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i] e_o[i] \right]\end{aligned}$$

Observações:

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta \mathbf{h}[k]] &= \mathbb{E} [\lambda^{k+1} \mathbf{P}[k] \mathbf{R}_{xx}[-1] \Delta \mathbf{h}[-1]] + \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i] e_o[i] \right] \\ \mathbb{E}[\Delta \mathbf{h}[k]] &= \lambda^{k+1} \mathbb{E} [\mathbf{P}[k]] \frac{1}{\delta} \mathbf{I} \Delta \mathbf{h}[-1] + \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i] e_o[i] \right]\end{aligned}$$

Observações:

- A matrix $\mathbf{P}[k]$ tende a se tornar relativamente invariante quando o número de iterações k aumenta, uma vez que $\mathbf{P}[k]$ depende de todas as entradas $\mathbf{x}[k]$ passadas; $\mathbf{x}[k]$ e $e_o[k]$ podem ser considerados descorrelacionados (princípio da ortogonalidade). Logo, $\mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i] e_o[i] \right] \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta \mathbf{h}[k]] &= \mathbb{E} [\lambda^{k+1} \mathbf{P}[k] \mathbf{R}_{xx}[-1] \Delta \mathbf{h}[-1]] + \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i] e_o[i] \right] \\ \mathbb{E}[\Delta \mathbf{h}[k]] &= \lambda^{k+1} \mathbb{E} [\mathbf{P}[k]] \frac{1}{\delta} \mathbf{I} \Delta \mathbf{h}[-1] + \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i] e_o[i] \right]\end{aligned}$$

Observações:

- A matrix $\mathbf{P}[k]$ tende a se tornar relativamente invariante quando o número de iterações k aumenta, uma vez que $\mathbf{P}[k]$ depende de todas as entradas $\mathbf{x}[k]$ passadas; $\mathbf{x}[k]$ e $e_o[k]$ podem ser considerados descorrelacionados (princípio da ortogonalidade). Logo, $\mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i] e_o[i] \right] \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.
- $\frac{\lambda^{k+1}}{\delta} \mathbb{E} [\mathbf{P}[k]] \Delta \mathbf{h}[-1] \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Delta \mathbf{h}[k]] &= \mathbb{E} [\lambda^{k+1} \mathbf{P}[k] \mathbf{R}_{xx}[-1] \Delta \mathbf{h}[-1]] + \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i] e_o[i] \right] \\ \mathbb{E}[\Delta \mathbf{h}[k]] &= \lambda^{k+1} \mathbb{E} [\mathbf{P}[k]] \frac{1}{\delta} \mathbf{I} \Delta \mathbf{h}[-1] + \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i] e_o[i] \right]\end{aligned}$$

Observações:

- A matrix $\mathbf{P}[k]$ tende a se tornar relativamente invariante quando o número de iterações k aumenta, uma vez que $\mathbf{P}[k]$ depende de todas as entradas $\mathbf{x}[k]$ passadas; $\mathbf{x}[k]$ e $e_o[k]$ podem ser considerados descorrelacionados (princípio da ortogonalidade). Logo, $\mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \sum_{i=0}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}[i] e_o[i] \right] \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.
- $\frac{\lambda^{k+1}}{\delta} \mathbb{E} [\mathbf{P}[k]] \Delta \mathbf{h}[-1] \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$.
- Portanto, $\mathbb{E}[\Delta \mathbf{h}[k]] \rightarrow \mathbf{0}$ de maneira relativamente independente dos autovalores da matrix de correlação \mathbf{R}_{xx} .

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Covariância do o erro de estimação $\Delta\mathbf{h}[k]$:

$$\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]] = \mathbb{E} \left[(\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o) (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o)^T \right]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Covariância do o erro de estimação $\Delta\mathbf{h}[k]$:

$$\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]] = \mathbb{E} \left[(\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o) (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o)^T \right]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k] \mathbf{p}_{xd}[k] \quad \mathbf{P}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k].$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Covariância do o erro de estimação $\Delta\mathbf{h}[k]$:

$$\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]] = \mathbb{E} \left[(\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o) (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o)^T \right]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k] \mathbf{p}_{xd}[k] \quad \mathbf{P}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k].$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \mathbf{P}[k] \mathbf{p}_{xd}[k] - \mathbf{P}[k] \mathbf{P}^{-1}[k] \mathbf{h}_o$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Covariância do o erro de estimação $\Delta\mathbf{h}[k]$:

$$\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]] = \mathbb{E} \left[(\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o) (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o)^T \right]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k] \mathbf{p}_{xd}[k] \quad \mathbf{P}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k].$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \mathbf{P}[k] \mathbf{p}_{xd}[k] - \mathbf{P}[k] \mathbf{P}^{-1}[k] \mathbf{h}_o$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \mathbf{P}[k] (\mathbf{p}_{xd}[k] - \mathbf{P}^{-1}[k] \mathbf{h}_o)$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Covariância do o erro de estimação $\Delta\mathbf{h}[k]$:

$$\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]] = \mathbb{E} \left[(\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o) (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o)^T \right]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k] \mathbf{p}_{xd}[k] \quad \mathbf{P}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k].$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \mathbf{P}[k] \mathbf{p}_{xd}[k] - \mathbf{P}[k] \mathbf{P}^{-1}[k] \mathbf{h}_o$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \mathbf{P}[k] (\mathbf{p}_{xd}[k] - \mathbf{P}^{-1}[k] \mathbf{h}_o)$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}[k] - \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h}_o)$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Covariância do o erro de estimação $\Delta\mathbf{h}[k]$:

$$\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]] = \mathbb{E} \left[(\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o) (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o)^T \right]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k] \mathbf{p}_{xd}[k] \quad \mathbf{P}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k].$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \mathbf{P}[k] \mathbf{p}_{xd}[k] - \mathbf{P}[k] \mathbf{P}^{-1}[k] \mathbf{h}_o$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \mathbf{P}[k] (\mathbf{p}_{xd}[k] - \mathbf{P}^{-1}[k] \mathbf{h}_o)$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}[k] - \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h}_o)$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M (\mathbf{d}[k] - \mathbf{X} \mathbf{h}_o)$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

- Covariância do o erro de estimação $\Delta\mathbf{h}[k]$:

$$\text{cov}[\Delta\mathbf{h}[k]] = \mathbb{E} \left[(\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o) (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o)^T \right]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k] \mathbf{p}_{xd}[k] \quad \mathbf{P}[k] = \mathbf{R}_{xx}^{-1}[k].$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \mathbf{P}[k] \mathbf{p}_{xd}[k] - \mathbf{P}[k] \mathbf{P}^{-1}[k] \mathbf{h}_o$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \mathbf{P}[k] (\mathbf{p}_{xd}[k] - \mathbf{P}^{-1}[k] \mathbf{h}_o)$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{d}[k] - \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{h}_o)$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M (\mathbf{d}[k] - \mathbf{X} \mathbf{h}_o)$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{n}[k]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \left(\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{X} \right)^{-1} \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \boldsymbol{P}[k] \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \boldsymbol{P}[k] \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

$$\text{cov}[\Delta \boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k]] = \mathbb{E} \left[(\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o) (\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o)^T \right]$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \left(\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{X} \right)^{-1} \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[\Delta \boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k]] &= \mathbb{E} \left[(\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o) (\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o)^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k] \right) \left(\boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k] \right)^T \right] \end{aligned}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \left(\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{X} \right)^{-1} \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[\Delta \boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k]] &= \mathbb{E} \left[(\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o) (\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o)^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k] \right) \left(\boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k] \right)^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k] \boldsymbol{n}^T[k] \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{X} \boldsymbol{P}^T[k] \right] \end{aligned}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \left(\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{X} \right)^{-1} \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[\Delta \boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k]] &= \mathbb{E} \left[(\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o) (\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o)^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k] \right) \left(\boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k] \right)^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k] \boldsymbol{n}^T[k] \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{X} \boldsymbol{P}^T[k] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbb{E} [\boldsymbol{n}[k] \boldsymbol{n}^T[k]] \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{X} \boldsymbol{P}^T[k] \right] \end{aligned}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \left(\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{X} \right)^{-1} \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[\Delta \boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k]] &= \mathbb{E} \left[(\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o) (\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o)^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k] \right) \left(\boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k] \right)^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k] \boldsymbol{n}^T[k] \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{X} \boldsymbol{P}^T[k] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbb{E} [\boldsymbol{n}[k] \boldsymbol{n}^T[k]] \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{X} \boldsymbol{P}^T[k] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\boldsymbol{P}[k] \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \sigma_n^2 \boldsymbol{I}_M \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{X} \boldsymbol{P}^T[k] \right] \end{aligned}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \left(\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

$$\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o = \mathbf{P}[k] \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k]$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[\Delta \boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k]] &= \mathbb{E} \left[(\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o) (\boldsymbol{h}_{\text{LS}}[k] - \boldsymbol{h}_o)^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\mathbf{P}[k] \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k] \right) \left(\mathbf{P}[k] \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k] \right)^T \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{n}[k] \boldsymbol{n}^T[k] \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{P}^T[k] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbb{E} [\boldsymbol{n}[k] \boldsymbol{n}^T[k]] \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{P}^T[k] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{P}^T[k] \right] \\ &= \sigma_n^2 \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Lambda}_M \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{X} \mathbf{P}^T[k] \right] \end{aligned}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\begin{aligned}\text{cov}[\Delta \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]] &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o) (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o)^T \right] \\ &= \sigma_n^2 \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \mathbf{P}[k]^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{P}^T[k] \right]\end{aligned}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\begin{aligned}\text{cov}[\Delta \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]] &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o) (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o)^T \right] \\ &= \sigma_n^2 \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \mathbf{P}[k]^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{P}^T[k] \right] \\ &= \sigma_n^2 \mathbb{E} [\boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{P}[k]]\end{aligned}$$

Propriedades da solução de mínimos quadrados



Universidade Federal
de Campina Grande

$$\begin{aligned}\text{cov}[\Delta \mathbf{h}_{\text{LS}}[k]] &= \mathbb{E} \left[(\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o) (\mathbf{h}_{\text{LS}}[k] - \mathbf{h}_o)^T \right] \\ &= \sigma_n^2 \mathbb{E} \left[\mathbf{P}[k] \mathbf{P}[k]^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{P}^T[k] \right] \\ &= \sigma_n^2 \mathbb{E} [\boldsymbol{\Lambda}_M \mathbf{P}[k]]\end{aligned}$$

Observações:

- Portanto, a matriz de covariância do vetor de erro dos coeficientes tende a diminuir sua norma à medida que o tempo avança, uma vez que $\mathbf{P}[k]$ também é normativamente decrescente.
- A variância do ruído aditivo $\mathbf{n}[k]$ influencia diretamente a norma da matriz de covariância.